微积分的应用

微积分在实际问题中应用非常广泛，本专题将用学过的高等数学知识来解决众多领域的实际问题。

对于动态问题，通常可以与变化率、进而与微分方程联系起来。即：可以考虑**建立微分方程模型**。

微分方程模型的建模步骤

1、翻译或转化

在实际问题中许多表示导数的常用词，如“速率”,“增长”(在生物学以及人口问题研究中),“衰变”(在放射性问题中)，以及“边际的”(在经济学中)等.

2、建立瞬时表达式

根据自变量有微小改变Δt时，因变量的增量ΔW，建立起在时段Δt上的增量表达式，令$\Delta t \to 0$，即得到 $\frac{dw}{dt}$ 的表达式.

3、配备物理单位

在建模中应注意每一项采用同样的物理单位.

4、确定条件

这些条件是关于系统在某一特定时刻或边界上的信息，它们独立于微分方程而成立，用以确定有关的常数。为了完整充分地给出问题的数学陈述，应将这些给定的条件和微分方程一起列出。

建立微分方程的方法

1、按变化规律直接列方程，如：

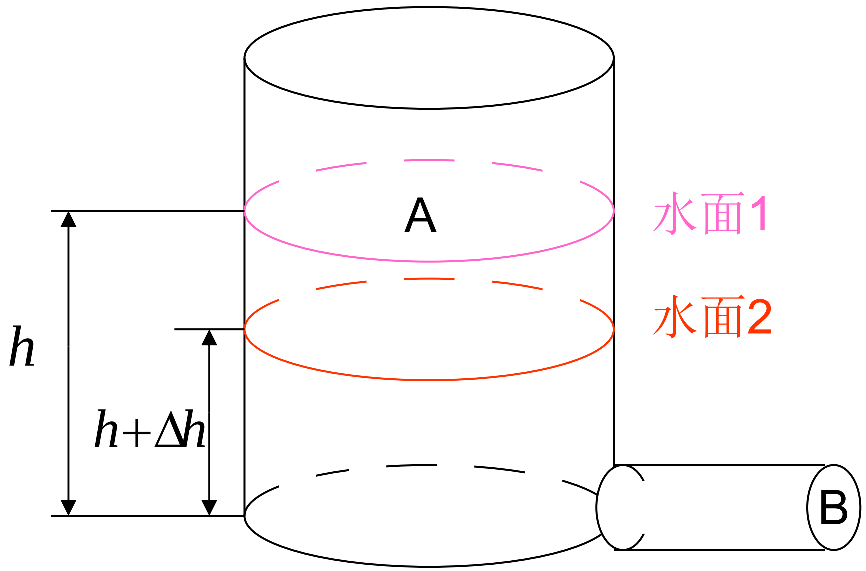
利用人们熟悉的力学、数学、物理、化学等学科中的规律，如牛顿第二定律，放射性物质的放射规律等。对某些实际问题直接列出微分方程.

2、模拟近似法，如：

在生物、经济等学科中，许多现象所满足的规律并不很清楚，而且现象也相当复杂，因而需根据实际资料或大量的实验数据，提出各种假设，在一定的假设下，给出实际现象所满足的规律，然后利用适当的数学方法得出微分方程。

水的流出问题

一横截面积为 A，高为 H 的水池内盛满了水，有池底一横截面积为 B 的小孔放水。设水从小孔流出的速度为v，求在任意时刻的水面高度和将水放空所需的时间。



问题分析

- 从水面1到水面2所失去的水量等于从小孔流出的水量

建模与求解

1）从水面1到水面2所失去的体积为 $A\Delta h$

--- 在时间内 Δt，实际损失的体积是 $-A\Delta h$

2）在同样时间内，水从小孔流出的体积为 $B\Delta S$

--- ΔS 是水在 Δt 时间内从小孔流出保持水平前进时所经过的距离

则

$$-A\Delta h = B\Delta S$$

两端同除以 Δt， 并令 $\Delta t \to 0$ 取极限得

$$-A\frac{dh}{dt} = B\frac{ds}{dt}$$

由能量守恒定理得到:

$$v = \sqrt{2gh}$$

且 $\dfrac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gh}$

可得一阶方程:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{B}{A}\sqrt{2gh} \qquad h(0) = H$$

解为

$$\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{B}{2A}\sqrt{2g}\,t$$

下面求将水放空的时间t*

令h=0 代入上式得

$$t^* = \frac{A}{B}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

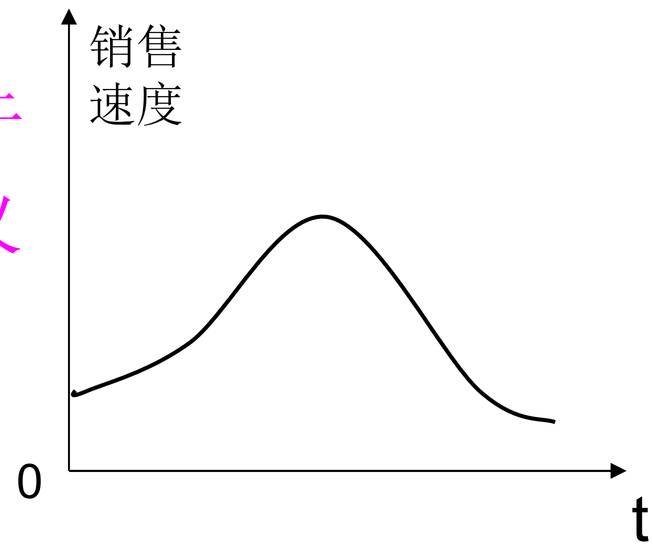
例如, 设 A=0.54 m², B=0.001 m², H=4.9m, g=9.8m/s². 则将水放空的时间为

$$t^* = \frac{0.54}{0.001}\times 1 = 540(s) = 9(\min)$$

新产品销售量

一种耐用新产品进入市场后,一般会经过一销售量先不断增加,然后下降的过程(产品的生命周期-PLC).有一种PLC曲线为钟型, 试建立模型分析此现象.

- 研究新产品销售量的变化规律, 对于制定生产计划以及促销策略很有意义



- 问题分析

  当一个新产品进入市场时，有关产品信息的传播途径如何？

分析

- 信息传播的途径:

  1) 厂家提供的广告 ---消费者以外的信息

  2) 一部分人购买后对产品的评价使周围人得到的信息

  ---消费者内部的信息

- 耐用产品的累积销售量可认为是购买者人数

建模与求解

K --- 潜在的消费者总数

n(t) --- t 时刻购买了该产品的人数

则在 $[t, t+\Delta t]$ 中, 购买者增量

$$\Delta n = \begin{cases} \Delta n_1 & \text{来自消费者外部的产品信息导致的购买者增量} \\ \Delta n_2 & \text{-------- 内部 --- - --------} \end{cases}$$

- 因外部信息导致的购买者增量应与未购买者人数成正比

$$\Delta n_1 = a(K - n(t))\Delta t$$

- 因内部信息导致的购买者增量应与已购买人数、未购买者人数之积成正比

$$\Delta n_2 = bn(t)(K - n(t))\Delta t$$

则

$$\Delta n(t) = a(K - n(t))\Delta t + bn(t)(K - n(t))\Delta t$$

两端同除以 Δt，并令得 $\Delta t \to 0$

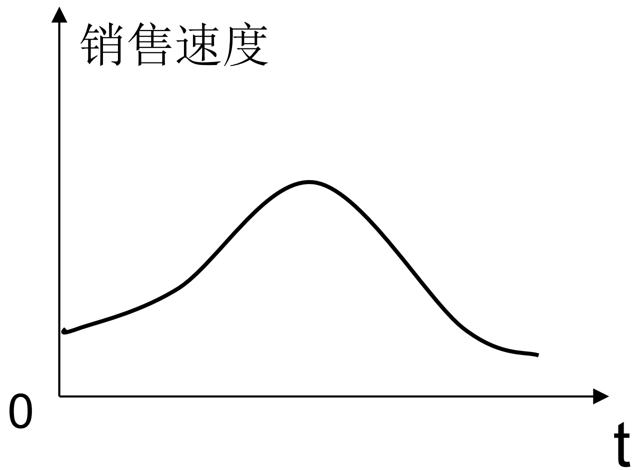
$$\frac{dn}{dt} = \left(K - n(t)\right)\left(a + bn(t)\right) \qquad n(0) = 0$$

解方程得

$$n(t) = K \frac{1 - e^{-(a+bK)t}}{1 + \frac{bK}{a} e^{-(a+bK)t}}$$

注： 其导函数曲线即为PLC曲线，

它的图形为钟型.



观众厅地面设计

在影视厅或报告厅，经常会为前边观众遮挡住自己的视线而苦恼。显然，场内的观众都在朝台上看，如果场内地面不做成前低后高的坡度模式，那么前边观众必然会遮挡后面观众的视线。试建立数学模型设计良好的报告厅地面坡度曲线。

问题的假设

1) 观众厅地面的纵剖面图一致，只需求中轴线上地面的起伏曲线即可。

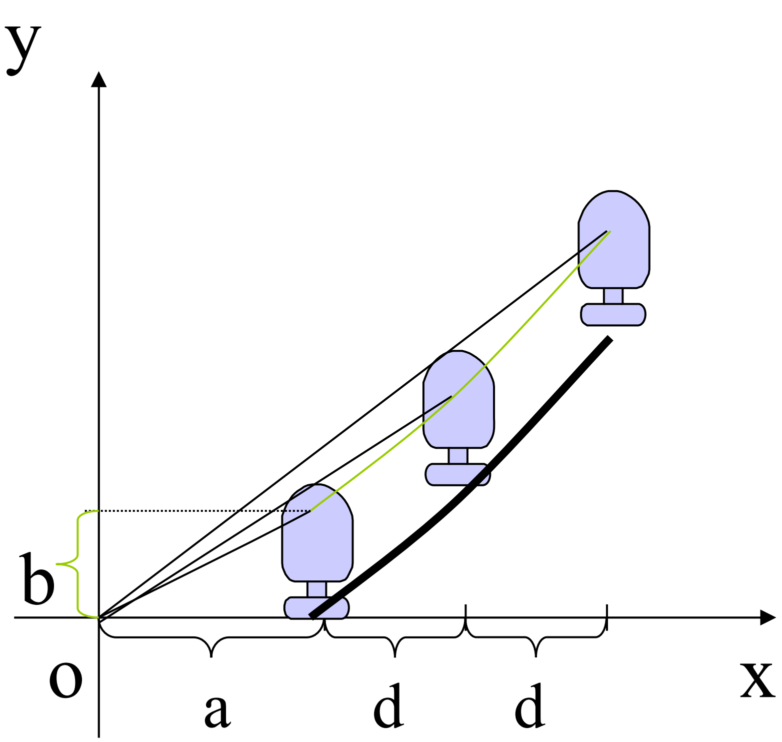
2) 同一排的座位在同一等高线上。

3) 每个坐在座位上的观众的眼睛与地面的距离相等。

4) 每个坐在座位上的观众的头与地面的距离也相等。

5) 所求曲线只要使观众的视线从紧邻的前一个座位的人的头顶擦过即可。

建立坐标系



o—处在台上的设计视点

a—第一排观众与设计视点的水平距离

b—第一排观众的眼睛到地面的垂直距离

d—相邻两排的排距

δ —视线升高标准

x—表示任一排与设计视点的水平距离

问题

求任一排x与设计视点o的竖直距离函数 $y = y(x)$

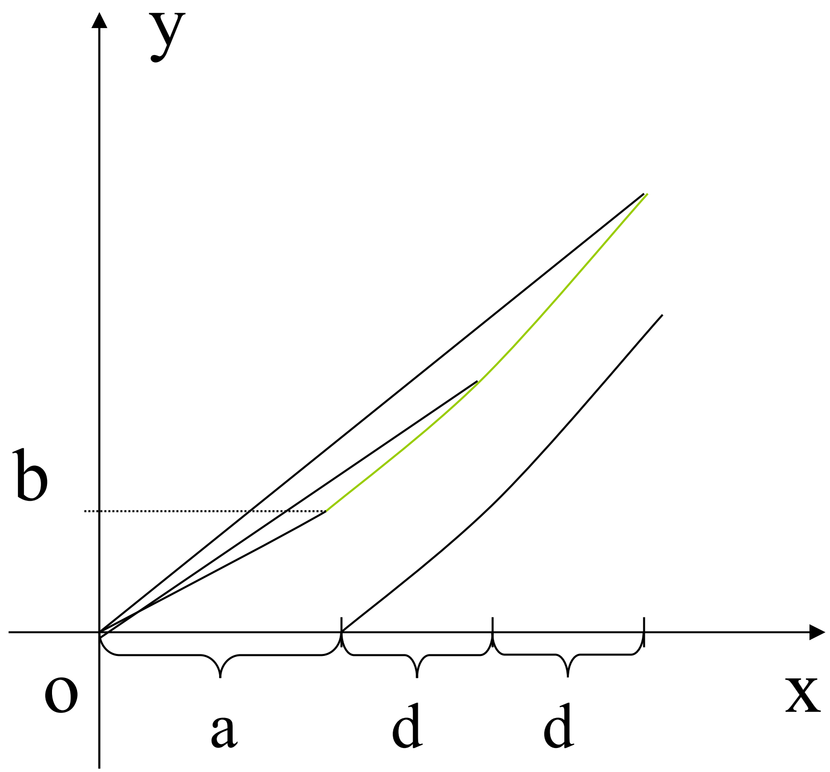
使此曲线满足视线的无遮挡要求。

建模

设眼睛升起曲线应满足微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$

初始条件 $y\big|_{x=a} = b$

1）从第一排起，观众眼睛与o点的连线的斜率随排数的增加而增加，而眼睛升起曲线显然与这些直线皆相交，故此升起曲线是凹的。

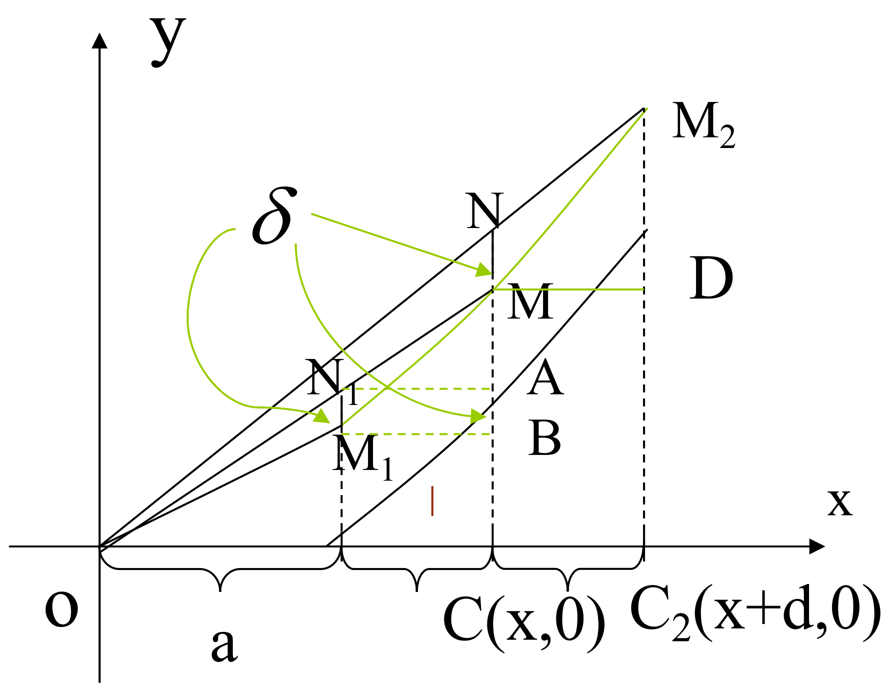


2）选择某排 $M\,(x, y)$ 和相邻排

$$M_1(x-d, y_1) \quad M_2(x+d, y_2)$$

$$K_{MM_1} < K_{y(x)} < K_{MM_2}$$

$$M_1N_1 = MN = AB = \delta$$



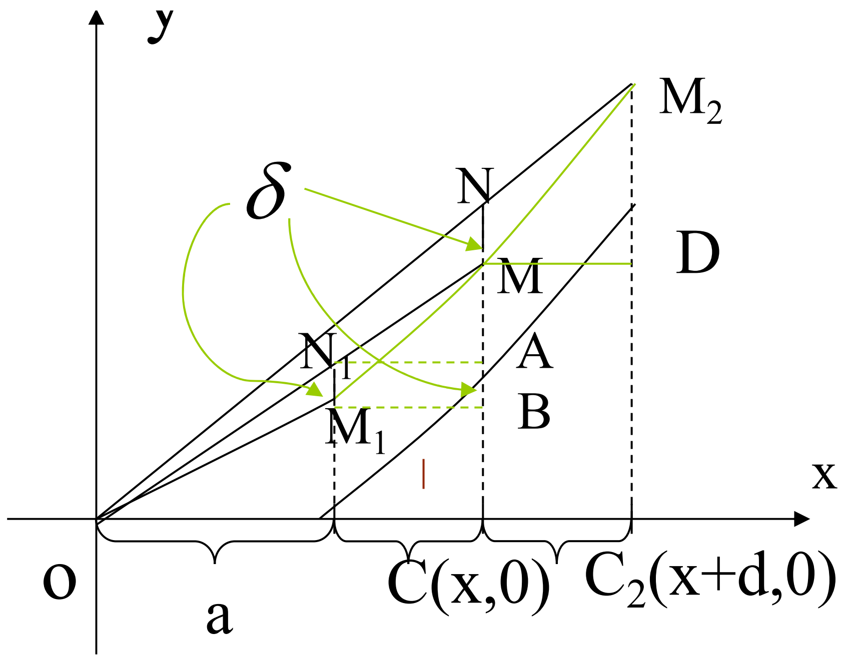
$$K_{MM_1} = \frac{MA+AB}{M_1B} = \frac{MA+\delta}{d}$$

ΔN_1MA 相似于 ΔoMC

$$\frac{MA}{y} = \frac{d}{x} \qquad MA = \frac{y}{x}d \qquad \boxed{K_{MM_1} = \frac{y}{x} + \frac{\delta}{d}}$$

再计算 K_{MM_2}

ΔoNC　相似于 ΔoM_2C_2



$$\frac{M_2D+y}{y+\delta}=\frac{d+x}{x}$$

$$M_2D=\frac{(d+x)(y+\delta)}{x}-y=\frac{yd}{x}+\frac{\delta d}{x}+\delta$$

$$K_{MM_2}=\frac{M_2D}{MD}=\frac{y}{x}+\frac{\delta}{x}+\frac{\delta}{d}\qquad K_{MM_1}=\frac{y}{x}+\frac{\delta}{d}$$

$$\frac{y}{x}+\frac{\delta}{d}<\frac{dy}{dx}<\frac{y}{x}+\frac{\delta}{x}+\frac{\delta}{d}$$

4 模型求解

微分不等式（**比较定理**）

设函数 $f(x,y), F(x,y)$ 定义在某个区域上，且满足

1）在D上满足存在唯一性定理的条件；

2）在D上有不等式 $f(x,y) < F(x,y)$

则初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ \phi(x_0) = y_0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = F(x,y) \\ \Phi(x_0) = y_0 \end{cases}$

的解 $\phi(x), \Phi(x)$ 在它们共同存在区间上满足

$$\phi(x) < \Phi(x), \quad \text{当 } x > x_0$$

$$\phi(x) > \Phi(x), \quad \text{当 } x < x_0$$

$$\frac{y}{x}+\frac{\delta}{d}<\frac{dy}{dx}<\frac{y}{x}+\frac{\delta}{x}+\frac{\delta}{d}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=\dfrac{y_1}{x}+\dfrac{\delta}{d}\\ y_1\big|_{x=a}=b\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\dfrac{dy_2}{dx}=\dfrac{y_2}{x}+\dfrac{\delta}{x}+\dfrac{\delta}{d}\\ y_2\big|_{x=a}=b\end{cases}$$

$$\boxed{y_1(x)=\frac{b}{a}x+\frac{\delta}{d}x\ln\frac{x}{a}}\qquad\qquad \boxed{y_2(x)=\frac{b}{a}x+\frac{\delta}{d}x\ln\frac{x}{a}+\delta(\frac{x}{a}-1)}$$

$$\frac{b}{a}x+\frac{\delta}{d}x\ln\frac{x}{a}<y(x)<\frac{b}{a}x+\frac{\delta}{d}x\ln\frac{x}{a}+\delta(\frac{x}{a}-1)$$

所求曲线的近似曲线方程（折衷法）

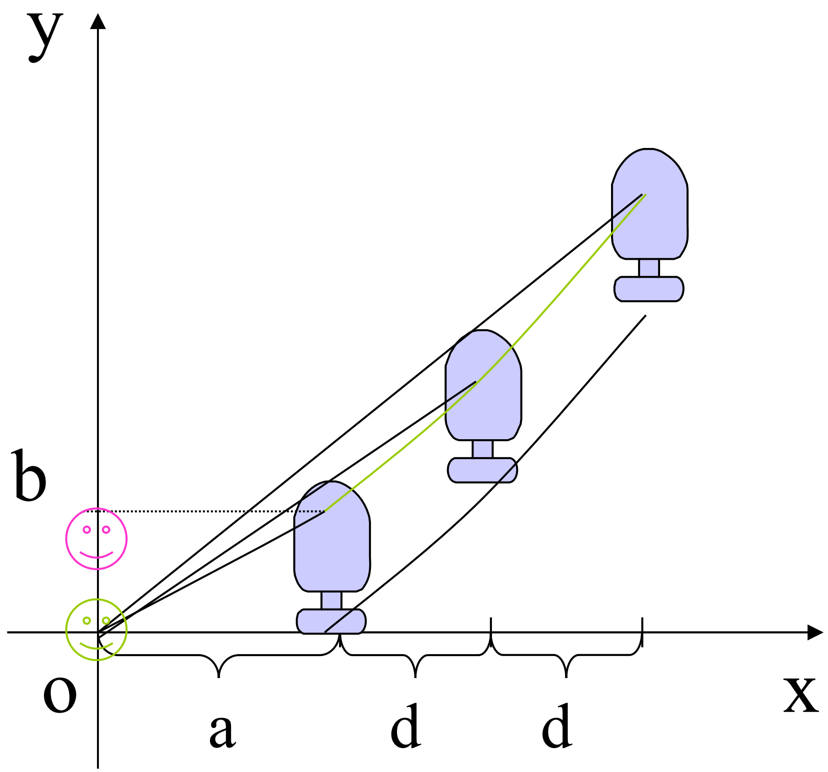
折衷法 $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

$$\boxed{y(x)=\frac{b}{a}x+\frac{\delta}{d}x\ln\frac{x}{a}+\frac{\delta}{2}(\frac{x}{a}-1)}$$

5 总结与讨论

方法　利用微分不等式建模；

有时只需求近似解。

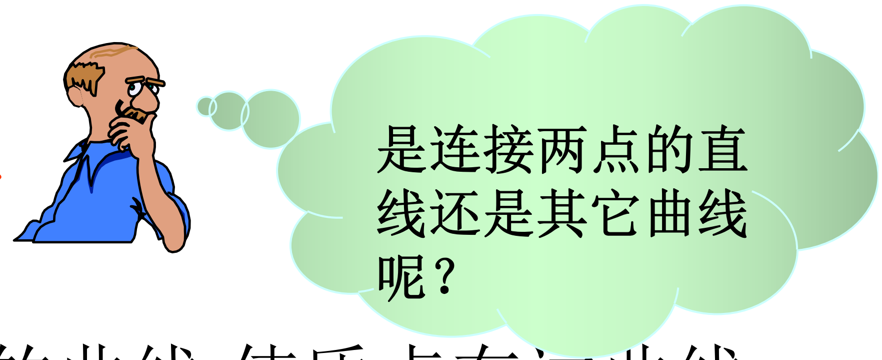


模型讨论

1）怎样减少地面的坡度？调整参数、相邻排错位。

2）衡量经济的指标？
座位尽量多、升起曲线占据的空间尽量少等。

最速降线问题



确定一个连接定点A、 B的曲线,使质点在这曲线上用最短的时间由A滑至B点 (忽略摩擦力和阻力).

速降线问题实验

速降线是否连接A和B的直线段？

牛顿的实验

在铅垂平面内，取同样的两个球，其中一个沿圆弧从A滑到B，另一个沿直线从A滑到B。发现沿圆弧的球先到B。伽利略也曾研究过这个问题，他认为速降线是圆弧线。

质点花时间最短的运动轨迹

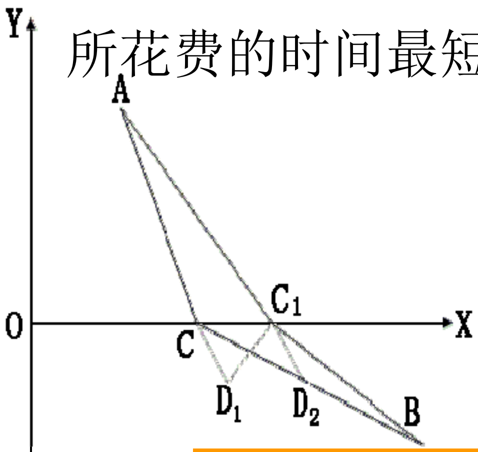
例 设有一质点从点A(x_1,y_1)运动到点B$(x_2,y_2)(y_1>0,y_2<0)$，该质点的运动速度在上半平面为常数 v1， 下半平面为常数v2 . 此质点应沿什么路径运动才能使花费时间最短?

证明

设AC、BC与y轴的夹角分别为i1, i2, 我们来证明当

$$\frac{\sin i_1}{v_1}=\frac{\sin i_2}{v_2}$$

所花费的时间最短。



设折点C的坐标为（x, 0），则质点经ACB所花时间

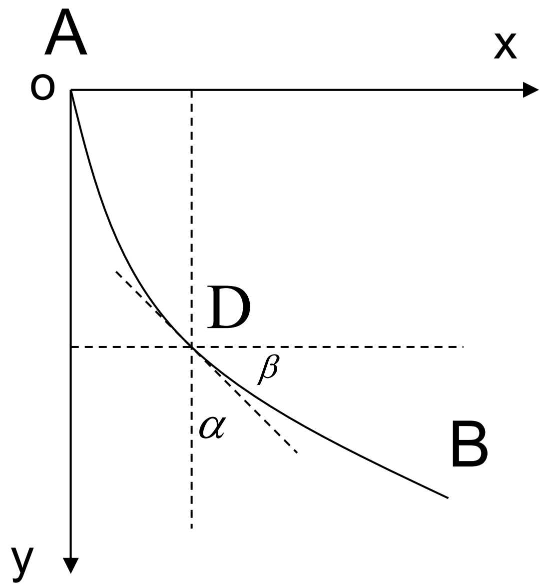
$$t=\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}}{v_2}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{(x-x_1)\Big/\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}{v_1}+\frac{(x-x_2)\Big/\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}}{v_2}=\frac{\sin i_1}{v_1}-\frac{\sin i_2}{v_2}$$

所以 $\dfrac{dt}{dx}=0$ 等价于 $\dfrac{\sin i_1}{v_1}=\dfrac{\sin i_2}{v_2}$

光的折射定律： 当光从一种介质进入另一种介质时入射角的正弦与折射角的正弦之比等于光在两种介质中的速度比.

建模与求解—方法1



选取坐标系,设想质点(像光线)能选择从A滑行到B的路径,使所需时间尽可能短.

按照折射定理 $\dfrac{\sin\alpha}{v}=c$

由于质点在下降时所增加的动能应等于所减少的势能，故质点在点D(*x*,*y*) 处的速度*v* 满足 $\frac{1}{2}mv^2=mgy \Rightarrow v=\sqrt{2gy}$

由几何关系得

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sec\beta}=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

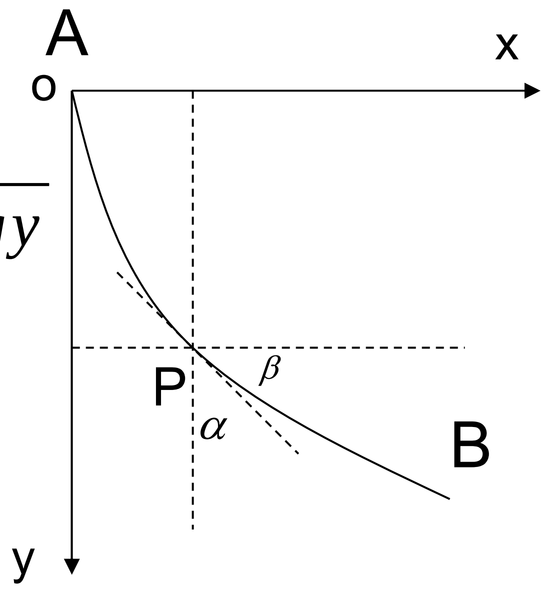
由此得微分方程

$$\begin{cases} y\left(1+(y')^2\right)=c_1 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

解为

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

建模与求解—方法2



s: 曲线从 A点到 P(x, y) 的速度 $v=\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$

由弧微分 $ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, 得

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$$

需取极小值的积分是

$$t(y(x))=\int_0^{x_B}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

泛函的极值问题

令 $f(y,y')=\dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$

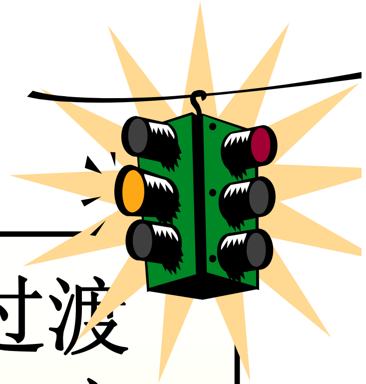
由变分理论知 $t(y(x))=\int_0^{x_B}f(y,y')dx$ 的解

问题可化为

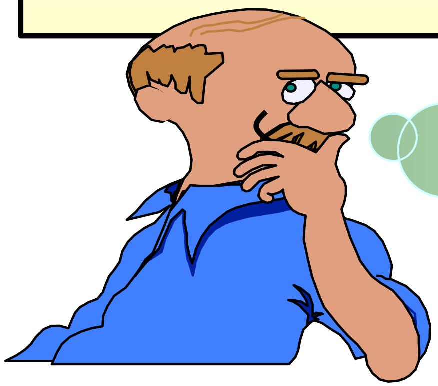
所满足的欧拉方程为 $\dfrac{\partial f}{\partial y}y'-f=c_1$

$$y\left(1+(y')^2\right)=c$$

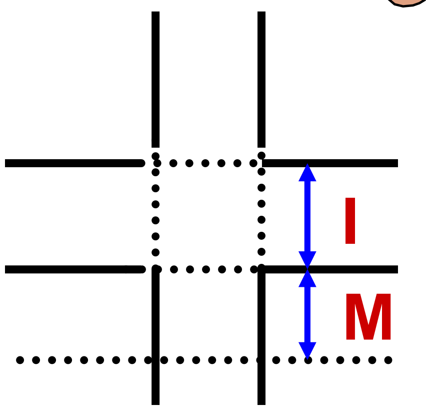
交通管理中的黄灯问题



交通灯在绿灯转换成红灯时，有一个过渡状态：亮一段时间的黄灯。请分析黄灯应当亮多久。



设想黄灯的作用是什么？不难看出，黄灯起的是警告的作用，意思是马上要转红灯了，假如能停住，请立即停车。停车是需要时间的，在这段时间内，车辆仍将向前行驶一段距离。在离街口距离为**M**（停车距离）处存在着一条停车线，见图。对于那些黄灯亮时已过线的车辆，则保证它们仍能穿过马路。



黄灯的持续时间 T 应包括:

- 驾驶员的决定时间(反应时间)
- 通过十字路口的时间
- 停车距离的驾驶时间

(2) 建模与求解

T_1　驾驶员的决定时间(反应时间) -----可测得

T_2　通过十字路口的时间

T_3　停车距离的驾驶时间　　　　则 $T=T_1+T_2+T_3$

假设：法定的行驶速度为 v_0, 十字路口的长度为 I ,典型的车身长度为 L, 则

$$T_2 = \frac{I + L}{v_0}$$

停车过程: 牛顿第二定律

设m为汽车质量, f 为刹车摩擦系数, x(t) 为行驶距离

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -fmg \\ x(0)=0,\ \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

积分一次: $\dfrac{dx}{dt} = -fgt + v_0$ $\Longrightarrow$ 刹车时间 $t_1 = \dfrac{v_0}{fg}$

再积分一次: $x(t) = -\dfrac{1}{2}fgt^2 + v_0 t$ $\Longrightarrow$ 停车距离 $x(t_1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{fg}$

则

$$T_3 = \frac{x(t_1)}{v_0} = \frac{1}{2}\frac{v_0}{fg}$$

药物在体内的分布

- 药物进入机体形成血药浓度(单位体积血液的药物量)
- 血药浓度需保持在一定范围内——给药方案设计
- 药物在体内吸收、分布和排除过程 ——药物动力学
- 建立房室模型——药物动力学的基本步骤

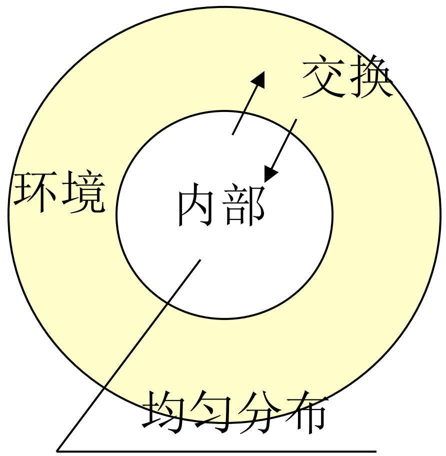
何为房室系统？

在用微分方程研究实际问题时，人们常常采用一种叫“房室系统”的观点来考察问题。根据研究对象的特征或研究的不同精度要求，我们把研究对象看成一个整体（单房室系统）或将其剖分成若干个相互存在着某种联系的部分（多房室系统）。

房室——机体的一部分，药物在一个房室内均匀分布（血药浓度为常数），在房室间按一定规律转移

房室具有以下特征：它由考察对象均匀分布而成，房室中考察对象的数量或浓度（密度）的变化率与外部环境有关，这种关系被称为“交换”且交换满足着总量守衡。以下我们将用房室系统的方法来研究药物在体内的分布。

单房室系统



药物分布的单房室模型

单房室模型是最简单的模型，它假设：体内药物在任一时刻都是均匀分布的，设t时刻体内药物的总量为$x(t)$；系统处于一种动态平衡中，即成立着关系式：

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{入}-\left(\frac{dx}{dt}\right)_{出}$$

药物的分解与排泄（输出）速率通常被认为是与药物当前的浓度成正比的，即：

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{出}=kx$$

药物的输入规律与给药的方式有关。下面，我们来研究一下在几种常见的给药方式下体内药体的变化规律。

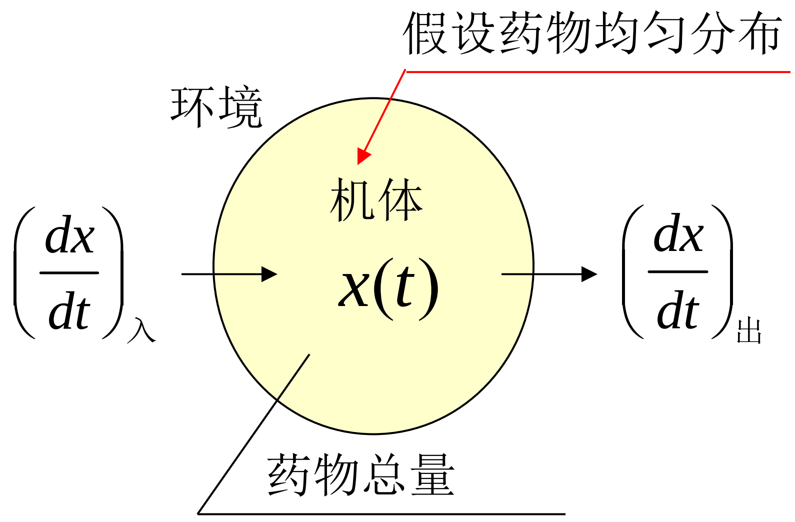
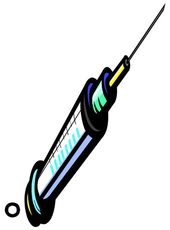


图3-8

情况1 快速静脉注射



在快速静脉注射时，总量为D的药物在瞬间被注入体内。设机体的体积为V，则我们可以近似地将系统看成初始总量为D，浓度为D/V，只输出不输入的房室，即系统可看成近似地满足微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + kx = 0 \\ x(0) = D \end{cases}$$

其解为：

$$x(t) = De^{-kt}$$

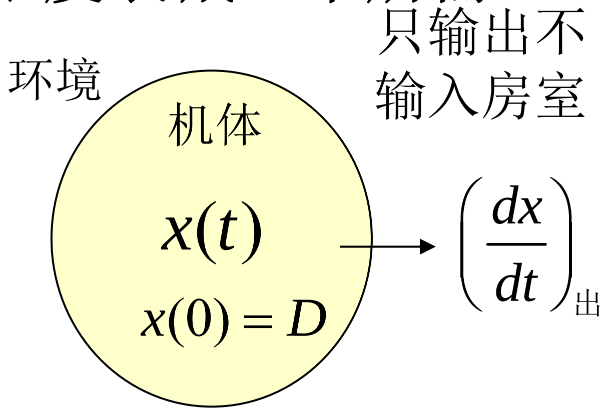
负增长率的Malthus模型

药物的浓度：

$$c(t) = \frac{D}{V}e^{-kt}$$

与放射性物质类似，医学上将血浆药物浓度衰减一半所需的时间称为药物的血浆半衰期：

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}$$



情况2 恒速静脉点滴

药物以恒速点滴方式进入体内，即：$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{\lambda} = K_0$

则体内药物总量满足：$\dfrac{dx}{dt} + kx = K_0$ （$x(0)=0$）

这是一个一阶常系数线性方程，其解为：

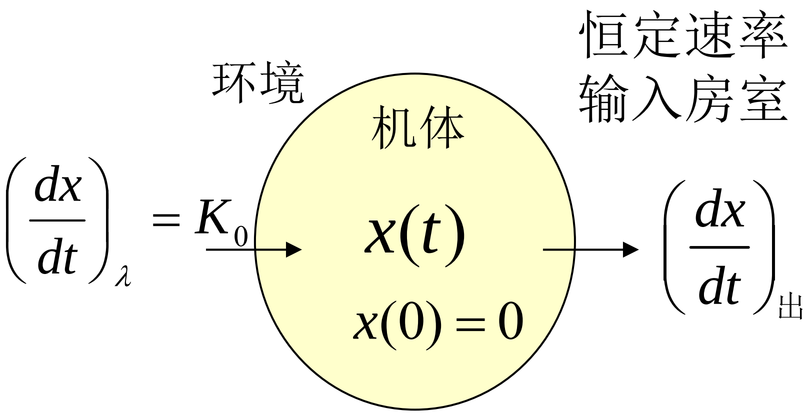
$$x(t) = \frac{K_0}{k}(1 - e^{-kt}) \quad \text{或} \quad C(t) = \frac{K_0}{Vk}(1 - e^{-kt})$$

易见：$\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = \dfrac{K_0}{Vk}$

对于多次点滴，设点滴时间为T_1，两次点滴之间的间隔时间设为T_2，则在第一次点滴结束时病人体内的药物浓度可由上式得出。其后T_2时间内为情况1。故：

$$C(t) = \frac{K_0}{Vk}(1 - e^{-kt}) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_1$$

$$C(t) = \frac{K_0}{Vk}(1 - e^{-kT_1})e^{-k(t-T_1)} \qquad T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + T_2$$



情况3 口服药或肌注

口服药或肌肉注射时，药物的吸收方式与点滴时不同，药物虽然瞬间进入了体内，但它一般都集中与身体的某一部位，靠其表面与肌体接触而逐步被吸收。设药物被吸收的速率与存量药物的数量成正比，记比例系数为K_1，即若记t时刻残留药物量为$y(t)$，则y满足：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -k_1 y \\ y(0) = D \end{cases}$$

D为口服或肌注药物总量

因而：

$$y(t) = De^{-k_1 t}$$

所以

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + kx = k_1 D e^{-k_1 t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

解得：

$$x(t) = \frac{k_1 D}{k_1 - k}(e^{-kt} - e^{-k_1 t})$$

从而药物浓度

$$C(t) = \frac{k_1 D}{V(k_1 - k)}(e^{-kt} - e^{-k_1 t})$$

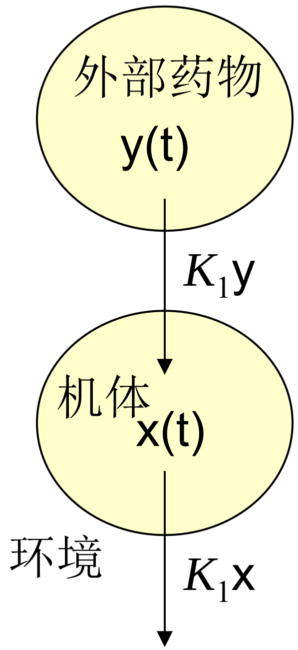


图3-9给出了上述三种情况下体内血药浓度的变化曲线。容易看出，快速静脉注射能使血药浓度立即达到峰值，常用于急救等紧急情况；口服、肌注与点滴也有一定的差异，主要表现在血药浓度的峰值出现在不同的时刻，血药的有效浓度保持时间也不尽相同。

我们已求得三种常见给药方式下的血药浓度$C(t)$，当然也容易求得血药浓度的峰值及出现峰值的时间，因而，也不难根据不同疾病的治疗要求找出最佳治疗方案。

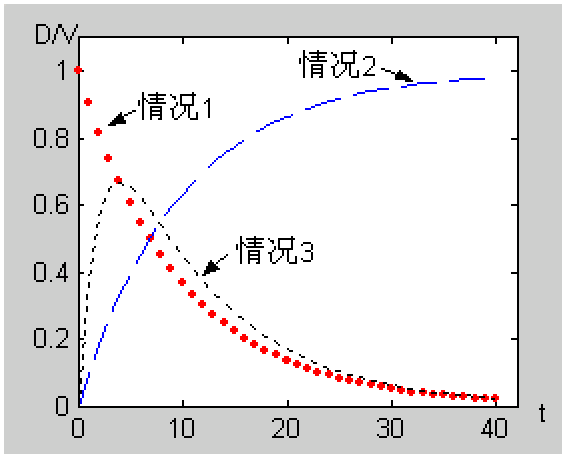
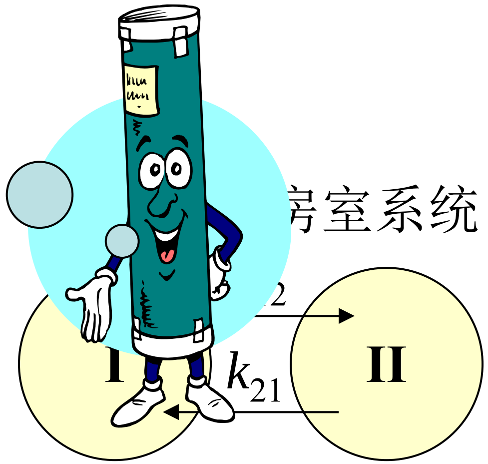


图3-9

上述研究是将机体看成一个均匀分布的同质单元，故被称单房室模型，但机……样。药物进入血液，通过……又通过交换进入……的数学模型就……关联关系，这就……

当差异较大的部分较多时，可以类似建立多房室系统，即N房室系统，包括：中心室(心、肺、肾等)和周边室(四肢、肌肉等)

图3-10表示的是……的两房室模……其间的k_{12}表示由室I渗透到室II的变化率前的系数，而k_{21}则表示由室II返回室I的变化率前的系数，它们刻划了两室间的内在联系，其值应当用实验测定，使之尽可能地接近实际情况。



为什么要用三级火箭来发射人造卫星

- 为什么不能用一级火箭，而必须用多级火箭来发射人造卫星?
- 为什么一般都采用三级火箭系统 ?

- **为什么不能用一级火箭发射人造卫星？**

（1）卫星能在轨道上运动的最低速度

假设：

（i）卫星轨道为过地球中心的某一平面上的圆，卫星在此轨道上作匀速圆周运动；

（ii）地球是固定于空间中的均匀球体，其它星球对卫星的引力忽略不计。

分析：

地球对卫星的引力为：$F = \frac{km}{r^2}$

在地面有 $\frac{km}{R^2} = mg$ 得 $k = gR^2$ 故

$$F = mg\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

R为地球半径，约为6400公里

卫星所受到的引力也就是它作匀速圆周运动的向心力，故：$F = \frac{mv^2}{r}$

从而 $v = R\sqrt{\frac{g}{r}}$

取g=9.81m/s²,R=6400km,r=7000km,求得：

送入高度为600km的轨道，火箭的末速度为7.6km/s

（2）火箭推进力及速度的分析

假设：不计空气阻力和重力

分析：记火箭在时刻 **t** 的质量和速度分别为$m(t)$ 和 $v(t)$，有

$$m(t+\Delta t) - m(t) = \frac{dm}{dt}\Delta t + O(\Delta t^2)$$

记火箭喷出的气体相对于火箭的速度为**u**（常数），由动量守恒定理：

$$m(t)v(t) = m(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - (\frac{dm}{dt}\Delta t)(v(t) - u) + O(\Delta t^2)$$

得 $m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u$ 由此解得：$v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$

推力等于燃料消耗的速度与气体相对于火箭运动速度的乘积

v_0和m_0一定的情况下，火箭速度$v(t)$由喷发速度u及质量比决定。

（3）火箭推进力及速度的分析

现将火箭—卫星系统的质量分成三部分：

（i）m_p（有效负载，如卫星）

（ii）m_f（燃料质量）

（iii）m_s（结构质量——如外壳、燃料容器及推进器）。

最终质量为 m_P+m_S, 初始速度为0，所以末速度：

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right)$$

一般地

$$m_s = \lambda(m_f + m_s) = \lambda(m_0 - m_p) \qquad \lambda \text{ 为常数}$$

则末速度为

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{\lambda m_0 + (1-\lambda)m_p}\right)$$

特别地，当$m_P=0$时

$$v = u\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

已知 u=3km/s, 通常取 λ=0.1,
则v约为7km/s

发射空壳火箭，其末速度也不过7公里/秒。目前根本不可能用一级火箭发射人造卫星

火箭推进力在加速整个火箭时，其实际效益越来越低。如果将结构质量在燃料燃烧过程中不断减少，那么末速度能达到要求吗？

（4）理想火箭模型

假设：记结构质量 m_s 在 m_s+m_f 中占的比例为 λ，假设火箭能随时抛弃无用的结构，结构质量与燃料质量以 λ 与（1－ λ ）的比例同时减少。

由动量守恒得

$$m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)-\lambda\frac{dm}{dt}\Delta t v(t)-(1-\lambda)\frac{dm}{dt}\Delta t(v(t)-u)+O(\Delta t^2)$$

得 $$-m\frac{dv}{dt}=(1-\lambda)u\frac{dm}{dt} \Longrightarrow v(t)=(1-\lambda)u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

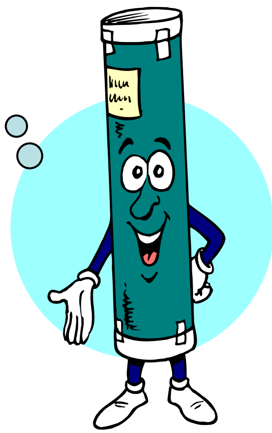
理想火箭与一级火箭最大的区别在于，当火箭燃料耗尽时，结构质量也逐渐抛尽，它的最终质量为 m_P

所以最终速度为： $$v=(1-\lambda)u\ln\left(\frac{m_0}{m_p}\right)$$

$$v=(1-\lambda)u\ln\left(\frac{m_0}{m_p}\right)$$

只要m_0足够大，我们可以使卫星达到我们希望它具有的任意速度。

考虑到空气阻力和重力等因素，估计（按比例的粗略估计）发射卫星要使υ=10.5公里/秒才行，则可推算出m_0/m_p约为50,即发射一吨重的卫星大约需要50吨重的理想火箭



（5）理想过程的实际逼近——多级火箭卫星系统

记火箭级数为n，当第i级火箭的燃料烧尽时，第$i+1$级火箭立即自动点火，并抛弃已经无用的第i级火箭。用m_i表示第i级火箭的质量，m_P表示有效负载。

先作如下假设：

（i）设各级火箭具有相同的λ,即i级火箭中λm_i为结构质量，（1－λ）m_i为燃料质量。

（ii）设$m_1=k(m_2+m_P)$， $m_2=km_P$

考虑二级火箭：当第一级火箭燃烧完时，其末速度为：

$$v_1 = u\ln\frac{m_1+m_2+m_p}{\lambda m_1+m_2+m_p}$$

当第二级火箭燃尽时，末速度为：

$$v_2 = v_1 + u\ln\frac{m_2+m_p}{\lambda m_2+m_p} = u\ln\left(\frac{m_1+m_2+m_p}{\lambda m_1+m_2+m_p}\bullet\frac{m_2+m_p}{\lambda m_2+m_p}\right)$$

又由假设（ii），$m_2=km_P$，$m_1=k(m_2+m_P)$，代入上式，仍设u=3公里/秒，且为计算方便，近似取λ=0.1，则可得

$$\upsilon_2 = 3\ln\left[\frac{\left(\dfrac{m_1}{m_2+m_P}+1\right)}{\left(\dfrac{0.1m_1}{m_2+m_P}+1\right)}\bullet\frac{\left(\dfrac{m_2}{m_P}+1\right)}{\left(\dfrac{0.1m_2}{m_P}+1\right)}\right] = 3\ln\left(\frac{k+1}{0.1k+1}\right)^2 = 6\ln\left(\frac{k+1}{0.1k+1}\right)$$

要使υ_2=10.5公里/秒，则应使: $\dfrac{k+1}{0.1k+1} = e^{\frac{10.5}{6}} \approx 5.75$

即k≈11.2，而: $\dfrac{m_1+m_2+m_P}{m_P} \approx 149$

三级火箭比二级火箭几乎省了一半

类似地，可以推算出三级火箭:

$$\upsilon_3 = u\ln\left(\frac{m_1+m_2+m_3+m_P}{\lambda m_1+m_2+m_3+m_P}\bullet\frac{m_2+m_3+m_P}{\lambda m_2+m_3+m_P}\bullet\frac{m_3+m_P}{\lambda m_3+m_P}\right)$$

在同样假设下: $\upsilon_3 = 3\ln\left(\dfrac{k+1}{0.1k+1}\right)^3 = 9\ln\left(\dfrac{k+1}{0.1k+1}\right)$

要使υ_3=10.5公里/秒，则$(k+1)/(0.1k+1)\approx 3.21$，k≈3.25，而（$m_1+m_2+m_3+m_P$）/ $m_P \approx 77$。

是否三级火箭就是最省呢？最简单的方法就是对四级、五级等火箭进行讨论。

考虑N级火箭：

记n级火箭的总质量（包含有效负载m_P）为m_0，在相同的假设下可以计算出相应的m_0/m_P的值，见下表

n（级数）	1	2	3	4	5	…	∞（理想）
火箭质量（吨）	/	149	77	65	60	…	50

- 由于工艺的复杂性及每节火箭都需配备一个推进器，所以使用四级或四级以上火箭是不合算的，三级火箭提供了一个最好的方案。
- 当然若燃料的价钱很便宜而推进器的价钱很贵切且制作工艺非常复杂的话，也可选择二级火箭。

（6）火箭结构的优化设计

前面假设(ii)有点强加的味道。现去掉该假设，在各级火箭具有相同 λ 的粗糙假设下，来讨论火箭结构的最优设计。记：

$$a_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}$$

$$a_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}$$

$$a_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}$$

则

$$a_1 a_2 a_3 = \frac{m_0}{m_p}, \quad (m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\frac{m_1}{m_p + m_2 + m_3} = a_1 - 1,$$

$$\frac{m_2}{m_p + m_3} = a_2 - 1, \quad \frac{m_3}{m_p} = a_3 - 1,$$

$$\frac{v}{u} = \ln\left(\frac{a_1}{\lambda(a_1 - 1) + 1} \frac{a_2}{\lambda(a_2 - 1) + 1} \frac{a_3}{\lambda(a_3 - 1) + 1}\right)$$

等价于

$$\min \quad [\lambda(a_1-1)+1][\lambda(a_2-1)+1][\lambda(a_3-1)+1]$$
$$\textit{subject to} \quad a_1a_2a_3 = m_0/m_p$$

的条件极值。

利用Lagrange乘子法，设Lagrange函数

$$L(a_1,a_2,a_3,\sigma)$$
$$=[\lambda(a_1-1)+1][\lambda(a_2-1)+1][\lambda(a_3-1)+1]$$
$$-\sigma(a_1a_2a_3-m_0/m_p)$$

求导得：

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = \lambda[\lambda(a_2 - 1) + 1][\lambda(a_3 - 1) + 1] - \sigma a_2 a_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = \lambda[\lambda(a_1 - 1) + 1][\lambda(a_3 - 1) + 1] - \sigma a_1 a_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_3} = \lambda[\lambda(a_1 - 1) + 1][\lambda(a_2 - 1) + 1] - \sigma a_1 a_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -a_1 a_2 a_3 + m_0 / m_p$$

由对称性我们知道这3个数相等时v/u最大。