Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 14. Дискретные случайные величины

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru

Структура лекции

1. Случайные величины
   - Определение
   - Закон распределения
2. Операции над случайными величинами
   - Сложение случайных величин
3. Числовые характеристики случайных величин
4. Законы распределения случайных величин
   - Биномиальный закон распределения
   - Геометирческий закон распределения
   - Гипергеометирческий закон распределения
   - Закон распределения Пуассона

Пусть

- Ω — пространство элементарных событий некоторого опыта,
- X — конечное или счетное числовое множество.

Определение

Функция, сопоставляющая каждому исходу пространства Ω некоторый элемент множества X, называется дискретной случайной величиной.

$$X = X(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

Событие связанное со случайной величиной X — любое подмножество ее множества значений.

Примеры случайных величин

- Опыт с подбрасыванием игральной кости.
  - Событие ω — положение игральной кости
  - Величина X — „число очков, выпавших при однократном подбрасывании кости“.
- Опыт с магазином.
  - Событие ω — посещение магазина очередным покупателем.
  - Величина $Y = Y(\omega)$ — „число покупателей в магазине в течение часа“.

Предположим, $X = X(\omega)$ — дискретная случайная величина, значениями которой являются числа

$$x_1 = X(\omega_1), x_2 = X(\omega_2), \dots, x_n = X(\omega_n),\ ldots$$

Сопоставим каждому x_i вероятность

$$p_i = p(X = x_i) = p(\omega_i).$$

Сумма вероятностей всех значений случайной величины равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Определение

Отображение, при котором каждому возможному значению дискретной случайной величины соответствует вероятность

Каждая таблица

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}, \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

задает некоторую дискретную случайную величину.
При этом $p(X = x_i) = p_i$

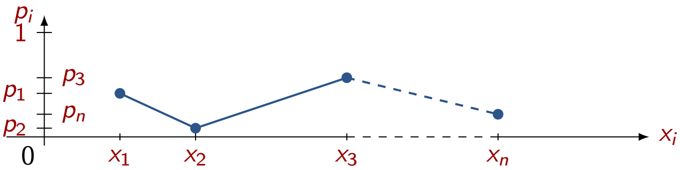


График закона распределения называется многоугольником распределения

Пример I

Пример

Делопроизводитель написал три письма и подписал три конверта. Его помощник, не задумываясь о содержании писем, разложил их по конвертам писем и отправил. Составьте закон распределения величины X — число человек, получивших адресованные именно им письма.

- Определим значения случайной величины X:
  - $X = 0$, если ни один из адресатов не получил своё письмо.
  - $X = 1$, если только один из адресатов получил своё письмо.
  - $X = 2$, если только два адресата получили свои письма.
  - $X = 3$, если все адресаты получили свои письма.
- Письма можно разложить по конвертам $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами

Пример II

- $X = 3$ можно получить одним способом: $P(X = 3) = \frac{1}{6}$

1	2	3
1	2	3

- $X = 2$ не наступит никогда: $P(X = 2) = 0$;
- $X = 1$ наступает в трех случаях $P(X = 1) = \frac{3}{6} - \frac{1}{2}$:

1	2	3
1	3	2

1	2	3
3	2	1

1	2	3
2	1	3

Пример III

- $X = 0$ наступает в трех случаях: $P(X=0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \end{array}$$

- Составим закон распределения:

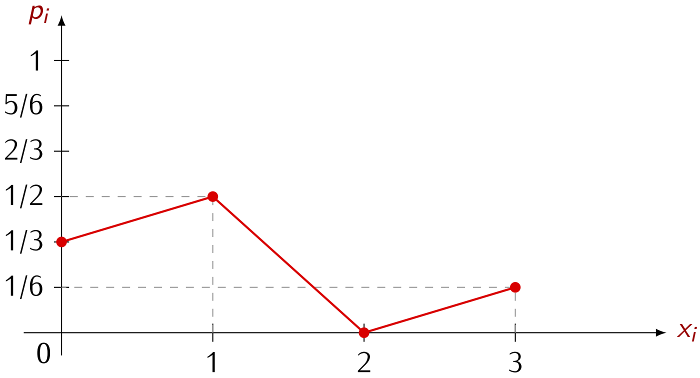
$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{6} \end{array}$$

- Проверим корректность

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{6} = 1$$

Пример IV

- Построим многоугольник распределения:



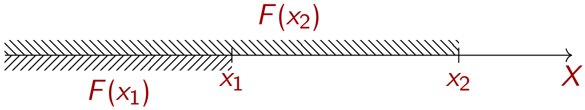
Определение

Функцией распределения случайной величины называется функция

$$F(x) = p(X < x).$$

- определенная на $(-\infty; +\infty)$;
- принимающая каждой точке x значение вероятности события „ Значение случайной величины меньшее, чем x“.

Геометирческий смысл



Для ДСВ X, значения которой $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функция распределения имеет вид

$$f(x) = \sum_{x_k < x} p(X = x_k)$$

Вычислим значения функции распределения $F(x)$

- При $x \leqslant x_1$ $\quad F(x) = P(X < x) = 0.$
- При $x_1 < x \leqslant x_2$ $\quad F(x) = P(X < x) = P(X = x_1) = p_1.$
- При $x_2 < x \leqslant x_3$ $\quad F(x) = P(X < x) = p_1 + p_2.$
- При $x_{n-1} < x \leqslant x_n$ $\quad F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}.$
- При $x > x_n$ $\quad F(x) = P(X < x) = 1.$

Пример

Рассмотрим закон распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

и построим функцию распределения $F(x)$:

- $x \leqslant 0$:

$$F(x) = p(X < x) = 0$$

- $0 < x \leqslant 1$:

$$F(x) = p(X < x) = p(X = 0) = \frac{1}{3}$$

Функция распределения ДСВ и ее график II

- $1 < x \leqslant 2$:

$$F(x) = p(X < x) = p(X \in \{0, 1\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

- $2 < x \leqslant 3$:

$$F(x) = p(X < x) = p(X \in \{0, 1, 2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{5}{6}$$

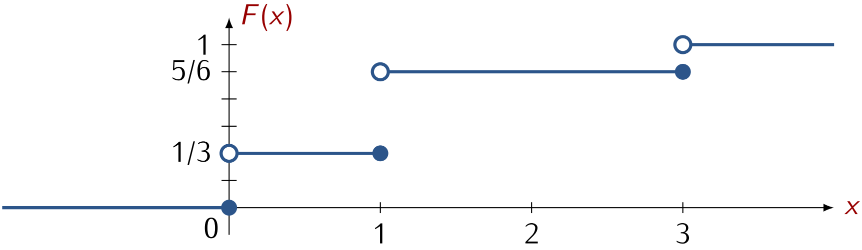
- $x > 3$:

$$F(x) = p(X < x) = p(X \in \{0, 1, 2, 3\}) = 1$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1/3, & 0 < x \leqslant 1, \\ 5/6, & 0 < x \leqslant 3, \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

Ее график:



Свойства функции распределения

- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$
- $F(x)$ не убывающая: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2)$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (a, b) равна разности значений функции распределения в правом и левом концах интервала:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

Определение

Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Умножение ДСВ на число

Определение

Произведением kX случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i.

Пример:

Пусть

X:

x_i	-2	1	2
p_i	0.5	0.3	0.2

Тогда $Y = 3X$ имеет вид

Y:

y_i	-6	3	6
p_i	0.5	0.3	0.2

Степень ДСВ

Определение

n–й степенью случайной величины X, называется случайная величина X^n, которая принимает значения x_i^n с теми же вероятностями p_i

Пример:

- Пусть

X:

x_i	-2	1	2
p_i	0.5	0.3	0.2

- Тогда $Y = X^2$ имеет вид

Y:

y_i	4	1	4
p_i	0.5	0.3	0.2

- По теореме о сумме несовместных событий:

Y:

y_i	1	4
p_i	0.3	0.7

Сумма и произведение независимых ДСВ

Определение

Суммой независимых ДСВ X и Y называется случайная величина $Z = X + Y$, которая принимает все возможные значения вида $z_{ij} = x_i + y_j$ с вероятностями

$$p_{ij} = P((X = x_i) \cdot (Y = y_j)) = p_i \cdot p'_j$$

Определение

Произведением независимых ДСВ X и Y называется случайная величина $Z = X \cdot Y$, которая принимает все возможные значения вида $z_{ij} = x_i \cdot y_j$ с вероятностями

$$p_{ij} = P((X = x_i) \cdot (Y = y_j)) = p_i \cdot p'_j$$

Даны ДСВ X:

x_i	-2	1	2
p_i	0.5	0.3	0.2

Y:

y_i	0	2	4
p'_i	0.1	0.6	0.3

Вычислить сумму $Z = X + Y$.

$x_i + y_j$

$x_i \backslash y_j$	0	2	4
-2	-2	0	2
1	1	3	5
2	2	4	6

$p_{ij} = p_i \cdot p'_j$

$p_i \backslash p'_j$	0.1	0.6	0.3
0.5	0.05	0.3	0.15
0.3	0.03	0.18	0.09
0.2	0.02	0.12	0.06

$$p(Z = 2) = 0.15 + 0.02 = 0.17$$

$X + Y$:

z_i	-2	0	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	0.05	0.3	0.03	0.17	0.18	0.12	0.09	0.06	1

Даны ДСВ X:

x_i	-2	1	2
p_i	0.5	0.3	0.2

Y:

y_i	0	2	4
p'_i	0.1	0.6	0.3

Вычислить произведение $Z = X \cdot Y$.

$x_i \cdot y_j$

x_i \ y_j	0	2	4
-2	0	-4	-8
1	0	2	4
2	0	4	8

$p_{ij} = p_i \cdot p'_j$

p_i \ p'_j	0.1	0.6	0.3
0.5	0.05	0.3	0.15
0.3	0.03	0.18	0.09
0.2	0.02	0.12	0.06

$$p(Z = 0) = 0.05 + 0.03 + 0.02 = 0.1$$

$$p(Z = 4) = 0.09 + 0.12 = 0.21$$

XY:

z_i	-8	-4	0	2	4	8	Σ
p_i	0.15	0.3	0.1	0.18	0.21	0.06	1

Числовые характеристики случайных величин

Мода и медиана

Определение

Мода $Mo(X)$ — значение случайной величины X, имеющей максимальную вероятность.

В зависимости от вида распределения случайная величина может иметь разное количество мод.

- Распределение одномодальное, если мода одна
- Распределение двумодальное, если моды две
- Распределение мультимодальное, если мод больше двух.

Определение

Математическим ожиданием $M(X)$ называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины x_i на соответствующие вероятности p_i:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание — это среднее значение случайной величины X, которое следует ожидать в результате многократного проведения опыта.

Пример

Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

x_i	-5	0	2	6
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Вычислить математическое ожидание X.

- Добавим в таблицу строку $x_i p_i$ и столбец Σ

x_i	-5	0	2	6	Σ
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4	1
$x_i p_i$	-0.5	0	0.6	2.4	2.5

- Каждое значение третьей строки — произведение $x_i \cdot p_i$.
- $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = -0.5 + 0 + 0.6 + 2.4 = 2.5$

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

1. $M(C) = C$, если C — константа;
2. $M(kX) = k \cdot M(x)$, если k — константа;
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;
4. $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, если X, Y — независимые СВ.

Дисперсия

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонений от среднего значения:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$$

- Дисперсия характеризует степень отклонения значений случайной величины от ее среднего значения.
- Чем больше дисперсия, тем большую случайность проявляет величина.
- На практике дисперсия служит для оценки меры риска.

Пример

Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

x_i	-5	0	2	6
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Вычислить дисперсию X.

- Добавим в таблицу строки $x_i p_i$, $x^2 p_i$ и столбец Σ

x_i	-5	0	2	6	Σ
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4	1
$x_i p_i$	-0.5	0	0.6	2.4	$2.5 = M(X)$
$x_i^2 p_i$	2.5	0	1.2	14.4	$18.1 = M(X^2)$

- Дисперсия равна
  $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 18.1 - 2.5^2 = 11.85$

Свойства дисперсии

Вычисление дисперсии удобно выполнять по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Свойства:

- $D(C) = 0$, если C — константа;
- $D(kX) = |k| \cdot D(X)$, если k — константа;
- $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, если X, Y — независимые СВ.

Среднее квадратическое отклонение

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Для того, чтобы оценка рассеяния значений случайной величины была соизмерима с самой величиной, вычисляют среднеквадратичное отклонение.

Определение

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением) называется арифметический квадратный корень из дисперсии случайной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример I

Прибыльность двух инвестиционных проектов X, Y (млн. руб) задана законами распределения:

X:

x_i	-1	2	5
p_i	0.2	0.6	0.2

Y:

y_i	-5	6	10
p_i	0.4	0.5	0.1

Какой инвестиционный проект целесообразно выбрать для реализации?

Пример II

- Вычислим характеристики обоих проектов:

$X:$

x_i	-1	2	5	Σ
p_i	0.2	0.6	0.2	1
$x_i p_i$	-0.2	1.2	1	2
$x_i^2 p_i$	0.2	2.4	5	7.6

$Y:$

y_i	-5	6	10	Σ
p_i	0.4	0.5	0.1	
$y_i p_i$	-2	3	1	2
$y_i^2 p_i$	10	18	10	38

$$M(X) = 2 \quad D(X) = 7.6 - 2^2 = 3.6 \quad \sigma(X) = \sqrt{3.6} \approx 1.90$$

$$M(Y) = 2 \quad D(Y) = 38 - 2^2 = 34 \quad \sigma(Y) = \sqrt{34} \approx 5.84$$

Пример III

- Математические ожидания величин одинаковые, значит проекты принесут в среднем равный доход.
- Среднее квадратичное отклонение второго проекта выше, чем у первого, тем самым риск выше.

Биномиальный закон распределения вероятностей

- Пусть дискретная случайная величина X — количество „успехов“ в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких что вероятность „успеха“ в каждом из них постоянна и равна p.
- Величина X может принять любое значение от 0 до n
- $p(X = x_i) = C_n^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}$

Если значения ДСВ X являются всевозможными числами появления заданного события при фиксированном числе независимых испытаний, то X имеет биномиальный закон распределения.

Биномиальный закон

ДСВ X подчинена биномиальному закону распределения, если

- она имеет конечное число значений $x_1, \ldots, x_n$,
- вероятность каждого значения определена формулой Бернулли

$$p_i = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

Числовые храктеристики биномиального закона:

$$M(X) = np, \qquad D(X) = npq, \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq},$$

$$np - q \leqslant Mo(X) \leqslant np + p$$

Пример биномиального распределения I

В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Составить ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года. Вычислить его числовые характеристики.

- Пусть X — дискретная случайная величина, равная числу банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года.
- Она может принимать значения 0, 1, 2, 3 и 4.
- Вероятность обанкротиться постоянна и банкротство банка не влияет на другие банки.
- Поэтому X распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 4$, $p = 0.2$.

- Найдем соответствующие вероятности по формуле Бернулли, полагая $p = 0.2$, $q = 1 - 0.2 = 0.8$:

$$p(X = 0) = C_4^0 0.2^0 0.8^4 = 0.8^4 = 0.4096$$
$$p(X = 1) = C_4^1 0.2^1 0.8^3 = 4 \cdot 0.2 \cdot 0.8^3 = 0.4096$$
$$p(X = 2) = C_4^2 0.2^2 0.8^2 = 6 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^2 = 0.1536$$
$$p(X = 3) = C_4^3 0.2^3 0.8^1 = 4 \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^1 = 0.0256$$
$$p(X = 4) = C_4^4 0.2^4 0.8^0 = 0.2^4 = 0.0016$$

- Таблица закона распределения

X:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

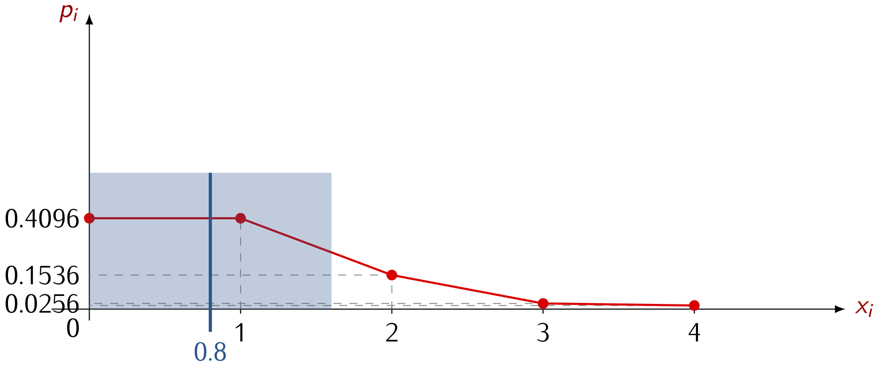
Пример биномиального распределения III

- Числовые характеристики

x_i	0	1	2	3	4	Σ
p_i	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016	1
$x_i p_i$	0	0.4096	0.3072	0.0768	0.0064	0.8
$x_i^2 p_i$	0	0.4096	0.6144	0.2304	0.0256	1.28

  - $M(X) = np = 4 \cdot 0.2 = 0.8$
  - $D(X) = npq = 4 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.64$ $D(X) = 1.28 - 0.8^2 = 0.64$
  - $\sigma(X) = \sqrt{0.64} = 0.8$
  - $np - q \leqslant Mo(X) \leqslant np + p$
    $0 = 0.8 - 0.8 \leqslant Mo(X) \leqslant 0.8 + 0.2 = 1$
    $Mo(X) = 0,\ Mo(X) = 1$
- Многоугольник распределения:

Пример биномиального распределения IV



Геометрический закон распределения вероятностей

Геометрическое распределение

Пусть происходит серия независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появится с вероятностью p.

Случайная величина X — „количество испытаний до первого появления события A“, имеет геометрическое распределение вероятностей:

$$P(X = x_i) = q^{i-1} \cdot p,$$

где $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Числовые храктеристики геометрического закона:

$$M(X) = \frac{q}{p}, \qquad D(X) = \frac{q}{p^2}, \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}, \qquad Mo(X) = x_1$$

Вероятности последовательных значений геометирческого распределения образуют геометрическую прогрессию.

Пример

Производятся многократные испытания некоторого элемента на надежность до тех пор, пока элемент не откажет. Вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0.1. Составить закон распределения и найти Характеристики величины.

Пример

В револьвере 6 патронов. Вероятность поражения цели 0.8. Стрелок стреляет до первого промаха. Определить случайную величину и составить ее закон распределения.

Гипергеометрический закон распределения вероятностей

В совокупности из N объектов содержатся объектов M, обладающие некоторым признаком. Из этой совокупности случайным образом и без возвращения извлекается n объектов. Случайная величина X — «количество „особых“ объектов в выборке» — распределена по гипергеометрическому закону.

Гипергеометрическое распределение

Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение, если

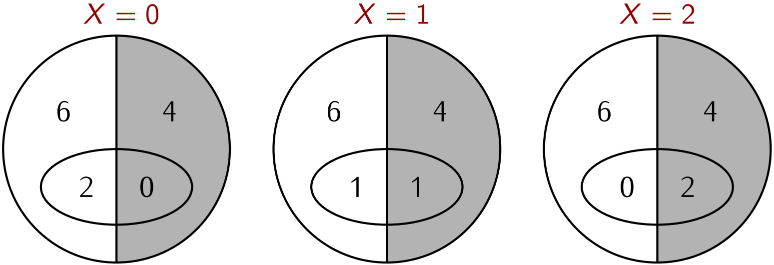
- $X \in \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$
- $p(X = x_i) = \dfrac{C_M^i \cdot C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}$

Числовые храктеристики гипергеометрического закона:

$$M(X) = n \cdot \frac{M}{N}, \qquad D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-n}{N} \cdot \frac{N-M}{N-1}$$

Пример

Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, случайным образом и без возвращения извлекают 2 шара. Составить функцию распределения случайной величины X — числа черных шаров среди взятых.



$$p_0 = \frac{C_4^0 \cdot C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} \qquad p_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} \qquad p_2 = \frac{C_4^2 \cdot C_6^0}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$$

Закон распределения Пуассона

Распределение Пуассона

Пусть ДСВ X имеет бесконечное число значений $X \in \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ Если вероятности значений подчинены закону

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

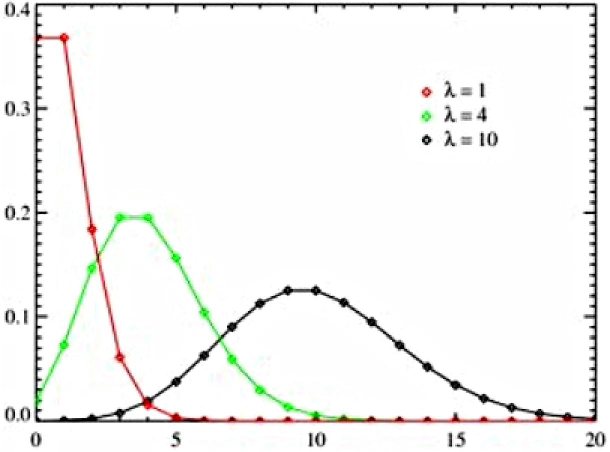
то X подчинена распределению Пуассона с параметром λ.

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda$$

Если $p \to 0$, $n \to \infty$, но $np \to \lambda$, то закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона.

Многоугольники Пуассона



Распределение Пуассона моделирует случайную величину X — „число событий, произошедших за заданное время“, при условии, что события происходят с заданной интенсивностью независимо друг от друга.

Пример