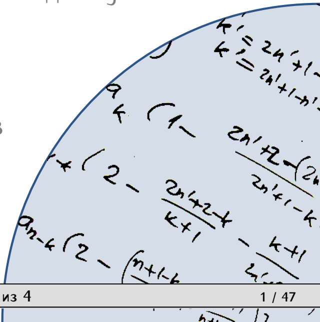
Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 4. Линейные задачи–2

Исследование систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Системы линейных неравенств

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru



Структура лекции

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где

- a_{ij} для всех $i = \{1, \ldots, m\}$; $b = \{1, \ldots, n\})$ — известные коэффициенты;
- $b_1, \ldots, b_n$ — известные свободные члены;
- $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные.

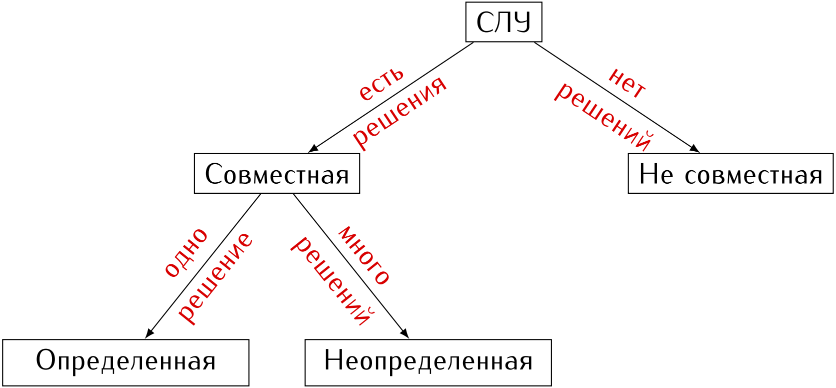
Решение СЛУ

Решение системы — совокупность n чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему обращает все ее уравнения в тождества:

$$
\begin{aligned}
a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n &= b_1 \\
a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n &= b_1 \\
&\ldots \\
a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Решить систему — найти множество всех ее решений.

Классификация СЛУ



Матричная форма СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$AX = B$$

- A — матрица коэффициентов $(m \times n)$;
- B — столбец свободных членов $(m \times 1)$;
- X — столбец неизвестных $(n \times 1)$.

Теорема (Матричный метод решения СЛУ)

Если в СЛУ число уравнений равно числу переменных и определитель матрицы коэффициентов

$$\Delta = \det(A) \neq 0,$$

то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение:

$$X = A^{-1}B$$

Пример матричного решения СЛУ I

Задача

Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \end{cases}$

- Представим СЛУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Матрица коэффициентов квадратная.

Пример матричного решения СЛУ II

- Найдем определитель матрицы коэффициентов:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 2 - 9 - 2 - 4 = -8 \neq 0$$

СЛУ имеет единственное решение

- Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{*} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Пример матричного решения СЛУ III

- Найдем решение матричного уравнения:

$$X = A^{-1}B =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5\cdot 2 - 3\cdot 2 + 1\cdot 8 \\ 4\cdot 2 + 4\cdot 2 - 4\cdot 8 \\ 11\cdot 2 + 5\cdot 2 - 7\cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$

Габриэль Крамер
(Gabriel Cramer)
31 июля 1704 – 4 января 1752

- Предложил метод вычисления определителя, не называя его.
- Предложил метод решения систем линейных уравнений.
- Провёл классификацию алгебраических кривых вплоть до пятого порядка.

Школьное решение СЛУ I

Решить СЛУ: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$

Решим систему методом сложения:

- Устраним y

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \,|\cdot a_{22}, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \,|\cdot a_{22}, \end{cases} \Leftrightarrow -\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x + a_{22}a_{12}y = b_2a_{12}. \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

Если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, то

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

- Устраним x

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \,|\cdot a_{21}, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \,|\cdot a_{11}, \end{cases} \Leftrightarrow -\begin{cases} a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = b_1 a_{21}, \\ a_{21}a_{11}x + a_{22}a_{11}y = b_2 a_{11}. \end{cases}$$

$$(a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y = b_1 a_{21} - b_2 a_{11} \,|\cdot(-1),$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_1 a_{21} - b_2 a_{11},$$

Если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, то

$$y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

- Итак, если

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Теорема (правило Крамера)

Если в СЛУ число уравнений равно числу переменных и определитель матрицы коэффициентов $\Delta = \det(A) \neq 0$, *то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \dots \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определитель Δ_i *получается из определителя матрицы коэффициентов* Δ *заменой* i*-го столбца на столбец свободных членов:*

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \dots$$

Пример правила Крамера I

Задача

Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \end{cases}$

Число переменных равно числу уравнений. Метод Крамера применим.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 2 - 9 - 2 - 4 = -8 \neq 0$$

СЛУ имеет единственное решение

Пример правила Крамера II

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 32 - 2 - 24 - 4 - 4 = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 16 + 6 - 16 - 4 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24 + 12 + 4 + 18 - 2 - 32 = -24.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Ответ: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$

Иоганн Карл Фридрих Гаусс
(Johann Carl Friedrich Gauß)
30 апреля 1777 – 23 февраля 1855

Фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики: алгебре, теории чисел, дифференциальной и неевклидовой геометрии, математическом анализе, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей, в аналитической и небесной механике, астрономии, физике, геодезии.

1. Исключить из СЛУ тривиальное уравнение
$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0.$$
2. Умножить уравнение системы на число $\lambda \neq 0$
3. К одному уравнению системы прибавить другое, умноженное на некоторое число.
4. Переставить любые два уравнения в системе.

Теорема

Элементарные преобразования не меняют множества решений системы линейных уравнений.

Расширенная матрица

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ступенчатая матрица

Ступенчатой называется матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

1. если эта матрица содержит нулевую строку, то все строки, расположенные под нею, также нулевые;
2. если первый ненулевой элемент некоторой строки расположен в столбце с номером i, то первый ненулевой элемент следующей строки должен находиться в столбце с номером большим, чем i.

Теорема

Любая расширенная матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Метод Гаусса — метод исключения переменных:

- Прямой ход — приведение матрицы коэффициентов к ступенчатому виду.

  Осуществляется сверху вниз

- Обратный ход — выражение из каждого уравнения по одной переменной.

  Осуществляется снизу вверх

Метод Гаусса—Жордана

Мы рассмотрим метод Гаусса—Жордана, позволяющий выполнять прямой и обратный ход одновременно.
На шаге i выполняются следующие действия:

1. Строки и столбцы с номерами $j \geqslant i$ переставляются так, чтобы $a_{ii} \neq 0$ Причем желательно, чтобы $(a_{ii} = 1)$.
2. Все строки с номером $k \neq i$ домножаются на λ_k так, $\lambda_k a_{ki}$ делилось на a_{ii}.
3. Строка i вычитается из всех других строк так, чтобы в i-столбце обратились в ноль все элементы кроме a_{ii}.

Задача

Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$

- Составим расширенную матрицу:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 \end{array}\right) \end{array}$$

- Шаг 1:

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} & \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & -1 & 1 & -1 & -2 \\
1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\
2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\
1 & 2 & 3 & -6 & -10
\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ -I \\ -2I \\ -I \end{array}
\end{array}$$

- Шаг 2:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & -8 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & -8 \end{array}\right) & \begin{array}{l} +II \\ \\ -3II \\ -3II \end{array} \end{array}$$

- Шаг 3:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 17 & -17 & -17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :12 \\ :17 \end{array} \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +5III \\ +5III \\ \\ -III \end{array} \end{array}$$

Метод Гаусса—Жордана. Пример V

- Шаг 4:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b
\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1\\
0 & 1 & 0 & 3 & 3\\
0 & 0 & 1 & -1 & -1\\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}
\end{array}\right)
\end{array}
\sim
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b
\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1\\
0 & 1 & 0 & 3 & 3\\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

- Восстанавливаем систему: $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
- Выражаем элементы на диагонали: $\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_4 \\ x_2 = 3 - 3x_4 \\ x_3 = -1 + x_4 \end{cases}$
- Обозначим x_4 за a и выпишем ответ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2a \\ 3 - 3a \\ 1 + a \\ a \end{pmatrix}$$

В решении выше переменная x_4 может принимать любые значения: Такие переменные называются свободными или неосновными.

Переменные x_1, x_2, x_3 однозначно вычисляются по значениям неосновных переменных. Это зависимые или основные переменные.

Как выявить основные переменные?

В системе, полученной методом Гаусса—Жордана, основная переменная x_j

- входит в одно из уравнений системы с коэффициентом 1, а в остальные уравнения системы входит с коэффициентами, равными 0;
- в каждое уравнение входит не более одной основной переменной.

Пример основных и свободных переменных

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 6x_4 = 7 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

- x_1, x_3 — основные
- x_2, x_3 — свободные

Виды решений СЛУ I

- Если свободные переменные объявить параметрами и перенести вправо, то получим общее решение СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = a \\ x_4 = b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 5a - 6b \\ a \\ 2 - 3a + b \\ b \end{pmatrix}$$

Виды решений СЛУ II

- Если свободным переменным придать числовые значения и вычислить значения разрешенных переменных, то получим частное решение СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Если свободным переменным придать нулевые значения, то получим базисное решение СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Исследование СЛУ

- Если в каждом уравнении системы есть зависимая переменная, то СЛУ совместная — имеет решения.
- Если все переменные в системе линейных уравнений разрешенные, то СЛУ определенная — имеет единственное решение.
- Если в совместной слу есть хотя бы одна свободная переменная, то СЛУ неорпеделенная — имеет бесконечное число решений.

Противоречивое уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$$

Теорема (Критерий несовместности)

Система несовместна тогда и только тогда, когда в результате применения метода Гаусса—Жордна получено противоречивое уравнение.

Задача

Найти все базисные решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$

- Решая СЛУ методом жордана—Гаусса получаем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Переход от базиса к базису. Пример II

- Сделаем основной переменную x_4 а x_3 превратим в свободную переменную.

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
+2III \\
+3III \\

\end{array}
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right]
$$

- Итак, новое базисное решение

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

Для перехода к новому базису нужно выбрать свободную переменную x_j, которая станет зависимой и зависимую переменную x_i, которая станет свободной.
Затем применить шаг метода Гаусса—Жордана к элементу aq_{ij}

Задача

Найти все базисные решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$

Переход от базиса к базису. Пример II

- Решая СЛУ методом Жордана—Гаусса получаем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

- Сделаем основной переменную x_4 а x_3 превратим в свободную переменную.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} +2III \\ +3III \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Переход от базиса к базису. Пример III

- Итак, новое базисное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Опорное решение

Базисное решение СЛУ, у которого значения переменных неотрицательны называется **опорным решением**.

- Если найдено хотя бы одно опорное решение, то все остальные могут быть найдены путем перехода от одного опорного решения к другому
- Для перехода от одного опорного решения к другому достаточно уметь выбирать разрешающий элемент.

Алгоритм выбора разрешающего элемента a_{ij}:

1. Столбец j должен содержать положительные элементы.
2. В столбце j элемент a_{ij} является разрешающим, если на нем достигается минимум отношения элементов столбца b к положительным элементам столбца j.

Задача

Найти все опорные решения системы $\begin{cases} x_1 + -2x_2 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \blacktriangleright \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \color{red}{x_3} & \color{red}{x_4} & \color{red}{x_5} & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ +2I \\ -I \end{array} \qquad (0, 0, 2, 2, 5)$$

$$\frac{b_1}{a_{11}} < \frac{b_2}{a_{31}} \qquad \frac{2}{1} < \frac{5}{1}$$

$$\begin{array}{cccccc} \color{red}{x_1} & x_2 & \color{red}{x_3} & x_4 & \color{red}{x_5} & b \end{array}$$

$$\blacktriangleright \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 + 2III \\ + III \\ \end{array} \qquad (2, 0, 6, 0, 3)$$

a_{32} — единственный положительный элемент.

$$\begin{array}{cccccc} \color{red}{x_1} & \color{red}{x_2} & \color{red}{x_3} & x_4 & x_5 & b \end{array}$$

$$\blacktriangleright \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\frac{12}{3}, \frac{3}{3}, 9, 0, 0\right) = (4, 1, 9, 0, 0)$$

Переход между опорными решениями III

- Далее в основные переменные не целесообразно переводить x_5, так как придем к уже рассмотренному базису x_1, x_3, x_5. Однако, можно взять x_4 и в качестве разрешающего элемента выбрать a_{24}. Получим еще не рассмотренный базис x_1, x_2, x_4.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \color{red}{x_1} & \color{red}{x_2} & \color{red}{x_3} & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\
0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3
\end{array}\right)
\begin{array}{l} -II \\ \\ +II \end{array}
\end{array}
\qquad (4, 1, 9, 0, 0)$$

$$\frac{b_2}{a_{24}} < \frac{b_1}{a_{14}} \qquad 9 < 12$$

Переход между опорными решениями IV

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
\color{red}{x_1} & \color{red}{x_2} & x_3 & \color{red}{x_4} & x_5 & b
\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\
0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 9\\
0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 2 & 12
\end{array}\right)
\end{array}
\qquad (\tfrac{3}{3}, \tfrac{12}{3}, 9, 0, 0) = (1, 4, 0, 9, 0)
$$

- И так далее...

Источники информации

- Высшая математика для экономистов. Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 1, с. 9–38.
- Высшая математика для экономистов. Практикум. Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 1, с. 6–28.