

Матрицы и определители

1. Найдите $3A - 4B$ и AB^T для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -9 \end{pmatrix}$.
2. Три предприятия выпускают четыре вида продукции. Заданы матрицы помесечных выпусков:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Необходимо: **(а)** найти матрицу выпуска продукции за квартал; **(б)** найти матрицы B_1 и B_2 прироста выпуска продукции за каждый месяц и проанализировать результаты.

3. Найдите **(а)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; **(б)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. В мастерскую, специализирующуюся на ремонте телефонов, поступают аппараты, из которых 70% требуют малого ремонта, 20% — среднего, 10% — сложного. Статистически установлено, что через год из аппаратов, прошедших малый ремонт, 10% требуют малого ремонта, 60% — среднего, 30% — сложного; из аппаратов, прошедших средний ремонт, — 20% малого, 50% — среднего, 30% — сложного; из аппаратов, прошедших сложный ремонт, — 60% малого, 40% — среднего. Найти доли из отремонтированных в начале года аппаратов, которые будут требовать ремонта того или иного вида через один, два, три года.

5. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ вычислите $|A| \cdot |B|$ и $|A \cdot B|$.

6. Вычислите определители третьего порядка разными способами:

$$\text{(а)} \begin{vmatrix} -6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{(б)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{(в)} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}.$$

7. Решите уравнение $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & -2 \end{vmatrix} = 0$.

8. Решить СЛУ:

$$\text{(а)} \begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11; \end{cases} \quad \text{(б)} \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0; \end{cases} \quad \text{(в)} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 2; \end{cases}$$

9. На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий A и B из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов:

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
A	2	1	7	4
B	6	12	2	3

Найти количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы произвести 574 изделия A и 328 изделий B из 94 ед. сырья.

Ответы

1. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -20 \\ -19 & -2 & 45 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 20 & -27 \end{pmatrix}$

2. $M_1 + M_2 + M_3 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 6 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 4 \\ 13 & 13 & 12 & 9 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. (a) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{6}) (5 \ 15 \ 25 \ 35)^T.$

4. $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = (0.7 \ 0.2 \ 0.1),$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.31 & 0.48 & 0.21 \\ 0.3 & 0.49 & 0.21 \\ 0.14 & 0.56 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0.253 & 0.51 & 0.237 \\ 0.254 & 0.509 & 0.237 \\ 0.306 & 0.484 & 0.21 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = (0.17 \ 0.56 \ 0.27) \quad X_2 = (0.291 \ 0.49 \ 0.219) \quad X_3 = (0.2585 \ 0.5072 \ 0.2343)$$

5. $\begin{pmatrix} 15 & -9 \\ -15 & 24 \end{pmatrix}.$

6. (a) 18 (б) 0 (в) 0

7. $2x^3 - 2 = 0, x = 1$

8. (a) $\underline{(x, y, z) = (3, 1, 1)}, \quad \Delta = 60, \quad A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

(б) $\underline{(x, y, z) = (1, 2, -3)}, \quad \Delta = 107, \quad A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix}$

(в) $\underline{(x, y, z) = (1, 2, -3)}, \quad \Delta = 60, \quad A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} -34 & 11 & 7 \\ -27 & -7 & 15 \\ 50 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

9. $\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{12}{13}a, 14 + \frac{7}{26}a, 80 - \frac{9}{26}a, a)}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 94, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 574, \\ 6x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 328. \end{cases}$$