

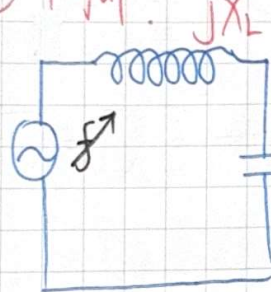
# CH11 諧振.

共振頻率: 在物理系統中, 存在一特定頻率, 會使物體振幅達到最大.

諧振頻率: L 與 C 互相收放, 能量彼此不斷地交換.

## 11-1 串聯諧振電路.

LC 串聯.



$$X_L = 2\pi fL.$$

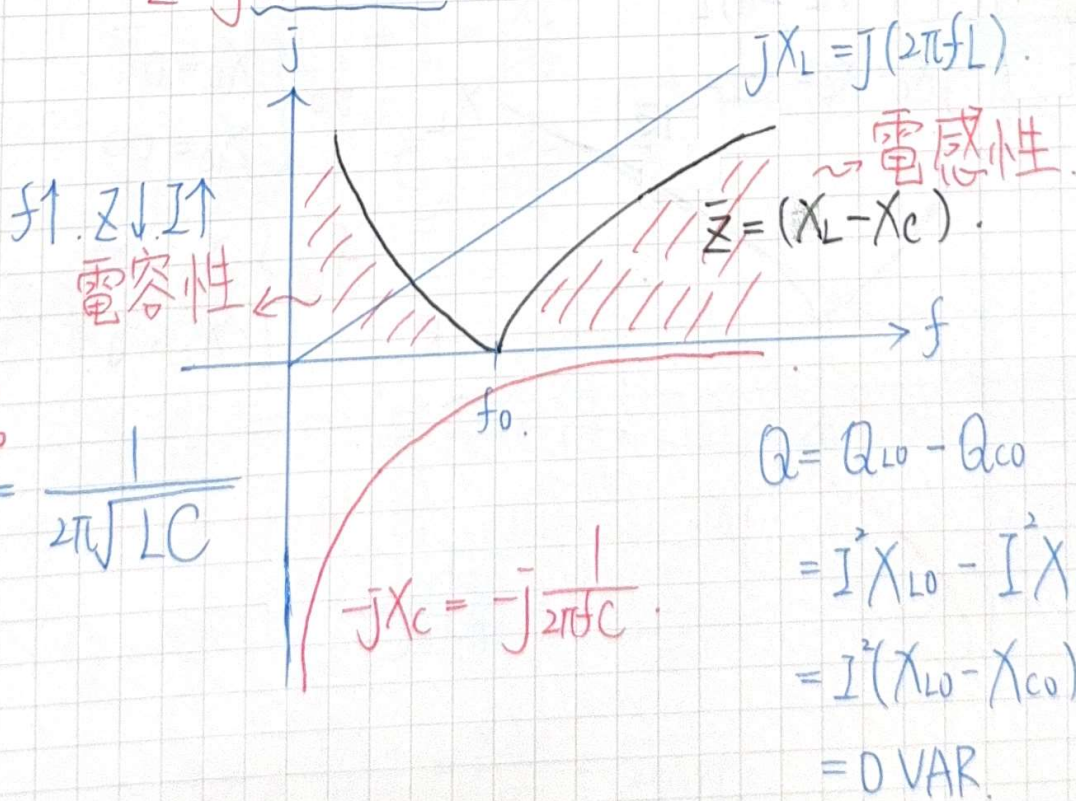
$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}.$$

$$f=0 \begin{cases} X_L = 0 \\ X_C = \infty \end{cases}$$

$$f=\infty \begin{cases} X_L = \infty \\ X_C = 0. \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2} \rightarrow \text{歐式距離.}$$

$$\bar{Z} = j(X_L - X_C) \rightarrow |X_L - X_C| \rightarrow \left| 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} \right| = 0.$$





$$f < f_0$$

$$\begin{cases} X_L < X_C, V_L < V_C \\ \text{落後 } 90^\circ \text{ 電容性} \\ Z \text{ 隨 } f \text{ 增加而減少} \\ i \text{ 隨 } f \text{ 增加而增加} \end{cases}$$

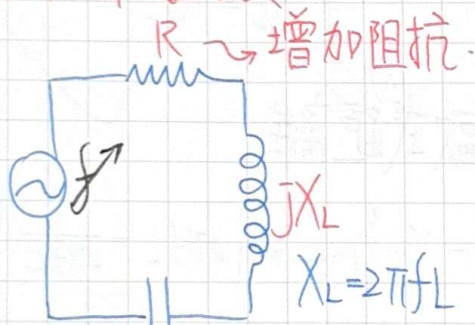
$$f = f_0$$

$$\begin{cases} X_L = X_C, V_L = V_C \\ \text{電路諧振} \\ Z \text{ 為 } 0 \\ i \text{ 為 } \infty \end{cases}$$

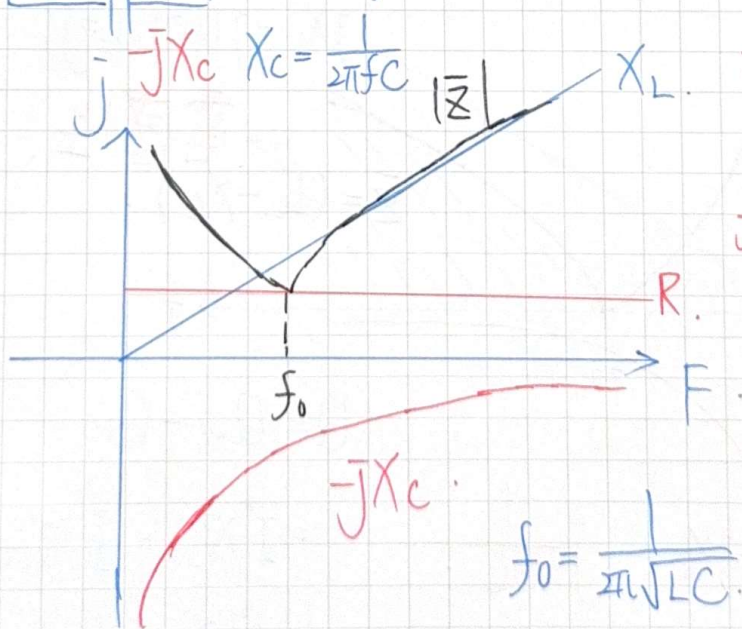
$$f > f_0$$

$$\begin{cases} X_L > X_C, V_L > V_C \\ \text{領先 } 90^\circ \text{ 電感性} \\ Z \text{ 隨 } f \text{ 增加而增加} \\ i \text{ 隨 } f \text{ 增加而減少} \end{cases}$$

### RLC 串聯諧振



$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$



$$f_0 \begin{cases} X_L = 0 \\ X_C = \infty \end{cases}$$

$$f_\infty \begin{cases} X_L = \infty \\ X_C = 0 \end{cases}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



$$Q = Q_{L0} - Q_{C0} = 0 \text{ VAR.}$$

$$f < f_0$$

$$\begin{cases} X_L < X_C, V_L < V_C \\ \checkmark \text{ 落後 } i, \text{ 電容性.} \\ \checkmark \text{ 隨 } f \text{ 增加而減少} \\ \checkmark i \text{ 隨 } f \text{ 增加而增加.} \end{cases}$$

$$f = f_0$$

$$\begin{cases} X_L = X_C, V_L = V_C \\ \checkmark \text{ 等於 } i \text{ 相位, 電阻性.} \\ Z = R, i = \frac{E}{R}. \\ S = 0, PF = 1 \end{cases}$$

$$f > f_0$$

$$\begin{cases} X_L > X_C, V_L > V_C. \\ \checkmark \text{ 領先 } i \text{ 相位, 電感性.} \\ \checkmark \text{ 隨 } f \text{ 增加而增加.} \\ \checkmark i \text{ 隨 } f \text{ 增加而減少.} \end{cases}$$

\* 視在功率  $S = P$ ; 因此  $f = f_0$  時,  $PF = 1$

$$\text{而 } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$X_L = 2\pi f L \Rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f \times \sqrt{\frac{X_C}{X_L}}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f X_C}$$

品質因數.

1. 為諧振時儲能元件所儲能量與電路所消耗能量之比值

$$Q = \frac{Q_{L0}}{P} = \frac{I^2 X_{L0}}{I^2 R} = \frac{X_{L0}}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R}$$

$$Q = \frac{1}{R\sqrt{C}}$$

$$= \frac{Q_{C0}}{P} = \frac{I^2 X_{C0}}{I^2 R} = \frac{X_{C0}}{R} = \frac{1}{2\pi f_0 R C}$$



$$V_{R0} = I_0 R = I_0 Z_0 = V$$

$$V_{L0} = I_0 X_{L0} = I_0 Q R = Q V$$

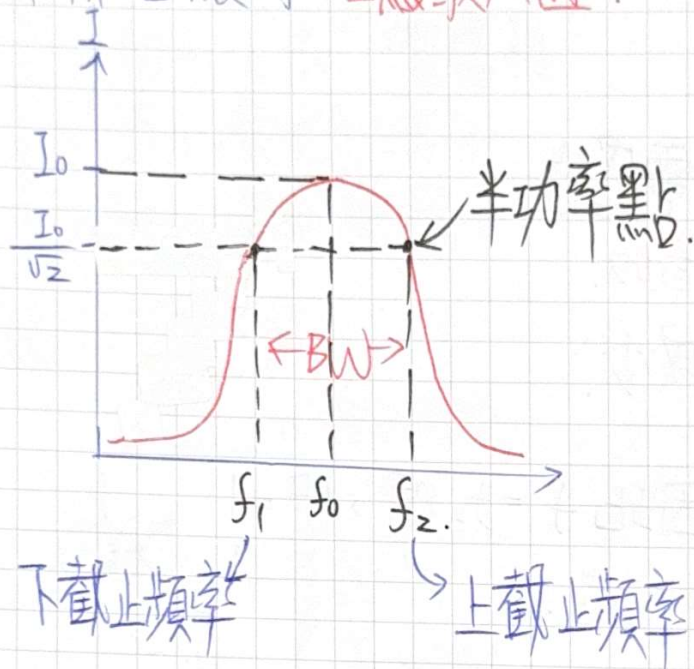
$$V_{C0} = I_0 X_{C0} = I_0 Q R = Q V$$

若  $Q > 1$ ，當發生諧振時， $C$  與  $L$  之  $V$  為電源  $V$  的  $Q$  倍，因此串聯諧振亦可稱為電壓共振。

## 頻帶寬度 (BW)

1. 訊號能有效通過該頻道的最大寬度。

串聯諧振時， $I$  為最大值。



$$BW = f_2 - f_1 (\text{Hz})$$

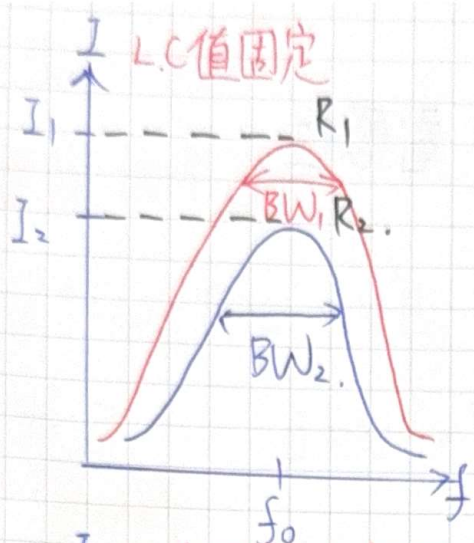
若  $Q > 10$ ， $I$  與頻率響應曲線對稱於諧振頻率。

## 選擇性

1. 選擇有用的訊號能力。以  $f_0$  為中心，過濾，排除中心頻率以外頻率的能力。

當  $BW$  愈大，選擇性愈差。  
 $Q$  值愈小。

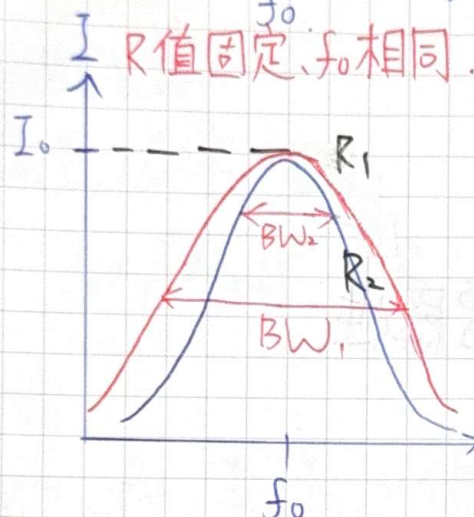




LC值固定時

$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ 愈大, } I_0 \text{ 愈小} \\ Q \text{ 值愈小} \\ BW \text{ 值愈寬} \end{array} \right.$

$R_1 < R_2, Q_1 > Q_2, BW_1 < BW_2$



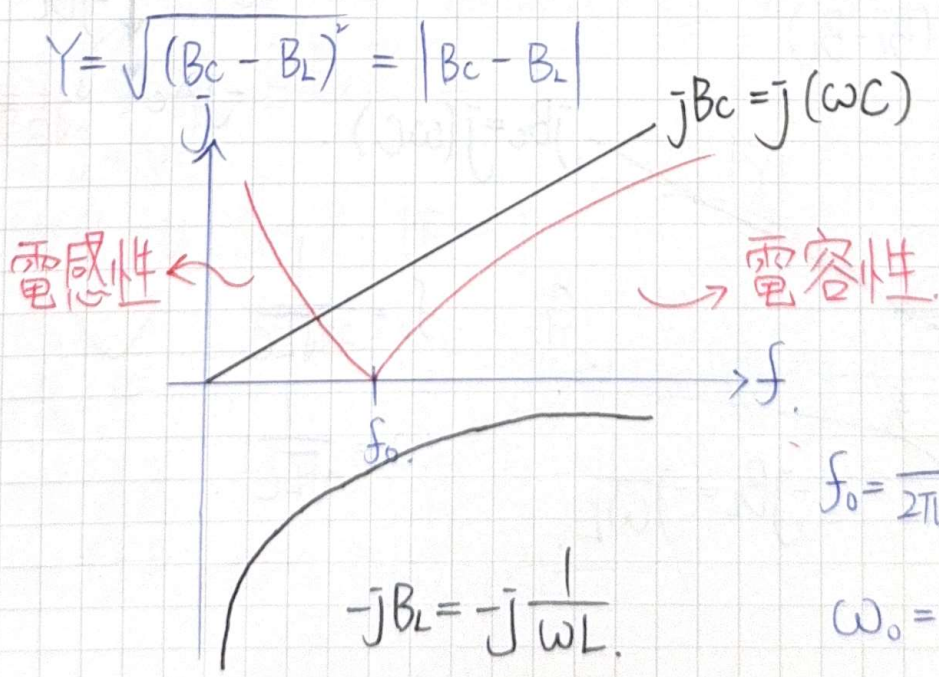
R值固定時.

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{C} \text{ 愈大, } Q \text{ 值愈大} \\ BW \text{ 愈窄} \end{array} \right.$

$\frac{L_1}{C_1} < \frac{L_2}{C_2}, Q_1 < Q_2, BW_1 > BW_2$

## 11-2 並聯諧振電路.

1. 電源  $f$  可調整, 當  $f$  上升時,  $B_L$  會下降,  $B_C$  會上升



$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



$$f < f_0$$

(1)  $B_L > B_C$ ,  $I_L > I_C$ ,  $v$  領先  $i$   $90^\circ$  電感性.

(2)  $Z$  隨著  $f$  增加而減少.

(3)  $I$  隨著  $f$  增加而減少.

$$f = f_0$$

(1)  $B_L = B_C$ ,  $I_L = I_C$ , 電路諧振.

(2)  $Y$  為  $\infty$ ,  $Z$  為  $0$

(3)  $I$  為  $\infty$ .

$$f > f_0$$

(1)  $B_L < B_C$ ,  $I_L < I_C$ ,  $v$  落後  $i$   $90^\circ$ , 電感性.

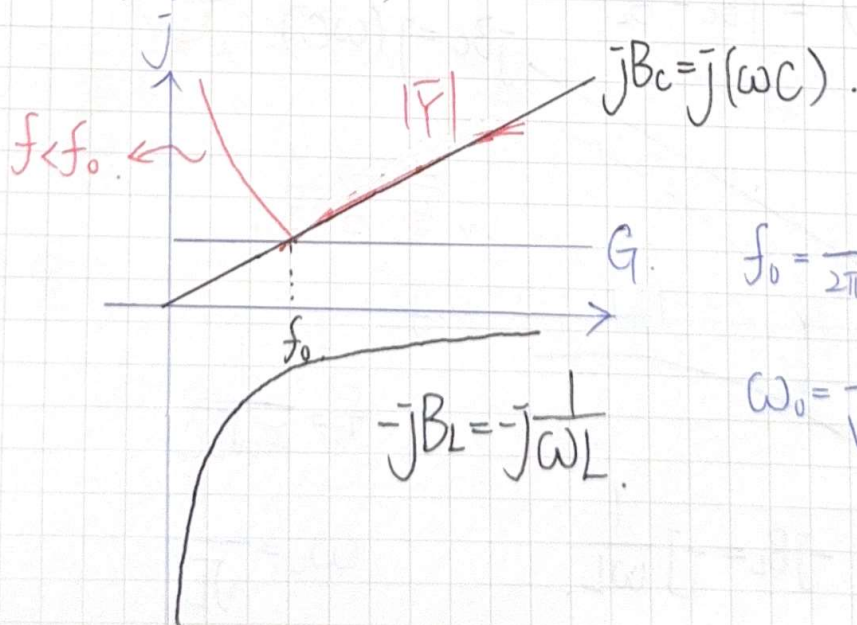
(2)  $Z$  隨著  $f$  增加而增加.

(3)  $I$  隨著  $f$  增加而減少.

## RLC 並聯諧振

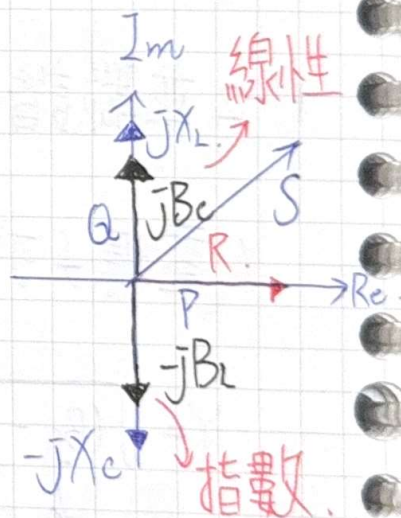
$f$  由零開始增加時,  $B_L \downarrow$ ,  $B_C \uparrow$ .

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$$



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$





當  $B_{L0} = B_{C0}$  時.

總虛功率為 0.

$$Q = Q_{L0} - Q_{C0} = V^2 B_{L0} - V^2 B_{C0} = V^2 (B_{L0} - B_{C0}) = 0$$

$$Y = G \quad I = VY = VG = \frac{V}{R}$$

有效功率

$$P = V^2 G$$

視在功率

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P$$

$f < f_0$

(1)  $B_L > B_C$ ,  $I_L > I_C$ ,  $v$  領先  $i$  相位, 電感性.

(2)  $Y$  隨著  $f$  增加而減少.

(3)  $i$  隨著  $f$  增加而減少.

$f = f_0$

(1)  $B_L = B_C$ ,  $I_L = I_C$ , 相位相同, 電阻性.

(2)  $Y$  為  $G$ ,  $Z$  為  $R$

(3)  $I = VG$ .

(4)  $Q = 0$ ,  $S = P$ ,  $PF = 1$

$f > f_0$

(1)  $B_L < B_C$ ,  $I_L < I_C$ ,  $v$  落後  $i$  相位, 電容性.

(2)  $Y$  隨著  $f$  增加而增加.

(3)  $i$  隨著  $f$  增加而增加.



品質因數.

定義與RLC串聯相同.

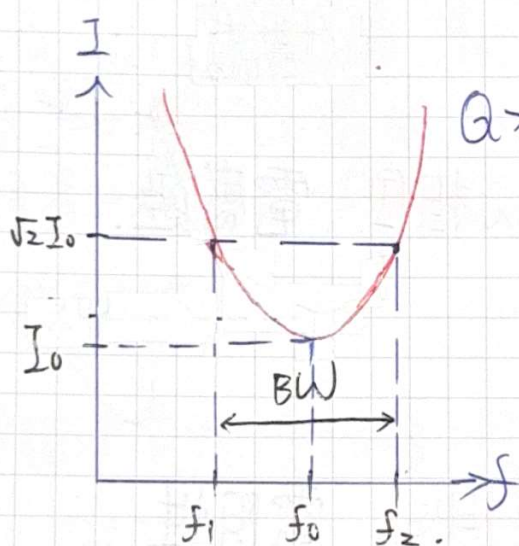
$$Q = \frac{Q_{L0}}{P} = \frac{R}{2\pi f_0 L}$$

$$= \frac{Q_{C0}}{P} = 2\pi f_0 RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$IR_0 = V_0 G = V_0 Y_0 = I_0, I_{L0} = V_0 B_{L0} = V_0 \omega L G = Q I_0, I_{C0} = V_0 B_{C0} = Q I_0$$

若  $Q > 1$ , 發生諧振時, 流經 C 與 L 的電流為電路 I 的  $Q$  倍.  
可稱為電流諧振

頻帶寬度.



$$BW = f_2 - f_1 \text{ (Hz)}$$

$$Q > 10 \begin{cases} f_1 = f_0 - \frac{BW}{2} \\ f_2 = f_0 + \frac{BW}{2} \end{cases}$$

電流與頻率響應圖

選擇性.

1. 相同諧振頻率, 當  $BW$  愈寬時, 選擇性愈差.

$$BW = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0}{\frac{R}{X_{C0}}} = \frac{1}{2\pi RC}$$

↳  $Q$  值愈小.



# RLC 串聯諧振

# RLC 並聯諧振

總電抗

$$X_0 = X_{co} = X_{Lo} = 0$$

$$B_0 = B_{co} = B_{Lo} = 0$$

$\bar{Z} / \bar{Y}$

$$Z_0 = R + j(X_{Lo} - X_{co}) = R \downarrow$$

$$Y = G + j(B_{co} - B_{Lo}) = \frac{1}{R} \downarrow$$

$$Z = R \uparrow$$

$\bar{I}$

$$I_0 = \frac{V}{Z_0} = \frac{V}{R} \uparrow$$

$$I_0 = VY_0 = \frac{V}{Z_0} = \frac{V}{R} \downarrow$$

元件  $V/I$

$$V_{R0} = V$$

$$V_{L0} = V_{C0} = Q_F V$$

$$I_{R0} = I_0$$

$$I_{L0} = I_{C0} = Q_F I_0$$

$P$

$$P_0 = I_0^2 R = V_{R0} I_0 = V I_0 = S_0$$

$$P_0 = V^2 G = V I_{R0} = V I_0 = S_0$$

電抗功率

$$Q_{co} = I_0^2 X_{co} = I_0^2 X_{Lo} = Q_{Lo}$$

$$Q_{co} = V^2 B_{co} = V^2 B_{Lo} = Q_{Lo}$$

P.F

1

1

$f_0$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_0 \sqrt{\frac{X_C}{X_L}}$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_0 \sqrt{\frac{X_C}{X_L}}$$

$Q$

$$\frac{X_{L0}}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{f_0}{BW}$$

$$\frac{B_{L0}}{G} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{f_0}{BW}$$

BW

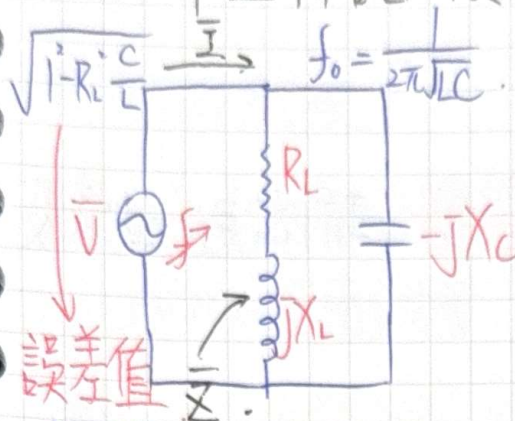
$$f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q} = \frac{R}{2\pi L}$$

$$f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q} = \frac{1}{2\pi CR}$$





# 11-3 串並聯諧振電路.

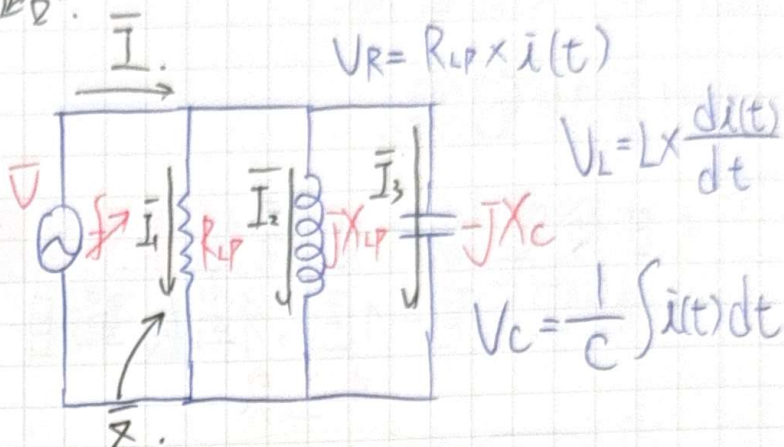


實際LC並聯諧振.

$$R_{LP} = \frac{R_L^2 + X_L^2}{R_L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R_L^2 \frac{C}{L}}$$

$$\begin{cases} Q = \frac{Q_{LPO}}{P} = \frac{R_{LP}}{X_{LPO}} = \frac{X_{LO}}{R_L} \\ Z = R_{LP} = R_L(1 + Q^2) \end{cases}$$



等效並聯諧振.

$$X_{LP} = \frac{R_L^2 + X_L^2}{X_L}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R_L^2 \frac{C}{L}}$$

常當誤差值省略.

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{Q^2}{1+Q^2}} \\ f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{Q^2}{1+Q^2}} \end{cases}$$

