

3. 분포수렴, 누적분포함수, 확률밀도함수

분포수렴은 누적분포함수(CDF)를 통해 정의됩니다. 확률밀도함수(PDF)는 특정 값에서의 확률밀도를 나타내므로, 전체 분포의 변화를 설명할 수 없어 분포수렴을 정의할 수 없습니다.

분포수렴 정의

분포수렴은 확률변수들의 시퀀스 X_n 이 특정 확률변수 X 의 분포로 수렴하는 현상을 의미합니다. 이는 다음과 같이 CDF를 통해 정의됩니다:

$$F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

여기서 $F_{X_n}(x)$ 는 X_n 의 누적분포함수, $F_X(x)$ 는 X 의 누적분포함수입니다.

왜 CDF를 사용해야 하나?

CDF는 누적된 확률을 나타내므로, 전체 분포에 대한 정보를 제공합니다.

반례: Dirac 델타 함수

PDF로 분포수렴을 정의할 수 없는 이유를 Dirac 델타 함수 $\delta(x)$ 를 통해 설명할 수 있습니다. 예를 들어, 확률변수 X_n 이 특정 값 a 로 수렴한다고 가정합니다. 각 X_n 의 PDF는 다음과 같습니다:

$$f_{X_n}(x) = \delta(x - a)$$

이 경우, PDF는 특정 점 a 에서만 값을 가지므로, 전체적인 분포의 변화를 설명하지 못합니다. 따라서 PDF를 통해 분포수렴을 정의하는 것은 적절하지 않습니다.