Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 18. Проверка гипотез

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru

Структура лекции

Определеине

Статистическая гипотеза это предположение

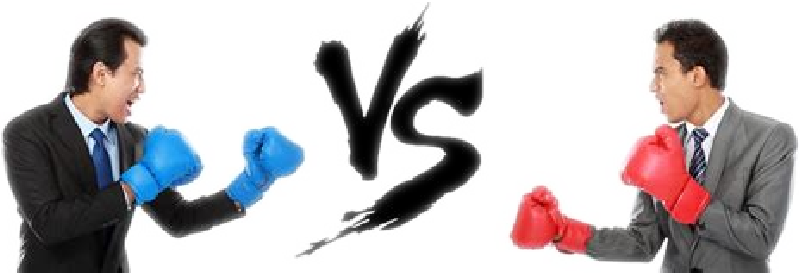
- о виде распределения генеральной совокупности или
- о величинах неизвестных параметров известного распределения генеральной совокупности,

которое может быть проверено на основании выборочных показателей.

По количеству предположений гипотезы делятся на:

- простые — это гипотезы, содержащие только одно предположение;
- сложные — гипотезы, состоящие из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Mortal Combat



Нулевая гипотеза H_0 — гипотеза, подлежащая проверке.

Конкурирующая (альтернативная) гипотеза H_1 — любое утверждение, которое противоречит нулевой гипотезе.

Нулевая гипотеза — утверждение, принимаемое по умолчанию.

Проверяя статистическую гипотезу исследователь пытается показать несостоятельность нулевой гипотезы, несогласованность её с имеющимися опытными данными, то есть отвергнуть гипотезу.

При этом подразумевается, что должна быть принята другая, альтернативная (конкурирующая), исключающая нулевую гипотезу.

Отвергнуть нулевую гипотезу — значит сделать вывод, что конкурирующая гипотеза H_1 лучше описывает реальность, чем нулевая гипотеза H_0

Презумпция невиновности

Для нулевой гипотезы действует своеобразная „презумпция невиновности“:

Нулевая гипотеза считается верной, пока не будет доказано обратное (нулевая гипотеза отвергнута) сверх необходимых сомнений (т. е. в статистически значимой степени).

Истинность нулевой гипотезы невозможно доказать, но можно показать, что в данный момент нет причин сомневаться в ней.

Статистический критерий

Статистический критерий — правило, которое позволяет на основе имеющихся данных отвергнуть нулевую гипотезу.

- **Параметрические** — критерии, которые служат для проверки гипотез о параметрах распределений генеральной совокупности (чаще всего нормального распределения).
- **Непараметрические** – критерии, которые для проверки гипотез не используют предположений о распределении генеральной совокупности. Эти критерии не требуют знания параметров распределений.
- **Критерии согласия** — служат для проверки гипотез о согласии распределения генеральной совокупности, из которой получена выборка, с ранее принятой теоретической моделью (чаще всего нормальным распределением).

Статистика критерия

В основе критерия лежит статистика критерия — искусственно сконструированная функция

$$T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

от выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$.

- Статистика критерия является случайной величиной.
- Закон распределения статистики критерия должен быть известнен!

Обозначение статистики

В зависимости от закона распределения статистику обозначают через:

- U или Z, если она имеет нормальное распределение;
- F или v^2 — распределение Фишера;
- χ^2 — распределение «хи квадрат»;
- t — распределение Стьюдента.

Критическая область

Множество всех значений статистики критерия разбивается на два непересекающихся подмножества:

- Критическую область — включает значения статистики, появление которых при справедливости H_0 практически невозможно.
- Область допустимых значений (область принятия гипотезы) — значения которые может принимать статистика при условии справедливости нулевой гипотезы H_0;

- Статистика подбирается так, чтобы область допустимых значений и критическая область были интервалами.
- Вид критической области зависит от типа альтернативной гипотезы.

Отвержение и принятие гипотезы

Условие отвержения гипотезы

Если значение статистики попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной.

Условие согласия гипотезы

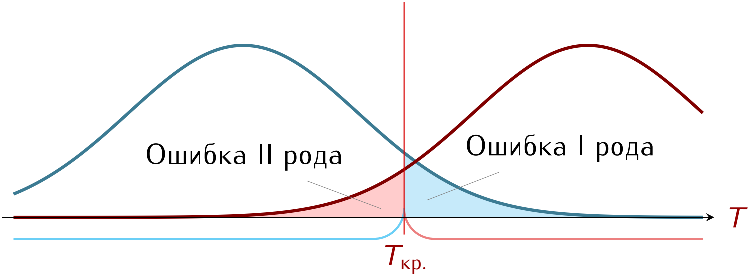
Если значение статистики попадает в область допустимых значений, то гипотеза H_0 не противоречит наблюдаемым значениям, поэтому нет оснований отвергать ее.

Нулевая гипотеза принимается только волевым решением исследователя.

Матрица ошибок

	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 принята	Верное решение	Ошибка II рода
H_0 отвергнута	Ошибка I рода	Верное решение

- **Ошибка первого рода** — отвержение верной гипотезы H_0.
- **Ошибка второго рода** — принятие ошибочной гипотезы H_0.



Определеине

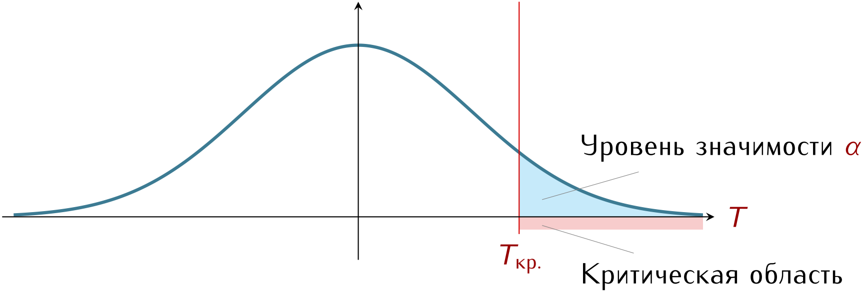
Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости α.

Уровень значимости α устанавливается из значений следующего ряда:

$$0.05, 0.01, 0.005, \dots$$

события с такими вероятностями считаются практически невозможными.
Допустимая величина уровня значимости определяется теми последствиями, которые наступают после совершения ошибки.

Так как область допустимых значений и критическая область являются интервалами, то существует граничная точка, разделяющая их

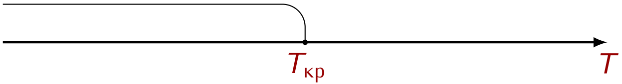


Критическое значение статистики — граница области допустимых значений статистики, при условии, что нулевая гипотеза H_0 верна.

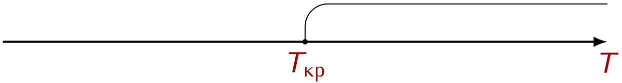
Типы критической области

Односторонняя:

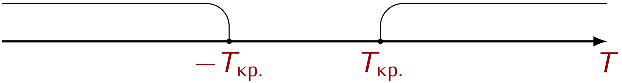
- Левосторонняя — определяется $P(T < T_{кр}) = \alpha$



- Правосторонняя — определяется $P(T > T_{кр}) = \alpha$



Двухсторонняя — определяется $P(T > |T_{кр}|) = \frac{\alpha}{2}$



Определеине

Мощность критерия — вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что верна конкурирующая гипотеза.

Если β — вероятность ошибки второго рода, то мощность критерия равна $1-\beta$.

Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода.

После выбора уровня значимости α следует строить критическую область так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Алгоритм проверки гипотез

1. Формулируются гипотезы H_0 и H_1.
2. По виду гипотезы выбирается статистический критерий T;
3. Выбирается уровень значимости критерия α. Он равен вероятности допустить ошибку первого рода.
4. По выборочным данным вычисляется вычисляется наблюдаемое значение сатистики $T_{\text{набл.}}$
5. По уровню значимости α вычисляется критическое значение $T_{\text{кр}}$, разделяющее критическую область и область допустимых значений.
6. Определяется неравенство, задающее критическую область.

- Если $T_{\text{набл.}}$ попадает в критическую область, то нулевая гипотеза отвергается.
- Если $T_{\text{набл.}}$ попадает в область допустимых значений, то нулевая гипотеза не противоречит наблюдаемым данным.

Пусть проведено n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A появляется с одной и той же, но неизвестной вероятностью p.

Найдена относительная частота $\omega(A) = \frac{m}{n}$ появлений A в этой серии испытаний.

Нулевая гипотеза

$H_0:$ Вероятность p события A равна некоторому значению p_0.

По теореме Лапласа при достаточно большом n относительную частоту можно приближенно считать нормально распределенной с математическим ожиданием p и средним квадратическим отклонением $\sigma_\omega = \sqrt{\frac{pq}{n}}$, где $q = 1 - p$.

Статистический критерий

$$U = (\omega - p_0)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sim N(0,1)$$

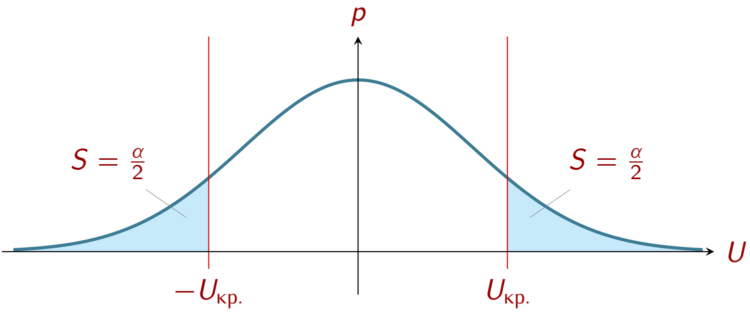
Наблюдаемое значение вычисляется по формуле:

$$U_{\text{набл.}} = \left(\frac{m}{n} - p_0\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$$

где n — число испытаний, m — число появлений события A

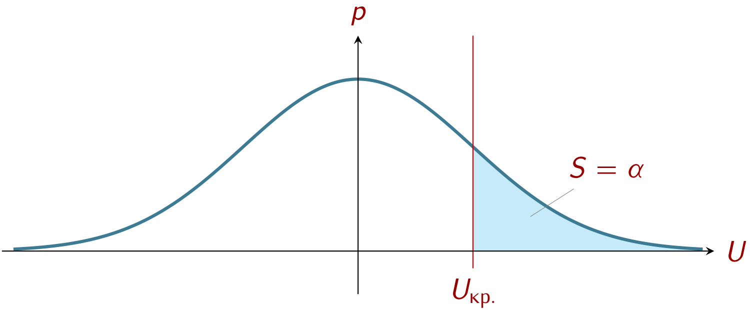
Критическая область гипотезы $H_1 : p \neq p_0$

- Критическая область: $(-\infty; -U_{\text{кр}}) \cup (U_{\text{кр}}; +\infty)$
- Значение $U_{\text{кр}}$ определяется из условия $\Phi(U_{\text{кр}}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$
- Нулевая гипотеза отвергается, если $|U_{\text{набл}}| > U_{\text{кр}}$.



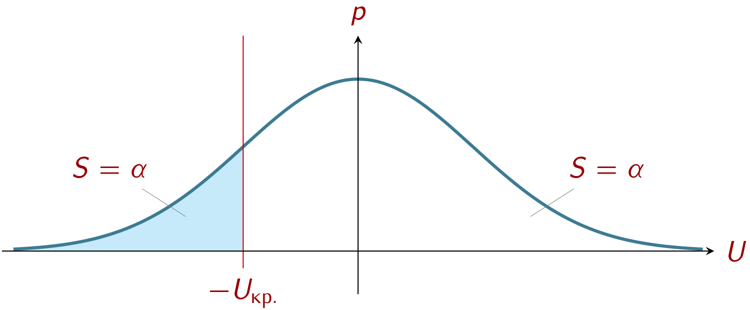
Критическая область гипотезы $H_1: p > p_0$

- Критическая область правосторонняя: $(U_{кр}; +\infty)$
- Значение $U_{кр}$ определяется из условия $\Phi(U_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
- Нулевая гипотеза отвергается, если $U_{набл} > U_{кр}$.



Критическая область $H_1: p < p_0$

- Критическая область левоосторонняя: $(-\infty; -U_{кр})$
- Значение $U_{кр}$ определяется из условия $\Phi(U_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
- Нулевая гипотеза отвергается, если $U_{набл} < -U_{кр}$.



Пример I

Пусть проведено 50 независимых испытаний, и относительная частота появления события A оказалась равной 0.12. Проверим при уровне значимости $\alpha = 0.01$ нулевую гипотезу $H_0: p = 0.1$ при конкурирующей гипотезе $H_1: p > 0.1$.

- Критерий $U = (w - p_0)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$
- Найдем наблюдаемое значение критерия

$$U_{\text{набл}} = (0.12 - 0.1)\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{0.1 \cdot 0.9}} = 0.471.$$

- Критическая область является правосторонней.

Пример II

- Теоретическое значение критерия $U_{кр.}$ находим из равенства

$$\Phi(U_{кр.}) = (1 - 2 \cdot 0.01)/2 = 0.49$$

- По таблице значений функции Лапласа $U_{кр.} = 2.33$.
- Итак, $U_{набл} = 0.471$, $U_{кр.} = 2.33$.
  Неравенство $U_{набл.} < U_{кр.}$ означает, что
  гипотеза $H_0: p = 0.1$ согласуется с наблюдаемыми данными.

Пусть генеральная совокупность X имеет нормальное распределение.

Требуется проверить предположение о том, что ее математическое ожидание $\bar{x}$ равно некоторому числу a_0.

Возможны два случая:

- дисперсия распределения известна и равна σ^2;
- дисперсия распределения неизвестна.

Случай известной дисперсии

- По выборке объема n найдем выборочное среднее $\bar{x}_{\text{в}}$.
- Проверим нулевую гипотезу $H_0: \bar{x} = a_0$.
- В качестве критерия возьмем

$$U = (\bar{x}_{\text{в}} - a_0)\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- Наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл.}} = (\bar{x}_{\text{в}} - a_0)\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

Критическая область

$H_1: \bar{x} \neq a_0$

- Значение $U_{кр}$ определяется из условия $\Phi(U_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$
- Нулевая гипотеза отвергается, если $|U_{набл}| > U_{кр}$.

$H_1: \bar{x} > a_0$

- Значение $U_{кр}$ определяется из условия $\Phi(U_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
- Нулевая гипотеза отвергается, если $U_{набл} > U_{кр}$.

$H_1: \bar{x} < a_0$

- Значение $U_{кр}$ определяется из условия $\Phi(U_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
- Нулевая гипотеза отвергается, если $U_{набл} < -U_{кр}$.

- По выборке объема n найдем выборочное среднее $\bar{x}_{\text{в}}$.
- Проверим нулевую гипотезу $H_0 : \bar{x} = a_0$.
- В качестве критерия возьмем

$$T = (\bar{x}_{\text{в}} - a_0)\,\frac{\sqrt{n}}{\hat{s}}$$

где $\hat{s}$ — исправленной выборочное среднее. случайная величина T имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы.

- Наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл.}} = (\bar{x}_{\text{в}} - a_0)\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

Критическая область

$H_1: \bar{x} \neq a_0$

- Значение $T_{кр}$ определяется по таблице квантилей Стьюдента по параметрам $1-\alpha$ и $k = n-1$
- Нулевая гипотеза отвергается, если $|T_{набл}| > T_{кр}$.

$H_1: \bar{x} > a_0$

- Значение $T_{кр}$ определяется по таблице квантилей Стьюдента по параметрам $1-2\alpha$ и $k = n-1$
- Нулевая гипотеза отвергается, если $T_{набл} > T_{кр}$.

$H_1: \bar{x} < a_0$

- Значение $T_{кр}$ определяется по таблице квантилей Стьюдента по параметрам $1-2\alpha$ и $k = n-1$
- Нулевая гипотеза отвергается, если $T_{набл} < -T_{кр}$.