4. MGF 를이용한중심극한정리 (CLT) 증명

중심극한정리는독립이고동일하게분포된랜덤변수들의합이정규분포로수렴한다는이론입니다. 이를 MGF 를이용해증명합니다.

MGF 정의

확률변수 X 의 MGF $M_X(t)$ 는다음과같이정의됩니다:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

중심극한정리증명

1. 기본설정: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 은평균이 μ, 분산이 σ^2 인독립동일분포 (i.i.d.) 를따르는확률변수입니다.

2. 표준화된합: 표준화된합 Z_n 은다음과같이정의됩니다:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

3. **MGF** 계산: Z_n 의 MGF $M_{Z_n}(t)$ 를계산합니다.

$$M_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{tZ_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)}\right]$$

4. 테일러전개: X_i 의 MGF $M_X(t)$ 를테일러전개합니다.

$$M_X(t) = 1 + t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2)$$

5. 표준화된합의 **MGF**: Z_n 의 MGF 를각 X_i 의 MGF 로표현합니다.

$$M_{Z_n}(t) = \left(M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n$$

6. 로그를취해근사:

$$\log M_{Z_n}(t) = n \log\left(1 + \frac{t\mu}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{t^2}{2n}\right)$$

7. 로그근사적용:

$$\log M_{Z_n}(t) \approx n\left(\frac{t\mu}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{t^2}{2n}\right)$$

8. 단순화:

$$\log M_{Z_n}(t) \approx \frac{t^2}{2}$$

9. 결론: 따라서, Z_n 의 MGF 는정규분포의 MGF 로수렴합니다.

$$M_{Z_n}(t) \to e^{\frac{t^2}{2}}$$

이로써 Z_n 은표준정규분포 $N(0,1)$ 로수렴함을증명합니다.