ФГБОУ ВО Вятский государственный университет
Факультет экономики и финансов

# Введение в экономико-математическое моделирование

## Лекция 9. Модель управления запасами

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru

# Структура лекции

# Задача управления запасами

**Определение**

Совокупность временно не используемых экономических ресурсов, называют запасами предприятия.

- сырье,
- основные и вспомогательные материалы,
- парк техники
- полуфабрикаты
- готовая продукция

# Задача управления запасами

## Определение

Совокупность временно не используемых экономических ресурсов, называют запасами предприятия.

- сырье,
- основные и вспомогательные материалы,
- парк техники
- полуфабрикаты
- готовая продукция

## Задача управления заказами

Определении объемов поставок и периодичности заказов, при которых издержки (функция затрат) принимают минимальное значение.

# Виды издержек

Количество товара, поставляемое на склад, называют размером партии.

- $L_1$ — организационные издержки — расходы, связанные с оформлением и доставкой товаров;
- $L_2$ — издержки, связанные с приобретением запасов — стоимость партии товаров.
- $L_3$ —издержки содержания запасов — затраты, связанные с хранением, амортизация запасов.
- $L_4$ —издержки, связанные с дефицитом — денежный штраф, потеря лояльности потребителей.

# Виды задач управления запасами

- статические – рассматривается один период времени;
- динамические – рассматривается несколько периодов времени

# Пополнение запасов

Пополнение запасов, как правило, происходит с некоторой случайной задержкой относительно момента выдачи требования

- мгновенная поставка;
- задержка поставок на фиксированный срок;
- задержка поставок на случайный интервал времени (распределенный по известному вероятностному закону).

# График изменения запаса

# Основная модель управления запасами

Готовые товары поступают на склад партиями

# Основная модель управления запасами

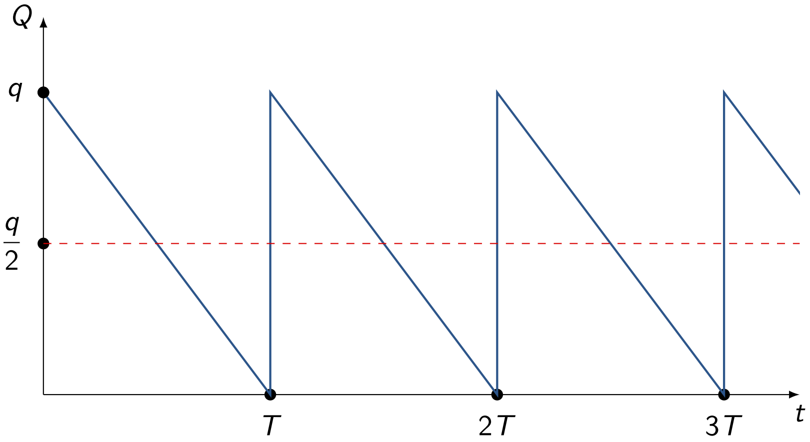
Основная модель управления запасами — это модель, удовлетворяющая следующим гипотезам:

- Рассматривается один вид товара
- Спрос постоянен и непрерывен; весь спрос удовлетворяется.
- Издержки постоянны и не зависят от размера партии.
- Цена единицы товара постоянна.
- Стоимость хранения единицы товара в течение периода времени постоянна.
- Размер партии постоянен.
- Поступление товара происходит мгновенно, как только уровень запаса равен нулю.

# Основные величины модели ОМУЗ

- $v$ — интенсивность спроса (ед. товара за ед. времени)
- $k$ — организационные издержки (ден. ед. за ед. поставки)
- $s$ — стоимость товара (ден. ед. за ед. товара)
- $h$ — издержки содержания запасов (ден. ед. за ед. товара в ед. времени)
- $q$ — размер партии (ед. товара)

# График изменения запасов ОМУЗ




- $T$ — период, за который расходуется весь запас.
- $v = \frac{q}{T}$ — характеризует наклон прямых на графике.

# Уравнение издержек модели ОМУЗ

Если

- $q$ — размер поставки,
- $v$ — интенсивность спроса,

$\Rightarrow$

Имеем:

- средний объем запасов $\frac{q}{2}$
- число поставок $\frac{v}{q}$ в ед. времени

Издержки:

- организационные издержки $L_1 = k\frac{v}{q}$
- стоимость товаров $L_2 = sv$
- издержки содержания запасов $L_2 = h\frac{q}{2}$

Целевая функция:

$$L(q) = L_1 + L_2 + L_3 = k\frac{v}{q} + sv + h\frac{q}{2} \to \min .$$

# Экономичным объем заказа

Для нахождения минимума функции одной переменной

$$L(q) = k\frac{v}{q} + sv + h\frac{q}{2}$$

- Вычислим производную $L' = -\frac{kv}{q^2} + \frac{h}{2}$;
- приравняем ее к нулю

$$-\frac{kv}{q^2} + \frac{h}{2} = 0, \qquad q_0 = \sqrt{\frac{2kV}{h}};$$

- слева от $q_0$ функция $L' < 0$, справа — $L' > 0$

**Оптимальный размер партии:**

$$q_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2kv}{h}}$$

# Оптимизация периода поставок

Заметим, что можно пополнять запас большими партиями через длинные промежутки времени, а можно — малыми партиями и через короткие промежутки.

Размер партии и длина цикла связаны соотношением:

$$q = vT$$

Значит,

$$T \to \min \iff q \to \min$$

**Оптимальный период поставок:**

$$T_{\text{опт.}} = \frac{q_{\text{опт.}}}{v} = \sqrt{\frac{2kv}{hv^2}} = \sqrt{\frac{2k}{hv}}$$

# Формулы Чилсона

Для основной модели управления запасами с параметрами:

- $v$ — интенсивность спроса
- $k$ — организационные издержки
- $s$ — стоимость единицы товара
- $h$ — издержки содержания запасов

справедливы:

**Формулы Чилсона**

- оптимальный период поставок: $T_{\text{опт.}} = \sqrt{\dfrac{2k}{hv}}$;
- оптимальный объем поставок: $q_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2kv}{h}}$;
- минимальные издержки: $L_{\text{опт.}} = \sqrt{2kvh} + sv$

Замечание: стоимость товара $sv$ не связана с оптимизацией затрат по управлению запасами.

Поставка партии на склад требует определенного времени $\tau$. Поэтому заказ на поставку подается с упреждением.

**Определение**

Минимальный уровень запасов, обеспечивающий бездефицитную работу предприятия называется точкой возобновления заказа и обозначается $r$

Экономический смысл: Точка возобновления заказа — это критический уровень запасов, достигнув который необходимо заказывать новую партию.

# Нахождение точки заказа (бездефицитная модель)

Если срок выполнения заказа $\tau$ меньше длины цикла $T$:

- В момент поступления объем запаса должен быть равен 0.
- В момент подачи заказа объем запаса должен составлять величину $r$

$$r = v\tau$$

где $v$ — интенсивность спроса.

Если срок выполнения заказа $\tau$ может быть больше $T$

$$r = v\tau', \qquad \tau' = \tau - T \cdot \left\lfloor \frac{\tau}{T} \right\rfloor$$

# Пример I

Предположим, что магазин продает в среднем 10 коробок пельменей в день, затраты на доставку партии пельменей в магазин составляют 500 руб., Затраты на хранение пельменей оцениваются в 1 руб. за коробку в день. Требуется рассчитать оптимальный размер и периодичность поставки при закупочной цене 1200 руб. за коробку. Срок поставки пельменей в магазин составляет 2 дня.

Построим модель Уилсона:

- $v = 10$
- $k = 500$
- $h = 1$
- $s = 1200$

# Пример II

По формулам Уилсона

- оптимальный период поставок:

$$T_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2k}{hv}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{1 \cdot 10}} = 10 \text{ дней};$$

- оптимальный объем поставок:

$$q_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2kv}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \cdot 10}{1}} = 100 \text{ коробок};$$

- минимальные ежедневные затраты:

$$L_{\text{опт.}} = \sqrt{2kvh} + sv = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 1} + 1200 \cdot 10 = 12100 \text{ руб.}.$$

# Пример III

Так как срок поставки пельменей в магазин составляет 2 дня, то заказ на поставку в наших условиях следует подавать за 2 дня до исчерпания запасов в магазине, то есть тогда, когда текущий уровень запаса достигнет критической величины $r = 20$ коробок.

# Модель управления производственными запасами

Готовые товары поступают на склад непосредственно с производственной линии.

# Модель управления производственными запасами

Модель управления производственными запасами — это модель, удовлетворяющая следующим гипотезам:

- Рассматривается один вид товара
- Спрос постоянен и непрерывен; весь спрос удовлетворяется.
- Издержки постоянны и не зависят от размера партии.
- Цена единицы товара постоянна.
- Стоимость хранения единицы товара в течение периода времени постоянна.
- Размер партии постоянен.
- Поступление товаров происходит непрерывно в течение некоторого промежутка времени.

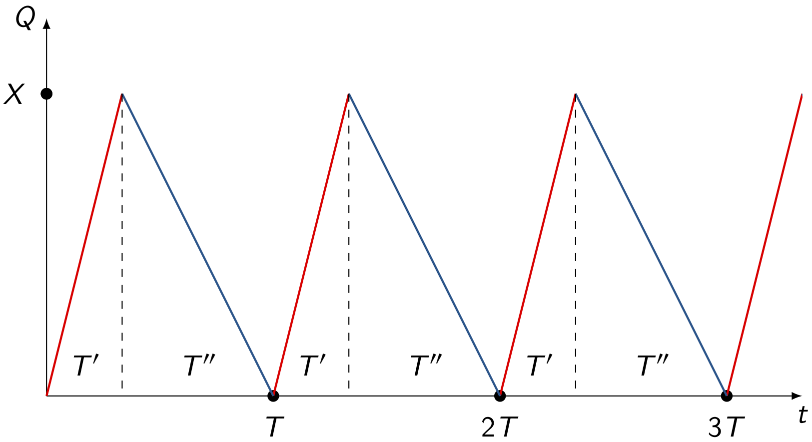
# Основные величины модели МУПЗ

- $q$ — размер партии (ед. товара)
- $\lambda$ — интенсивность поступления товара (ед. товара за ед. времени)
- $v$ — интенсивность спроса (ед. товара за ед. времени)
- $k$ — организационные издержки (ден. ед. за ед. поставки)
- $s$ — стоимость товара (ден. ед. за ед. товара)
- $h$ — издержки содержания запасов (ден. ед. за ед. товара в ед. времени)

# Временная характеристика работы модели

- Некоторый промежуток времени $T'$ продукция интенсивно производится и поставляется на склад (но в то же время и потребляется на предприятии).
- Далее в течение промежутка $T''$ на оборудовании производится другая продукция, запас первой продукции не пополняется, но продолжает потребляется.
- Через время $T = T' + T''$ (цикл управления) на предприятии снова приступают к производству первой продукции и пополнению ее запасов.

# График модели МУПЗ




- $v$ — интенсивность постоянного спроса;
- $\lambda - v$ — скорость пополнения запасов.

## Связи между параметрами модели

- $q = Tv$
- $X = (\lambda - v)T'$
- $X = vT''$
- $T = T' + T'' = \dfrac{X}{\lambda - v} + \dfrac{X}{v} = \dfrac{X}{v}\left(1 - \dfrac{v}{\lambda}\right)$
- $q = \dfrac{X}{1 - \frac{v}{\lambda}}$
- $X = Tv\left(1 - \dfrac{v}{\lambda}\right)$

Если

- $q = \lambda T'$ — размер поставки,
- $v$ — спрос,

$\Rightarrow$

Имеем:

- число поставок $\frac{v}{q}$
- максимальный уровень запасов $(\lambda - v)T'$;
- средний объем запасов $\dfrac{(\lambda - v)q}{2\lambda}$.

Издержки:

- организационные издержки $L_1 = k\frac{v}{q}$
- стоимость товаров $L_2 = sv$
- издержки содержания запасов $L_2 = h\frac{(\lambda-v)q}{2\lambda}$

Целевая функция:

$$L(q) = L_1 + L_2 + L_3 = k\frac{v}{q} + sv + h\frac{(\lambda - v)q}{2\lambda} \to \min .$$

# Оптимизация издержек

$$L(q) = k\frac{v}{q} + sv + h\frac{(\lambda - v)q}{2\lambda} \to \min$$

- Вычислим производную $L' = -\frac{kv}{q^2} + h\frac{(\lambda - v)}{2\lambda}$;
- приравняем ее к нулю $q_0 = \sqrt{\frac{2\lambda kv}{(\lambda - v)h}}$;
- слева от $q_0$ функция $L' < 0$, справа — $L' > 0$

Оптимальный размер партии в модели управления производственными запасами:

$$q_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2\lambda kv}{(1 - v/\lambda)\lambda h}}$$

# Оптимизационные формулы

$$q_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2kv}{(1-\frac{v}{\lambda})h}} \qquad T_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2k}{(1-\frac{v}{\lambda})vh}},$$

$$T'_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2kv}{(1-\frac{v}{\lambda})\lambda^2 h}}, \qquad T''_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2k(1-\frac{v}{\lambda})}{vh}},$$

$$L = \sqrt{2k\lambda v\left(1-\frac{v}{\lambda}\right)},$$

# Модель управления запасами с дефицитом

Моделью управления запасами с дефицитом называется основная модель, допускающую возможность существования периодов дефицита, который покрывается при последующих поставках, и штрафов за несвоевременную поставку.

# Ситуация

- Предприятие должно поставить $q$ единиц товара в течение каждого промежутка времени $T$;
- В единицу времени поставляется $v$ единиц товара, поэтому
$$q = Tv.$$
- В начале каждого периода $T$ предприятие делает запас, равный $X$.
- В течение периода может наблюдаться дефицит товара.
- Невыполненные заявки будут накапливаться до максимальной величины $S = q - X$ и удовлетворятся, как только поступит следующая партия товаров в количестве $q$.
- За просрочку поставок на предприятие налагается штраф, который зависит от того, насколько была задержана поставка.

# Ситуация

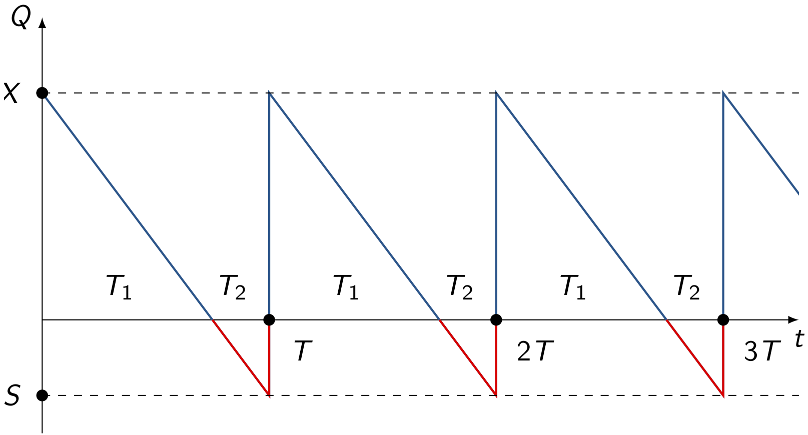
- Предприятие должно поставить $q$ единиц товара в течение каждого промежутка времени $T$;
- В единицу времени поставляется $v$ единиц товара, поэтому
$$q = Tv.$$
- В начале каждого периода $T$ предприятие делает запас, равный $X$.
- В течение периода может наблюдаться дефицит товара.
- Невыполненные заявки будут накапливаться до максимальной величины $S = q - X$ и удовлетворятся, как только поступит следующая партия товаров в количестве $q$.
- За просрочку поставок на предприятие налагается штраф, который зависит от того, насколько была задержана поставка.

Такая модель целесообразна, если заплатить штраф выгоднее, чем расходовать дополнительные средства на хранение запасов

# Основные величины модели ОМУЗ с дефицитом

- $T$ — длина цикла управления запасами (ед. времени);
- $T_1$ — интервал удовлетворения спроса (ед. времени);
- $T_2$ — интервал учета спроса (дефицита) (ед. времени);
- $q$ — размер партии (ед. товара);
- $X$ — максимальный объем запаса на складе (ед. товара)
- $S$ — максимальный объем дефицита;
- $v$ — интенсивность спроса (ед. товара за ед. времени)
- $k$ — организационные издержки (ден. ед. за ед. поставки)
- $s$ — стоимость товара (ден. ед. за ед. товара)
- $h$ — издержки содержания запасов (ден. ед. за ед. товара в ед. времени)
- $g$ — величина издержек за единицу дефицита в течение единицы времени

# График изменения запасов ОМУЗ с дефицитом




$$T = T_1 + T_2, \quad q = X + S, \quad T = \frac{q}{v}, \quad T_1 = \frac{X}{v}, \quad T_2 = \frac{S}{v}$$

Задача управления запасами состоит в том, чтобы полагая объем поставок $q$ фиксированным выбрать такое значение $X$, которое ведет к минимизации затрат, включая затраты на хранение и штрафы.

## Издержки одного цикла:

$$L(q) = L_3 + L_4$$

где

- Общие издержки содержания запасов $L_3 = \frac{hXT_1}{2} = h\frac{X^2}{2v}$
  - товары находятся на складе в течение периода $T_1 = \frac{X}{v}$
  - средний уровень запасов за этот период равен $X/2$.
- общие затраты на штраф $L_4 = \frac{gST_2}{2} = g\frac{S^2}{2v}$
  - дефицит существует в течение периода $T_2 = \frac{S}{v}$
  - средний уровень дефицита за этот период равен $S/2$.

Издержки:

$$L(X) = k\frac{X}{T_1} + = h\frac{X^2}{2v} + g\frac{S^2}{2v} = h\frac{X^2}{2v} + g\frac{(q-X)^2}{2v} \to \min$$

Вычисляя производную и приравнивая ее к нулю получим:

$$X_{\text{опт.}} = \frac{gq}{h+g}$$

# Модели запасов многих товаров

Модели многих товаров На складе хранятся запасы продукции различных видов.

- Если они не взаимодействуют между собой, то запасы каждого вида можно оптимизировать отдельно.
- Если же изменение количества одного вида товара ведет к изменению количества других видов, то требуется совместная оптимизация. Для этого решается задача поиска условного экстремума функции многих переменных, либо строится многокритериальная оптимизационная задача.

# Резюме

Теперь вы знаете три простейшие модели управления запасами. Убедитесь, что вы не только знаете, но и умеете применять рассмотренные методы.

## Источники информации

- Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике параграфы 16.1, 16.2 , с. 371–383.
- Все материалы по курсу здесь: https://cloud.mail.ru/public/48BX/47oESuaQQ