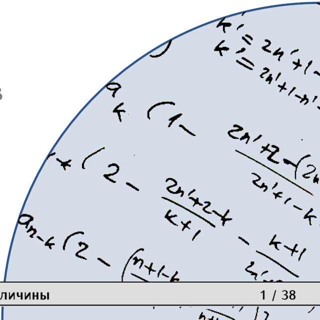
Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 15. Непрерывные случайные величины

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru



Структура лекции

1. Функции распределения и плотности распределения вероятностей
2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины
   - Равномерный закон распределения
3. Нормальный закон распределения

Определение

Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток.

Таблицу вероятностей построить невозможно.

Проблема: В каком виде представить закон распределения НСВ?

Функция распределения вероятностей — это функция определенная на всей числовой прямой и принимающая значения, равные вероятности того, что случайная величина X меньше наперед заданного числа x.

$$F(x) = P(X < x)$$

События

$$P(X < a) = F(a), \qquad P(X \geqslant b) = 1 - P(b)$$

Вероятность того, что случайная величина X примет значение, из полуинтервала $[a, b)$ равна разности функций распределения на его концах:

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$$

$$F(b) = P(X < b) =$$

$$= P(x < a) + P(a \leqslant X < b) =$$

$$= F(a) + P(a \leqslant X < b)$$

Практически невозможное событие

$$P(X = a) = \lim_{\Delta x \to 0} P(a \leqslant X < a + \Delta x) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (F(a + \Delta x) - F(a)) = F(a) - F(a) = 0$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет наперед заданное значение равна нулю.

$$P(X = a) = 0$$

Плотность распределения

Средней плотностью распределения вероятностей называется отношение вероятности Ð$(a < x < b)$ попадания случайной величины x в тот или иной интервал Δx ее значений к величине этого интервала:

$$\frac{p(a < x < b)}{b - a}$$

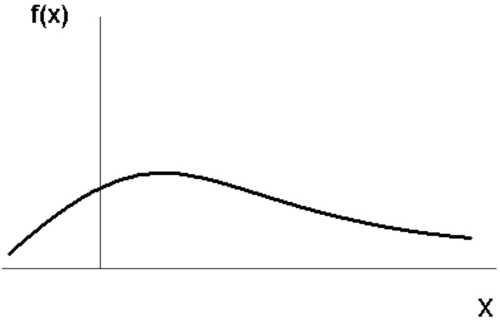
Плотностью распределения $f(a)$ в точке a называется предельное значение средней плотности.

$$f(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(a \leqslant x < a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(a + \Delta x) - F(a)}{\Delta x} = F'(a).$$

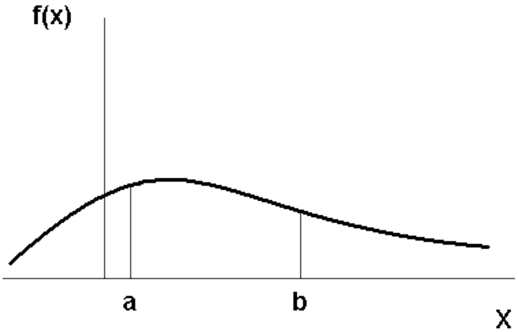
Функция плотности

Производная функции распределения характеризует плотность, с которой распределяется значение случайной величины в точке x и называется **функцией плотности**

$$f(x) = F'(x)$$



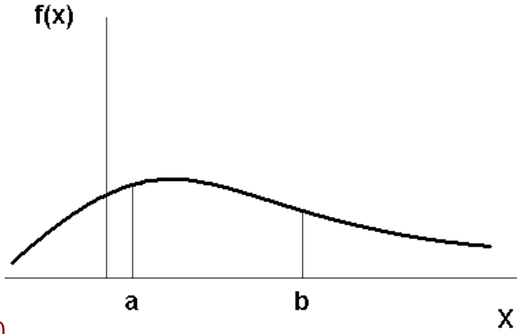
События по функции плотности



$$P(a \leqslant X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \qquad P(X \geqslant b) = \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

Свойства плотности



- $f(x) \geqslant 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Связь между $f(x)$ и $F(x)$

- Вычисление плотности по функции распределения

$$f(x) = F'(x)$$

- Вычисление функции распределения по плотности

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Пример

Пример

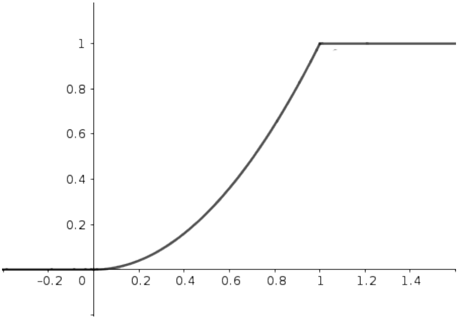
По функции распределения вычислить функцию плотности

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &x < 0 && F'(x) = (0)' = 0 \\ &0 < x < 1 && F'(x) = (x^2)' = 2x \\ &1 > x && F'(x) = (1)' = 0 \end{aligned}$$

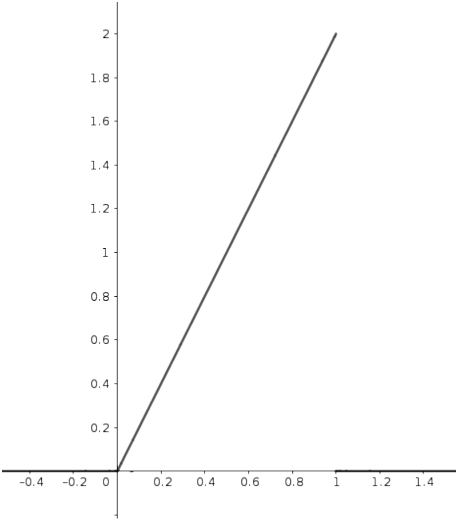
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 2x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

График функции распределения



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

График плотности распределения



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 2x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Пример I

Задача

Задана функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ cx^2, & 0 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Найти:

- значение c
- функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$,
- вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0; 1)$.

Пример II

Найдем плотность $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2cx, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Вычислим c из условия $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} 2cxdx + \int_{2}^{+\infty} 0dx =$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{cx}{2} dx = cx^2\Big|_0^2 = 4c$$

Итак, $4c = 1$ или $c = \frac{1}{4}$.

Пример III

Выпишем функции

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Вычислим вероятность

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1^2}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

- Медиана

$$Me(X) = m, \qquad F(m) = 1 - F(m) = \frac{1}{2}$$

- Математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- Дисперсия

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(x)\right)^2$$

- Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(x)}$

Пример I

Найти числовые характеристики функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

- Медиана

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Пример II

- Вычислим функцию плотности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Пример III

- Математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} x0dx =$$

$$= \int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{6}\bigg|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Пример IV

- Дисперсия

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_{0}^{2} \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 \frac{x}{2} dx + \int_{2}^{+\infty} 0 dx =$$

$$\int_{0}^{2} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{4}{3} x^2 + \frac{8}{9} x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{8} - \frac{4}{9} x^3 + \frac{4}{9} x^2 \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{2^4}{8} - \frac{4}{9} 2^3 + \frac{4}{9} 2^2 \right) - 0 =$$

$$= \frac{2}{9}$$

Пример V

- Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Типы распределений

- равномерное распределение;
- нормальное (гауссово) распределение

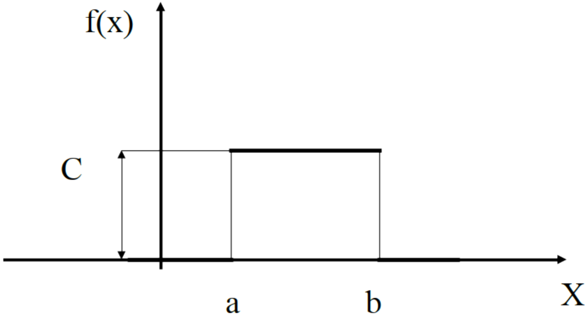
Равномерный закон распределения

Определение

Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности на этом отрезке постоянна, а вне отрезка $[a, b]$ равна 0:

$$f(x) = \begin{cases} c & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

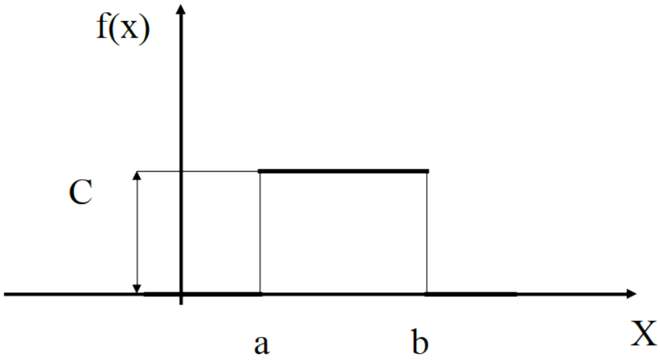
Вычисление коэффициента



$$c \cdot (b-a) = 1, \qquad c = \frac{1}{b-a}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Числовые характеристики



$$M(X) = \frac{b+a}{2} \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Пример

Задача

Найти функцию распределения величины X, равноерно распределенной на отрезке $[2, 4]$ и числовые характеристики этой величины.

Нормальное распределение

Определение

Случайная величина X подчиняется нормальному распределению $N(\mu, \sigma)$, если ее плотность определена формулой:

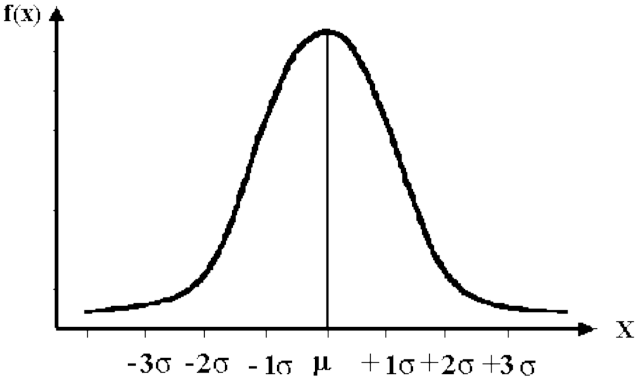
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение однозначно задается двумя параметрами:

- μ — математическое ожидание,
- σ — среднее квадратическое отклонение.

Закон применим, когда на случайную величину действует множество различных независимых факторов, каждый из которых в отдельности не имеет преобладающего значения.

График плотности



Параметр μ характеризует математическое ожидание случайной величины, являясь центром распределения и наиболее вероятным значением.

- Изменение μ не влияет на форму кривой, а только вызывает ее смещение вдоль оси x.
- График нормальной кривой Гаусса симметиричен относительно прямой $x = \mu$.
- По мере увеличения разности $|x - \mu|$ значение $f(x)$ убывает.
- При $(x - \mu) \to \infty$ значение $f(x)$ стремится к нулю, но никогда его не достигает.

Закономерности

Параметр σ характеризует изменчивость случайной величины

- Чем больше σ, тем больше кривая растянута.
- Правило трех сигм $P(|X-\mu| < 3\sigma) > 0.997$

Функция распределения вероятностей

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

Вычисление

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(x)$ — вычисляется по таблице функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{\frac{x^2}{2}}\, dt$$

Классические задачи

Вероятность попасть в промежуток

Вероятность того, что величина $X \sim N(\mu, \sigma)$ примет значение из $[a, b]$ равна

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Вероятность отклонения

Вероятность того, что величина $X \sim N(\mu, \sigma)$ отклонится от своего математического ожидания не более чем на Δ:

$$P(|X-\mu| \leqslant \Delta = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$$

Пример

Магазин продает мужские костюмы. По данным статистики, распределение по размерам является нормальным с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равным 48 и 2. Определить процент спроса на костюмы 50-го размера при условии разброса значений этого размера в интервале (49, 51).

Пример

Считается, что изделие — высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине 3.6 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняется нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных.

Пример

Для некоторой величины X известно, что $P(X < 1) = 0.5$, $P(-2 \leqslant X \leqslant 4) = 0.9973$. Предполагая, что величина распределена нормально найти ее Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.