



## 评述

## 原子核协变密度泛函理论及其应用专辑

## 原子核手征对称性和摇摆运动的集体模型

陈启博\*

北京大学物理学院, 核物理与核技术国家重点实验室, 北京 100871

\* 联系人, E-mail: qbchen@pku.edu.cn

收稿日期: 2015-06-30; 接受日期: 2015-07-15; 网络出版日期: 2015-12-15

国家重点基础研究发展计划项目 (编号: 2013CB834400)、国家自然科学基金 (批准号: 11175002, 11335002, 11375015, 11461141002) 和国家教育部博士点基金 (编号: 20110001110087) 资助项目

**摘要** 针对核物理近年来出现的手征对称性和摇摆运动等热点问题, 介绍具有微观基础的集体哈密顿量理论的研究进展. 首先, 简要回顾手征对称性和摇摆运动的研究现状. 接着, 给出基于倾斜轴推转模型, 构建微观集体哈密顿量理论的具体过程. 随后, 介绍新发展的集体哈密顿量理论对于手征对称性和摇摆运动的研究. 具体包括: 介绍手征双重带能量差随转动频率变化的微观机制的研究, 给出了手征双重带能量差随转动频率逐渐减小, 是双中心势垒的逐渐增高抑制手征伙伴态之间量子隧穿的结论; 介绍简单、纵向、横向 3 类摇摆运动的摇摆频率随转动频率演化的微观机制, 得到了摇摆频率的演化趋势与集体势的软硬度相关的结论.

**关键词** 手征对称性, 摇摆运动, 集体哈密顿量, 倾斜轴推转, 质量参数, 能谱

**PACS:** 21.60.Ev, 21.10.Re, 23.20.Lv

## 1 引言

近年来, 近球形原子核和三轴形变原子核中出现的新奇转动模式, 如磁转动 (Magnetic Rotation)<sup>[1]</sup>、反磁转动 (Antimagnetic Rotation)<sup>[2]</sup>、潮汐波 (Tidal Wave)<sup>[3]</sup>、手征对称性 (Chiral Symmetry)<sup>[4]</sup>、摇摆运动 (Wobbling Motion)<sup>[5]</sup> 等, 已成为核物理研究的重要前沿领域<sup>[6-8]</sup>. 关于新奇转动模式的相关实验研究进展介绍可参见王守宇的文章<sup>[9]</sup>. 关于磁转动与反磁转动的研究可参见彭婧的文章<sup>[10]</sup>, 原子核手征对称性的粒子转子模型和倾斜轴推转模型的研究可

参见亓斌和贾慧的文章<sup>[11]</sup>. 本文主要介绍新发展的集体模型对三轴原子核中手征对称性<sup>[4]</sup>和摇摆运动<sup>[5]</sup>的相关研究进展.

原子核的手征对称性由 Frauendorf 和孟杰<sup>[4]</sup>于 1997 年预言. 对于一个具有稳定三轴形变 (具有长、中、短 3 个主轴的椭球体) 的原子核, 如果有少数几个处于高  $-j$  轨道的价粒子和价空穴, 则价粒子和价空穴的角动量将分别沿原子核质量分布的短轴和长轴方向顺排, 而其余核子组成的原子核核芯的角动量将沿着转动惯量最大的中间轴顺排. 这样, 价粒子、价空穴和集体转动的角动量三者相互垂直, 与它们合

**引用格式:** 陈启博. 原子核手征对称性和摇摆运动的集体模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46: 012013

Chen Q B. Collective model of chiral and wobbling modes in nuclei (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2016, 46: 012013, doi: 10.1360/SSPMA2015-00359

成的总角动量形成左手体系 (记为  $|\mathcal{L}\rangle$ ) 或右手体系 (记为  $|\mathcal{R}\rangle$ ). 于是在本体坐标系下, 手征对称性自发破缺.  $|\mathcal{L}\rangle$  和  $|\mathcal{R}\rangle$  可以通过手征算符  $\chi = \mathcal{T}\mathcal{R}_y(\pi)$  [6,12], 即时间反演  $\mathcal{T}$  和绕  $y$  轴转动  $180^\circ$   $\mathcal{R}_y(\pi)$  两种变换的组合, 相互转换

$$|\mathcal{R}\rangle = \chi|\mathcal{L}\rangle, \quad |\mathcal{L}\rangle = \chi|\mathcal{R}\rangle. \quad (1)$$

在实验室坐标系,  $|\mathcal{L}\rangle$  和  $|\mathcal{R}\rangle$  之间会发生量子隧穿, 使得破缺的手征对称性恢复, 得到两种相反手征性叠加的、具有好的手征对称性的态  $|+\rangle, |-\rangle$  [4,6]:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathcal{R}\rangle + |\mathcal{L}\rangle), \quad \chi|+\rangle = +|+\rangle, \quad (2)$$

$$|-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\mathcal{R}\rangle - |\mathcal{L}\rangle), \quad \chi|-\rangle = -|-\rangle. \quad (3)$$

由于左右两个内禀态量子隧穿效应的存在, 双带的能量将发生劈裂. 并且, 原子核的总角动量不位于任一主平面, 破坏了体系的  $D_2$  对称性, 使得同一转动带能级间自旋相差为  $1\hbar$  [5,6]. 这样, 原子核手征对称性存在的实验信号是: 一对宇称相同的、能量近简并的  $\Delta I = 1$  的转动带, 称为手征双重带 (Chiral Doublet Bands) [4].

2006 年, Meng 等人 [13] 基于绝热约束和组态固定约束的协变密度泛函理论计算, 预言原子核手征对称性的破缺具有多样性, 表现为在同一个原子核中存在两对或者两对以上的手征双重带, 称为多重手征带 (Multiple Chiral Doublets,  $M\chi D$ ) [13]. 这一预言引发了一系列相关理论研究 [14–16]. 最初预言的  $M\chi D$  是基于不同的三轴粒子空穴组态建立起来的. 文献 [17–19] 指出  $M\chi D$  现象也可以存在于同一组态中, 即不仅最低的两条双带可能是手征双重带, 更高的激发带中, 也可能存在手征双重带.  $M\chi D$  的理论预言丰富了全世界范围内加速器实验装置的探索目标.

只有当原子核具有稳定三轴形变时, 手征性才存在, 因此手征性可作为稳定三轴形变存在的一个有力证据. 三轴形变存在的另外一个证据是原子核存在摇摆运动 [5].

摇摆运动最初由 Bohr 和 Mottelson [5] 在 20 世纪 70 年代预言. 其物理机制可由图 1 说明. 对于一个具有稳定三轴形变的原子核, 其 3 个主轴的转动惯量  $\mathcal{J}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 互不相等 (假设  $\mathcal{J}_3 \gg \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ ), 因此

原子核可以绕任意一个主轴转动 [5], 相应的哈密顿量为

$$\hat{H}_{\text{rot}} = \frac{\hat{I}_1^2}{2\mathcal{J}_1} + \frac{\hat{I}_2^2}{2\mathcal{J}_2} + \frac{\hat{I}_3^2}{2\mathcal{J}_3}, \quad (4)$$

式中,  $\hat{I}_k$  是绕着各个主轴转动的角动量. 虽然三轴原子核倾向于绕着转动惯量最大的主轴 (这里为 3-轴) 转动以使得能量最低, 但绕着其他两个主轴 (1-, 2-轴) 的转动会影响绕 3-轴的转动, 使得转动轴偏离 3-轴, 从而导致绕着 3-轴的进动及其转动轴偏离该主轴的摇摆运动. 经过推导, Bohr 和 Mottelson [5] 给出了摇摆运动的能量表达式

$$E(n, I) = \frac{I(I+1)}{2\mathcal{J}_3} + (n + \frac{1}{2})\hbar\Omega_{\text{wob}}, \quad (5)$$

即绕 3-轴的转动能量与转动轴偏离 3-轴做摇摆运动的振动能量之和. 其中,  $n$  描述了摇摆运动的声子数;  $\Omega_{\text{wob}}$  表示振动能量, 称为摇摆频率, 其大小与 3 个主轴转动惯量以及自旋相关, 并且随自旋的增大线性增大

$$\hbar\Omega_{\text{wob}} = 2I \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_2} - \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_3}\right)\left(\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_1} - \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_3}\right)}. \quad (6)$$

因此, 摇摆运动的实验信号表现为建立在不同振动能级上的转动带, 称为摇摆带 [5]. 文献 [20] 把这种三轴转子的摇摆体系称为“简单摇摆” (Simple Wobbling).

摇摆运动不仅存在于偶偶核中, 还存在于奇-A 核中. 当三轴转子耦合一个高- $j$  的价粒子, Frauendorf

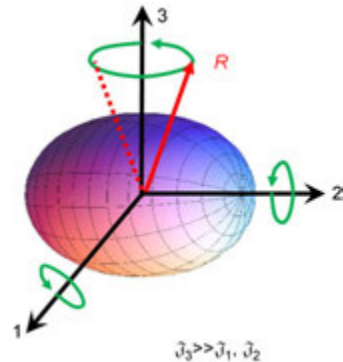


图 1 (网络版彩图) 原子核简单摇摆子示意图. 集体角动量标记为  $R$

Figure 1 (Color online) Diagrammatic sketch of simple wobbling. The collective angular momentum is labeled as  $R$ .

和 Döna 指出会存在两种不同的摇摆模式, 即“纵向摇摆” (Longitudinal Wobbling) 和“横向摇摆” (Transverse Wobbling) [20], 见示意图 2. 纵向摇摆指的是高- $j$  价粒子角动量平行于转动惯量最大的主轴 ( $\mathbf{j} // 3$ -轴), 而横向摇摆指的是高- $j$  价粒子角动量垂直于转动惯量最大的主轴 ( $\mathbf{j} \perp 3$ -轴).

引入谐振子冻结顺排近似 (Harmonic Frozen Alignment Approximation) 的假设, 半经典地处理粒子转子模型, Frauendorf 和 Döna 得到了纵向摇摆频率公式 [20]

$$\hbar\Omega_{\text{wob}} = \frac{j}{\mathcal{J}_3} \left\{ \left[ 1 + \frac{J}{j} \left( \frac{\mathcal{J}_3}{\mathcal{J}_1} - 1 \right) \right] \left[ 1 + \frac{J}{j} \left( \frac{\mathcal{J}_3}{\mathcal{J}_2} - 1 \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad (7)$$

和横向摇摆频率公式 [20]

$$\hbar\Omega_{\text{wob}} = \frac{j}{\mathcal{J}_1} \left\{ \left[ 1 + \frac{J}{j} \left( \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_3} - 1 \right) \right] \left[ 1 + \frac{J}{j} \left( \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} - 1 \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (8)$$

式中,  $J = \sqrt{I(I+1)}$  为总角动量  $I$  的经典量,  $j$  为价核子角动量. 对于纵向摇摆, 由于  $\mathcal{J}_3 > \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ , 式 (7) 中的括号内的项都为正, 因此摇摆频率随自旋的增大而增大. 对于横向摇摆, 如果耦合的是一个价核子, 由于  $\mathcal{J}_2 < \mathcal{J}_1 < \mathcal{J}_3$ , 式 (8) 中的因子  $1 + J(\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_3 - 1)/j$  随着自旋增加而减小, 摇摆频率会随着自旋增加而减小. 如果耦合的是一个价空穴, 由于  $\mathcal{J}_1 < \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ , 则式 (8) 中的因子  $1 + J(\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_3 - 1)/j$  和

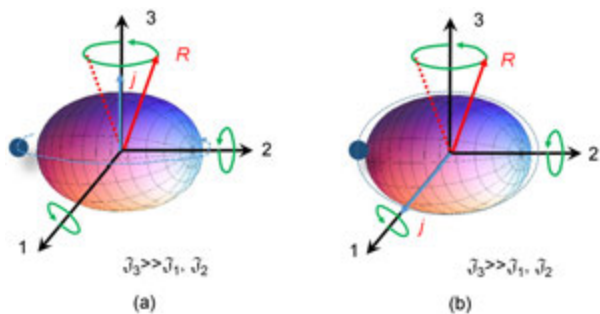


图 2 (网络版彩图) 原子核纵向摇摆子 (a) 和横向摇摆子 (b) 示意图. 价核子和集体角动量分别标记为  $j$  和  $R$

**Figure 2** (Color online) Diagrammatic sketch of longitudinal (a) and transverse (b) wobblers. The valence nucleon and collective angular momentum are labeled as  $j$  and  $R$ .

$1 + J(\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_2 - 1)/j$  都将随着自旋增加而减小, 从而摇摆频率也会随着自旋增加而减小. 综上, 对于纵向摇摆, 其摇摆频率随着自旋的增加而增加; 对于横向摇摆, 其摇摆频率随着自旋的增加而减小.

原子核的手征性和摇摆运动在理论上预言之后, 便吸引了实验和理论的广泛关注. 实验上, 美国、欧洲等国科学家于 2001 年在 4 个  $N = 75$  的同中子素链中观测到手征双重带 [21], 证实了原子核手征性的理论预言. 2013 年和 2014 年, 实验上在  $^{133}\text{Ce}$  [22] 和  $^{103}\text{Rh}$  [23] 分别观测到基于不同组态和相同组态的  $M\chi D$ , 证实了手征对称性破缺的多样性. 2001 年, 在  $^{163}\text{Lu}$  的三轴强形变带 (Triaxial Strongly Deformed, TSD) 中观测到了摇摆信号, 确认了摇摆运动的存在 [24]. 迄今为止, 实验上在 37 个原子核中观测到候选手征双重带 [21, 25–73], 在 8 个原子核中观测到摇摆带 [24, 74–81]. 图 3 展示了实验上观测到手征双重带和摇摆带的原子核在核素图上的分布. 相关实验进展介绍还可参考文献 [7, 20, 82–87].

在手征性的理论研究方面, 最先由粒子转子模型 (Particle Rotor Model, PRM) 和倾斜轴推转模型 (Tilted Axis Cranking, TAC) 预言原子核手征性的存在 [4]. 随后, 理论家们致力于发展和改进这两个模型. 对于 PRM, 已被扩展来研究一粒子一空穴组态 [17, 18, 88–94]、两准粒子组态 [19, 47, 52, 95–102] 以及多粒子多空穴组态 [22, 23, 41, 103–105] 的手征双重带. 详细

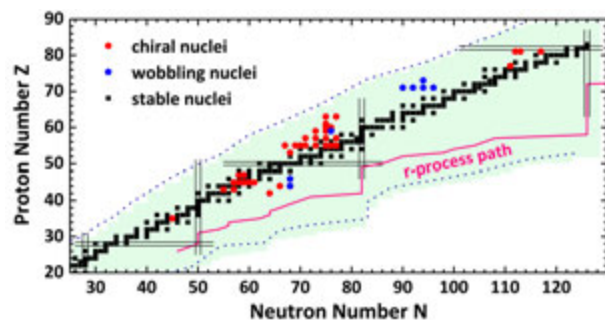


图 3 (网络版彩图) 实验上观测到手征双重带 (红色圆形) 和摇摆带的原子核 (蓝色五边形). 黑色方块代表稳定核. 参考文献 [8] 中磁转动原子核的分布图绘制

**Figure 3** (Color online) The nuclides with chiral (red circles) and wobbling (blue pentagons) bands observed in the nuclear chart. The black squares represent stable nuclides. It refers to the figures of magnetic rotation nuclides [8].

介绍可参阅本专辑中亓斌和贾慧的文章<sup>[11]</sup>. 对于 TAC, 相继发展了基于混合的球形 Woods-Saxon + Nilsson 势和形变的 Nilsson 势并结合 Strutinsky 壳修正的倾斜轴推转模型<sup>[106,107]</sup>, 三维推转的 Hartree-Fock-Bogoliubov (3d-cranked HFB)<sup>[108]</sup>, Skyrme Hartree-Fock 推转模型<sup>[109,110]</sup>. 近些年来, 基于协变密度泛函理论的两维 TAC 模型在原子核的磁转动和反磁转动方面取得了重大成就<sup>[8,111–115]</sup>. 相关介绍可见本专辑中徐文强和彭婧的文章<sup>[10]</sup>. 目前, 人们正努力发展基于协变密度泛函理论的三维 TAC 模型用以研究原子核的手征性. 关于三维 TAC 模型的介绍还可参阅本专辑中亓斌和贾慧的文章<sup>[11]</sup>. 此外, 相互作用玻色子费米子费米子模型 (Interacting Boson Fermion-Fermion Model, IBFFM)<sup>[116–119]</sup>, 对截断壳模型 (Pair Truncated Shell Model, PTSM)<sup>[120–122]</sup>, 三轴投影壳模型 (Triaxial Projected Shell Model, TPSM)<sup>[123]</sup> 等模型也被用来研究手征双重带.

在摇摆运动的理论研究方面, 最先由三轴转子模型 (Triaxial Rotor Model, TRM) 给出摇摆运动存在的预言<sup>[5]</sup>. 首例摇摆原子核实验信号证实<sup>[24]</sup>之后, PRM 被广泛用于摇摆带的描述<sup>[20,124–129]</sup>. 此外, 基于对加四极的 TAC 模型 (Pairing Plus Quadrupole Model, PQTAC)<sup>[130]</sup> 也被用于解释  $^{135}\text{Pr}$  中横向摇摆带的晕带<sup>[128]</sup>.

与此同时, 基于推转模型发展起来的超越平均场近似 (Beyond Mean-Field Approximation) 方法也被用于手征性和摇摆运动的研究.

一种做法是基于推转模型考虑无规相位近似 (Random Phase Approximation, RPA) 方法. 例如在手征性研究方面, 基于对加四极的 TAC 模型考虑 RPA 发展了 TAC+RPA 模型, 对  $A \sim 135$  原子核中的手征振动进行了系统描述<sup>[61,131]</sup>. 在摇摆运动研究方面, 基于推转平均场模型, 考虑 RPA 发展了 cranked mean field+RPA 模型<sup>[132–134]</sup>, 给出原子核绕 3 个主轴转动的转动惯量, 以判断摇摆运动的稳定性. 目前, 该方法已经被用于研究正常形变原子核中可能存在的摇摆运动<sup>[135–137]</sup>, 以及三轴强形变 Lu 同位素链中的摇摆带<sup>[138–144]</sup>.

另外一种做法是基于 TAC 模型, 构建集体哈密

顿量理论 (Collective Hamiltonian). 集体哈密顿量能够微观、自洽地统一给出手征双重带和摇摆带的描述. 它成功揭示了手征双重带双带能量差随转动频率变化的微观机制<sup>[145]</sup>, 并正确给出了摇摆带摇摆频率随转动频率的演化规律<sup>[86]</sup>. 本文将详细介绍这一理论的构建及其应用.

## 2 理论框架

### 2.1 集体哈密顿量

集体哈密顿量是描述集体运动的有力工具, 它包含了少数几个集体坐标和集体动量. 例如, 著名的 Bohr 哈密顿量<sup>[5]</sup>, 它被用于描述原子核的集体转动和集体振动, 其集体坐标为 5 个内禀变量: 两个形变参数  $\beta$  和  $\gamma$  以及 3 个欧拉角  $\Omega$ <sup>[5]</sup>. 集体哈密顿量具有坚实的微观基础, 可通过生成坐标方法 (Generator Coordinate Method, GCM)<sup>[146]</sup>, 绝热的含时 Hartree-Fock 方法 (Adiabatic Time-Dependent Hartree-Fock, ATDHF)<sup>[147]</sup>, 或者绝热自洽集体坐标方法<sup>[148–151]</sup> 推导得到. 在本工作中, 采用绝热自洽集体坐标方法 (Adiabatic Self-Consistent Collective Coordinate Method, ASCC) 推导得到集体哈密顿量. 详细推导过程可见文献<sup>[87,150,151]</sup>.

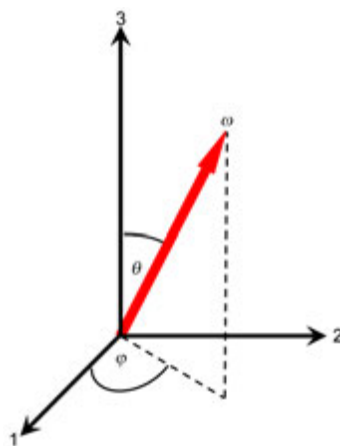


图4 (网络版彩图) 原子核转动频率  $\omega$  关于内禀主轴坐标轴的取向. 取自文献<sup>[86]</sup>

Figure 4 (Color online) Orientation of the rotational frequency  $\omega$  with respect to the principal axes. Taken from ref. [86].



把集体哈密顿量应用于手征性和摇摆运动的研究中, 首先要确定集体坐标. 对于处于转动平均场的原子核, 把转动频率的取向当作集体坐标. 如图4所示, 转动频率的取向在球坐标系下由极角  $\theta$  和方位角  $\varphi$  描述. 如文献 [4] 所述, 根据  $\theta$  和  $\varphi$  取值的不同, 存在 3 种不同类型的转动模式: (1) 主轴转动:  $\theta = 0, \pi/2$ ,  $\varphi = 0, \pm\pi/2$ ; (2) 平面倾斜轴转动:  $\theta \neq 0, \pm\pi/2$ ,  $\varphi = 0, \pm\pi/2$  或者  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi \neq 0, \pm\pi/2$ ; (3) 非平面倾斜轴转动, 也就是手征转动:  $\theta \neq 0, \pi/2$ ,  $\varphi \neq 0, \pm\pi/2$ . 如果把极角  $\theta$  限制在  $0 < \theta < \pi/2$ , 然后在  $-\pi/2$  到  $\pi/2$  范围内改变方位角  $\varphi$ , 可以得到原子核从左手系向右手系的转变. 如果  $\theta = 90^\circ$ , 给出的是角动量偏离 1 轴的摇摆运动. 因此, 可选取  $\varphi$  当作集体坐标描述手征对称性或者摇摆运动的动力学过程. 注意到, 沿着  $\varphi$  方向上的集体运动比沿着  $\theta$  方向上的集体运动更容易. 例如, TAC 模型 [106] 和 TAC+RPA [131] 都给出了  $^{134}\text{Pr}$  原子核的总罗斯量在沿  $\varphi$  方向上的变化比沿  $\theta$  方向上的变化更软的特征. 这进一步表明选用  $\varphi$  作为集体坐标描述手征性和摇摆运动是合理的.

这样, 手征对称性和摇摆运动的集体哈密顿量的经典形式表示为与  $\varphi$  相关的动能项和势能项之和

$$H_{\text{coll}} = T_{\text{vib}}(\varphi) + V(\varphi) = \frac{1}{2}B(\varphi)\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (9)$$

其中,  $V(\varphi)$  为集体势, 而  $B(\varphi)$  为质量参数. 集体哈密顿量的量子化形式可通过广义的 Pauli 量子化手续 [86, 145, 152] 得到

$$\hat{H}_{\text{coll}} = -\frac{\hbar^2}{2\sqrt{B(\varphi)}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{B(\varphi)}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + V(\varphi), \quad (10)$$

相应的集体空间不变积分元为

$$\int d\tau_{\text{coll}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \sqrt{B(\varphi)}. \quad (11)$$

## 2.2 集体势

集体哈密顿量 (10) 中的集体势  $V(\varphi)$  和质量参数  $B(\varphi)$  可由 TAC 计算得到. TAC 的详细公式可参考文献 [4, 153]. 推转哈密顿量为 [4]

$$\hat{h}' = \hat{h}_{\text{def}} - \omega \cdot \mathbf{j}, \quad (12)$$

$$\omega = (\omega \sin \theta \cos \varphi, \omega \sin \theta \sin \varphi, \omega \cos \theta), \quad (13)$$

式中,  $\omega$  为推转频率,  $\mathbf{j}$  为单粒子角动量,  $\hat{h}_{\text{def}}$  为单粒子哈密顿量, 通常可选用单  $-j$  壳模型哈密顿量 [4]. 在手征性研究中, 考虑一个质子粒子和一个中子空穴耦合三轴转子的体系, 因此  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_\pi + \mathbf{j}_\nu$  为质子和中子角动量之和;  $\hat{h}_{\text{def}} = \hat{h}_{\text{def}}^\pi + \hat{h}_{\text{def}}^\nu$  为质子和中子内禀哈密顿量之和. 在纵向和横向摇摆研究中, 考虑一个质子粒子耦合三轴转子的体系, 因此  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_\pi$  为质子角动量;  $\hat{h}_{\text{def}} = \hat{h}_{\text{def}}^\pi$  为质子内禀哈密顿量. 在简单摇摆中, 没有价粒子的耦合, 因此推转哈密顿量为零 [86].

TAC 的解是通过把转动坐标系下的总能量, 即总罗斯量 (Routhian) [4]

$$E'(\theta, \varphi) = \langle \hat{h}' \rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathcal{J}_k \omega_k^2, \quad k = 1, 2, 3, \quad (14)$$

关于倾斜角  $\theta$  和  $\varphi$  取极小求解得到. 上式中,  $\mathcal{J}_k$  为三轴核芯 3 个主轴的转动惯量. 集体哈密顿量中的集体势  $V(\varphi)$  是对给定的  $\varphi$ , 让总罗斯量在  $\theta$  方向上取极小求解得到.

## 2.3 质量参数

在手征对称性的集体哈密顿量中, 质量参数采用推转公式 [154] 计算得到. 它通过绝热微扰理论推导得到, 详细可见文献 [145, 154], 其形式为

$$B(\varphi) = 2\hbar^2 \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{\left| \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \langle \alpha | j | \beta \rangle \right|^2}{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^3}. \quad (15)$$

在摇摆运动集体哈密顿量中, 质量参数采用谐振子近似公式 [86]. 对于简单摇摆子,

$$B = \frac{\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3}{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3}, \quad (16)$$

它仅取决于 3 个主轴的转动惯量, 与转动频率无关. 对于纵向和横向摇摆子,

$$B(\omega) = \frac{\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3}{\mathcal{J}_1^*(\omega) - \mathcal{J}_3} = \frac{\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3}{(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3) + \frac{\mathcal{J}}{\omega}}, \quad (17)$$

不仅取决于 3 个主轴的转动惯量, 还取决于价粒子的角动量以及转动频率. 随转动频率的增加, 纵向和横向摇摆子的质量参数也随之增加.

## 2.4 集体哈密顿量求解

由于集体势  $V(\varphi)$  关于集体坐标具有空间反射不变性 [86, 145], 即

$$V(\varphi) = V(-\varphi), \quad (18)$$

因此集体哈密顿量的解具有确定的宇称. 为求解集体哈密顿量的方便, 应构造具有确定宇称的基矢, 即正宇称与负宇称两个基矢子空间.

在手性模式集体哈密顿量的求解中, 文献 [145] 采用盒子边界条件, 即波函数在边界处的值严格为零. 这是由于在边界处  $\varphi \sim \pm 90^\circ$ , 质量参数  $B(\varphi)$  变得非常大 (见图 5). 此时, 两个基矢子空间分别选取为 [145]

$$\psi_n^{(1)}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(2n-1)\varphi}{w^{1/4}}, \quad n \geq 1, \quad (19)$$

$$\psi_n^{(2)}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2n\varphi}{w^{1/4}}, \quad n \geq 1, \quad (20)$$

其中,  $w$  为质量张量  $w = B(\varphi)$ . 容易证明上述基矢满足正交归一条件, 并且满足边界处波函数为零

$$\psi_n^{(i)}(\pm\pi/2) = 0, \quad (21)$$

这样, 集体波函数写作

$$\Psi(\varphi) = \sum_{n \geq 1} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(2n-1)\varphi}{w^{1/4}} + \sum_{n \geq 1} b_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2n\varphi}{w^{1/4}}, \quad (22)$$

其中, 展开系数  $a_n$  和  $b_n$  是对角化手征对称性集体哈密顿量得到.

在摇摆模式集体哈密顿量的求解中, 文献 [86] 采用盒子边界条件. 在本文中, 与文献 [87] 相同, 采用周期边界条件, 即波函数满足周期边界条件. 两个基矢子空间为 [87]

$$\psi_n^{(1)}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1+\delta_{n0})}} \frac{\cos 2n\varphi}{w^{1/4}}, \quad n \geq 0, \quad (23)$$

$$\psi_n^{(2)}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2n\varphi}{w^{1/4}}, \quad n \geq 1, \quad (24)$$

其中,  $w$  为质量张量  $w = B(\varphi)$ . 容易证明上述基矢满足正交归一条件, 及周期边界条件

$$\psi_n^{(i)}(\varphi) = \psi_n^{(i)}(\varphi + \pi). \quad (25)$$

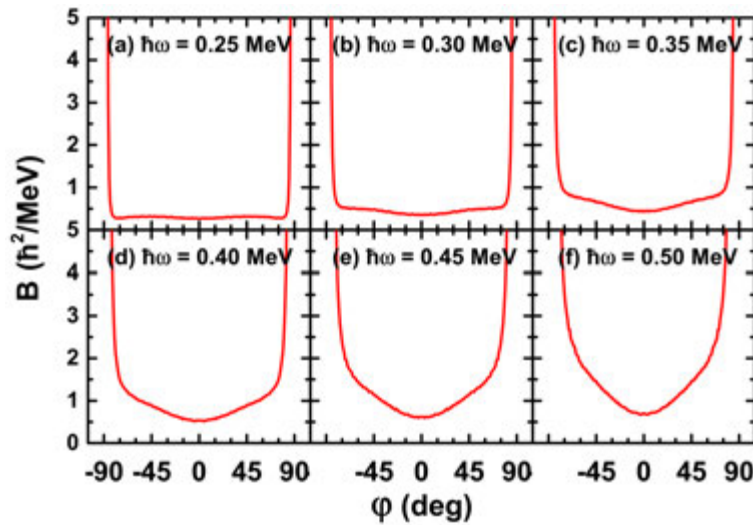


图 5 (网络版彩图) 在推转频率为  $\hbar\omega = 0.25 - 0.50$  MeV 时, 由倾斜轴推转模型计算得到的质量参数  $B(\varphi)$  随着倾斜角  $\varphi$  的演化. 取自文献 [145]

**Figure 5** (Color online) The mass parameter  $B(\varphi)$  as a function of  $\varphi$  for the chiral rotation cases obtained based on TAC at  $\hbar\omega = 0.25 - 0.50$  MeV. Taken from ref. [145].

这样, 集体波函数写作

$$\Psi(\varphi) = \sum_{n \geq 0} c_n \sqrt{\frac{2}{\pi(1 + \delta_{n0})}} \frac{\cos 2n\varphi}{w^{1/4}} + \sum_{n \geq 1} d_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2n\varphi}{w^{1/4}}, \quad (26)$$

其中, 展开系数  $c_n$  和  $d_n$  是对角化摇摆运动的集体哈密顿量得到.

### 3 手征对称性的集体哈密顿量

#### 3.1 数值细节

在计算中, 考虑一个经典的手征体系, 即具有三轴形变为  $\gamma = -30^\circ$  的对称粒子空穴组态  $\pi h_{11/2} \otimes \nu h_{11/2}^{-1}$  [4]. 单  $-j$  壳的耦合参数  $C$  对质子取为  $C_\pi = 0.25$  MeV, 对 neutron 取为  $C_\nu = -0.25$  MeV. 转动惯量取为  $\mathcal{J}_0 = 40 \hbar^2/\text{MeV}$ . 这些参数的选取均与文献 [4] 一致的.

#### 3.2 集体势

图 6 给出了利用 TAC 提取得到的集体势

$V(\varphi)$  [145]. 集体势关于  $\varphi = 0^\circ$  是对称的. 在  $\hbar\omega \leq 0.15$  MeV 时, 集体势是一个谐振子形状的势场, 只有一个  $\varphi = 0^\circ$  的极小点, 对应平面转动 [4]. 在  $\hbar\omega \geq 0.20$  MeV 时, 集体势  $V(\varphi)$  有两个对称的极小点, 对应非平面转动 [4]. 两个对称的极小点之间存在着一个势垒. 势垒的出现破坏了手征对称性, 因此在本体坐标系下, 可找到两个稳定的手征解. 图 6 中给出了势垒的高度值, 定义为  $\Delta V = V(0) - V_{\min}$  (单位为 MeV), 其中  $V(0)$  是  $\varphi = 0^\circ$  处集体势能的大小,  $V_{\min}$  是集体势在极小点处的势能值. 可以发现, 随着推转频率的增高, 势垒高度逐渐增大. 例如, 当  $\hbar\omega = 0.20$  MeV 时, 势垒高度仅为 1 keV. 当  $\hbar\omega = 0.50$  MeV 时, 增大为  $\sim 2$  MeV.

#### 3.3 质量参数

质量参数采用推转公式 (15) 计算. 图 5 给出质量参数随  $\varphi$  的变化 [145]. 它关于  $\varphi = 0^\circ$  是对称的. 当  $\varphi$  趋于  $\pm 90^\circ$  时, 急剧增加. 在  $\varphi = 0^\circ$  附近, 当  $\hbar\omega \geq 0.35$  MeV 时, 质量参数随  $\varphi$  的增长趋势较为显著, 而当  $\hbar\omega = 0.25$  和  $0.30$  MeV 时, 其对  $\varphi$  的依赖性则较弱.

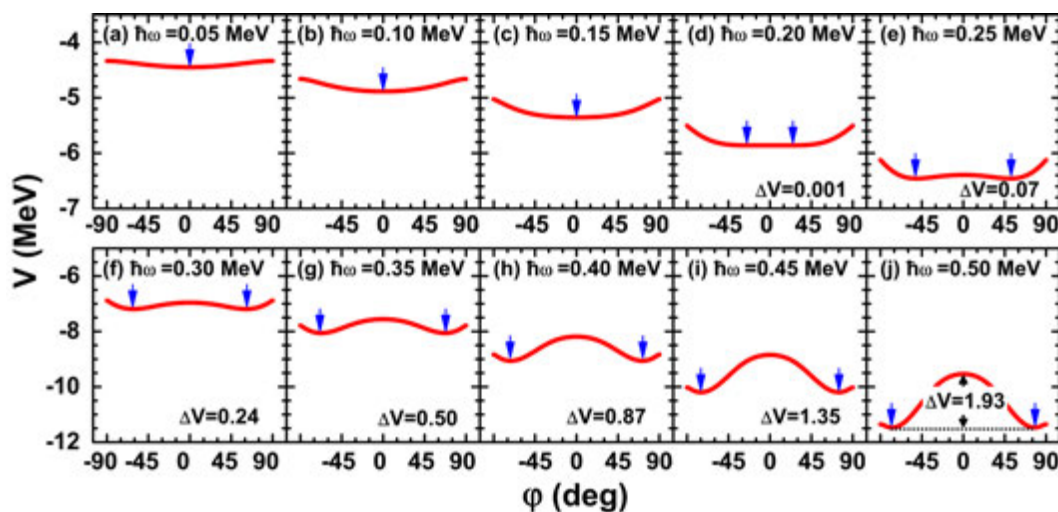


图 6 (网络版彩图) 从倾斜轴推转模型提取得到的集体势  $V(\varphi)$  随倾斜角  $\varphi$  的演化. 箭头标记集体势的极小点  $V_{\min}$  位置. 同时, 图中还给出了势垒的高度值, 其定义为  $\Delta V = V(0) - V_{\min}$  (单位为 MeV). 取自文献 [145]

Figure 6 (Color online) The potential energy  $V(\varphi)$  as a function of  $\varphi$  extracted from the TAC model. The arrow labels the position of the potential minimum  $V_{\min}$ . The potential barriers defined as  $\Delta V = V(0) - V_{\min}$  (in MeV) are also presented. Taken from ref. [145].

### 3.4 集体能级与集体波函数

得到集体势  $V(\varphi)$  和质量参数  $B(\varphi)$  之后, 便构建得到集体哈密顿量. 对角化求解集体哈密顿量, 可得每个推转频率下的集体能级及相应的集体波函数.

图 7 展示了  $\hbar\omega = 0.25 - 0.50$  MeV 时, 由集体哈密顿量求解得到的 6 条最低能级 (标记为 1-6) 以及相应的集体势  $V(\varphi)$  [145]. 可以看到, 随着推转频率的增大, 三对能级, 即能级 1 和 2, 能级 3 和 4, 以及能级 5 和 6, 靠得越来越近. 例如, 在  $\hbar\omega = 0.25$  MeV 时, 能级 1 和 2 的能量差为 1.19 MeV; 在  $\hbar\omega = 0.50$  MeV 时, 减小为 0.01 MeV. 这是由于随着推转频率的增大, 集体势垒变得越来越高, 越来越宽, 抑制左右两个手征态的量子隧穿. 因此, 两条能级逐渐简并. 多对简并能级的出现, 意味着  $M\chi D$  [13-19, 22, 23] 在集体哈密顿量中自洽给出, 这将是今后研究关注的热点.

图 8 展示了由集体哈密顿量得到的最低两条能级的波函数  $\psi(\varphi)$  [145]. 可以看到, 能级 1 的波函数关于  $\varphi \rightarrow -\varphi$  的变化是对称的, 而能级 2 是反对称的. 由此说明, 在非平面 TAC 中破缺的手征对称性在集体哈密顿量的解中是恢复的. 同时, 可以看到对称波函数态的能量比反对称波函数态的能量更加优惠.

对于  $\hbar\omega = 0.25$  和 0.30 MeV 的情况, 能级 1 的波函数在整个  $\varphi$  的区域上除了在边界处  $\varphi = \pm 90^\circ$  外几乎为常数, 意味着总角动量在整个  $\varphi$  区间上的涨落非常大. 能级 2 的波函数在  $\varphi = \pm 90^\circ$  处出现峰值, 表明手征转动的开始区域, 手征振动起着重要的作用. 当推转频率增加, 能级 1 的波函数逐渐与能级 2 的波函数变得相似. 意味着两个近简并能级的物理性质是一样的, 因此好的手征性出现.

我们知道, TAC 的结果是在本体坐标系下给出的, 左右两个手征伙伴态的解是全同的 [4]. 由于半经典近似及平均场近似, 它不能给出左右取向两个态之间的隧穿. 因此, 在 TAC 中, 手征对称性破缺, 并且只能给出一条转动带 [4]. 在集体哈密顿量的框架中, 哈密顿量是在实验室坐标系中求解. 通过考虑角动量在整个  $\varphi$  区间上的量子涨落, 集体哈密顿量恢复了手征对称性, 可描述左右手征态的量子隧穿, 从而给出基于晕带之上的手征伙伴带.

### 3.5 与精确解比较

对于目前所讨论的体系, 其精确解可由 PRM 给出. 在文献 [4] 中, 从 TAC 得到的角动量  $I$  和推转频

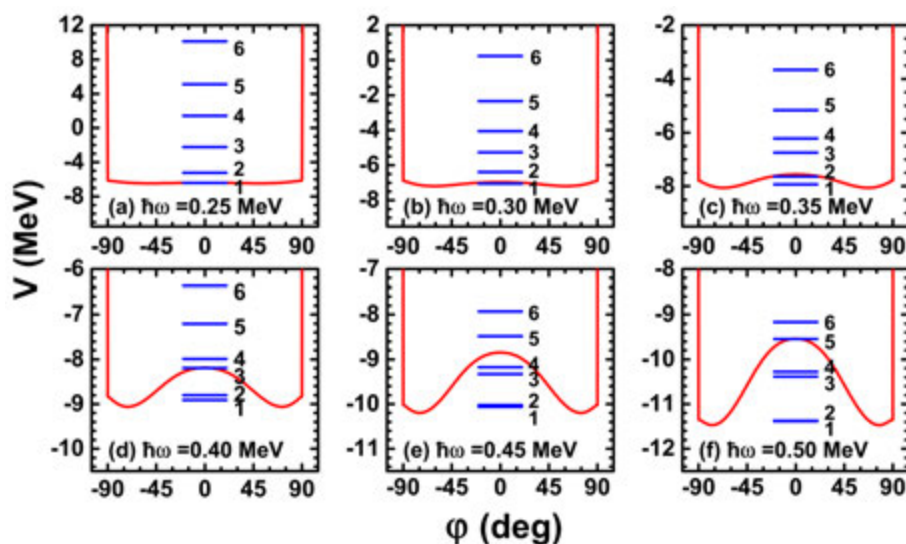


图 7 (网络版彩图) 在推转频率为  $\hbar\omega = 0.25 - 0.50$  MeV 时, 由集体哈密顿量求解得到的最低的 6 条能级 (标记为 1-6) 以及相应的集体势  $V(\varphi)$ . 取自文献 [145]

**Figure 7** (Color online) The six lowest energy levels, labeled as 1-6, obtained from the collective Hamiltonian at  $\hbar\omega = 0.25 - 0.50$  MeV. The potential energy  $V(\varphi)$  is included as well. Taken from ref. [145].



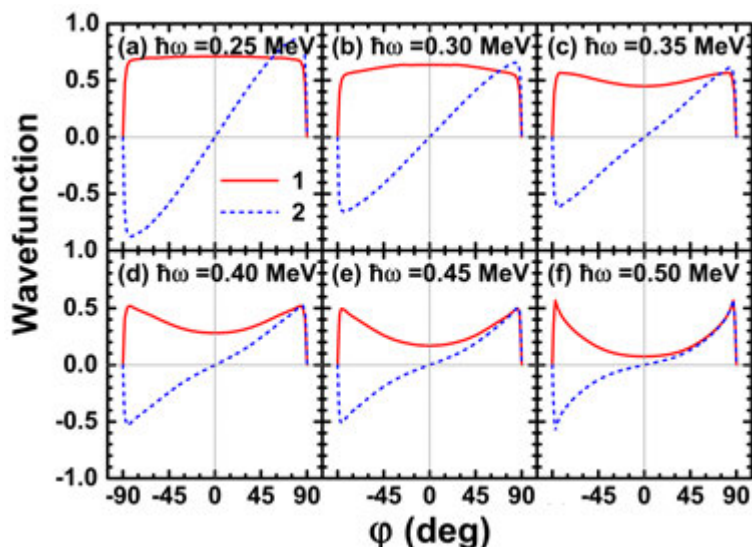


图8 (网络版彩图) 由集体哈密顿量得到的最低两条能级 1 和 2 的波函数  $\psi(\varphi)$  在  $\varphi$  方向上的分布. 取自文献 [145]

Figure 8 (Color online) Wave functions  $\psi(\varphi)$  for the lowest two levels 1 and 2 obtained from collective Hamiltonian. Taken from ref. [145].

率  $\hbar\omega$  关系以及带内跃迁几率已经和 PRM 结果相比较, 并已表明 TAC 的解可很好再现 PRM 的结果 [4]. 在图 9 的内插图中, 再次给出了从 TAC 得到的  $I(\omega)$  与 PRM 结果的比较 [145]. 可以看到 TAC 非常好地再

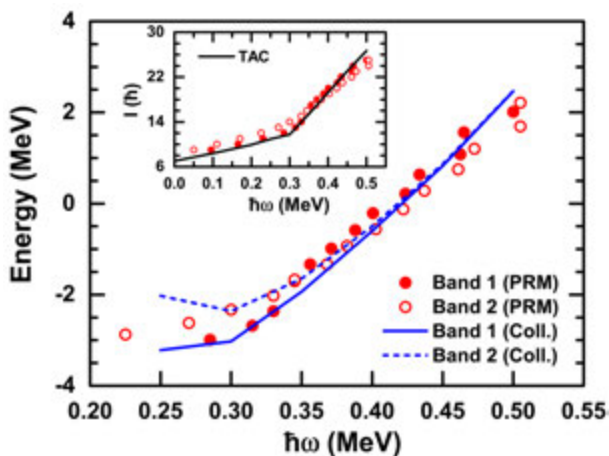


图9 (网络版彩图) 从集体哈密顿量得到的双带能谱与由粒子转子模型得到的精确解比较. 内插图: 从倾斜轴推转模型得到的自旋推转频率关系  $I(\omega)$  与粒子转子模型的结果比较. 类似的  $I(\omega)$  图已在文献 [4] 给出. 取自文献 [145]

Figure 9 (Color online) The energy spectra of the doublet bands obtained from the collective Hamiltonian in comparison with the exact solutions by the PRM. Inset: The spin  $I(\omega)$  obtained from TAC in comparison with PRM. A similar  $I(\omega)$  plot has been given in ref. [4]. Taken from ref. [145].

现了 PRM 的结果.

图 9 给出了从集体哈密顿量得到的双带能谱与 PRM 比较的结果 [145]. 集体哈密顿量不仅很好地再现了 PRM 晕带的结果, 还很好地再现了晕带的伙伴带. 在集体哈密顿量的结果中, 随推转频率的增大, 双带的能量差逐渐减小. 而在 PRM 的结果中, 双带在  $\hbar\omega \sim 0.35$  MeV 之前变得越来越靠近, 之后随推转频率的增加, 双带能量差变得越来越大. 正如 PRM [91,103,104] 和 TAC+RPA [131] 的研究表明, 在推转频率大的时候, 双带出现了第二手征振动的特征. 在目前的集体哈密顿量中, 由于采用盒子边界条件, 这一特征并未加以考虑, 因此没有给出双带劈裂增大的结果.

在目前的研究中, 以倾斜轴单- $j$  壳模型为例, 说明集体哈密顿量能够统一地描述手征振动和手征转动. 集体哈密顿量所取得的成功表明它可被推广用于更加实际的 TAC 计算中去.

## 4 摇摆运动的集体哈密顿量

### 4.1 数值细节

对于简单摇摆, 考虑形变参数为  $\beta = 0.25$  和  $\gamma =$

-30° 的三轴转子体系<sup>[86]</sup>. 按文献[154]的符号约定, 对于这样的形变, 3个主轴 1-, 2-, 和 3- 轴分别对应于短 (*s*), 中 (*i*), 长 (*l*) 轴. 对于纵向和横向摇摆, 考虑三轴转子与一个  $h_{11/2}$  质子粒子耦合<sup>[86]</sup>. 根据粒子的密度分布, 质子的角动量沿着短轴<sup>[4]</sup>, 即 1- 轴. 纵向 (横向) 摇摆子是通过取 1- 轴为 (垂直于) 转动惯量最大的轴而得到的.

为得到不同摇摆体系, 可采用不同类型转动惯量. 通常而言, 转动惯量可采用刚体类型<sup>[154]</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k^{\text{rig}} &= \frac{2}{5} m A R_0^2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right) \right] \\ &= \mathcal{J}_0^{\text{rig}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (27)$$

或无旋流体类型<sup>[154]</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k^{\text{irr}} &= \frac{3}{2\pi} m A R_0^2 \beta^2 \sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right) \\ &= \mathcal{J}_0^{\text{irr}} \sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right), \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (28)$$

从以上两个公式看, 刚体类型转动惯量  $\mathcal{J}^{\text{rig}}$  对形变  $\beta$  的依赖性 ( $\sim \beta$ ) 比无旋流体类型转动惯量  $\mathcal{J}^{\text{irr}}$  对  $\beta$  的依赖性 ( $\sim \beta^2$ ) 弱. 关于  $\gamma$  方向的依赖性, 无旋流体类型转动惯量  $\mathcal{J}^{\text{irr}}$  在对称轴上为零, 而刚体类型转动惯量  $\mathcal{J}^{\text{rig}}$  在对称轴上不为零. 此外, 它们最大转动惯量的轴也不一样. 对于目前假设的形变, 刚体类型转动惯量  $\mathcal{J}^{\text{rig}}$  的最大惯量轴为 1- 轴 (短轴). 而对于无旋流体类型转动惯量  $\mathcal{J}^{\text{irr}}$ , 为 2- 轴 (中间轴).

在集体哈密顿量中, 摇摆角  $\varphi$  限制为  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . 换言之, 摇摆运动限制为发生在 1- 轴附近. 对于简单摇摆, 选取刚体类型转动惯量 (27), 因为 1- 轴的转动惯量最大. 刚体类型转动惯量也可用于研究纵向摇摆, 此时质子角动量 (1- 轴) 与最大转动惯量轴相互平行. 对于横向摇摆, 要求质子角动量 (1- 轴) 与最大转动惯量轴相互垂直. 因此, 采用无旋流体转动惯量类型 (28). 计算中, 转动惯量常数  $\mathcal{J}_0^{\text{rig}}$  和  $\mathcal{J}_0^{\text{irr}}$  分别取为  $\mathcal{J}_0^{\text{rig}} = 256\pi/15 \hbar^2/\text{MeV}$  和  $\mathcal{J}_0^{\text{irr}} = 40 \hbar^2/\text{MeV}$ . 具体而言, 对于刚体类型转动惯量, 3个主轴的转动惯量分别为  $\mathcal{J}_1^{\text{rig}} = 60.9 \hbar^2/\text{MeV}$ ,  $\mathcal{J}_2^{\text{rig}} = 53.6 \hbar^2/\text{MeV}$ , 以及  $\mathcal{J}_3^{\text{rig}} = 46.3 \hbar^2/\text{MeV}$ . 对于

无旋流体类型转动惯量, 3个主轴的转动惯量分别为  $\mathcal{J}_2^{\text{irr}} = 40 \hbar^2/\text{MeV}$  以及  $\mathcal{J}_1^{\text{irr}} = \mathcal{J}_3^{\text{irr}} = 10 \hbar^2/\text{MeV}$ .

## 4.2 简单摇摆

首先给出集体哈密顿量对简单摇摆运动的研究结果. 图 10(a)–(d) 下部分展示了  $\hbar\omega = 0.1, 0.2, 0.3$ , 和  $0.4 \text{ MeV}$  时的简单摇摆总罗斯量  $E'(\theta, \varphi)$  在  $(\theta, \varphi)$  平面上的分布<sup>[86]</sup>. 可以看到, 所有的位能曲面关于  $\varphi = 0^\circ$  对称. 随推转频率的增大, 位能曲面的极小点总是位于  $(\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ)$ , 即 1- 轴, 表明原子核绕最大转动惯量轴均匀转动.

对给定的  $\varphi$ , 对总罗斯量  $E'(\theta, \varphi)$  关于  $\theta$  取极小可得到集体势  $V(\varphi)$ , 在图 10(a)–(d) 的上部分给出<sup>[86]</sup>. 计算发现在每个转动频率下, 对于任意的  $\varphi$ ,  $\theta$  方向的极小值都在  $\theta = 90^\circ$ . 这是因为 1-, 2- 轴是最大的两个转动惯量轴. 集体势关于  $\varphi = 0^\circ$  对称, 与展示在图 10(a)–(d) 下部分的罗斯量是一致的. 集体势是一个抛物线形状的势场, 只在  $\varphi = 0^\circ$  处有一个极小点, 对应绕 1- 轴的转动. 随推转频率的增加, 集体势开口逐渐减小, 表明势场硬度逐渐增加. 这直接反应在  $\varphi = \pm 90^\circ$  和  $\varphi = 0^\circ$  的能量差逐渐增大. 例如, 在  $\hbar\omega = 0.1 \text{ MeV}$  时, 该值约  $30 \text{ keV}$ , 而当  $\hbar\omega = 0.4 \text{ MeV}$  时, 该值就增大到约  $600 \text{ keV}$ .

利用上述得到的集体势和由式 (16) 计算得到的质量参数, 可构造集体哈密顿量研究简单摇摆运动. 对于每个推转频率, 对角化求解集体哈密顿量, 可以得到集体能级及相应的集体波函数. 求解集体哈密顿中, 采用周期边界条件的基矢 (23), (24)<sup>[87]</sup>, 与文献[86]采用盒子边界条件基矢 (19), (20) 不一样.

目前所讨论的简单摇摆的精确解可由 TRM 得到. 为检验集体哈密顿量的精确性, 图 11 给出集体哈密顿量计算得到的 4 条摇摆带  $n = 1, 2, 3, 4$  相对于  $n = 0$  晕带的摇摆能量随自旋变化的结果并与 TRM 及谐振子近似公式结果<sup>[86]</sup> 的比较<sup>[87]</sup>. 可以发现, 对于每个摇摆带, 其摇摆能量随自旋都呈现增长趋势, 展现了简单摇摆运动特征<sup>[5]</sup>. 随摇摆声子数  $n$  的增大, 谐振子近似公式的结果逐渐偏离 TRM 的结果, 表明摇摆运动逐渐偏离简谐特征. 相反地, 在集体哈密顿量结果中, 即使对于  $n$  很大的摇摆带, 也可以非

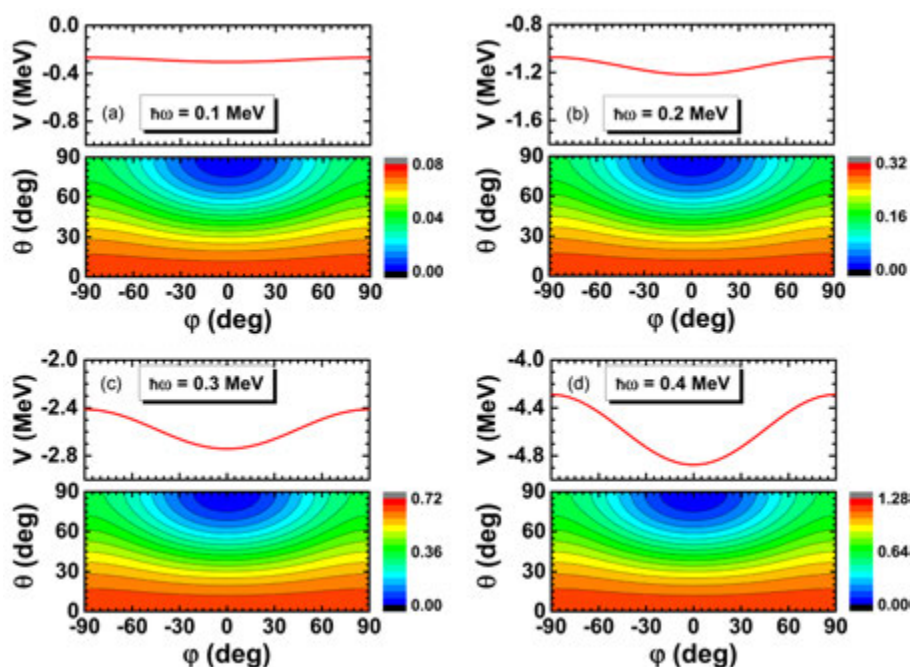


图 10 (网络版彩图)(a), (b) 从  $E'(\theta, \varphi)$  提取得到的集体势  $V(\varphi)$ . (c), (d) 推转频率为  $\hbar\omega = 0.1, 0.2, 0.3$  和  $0.4$  MeV 时, 简单摇摆子的罗斯量  $E'(\theta, \varphi)$  在  $(\theta, \varphi)$  平面上的分布. 对于每个推转频率, 所有的能量均相对于位能曲线上的极小作了平移. 取自文献 [86]

**Figure 10** (Color online) (a), (b) The collective potential  $V(\varphi)$  as a function of  $\varphi$  extracted from the corresponding total Routhian surface calculation. (c), (d) Contour plots of the total Routhian surface calculation  $E'(\theta, \varphi)$  for a triaxial rigid body rotor with  $\gamma = -30^\circ$  at the frequencies  $\hbar\omega = 0.1, 0.2, 0.3$ , and  $0.4$  MeV. All energies at each rotational frequency are normalized with respect to the absolute minimum. Taken from ref. [86].

常好地再现 TRM 的结果. 另外, 与 TRM 相比, 集体哈密顿量是建立在微观 TAC 模型的基础之上. 它通过探讨集体势硬度随转动频率的增长趋势, 给出了简单摇摆的摇摆频率随自旋增长的演化规律的微观解释, 为摇摆运动的理解提供了全新的视角.

### 4.3 纵向摇摆和横向摇摆

接下来给出集体哈密顿量对纵向和横向摇摆运动的研究结果. 图 12(a)–(h) 下部分展示了  $\hbar\omega = 0.1, 0.2, 0.3$ , 和  $0.4$  MeV 时的纵向摇摆 (a)–(d) 和横向摇摆 (e)–(h) 总罗斯量  $E'(\theta, \varphi)$  在  $(\theta, \varphi)$  平面上的分布 [86].

与简单摇摆类似, 纵向摇摆的总罗斯量也关于  $\varphi = 0^\circ$  对称, 且不论推转频率多大, 极小点总是落在  $(\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ)$ . 这是因为在纵向摇摆体系中, 质子粒子角动量倾向于沿着短轴顺排, 即沿着 1- 轴顺排. 对于三轴转子而言, 由于 1- 轴转动惯量最大, 其角动量也倾向于沿着 1- 轴顺排. 因此, 质子粒子与三

轴转子耦合形成的纵向摇摆体系, 其总角动量倾向于沿着 1- 轴顺排, 即沿 1- 轴顺排时, 体系能量达到最小. 对于横向摇摆的总罗斯量, 也关于  $\varphi = 0^\circ$  对称. 与简单和纵向摇摆不同, 横向摇摆总罗斯量极小点随推转频率的增大从  $\varphi = 0^\circ$  变为  $\varphi \neq 0^\circ$ , 极小点个数从一个变为两个. 如文献 [20] 所述, 这意味着原子核的转动轴从短轴向短轴 - 中轴构成的主平面倾斜, 转动模式从主轴转动变为平面倾斜轴转动. 发生这一变化的原因在于随推转频率的增加, 转子核芯沿中间轴角动量的贡献逐渐增大, 因此它对质子粒子的科里奥利力 (Coriolis Force) 作用增强, 驱使质子粒子角动量从短轴向中间轴顺排, 最终使得体系的总角动量从沿着短轴向位于主平面变化.

从总罗斯量提取的集体势场  $V(\varphi)$  在图 12(a)–(h) 的上部分相应地给出 [86]. 可以发现, 纵向摇摆的集体势与简单摇摆子的集体势 (见图 10(a)–(d)) 十分相似, 区别仅在于纵向摇摆集体势的硬度更大. 因此, 关于简单摇摆子集体势的讨论在这里仍然适用. 对于



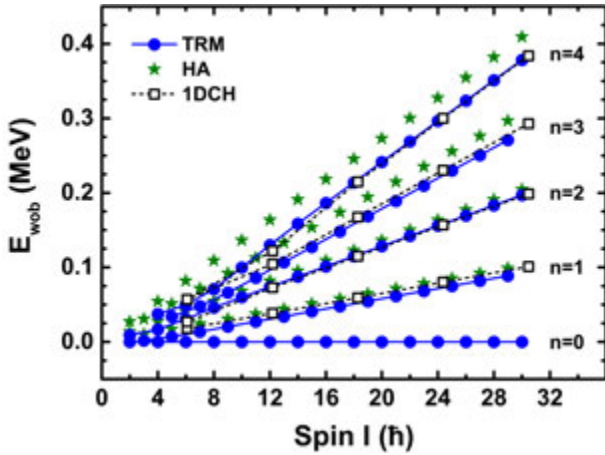


图 11 (网络版彩图) 利用集体哈密顿量得到的 4 条摇摆带  $n = 1, 2, 3, 4$  相对于  $n = 0$  晕带的摇摆能量随自旋变化的结果, 并与三轴转子模型和谐振子近似公式的结果<sup>[86]</sup>比较. 在三轴转子模型中, 对于偶数  $-n$  摇摆带, 摇摆能量由  $E_{\text{wob}}^n = E_n(I) - E_0(I)$  计算得到. 对于奇数  $-n$  摇摆带, 摇摆能量由  $E_{\text{wob}}^n(I) = E_n(I) - [E_0(I+1) + E_0(I-1)]/2$  计算得到. 取自文献<sup>[87]</sup>

**Figure 11** (Color online) Energy spectra of four simple wobbling bands  $n = 1, 2, 3, 4$  relative to the  $n = 0$  yrast sequence obtained by collective Hamiltonian in comparison with triaxial rotor model and harmonic approximation method. In the triaxial rotor model, the wobbling energies for even- $n$  wobbling bands are calculated as  $E_{\text{wob}}^n = E_n(I) - E_0(I)$ , while for odd- $n$  wobbling bands  $E_{\text{wob}}^n(I) = E_n(I) - [E_0(I+1) + E_0(I-1)]/2$ . Taken from ref. [87].

横向摇摆, 在  $\hbar\omega = 0.1$  MeV 时, 是一个谐振子势类型的势场, 只有一个  $\varphi = 0^\circ$  的极小点, 对应绕 1- 轴的均匀转动. 当  $\hbar\omega \geq 0.20$  MeV 时, 集体势有两个对称

的极小点, 对应倾斜轴转动. 两个极小点之间存在势垒. 正是由于势垒的存在, 才在本地坐标系下得到稳定的倾斜轴解. 与手征性的研究类似, 势垒的高度定义为  $\varphi = 0^\circ$  处能量  $V(0)$  与极小点处能量  $V_{\min}$  之差, 即  $\Delta V = V(0) - V_{\min}$  (单位为 MeV). 在图 12(e)–(h) 中也给出了这个值. 可以看到, 随推转频率的增大, 势垒高度不断增大. 例如, 在  $\hbar\omega = 0.20$  MeV 时, 势垒高度为 0.046 MeV. 当  $\hbar\omega = 0.40$  MeV 时, 势垒高度增大为 1.145 MeV. 势垒高度的增大体现了随推转频率的增大, 三轴转子核芯对质子粒子科里奥利力的增强, 使质子粒子从短轴向中间轴顺排的效应也增大.

对于纵向和横向摇摆, 质量参数由谐振子冻结顺排近似式 (17)<sup>[86]</sup> 计算得到. 图 13 给出了计算得到的纵向 (a) 和横向 (b) 摇摆质量参数随推转频率演化的结果<sup>[86]</sup>. 随着转动频率的增加, 质子粒子顺排为 1- 轴贡献的有效转动惯量减小, 使质量参数逐渐增加. 对于横向摇摆, 由于采用了无旋流体转动惯量 (28), 在  $\gamma = -30^\circ$  时, 短轴与长轴的转动惯量相等, 即  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_3$ , 因此计算给出的质量参数随推转频率呈线性增长趋势.

纵向和横向摇摆运动的精确解可由 PRM 给出. 为检验集体哈密顿量的精确性, 图 14 给出利用集体哈密顿量计算得到的纵向 (a) 和横向 (b) 两条摇摆带  $n = 1$  和 2 相对于  $n = 0$  晕带的能量随自旋变化的结果, 及其与 PRM 和谐振子冻结顺排近似公式结

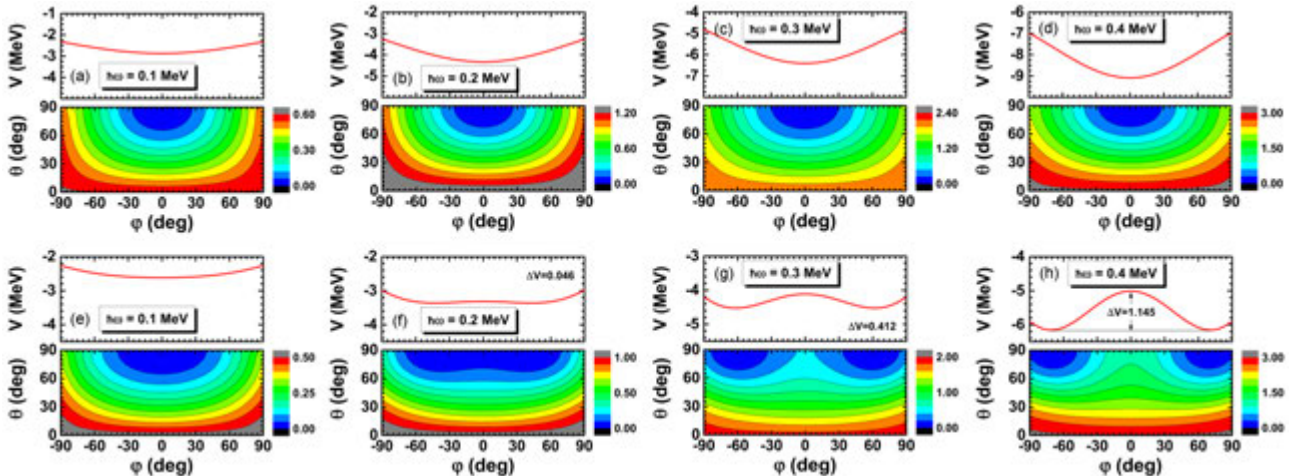


图 12 (网络版彩图) 同图 10, 但对应于纵向 (a)–(d) 和横向 (e)–(h) 摇摆运动的情况. 取自文献<sup>[86]</sup>

**Figure 12** (Color online) Same as Figure 10 but for longitudinal (a)–(d) and transverse (e)–(h) wobbling motion. Taken from ref. [86].



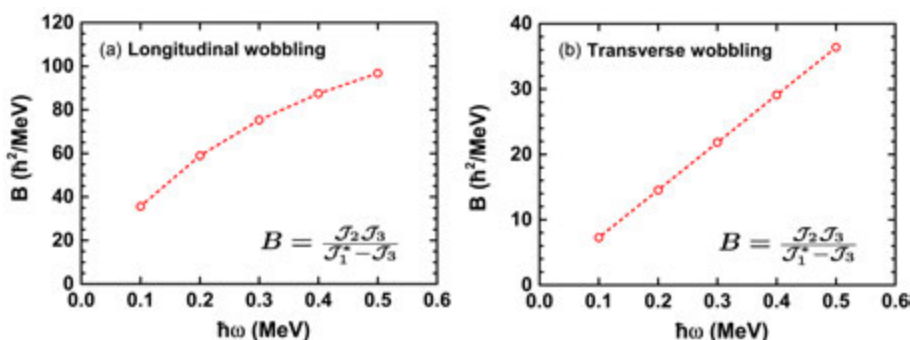


图 13 (网络版彩图) 谐振子冻结顺排近似式 (17) 计算得到的纵向 (a) 和横向 (b) 摇摆运动质量参数随推转频率  $\hbar\omega$  的演化. 取自文献 [86]

Figure 13 (Color online) The calculated mass parameter by harmonic frozen alignment approximation method as a function of rotational frequency  $\hbar\omega$  for longitudinal (a) and transverse (b) wobbling motion. Taken from ref. [86].

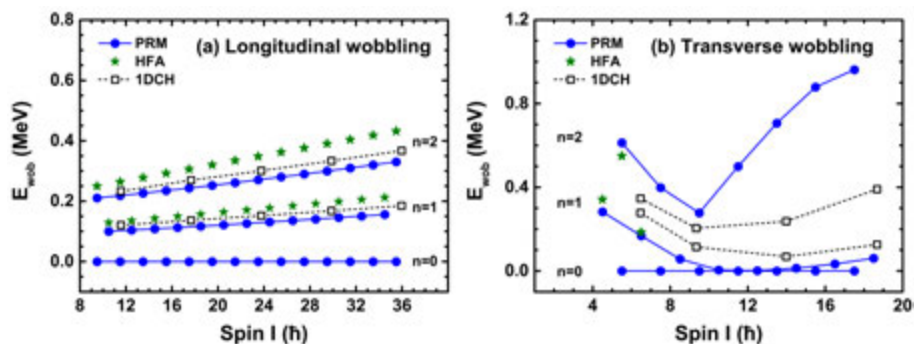


图 14 (网络版彩图) 利用集体哈密顿量计算得到的纵向 (a) 和横向 (b) 摇摆子两条摇摆带  $n=1$  和  $2$  相对于  $n=0$  晕带的摇摆能量随自旋变化的结果, 与粒子转子模型和谐振子冻结顺排近似公式结果的比较. 取自文献 [87]

Figure 14 (Color online) Energy spectra of two longitudinal (a) and transverse (b) wobbling bands  $n=1, 2$  relative to the  $n=0$  yrast sequence obtained by collective Hamiltonian in comparison with particle rotor model and harmonic frozen approximation method. Taken from ref. [87].

果 [86] 的比较 [87]. 可以看到, 集体哈密顿量非常好地再现了 PRM 的结果. 随着自旋的增加, 纵向摇摆能量逐渐增加, 展现了纵向摇摆的典型特征. 与简单摇摆类似, 纵向摇摆能量随自旋增加的趋势可由集体势硬度参数逐渐增加来微观解释. 谐振子冻结顺排近似由于过高估计集体势的硬度 [86], 给出的摇摆能量比粒子转子模型和集体哈密顿量的结果都大.

对于横向摇摆, 3 个模型的结果给出的摇摆能量在低自旋区域逐渐减小, 与文献 [20] 所预言的横向摇摆特征是一致的. 在集体哈密顿量中, 这是由于集体势硬度由硬变软以及势垒逐渐增高所导致的. 当  $I \geq 16.5\hbar$  时, 在 PRM 的结果中,  $n=1$  带的能量呈现增长的趋势, 表明横向摇摆向纵向摇摆转变 [20]. 该

转变在冻结顺排近似公式的结果中没有给出. 而在集体哈密顿量中, 则非常好地再现. 纵向摇摆是由总角动量在边界处  $\varphi = \pm 90^\circ$  的量子涨落所形成. 注意到, 如果采用盒子边界条件基矢 (19), (20) 求解集体哈密顿量, 角动量在边界处的量子涨落被抑制, 该转变则无法给出 [86].

我们知道, PRM 通过对角化粒子与转子耦合的哈密顿量, 给出了精确解. 谐振子冻结顺排近似和集体哈密顿量都是 PRM 的近似解. 在谐振子冻结顺排近似中, 包含了谐振子势近似以及质子粒子角动量冻结顺排近似的假设 [20]. 而在集体哈密顿量计算中, 只有质量参数是采用谐振子冻结顺排近似公式计算得到 [86], 其集体势是通过微观的倾斜轴推转模型给

出, 并不先验地假设质子粒子的角动量沿着哪个主轴冻结顺排. 因此集体哈密顿量改善了谐振子冻结顺排近似对集体势的描述, 得到更加精确的结果. 集体哈密顿量的成功表明它可用于更多实际原子核摇摆带的描述.

## 5 总结与展望

本文介绍了基于倾斜轴推转模型的集体哈密顿量理论对原子核手征对称性和摇摆运动的研究进展.

首先, 简要回顾手征对称性和摇摆运动的研究现状. 阐述了手征双重带和摇摆带的形成机制, 介绍以往理论模型, 包括粒子转子模型、倾斜轴推转模型, 以及倾斜轴推转模型的无规相位近似方法在手征对称性和摇摆运动研究中的进展.

给出基于倾斜轴推转模型, 构建微观集体哈密顿量理论的具体过程: (1) 基于绝热近似的自治集体坐标方法, 从核子自由度出发, 微观推导得到集体哈密顿量; (2) 基于倾斜轴推转模型, 得到体系在不同角动量取向时的总罗斯量; (3) 从总罗斯量提取体系沿手征或摇摆自由度运动的集体势及对应的质量参数, 分别构建集体哈密顿量中的势能项和动能项, 从而得到手性模式或摇摆模式的集体哈密顿量; (4) 求解集体哈密顿量, 得到手征性或摇摆运动的集体能

级及集体波函数.

介绍了新发展的集体哈密顿量理论被用于手征对称性和摇摆运动的研究. 具体包括以下内容.

在手征对称性的研究中, 以经典手征体系为例, 探讨了手征双重带能量差随转动频率变化的微观机制. 集体哈密顿量成功再现了粒子转子模型得到的精确解, 并给出了手征双重带能量差随转动频率逐渐减小, 是双中心势垒的逐渐增高抑制手征伙伴态之间量子隧穿的结论. 相比于粒子转子模型, 具有微观基础的集体哈密顿量理论可更加容易地推广到多粒子多空穴组态手征双重带的研究.

在摇摆运动的研究中, 以简单、纵向、横向3类摇摆运动为例, 介绍摇摆频率随转动频率演化的微观机制的研究. 正确再现了粒子转子模型给出的精确解, 证实了简单和纵向摇摆频率随转动频率增加, 而横向摇摆频率随转动频率降低的趋势. 并给出该变化趋势与集体势的软硬度有关的结论, 为摇摆频率的演化规律提供了微观解释.

在未来, 基于新发展的集体哈密顿量理论将继续对原子核手征对称性和摇摆运动进行研究. 可开展的工作包括: (1) 考虑角动量关于  $\theta$  方向上的量子涨落, 构建包含  $(\theta, \varphi)$  两个自由度的集体哈密顿量理论; (2) 探索基于倾斜轴推转协变密度泛函理论 [8, 111–115] 的集体哈密顿量研究等.

## 致谢

作者诚挚感谢导师孟杰教授以及合作者张双全副教授、赵鹏巍博士、Jolos Rostilav 教授在本工作中对作者的耐心指导与无私帮助. 感谢孟老师和张老师在本文准备过程中给予的宝贵建议. 感谢第六期“原子核物理中的协变密度泛函理论”讲习班与会同行对工作有益的讨论和建议.

## 参考文献

- 1 Frauendorf S, Meng J, Reif J. Tilted cranking. In: Deleplanque M A, ed. Proceedings of the Conference on Physics from Large  $\gamma$ -Ray Detector Arrays. Berkeley: University of California, 1994. II- LBL35687: 52
- 2 Frauendorf S. In: Deleplanque M A, Lee I Y, Macchiavelli A O, eds. Proceedings of the Workshop on Gammasphere Physics. Singapore: World Scientific, 1995. 272
- 3 Frauendorf S, Gu Y, Sun J. Tidal waves—A non-adiabatic microscopic description of the yrast states in near-spherical nuclei. *Int J Mod Phys E*, 2011, 20: 465–473
- 4 Frauendorf S, Meng J. Tilted rotation of triaxial nuclei. *Nucl Phys A*, 1997, 617: 131–147
- 5 Bohr A, Mottelson B R. Nuclear Structure. New York: Benjamin, 1975. II
- 6 Frauendorf S. Spontaneous symmetry breaking in rotating nuclei. *Rev Mod Phys*, 2001, 73: 463–514
- 7 Meng J, Zhang S Q. Open problems in understanding the nuclear chirality. *J Phys G Nucl Part Phys*, 2010, 37: 064025
- 8 Meng J, Peng J, Zhang S Q, et al. Progress on tilted axis cranking covariant density functional theory for nuclear magnetic and antimagnetic rotation. *Front Phys*, 2013, 8: 55–79

- 9 Wang S Y. Several interesting phenomena on high-spin states: Electric rotation, stapler band, shear band and pseudospin partner bands (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2016, 46: 012011 [王守宇. 原子核高自旋态中几个感兴趣的物理现象: 从电转动带到订书机带再到剪刀带, 赝自旋双带. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2016, 46: 012011]
- 10 Xu W Q, Peng J. Progress on microcosmic investigation for magnetic and antimagnetic rotation (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2016, 46: 012012 [徐文强, 彭婧. 原子核磁转动和反磁转动的微观研究. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2016, 46: 012012]
- 11 Qi B, Jia H. Chiral rotational model with multi-quasi-particle configuration (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2016, 46: 012014 [齐斌, 贾慧. 多准粒子组态的手征转动模型. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2016, 46: 012014]
- 12 Starosta K, Koike T, Chiara C J, et al. Chirality in odd-odd triaxial nuclei. *Nucl Phys A*, 2001, 682: 375–386
- 13 Meng J, Peng J, Zhang S Q, et al. Possible existence of multiple chiral doublets in  $^{106}\text{Rh}$ . *Phys Rev C*, 2006, 73: 037303
- 14 Peng J, Sagawa H, Zhang S Q, et al. Search for multiple chiral doublets in rhodium isotopes. *Phys Rev C*, 2008, 77: 024309
- 15 Yao J M, Qi B, Zhang S Q, et al. Candidate multiple chiral doublets nucleus  $^{106}\text{Rh}$  in a triaxial relativistic mean-field approach with time-odd fields. *Phys Rev C*, 2009, 79: 067302
- 16 Li J, Zhang S Q, Meng J. Multiple chiral doublet candidate nucleus  $^{105}\text{Rh}$  in a relativistic mean-field approach. *Phys Rev C*, 2011, 83: 037301
- 17 Droste C, Rohozinski S G, Starosta K, et al. Chiral bands in odd-odd nuclei with rigid or soft cores. *Eur Phys J A*, 2009, 42: 79–89
- 18 Chen Q B, Yao J M, Zhang S Q, et al. Chiral geometry of higher excited bands in triaxial nuclei with particle-hole configuration. *Phys Rev C*, 2010, 82: 067302
- 19 Hamamoto I. Possible presence and properties of multi-chiral-pair bands in odd-odd nuclei with the same intrinsic configuration. *Phys Rev C*, 2013, 88: 024327
- 20 Frauendorf S, Dönauf F. Transverse wobbling: A collective mode in odd-A triaxial nuclei. *Phys Rev C*, 2014, 89: 014322
- 21 Starosta K, Koike T, Chiara C J, et al. Chiral doublet structures in odd-odd  $N = 75$  isotones: Chiral vibrations. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 971–974
- 22 Ayangeakaa A D, Garg U, Anthony M D, et al. Evidence for multiple chiral doublet bands in  $^{133}\text{Ce}$ . *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 172504
- 23 Kuti I, Chen Q B, Timár J, et al. Multiple chiral doublet bands of identical configuration in  $^{103}\text{Rh}$ . *Phys Rev Lett*, 2014, 113: 032501
- 24 Odegard S W, Hagemann G B, Jensen D R, et al. Evidence for the wobbling mode in nuclei. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 5866–5869
- 25 Wang S Y, Qi B, Liu L, et al. The first candidate for chiral nuclei in the mass region:  $^{80}\text{Br}$ . *Phys Lett B*, 2011, 703: 40–45
- 26 Koike T, Kinoshita S, Ma Y, et al. Chirality in the mass 80 region:  $^{79}\text{Kr}$ . *Int J Mod Phys E*, 2011, 20: 520–525
- 27 Vaman C, Fossan D B, Koike T, et al. Chiral degeneracy in triaxial  $^{104}\text{Rh}$ . *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 032501
- 28 Joshi P, Jenkins D G, Raddon P M, et al. Stability of chiral geometry in the odd-odd Rh isotopes: Spectroscopy of  $^{106}\text{Rh}$ . *Phys Lett B*, 2004, 595: 135
- 29 Timár J, Joshi P, Starosta K, et al. Experimental evidence for chirality in the odd-A  $^{105}\text{Rh}$ . *Phys Lett B*, 2004, 598: 178–187
- 30 Alcántara-Núñez J A, Oliveira J R B, Cybulska E W, et al. Magnetic dipole and electric quadrupole rotational structures and chirality in  $^{105}\text{Rh}$ . *Phys Rev C*, 2004, 69: 024317
- 31 Luo Y X, Wu S C, Gilat J, et al. Level structures of  $^{110,111,112,113}\text{Rh}$  from measurements on  $^{252}\text{Cf}$ . *Phys Rev C*, 2004, 69: 024315
- 32 Joshi P, Wilkinson A R, Koike T, et al. First evidence for chirality in Tc isotopes: Spectroscopy of  $^{100}\text{Tc}$ . *Eur Phys J A*, 2005, 24: 23–29
- 33 Zhu S J, Hamilton J H, Ramayya A V, et al. Soft chiral vibrations in  $^{106}\text{Mo}$ . *Eur Phys J A*, 2005, 25: 459–462
- 34 Timár J, Vaman C, Starosta K, et al. Role of the core in degeneracy of chiral candidate band doubling:  $^{103}\text{Rh}$ . *Phys Rev C*, 2006, 73: 011301
- 35 Joshi P, Carpenter M P, Fossan D B, et al. Effect of gamma softness on the stability of chiral geometry: Spectroscopy of  $^{106}\text{Ag}$ . *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 102501
- 36 Timár J, Koike T, Pietralla N, et al. High-spin structure of  $^{105}\text{Ag}$ : Search for chiral doublet bands. *Phys Rev C*, 2007, 76: 024307
- 37 Suzuki T, Rainovski G, Koike T, et al. Lifetime measurement of candidate chiral doublet bands in the  $^{103,104}\text{Rh}$  isotopes with the recoil-distance Doppler-shift method in inverse kinematics. *Phys Rev C*, 2008, 78: 031302
- 38 Luo Y X, Zhu S J, Hamilton J H, et al. Evolution of chirality from gamma soft  $^{108}\text{Ru}$  to triaxial  $^{110,112}\text{Ru}$ . *Phys Lett B*, 2009, 670: 307–312
- 39 Sethi J, Palit R, Saha S, et al. Structure of nearly degenerate dipole bands in  $^{108}\text{Ag}$ . *Phys Lett B*, 2013, 725: 85–91
- 40 Tonev D, Yavahchova M S, Goutev N, et al. Candidates for twin chiral bands in  $^{102}\text{Rh}$ . *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 052501
- 41 Lieder E O, Lieder R M, Bark R A, et al. Resolution of chiral conundrum in  $^{106}\text{Ag}$ : Doppler-shift lifetime investigation. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 202502
- 42 Rather N, Datta P, Chattopadhyay S, et al. Exploring the origin of nearly degenerate doublet bands in  $^{106}\text{Ag}$ . *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 202503
- 43 Hartley D J, Riedinger L L, Riley M A, et al. Detailed spectroscopy of the chiral-twin candidate bands in  $^{136}\text{Pm}$ . *Phys Rev C*, 2001, 64: 031304
- 44 Hecht A A, Beausang C W, Zyromski K E, et al. Evidence for chiral symmetry breaking in  $^{136}\text{Pm}$  and  $^{138}\text{Eu}$ . *Phys Rev C*, 2001, 63: 051302
- 45 Koike T, Starosta K, Chiara C J, et al. Observation of chiral doublet bands in odd-odd  $N = 73$  isotones. *Phys Rev C*, 2001, 63: 061304
- 46 Bark R A, Baxter A M, Byrne A P, et al. Candidate chiral band in  $^{134}\text{La}$ . *Nucl Phys A*, 2001, 691: 577–598

- 47 Starosta K, Chiara C J, Fossan D B, et al. Role of chirality in angular momentum coupling for  $A \sim 130$  odd-odd triaxial nuclei:  $^{132}\text{La}$ . *Phys Rev C*, 2002, 65: 044328
- 48 Mergel E, Petrache C M, Lo Bianco G, et al. Candidates for chiral doublet bands in  $^{136}\text{Nd}$ . *Eur Phys J A*, 2002, 15: 417–420
- 49 Li X F, Ma Y J, Liu Y Z, et al. Search for the chiral band in the  $N = 71$  odd-odd nucleus  $^{126}\text{Cs}$ . *Chin Phys Lett*, 2002, 19: 1779–1781
- 50 Zhu S, Garg U, Nayak B K, et al. A composite chiral pair of rotational bands in the odd- $A$  nucleus  $^{135}\text{Nd}$ . *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 132501
- 51 Hecht A A, Beausang C W, Amro H, et al. Evidence for chiral symmetry breaking in  $^{140}\text{Eu}$ ? *Phys Rev C*, 2003, 68: 054310
- 52 Koike T, Starosta K, Chiara C J, et al. Systematic search of  $\pi h_{11/2} \otimes \nu h_{11/2}$  chiral doublet bands and role of triaxiality in odd-odd  $Z = 55$  isotopes:  $^{128,130,132,134}\text{Cs}$ . *Phys Rev C*, 2003, 67: 044319
- 53 Rainovski G, Paul E S, Chantler H J, et al. Candidate chiral twin bands in the odd-odd nucleus  $^{132}\text{Cs}$ : Exploring the limits of chirality in the mass  $A$  approximate to 130 region. *Phys Rev C*, 2003, 68: 024318
- 54 Roberts S P, Ahn T, Starosta K, et al. Low-spin studies of the  $\pi h_{11/2} \otimes \nu h_{11/2}$  structure in  $^{134}\text{Pr}$ . *Phys Rev C*, 2003, 67: 057301
- 55 Rainovski G, Paul E S, Chantler H J, et al. Planar and aplanar tilted bands in the odd-odd nucleus  $^{132}\text{Cs}$ . *J Phys G Nucl Part Phys*, 2003, 29: 2763–2775
- 56 Simons A J, Joshi P, Jenkins D G, et al. Evidence for chiral structures in  $^{130}\text{Cs}$ . *J Phys G Nucl Part Phys*, 2005, 31: 541–552
- 57 Grodner E, Srebrny J, Pasternak A A, et al.  $^{128}\text{Cs}$  as the best example revealing chiral symmetry breaking. *Phys Rev Lett*, 2006, 97: 172501
- 58 Petrache C M, Hagemann G B, Hamamoto I, et al. Risk of misinterpretation of nearly degenerate pair bands as chiral partners in nuclei. *Phys Rev Lett*, 2006, 96: 112502
- 59 Tonev D, de Angelis G, Petkov P, et al. Transition probabilities in  $^{134}\text{Pr}$ : A test for chirality in nuclear systems. *Phys Rev Lett*, 2006, 96: 052501
- 60 Wang S Y, Liu Y Z, Komatsubara I, et al. Candidate chiral doublet bands in the odd-odd nucleus  $^{126}\text{Cs}$ . *Phys Rev C*, 2006, 74: 017302
- 61 Mukhopadhyay S, Almeded D, Garg U, et al. From chiral vibration to static chirality in  $^{135}\text{Nd}$ . *Phys Rev Lett*, 2007, 99: 172501
- 62 Tonev D, de Angelis G, Brant S, et al. Question of dynamic chirality in nuclei: The case of  $^{134}\text{Pr}$ . *Phys Rev C*, 2007, 76: 044313
- 63 Zhao Y X, Komatsubara I, Ma Y J, et al. Observation of three-quasiparticle doublet bands in  $^{123}\text{I}$ : Possible evidence of chirality. *Chin Phys Lett*, 2009, 26: 082301
- 64 Grodner E, Sankowska I, Morek T, et al. Partner bands of  $^{126}\text{Cs}$ —first observation of chiral electromagnetic selection rules. *Phys Lett B*, 2011, 703: 46–50
- 65 Timár J, Starosta K, Kuti I, et al. Medium- and high-spin band structure of the chiral-candidate nucleus  $^{134}\text{Pr}$ . *Phys Rev C*, 2011, 84: 044302
- 66 Ma K Y, Lu J B, Yang D, et al. Candidate chiral doublet bands in  $^{128}\text{La}$ . *Phys Rev C*, 2012, 85: 037301
- 67 Petrache C M, Frauendorf S, Matsuzaki M, et al. Tilted axis rotation, candidates for chiral bands, and wobbling motion in  $^{138}\text{Nd}$ . *Phys Rev C*, 2012, 86: 044321
- 68 Kuti I, Timar J, Sohler D, et al. Medium- and high-spin band structure of the chiral candidate  $^{132}\text{La}$ . *Phys Rev C*, 2013, 87: 044323
- 69 Balabanski D L, Danchev M, Hartley D J, et al. Possible assignment of chiral twin bands in  $^{188}\text{Ir}$ . *Phys Rev C*, 2004, 70: 044305
- 70 Lawrie E A, Vymers P A, Lawrie J J, et al. Possible chirality in the doubly-odd  $^{198}\text{Tl}$  nucleus: Residual interaction at play. *Phys Rev C*, 2008, 78: 021305
- 71 Lawrie E A, Vymers P A, Vieu C, et al. Candidate chiral bands in  $^{198}\text{Tl}$ . *Eur Phys J A*, 2010, 45: 39–50
- 72 Masiteng P L, Lawrie E A, Ramashidzha T M, et al. Close near-degeneracy in a pair of four-quasiparticle bands in  $^{194}\text{Tl}$ . *Phys Lett B*, 2013, 719: 83–88
- 73 Masiteng P L, Lawrie E A, Ramashidzha T M, et al. Rotational bands and chirality in  $^{194}\text{Tl}$ . *Eur Phys J A*, 2014, 50: 119
- 74 Odegard S W, Hagemann G B, Bergström M, et al. Search for the wobbling mode built on triaxial super deformation. *Nucl Phys A*, 2001, 682: 427–432
- 75 Jensen D R, Hagemann G B, Hamamoto I, et al. Evidence for second-phonon nuclear wobbling. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 142503
- 76 Jensen D R, Hagemann G B, Hamamoto I, et al. Wobbling phonon excitations, coexisting with normal deformed structures in  $^{163}\text{Lu}$ . *Nucl Phys A*, 2002, 703: 3–44
- 77 Schönwaßer G, Hübel H, Hagemann G B, et al. One- and two-phonon wobbling excitations in triaxial  $^{165}\text{Lu}$ . *Phys Lett B*, 2003, 552: 9–16
- 78 Amro H, Ma W C, Hagemann G B, et al. The wobbling mode in  $^{167}\text{Lu}$ . *Phys Lett B*, 2003, 553: 197–203
- 79 Bringel P, Hagemann G B, Hübel H, et al. Evidence for wobbling excitation in  $^{161}\text{Lu}$ . *Eur Phys J A*, 2005, 24: 167–172
- 80 Hartley D J, Janssens R V F, Riedinger L L, et al. Wobbling mode in  $^{167}\text{Ta}$ . *Phys Rev C*, 2009, 80: 041304
- 81 Hartley D J, Janssens R V F, Riedinger L L, et al. Rotational structures and the wobbling mode in  $^{167}\text{Ta}$ . *Phys Rev C*, 2011, 83: 064307
- 82 Meng J, Qi B, Zhang S Q, et al. Chiral symmetry in atomic nuclei. *Mod Phys Lett A*, 2008, 23: 2560–2567
- 83 Qi B. Static and Dynamic Chirality in Atomic Nuclei. Dissertation for Doctoral Degree. Beijing: Peking University, 2009
- 84 Meng J, Chen Q B, Zhang S Q. Chirality in atomic nuclei: 2013. *Int J Mod Phys E*, 2014, 23: 1430016



- 85 Bark R A, Lieder E O, Lieder R M, et al. Chirality in atomic nuclei: 2013. *Int J Mod Phys E*, 2014, 23: 1461001
- 86 Chen Q B, Zhang S Q, Zhao P W, et al. Collective Hamiltonian for wobbling modes. *Phys Rev C*, 2014, 90: 044306
- 87 Chen Q B. Collective Hamiltonian for Nuclear Chiral and Wobbling Modes. Dissertation for Doctoral Degree. Beijing: Peking University, 2015
- 88 Peng J, Meng J, Zhang S Q. Description of chiral doublets in  $A \sim 130$  nuclei and the possible chiral doublets in  $A$  similar to 100 nuclei. *Phys Rev C*, 2003, 68: 044324
- 89 Peng J, Meng J, Zhang S Q. Breaking of chiral symmetry in  $^{104}\text{Rh}$  and its neighbouring nuclei. *Chin Phys Lett*, 2003, 20: 1223–1226
- 90 Koike T, Starosta K, Hamamoto I. Chiral bands, dynamical spontaneous symmetry breaking, and the selection rule for electromagnetic transitions in the chiral geometry. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 172502
- 91 Qi B, Zhang S Q, Wang S Y, et al. Examining  $B(M1)$  staggering as a fingerprint for chiral doublet bands. *Phys Rev C*, 2009, 79: 041302(R)
- 92 Rohozinski S G, Prochniak L, Starosta K, et al. Odd-odd nuclei as the core-particle-hole systems and chirality. *Eur Phys J A*, 2011, 47: 1–15
- 93 Rohozinski S C, Prochniak L, Droste C, et al. Signatures of chirality in the core-particle-hole systems. *Int J Mod Phys E*, 2011, 20: 364–372
- 94 Qi B, Wang S Y, Zhang S Q. Chiral doublet bands with  $\nu h_{11/2} \otimes \nu d_{5/2}^{-1}$  configuration in the particle rotor model. *Chin Phys Lett*, 2011, 28: 122101
- 95 Zhang S Q, Qi B, Wang S Y, et al. Chiral bands for a quasi-proton and quasi-neutron coupled with a triaxial rotor. *Phys Rev C*, 2007, 75: 044307
- 96 Wang S Y, Zhang S Q, Qi B, et al. Doublet bands in  $^{126}\text{Cs}$  in the triaxial rotor model coupled with two quasiparticles. *Phys Rev C*, 2007, 75: 024309
- 97 Higashiyama K, Yoshinaga N. Application of a quadrupole-coupling model to doublet bands in doubly-odd nuclei. *Eur Phys J A*, 2007, 33: 355–374
- 98 Wang S Y, Zhang S Q, Qi B, et al. Description of  $\pi g_{9/2} \otimes \nu h_{11/2}$  doublet bands in  $^{106}\text{Rh}$ . *Phys Rev C*, 2008, 77: 034314
- 99 Wang S Y, Zhang S Q, Qi B, et al. Chiral doublet bands in odd-odd nuclei. *Chin Phys C*, 2008, 32: 138–140
- 100 Lawrie E A, Shirinda O. Reaching degeneracy in two-quasiparticle chiral bands. *Phys Lett B*, 2010, 689: 66–71
- 101 Wang S Y, Qi B, Sun D P. Theoretical study of positive-parity doublet bands in  $^{124}\text{Cs}$ . *Phys Rev C*, 2010, 82: 027303
- 102 Shirinda O, Lawrie E A. Identifying chiral bands in real nuclei. *Eur Phys J A*, 2012, 48: 118
- 103 Qi B, Zhang S Q, Meng J, et al. Chirality in odd- $A$  nucleus  $^{135}\text{Nd}$  in particle rotor model. *Phys Lett B*, 2009, 675: 175–180
- 104 Qi B, Zhang S Q, Wang S Y, et al. Chirality in odd- $A$  Rh isotopes within the triaxial particle rotor model. *Phys Rev C*, 2011, 83: 034303
- 105 Qi B, Jia H, Zhang N B, et al. Possible multiple chiral doublet bands in  $^{107}\text{Ag}$ . *Phys Rev C*, 2013, 88: 027302
- 106 Dimitrov V I, Frauendorf S, Dönauf F. Chirality of nuclear rotation. *Phys Rev Lett*, 2000, 84: 5732–5735
- 107 Dimitrov V I, Donau F, Frauendorf S. Hybrid version of the tilted axis cranking model and its application to  $^{128}\text{Ba}$ . *Phys Rev C*, 2000, 62: 024315
- 108 Oi M, Walker P M. Three-dimensional rotation of even-even triaxial nuclei. *Phys Lett B*, 2003, 576: 75–82
- 109 Olbratowski P, Dobaczewski J, Dudek J, et al. Critical frequency in nuclear chiral rotation. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 052501
- 110 Olbratowski P, Dobaczewski J, Dudek J. Search for the Skyrme-Hartree-Fock solutions for chiral rotation in  $N = 75$  isotones. *Phys Rev C*, 2006, 73: 054308
- 111 Madokoro H, Meng J, Matsuzaki M, et al. Relativistic mean field description for the shears band mechanism in  $^{84}\text{Rb}$ . *Phys Rev C*, 2000, 62: 061301
- 112 Peng J, Meng J, Ring P, et al. Covariant density functional theory for magnetic rotation. *Phys Rev C*, 2008, 78: 024313
- 113 Zhao P W, Zhang S Q, Peng J, et al. Novel structure for magnetic rotation bands in  $^{60}\text{Ni}$ . *Phys Lett B*, 2011, 699: 181–186
- 114 Zhao P W, Peng J, Liang H Z, et al. Antimagnetic rotation band in nuclei: A microscopic description. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 122501
- 115 Zhao P W, Peng J, Liang H Z, et al. Covariant density functional theory for antimagnetic rotation. *Phys Rev C*, 2012, 85: 054310
- 116 Brant S, Vretenar D, Ventura A. Interacting boson fermion-fermion model calculation of the  $\pi h_{11/2} \otimes \nu h_{11/2}$  doublet bands in  $^{134}\text{Pr}$ . *Phys Rev C*, 2004, 69: 017304
- 117 Brant S, Tonev D, de Angelis G, et al. Dynamic chirality in the interacting boson fermion-fermion model. *Phys Rev C*, 2008, 78: 034301
- 118 Brant S, Petrache C M. Chiral bands in  $^{135}\text{Nd}$ : The interacting boson-fermion model approach. *Phys Rev C*, 2009, 79: 054326
- 119 Ganev H G, Brant S. Structure of the doublet bands in doubly odd nuclei: The case of  $^{128}\text{Cs}$ . *Phys Rev C*, 2010, 82: 034328
- 120 Higashiyama K, Yoshinaga N, Tanabe K. New band mechanism of doubly-odd nuclei around mass 130. *Phys Rev C*, 2005, 72: 024315
- 121 Yoshinaga N, Higashiyama K. Microscopic description of systematic doublet bands in the  $A \sim 130$  region. *J Phys G Nucl Part Phys*, 2005, 31: S1455
- 122 Yoshinaga N, Higashiyama K. A simple model for doublet bands in doubly odd nuclei. *Eur Phys J A*, 2006, 30: 343–346
- 123 Bhat G H, Sheikh J A, Dar W A, et al. Triaxial projected shell model description of high-spin band-structures in  $^{103,105}\text{Rh}$  isotopes. *Phys Lett B*, 2014, 738: 218–222
- 124 Hamamoto I. Wobbling excitations in odd- $A$  nuclei with high- $j$  aligned particles. *Phys Rev C*, 2002, 65: 044305
- 125 Hamamoto I, Hagemann G B. Quantized wobbling excitations with alignments. *Phys Rev C*, 2003, 67: 014319

- 126 Tanabe K, Sugawara-Tanabe K. Algebraic description of triaxially deformed rotational bands in odd mass nuclei. *Phys Rev C*, 2006, 73: 034305
- 127 Tanabe K, Sugawara-Tanabe K. Selection rules for electromagnetic transitions in triaxially deformed odd-A nuclei. *Phys Rev C*, 2008, 77: 064318
- 128 Matta J T, Garg U, Li W, et al. Transverse wobbling in  $^{135}\text{Pr}$ . *Phys Rev Lett*, 2015, 114: 082501
- 129 Shi W X, Chen Q B. Wobbling geometry in a simple triaxial rotor. *Chin Phys C*, 2015, 39: 054105
- 130 Frauendorf S. Description of multi-quasiparticle bands by the tilted axis cranking model. *Nucl Phys A*, 2000, 677: 115–170
- 131 Alameh D, Döna F, Frauendorf S. Chiral vibrations in the  $A = 135$  region. *Phys Rev C*, 2011, 83: 054308
- 132 Marshalek E R. The RPA at high spin and conservation laws. *Nucl Phys A*, 1977, 275: 416–444
- 133 Janssen D, Mikhailov I. Microscopical structure of the states of deformed nuclei in the neighborhood of the yrast line. *Nucl Phys A*, 1979, 318: 390–412
- 134 Marshalek E R. Nuclear wobbling motion. *Nucl Phys A*, 1979, 331: 429–463
- 135 Matsuzaki M. Gamma vibration and wobbling motion in  $^{182}\text{Os}$ . *Nucl Phys A*, 1990, 509: 269–286
- 136 Shimizu Y R, Matsuzaki M. Nuclear wobbling motion and electromagnetic transitions. *Nucl Phys A*, 1995, 588: 559–596
- 137 Kvasil J, Nazmitdinov R G. Wobbling excitations at high spins in  $A \sim 160$ . *Phys Lett B*, 2007, 650: 331–336
- 138 Matsuzaki M, Shimizu Y R, Matsuyanagi K. Wobbling motion in atomic nuclei with positive- $\gamma$  shapes. *Phys Rev C*, 2002, 65: 041303
- 139 Matsuzaki M, Ohtsubo S. Instability of nuclear wobbling motion and tilted axis rotation. *Phys Rev C*, 2004, 69: 064317
- 140 Matsuzaki M, Shimizu Y R, Matsuyanagi K. Nuclear moments of inertia and wobbling motions in triaxial superdeformed nuclei. *Phys Rev C*, 2004, 69: 034325
- 141 Matsuzaki M, Shimizu Y R, Matsuyanagi K. Dynamical moments of inertia associated with wobbling motion in the triaxial superdeformed nucleus. *Eur Phys J A*, 2004, 20: 189–190
- 142 Alameh D, Nazmitdinov R G, Doenau F. Vibrational excitations and tilted rotation in  $^{163}\text{Lu}$ . *Phys Scr*, 2006, T125: 139–141
- 143 Shimizu Y R, Shoji T, Matsuzaki M. Parametrizations of triaxial deformation and  $E2$  transitions of the wobbling band. *Phys Rev C*, 2008, 77: 024319
- 144 Shoji T, Shimizu Y R. Microscopic calculation of the wobbling excitations employing the Woods-Saxon potential as a nuclear mean-field. *Prog Theor Phys*, 2009, 121: 319–355
- 145 Chen Q B, Zhang S Q, Zhao P W, et al. Collective Hamiltonian for chiral modes. *Phys Rev C*, 2013, 87: 024314
- 146 Hill D L, Wheeler J A. Nuclear constitution and the interpretation of fission phenomena. *Phys Rev*, 1953, 89: 1102
- 147 Negele J W. The mean-field theory of nuclear structure and dynamics. *Rev Mod Phys*, 1982, 54: 913–1015
- 148 Marumori T. A microscopic theory of large amplitude nuclear collective motion. *Prog Theor Phys*, 1977, 57: 112–123
- 149 Marumori T, Maskawa T, Sakata F, et al. Self-consistent collective coordinate method for the large-amplitude nuclear collective motion. *Prog Theor Phys*, 1980, 64: 1294–1314
- 150 Matsuo M, Nakatsukasa T, Matsuyanagi K. Adiabatic selfconsistent collective coordinate method for large amplitude collective motion in nuclei with pairing correlations. *Prog Theor Phys*, 2000, 103: 959–979
- 151 Matsuyanagi K, Matsuo M, Nakatsukasa T, et al. Open problems in the microscopic theory of large-amplitude collective motion.
- 152 Pauli W. In *Handbuch Der Physik*. Berlin: Springer Verlag, 1933
- 153 Frauendorf S. Tilted cranking. *Nucl Phys A*, 1993, 557: 259–276
- 154 Ring P, Schuck P. *The Nuclear Many Body Problem*. Berlin: Springer Verlag, 1980

# Collective model of chiral and wobbling modes in nuclei

CHEN QiBo

*State Key Laboratory of Nuclear Physics and Technology, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China*

Recent progress of collective Hamiltonian for the chiral and wobbling modes in nuclei is reviewed. A brief introduction about the experimental and theoretical research statuses of the chirality and wobbling is given first. Procedures of constructing collective Hamiltonian, based on the tilted axis cranking approach, are shown in details. The newly developed collective Hamiltonian is used to investigate the chiral and wobbling modes. For the chiral modes, we study the microscopic mechanism of the energy difference between the chiral doublets with respect to the rotational frequency. It is demonstrated that the gradually increased potential barrier suppresses the tunneling probabilities between the left- and right-handed states and thus causes the decreasing of the energy difference. For the wobbling modes, the variation trends of wobbling frequencies for simple, longitudinal, and transverse wobblers are studied and found to be related to the stiffness of the collective potential.

**chiral symmetry, wobbling motion, collective Hamiltonian, tilted axis cranking, mass parameter, energy spectra**

**PACS:** 21.60.Ev, 21.10.Re, 23.20.Lv

**doi:** 10.1360/SSPMA2015-00359