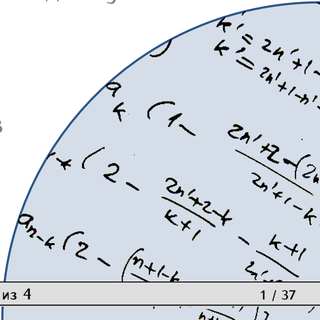
Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 4. Линейные задачи–2

Исследование систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Системы линейных неравенств

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru



Структура лекции

1. Системы линейных уравнений
2. Приведение к разрешенному виду
3. Переход от одного базиса к другому.
4. Переход от одного опорного решения к другому
5. Резюме лекции и домашнее задание

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

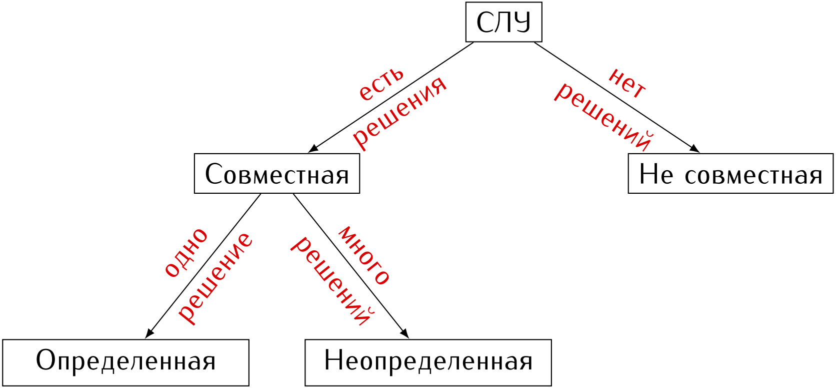
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где

- a_{ij} для всех $i = \{1, \ldots, m\}$; $b = \{1, \ldots, n\})$ — известные коэффициенты;
- $b_1, \ldots, b_n$ — известные свободные члены;
- $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные.

Решение системы — совокупность n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему обращает все ее уравнения в тождества.
Решить систему — найти множество всех ее решений.

Виды систем линейных уравнений:



Элементарные преобразования СЛУ

1. Исключить из СЛУ тривиальное уравнение $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$.
2. Умножить уравнение системы на число $\lambda \neq 0$
3. К одному уравнению системы прибавить другое, умноженное на некоторое число.
4. Переставить любые два уравнения в системе.

Теорема

Элементарные преобразования не меняют множества решений системы линейных уравнений.

Расширенная матрица

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ступенчатая матрица

Ступенчатой называется матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

1. если эта матрица содержит нулевую строку, то все строки, расположенные под нею, также нулевые;
2. если первый ненулевой элемент некоторой строки расположен в столбце с номером i, то первый ненулевой элемент следующей строки должен находиться в столбце с номером большим, чем i.

Метод Гаусса

Теорема

Любая расширенная матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Метод Гаусса — метод исключения переменных:

- Прямой ход — приведение матрицы коэффициентов к ступенчатому виду.

  Осуществляется сверху вниз

- Обратный ход — выражение из каждого уравнения по одной переменной.

  Осуществляется снизу вверх

Метод Гаусса—Жордана

Мы рассмотрим метод Гаусса—Жордана, позволяющий выполнять прямой и обратный ход одновременно.
На шаге i выполняются следующие действия:

1. Строки и столбцы с номерами $j \geqslant i$ переставляются так, чтобы $a_{ii} \neq 0$ Причем желательно, чтобы $(a_{ii} = 1)$.
2. Все строки с номером $k \neq i$ домножаются на λ_k так, $\lambda_k a_{ki}$ делилось на a_{ii}.
3. Строка i вычитается из всех других строк так, чтобы в i-столбце обратились в ноль все элементы кроме a_{ii}.

Задача

Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$

- Составим расширенную матрицу: $\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 \end{array}\right) \end{array}$

Метод Гаусса—Жордана. Пример II

- Шаг 1:

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} & \\
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\
1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\
2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\
1 & 2 & 3 & -6 & -10
\end{array}\right) &
\begin{array}{r} \\ -I \\ -2I \\ -I \end{array}
\end{array}
$$

Метод Гаусса—Жордана. Пример III

- Шаг 2:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\
0 & 3 & 2 & -5 & -8
\end{array}\right)
\end{array} \sim
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\
0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 3 & 2 & -5 & -8
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l} +II \\ \\ -3II \\ -3II \end{array}
$$

- Шаг 3:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 17 & -17 & -17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :12 \\ :17 \end{array} \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +5III \\ +5III \\ \\ -III \end{array} \end{array}$$

Метод Гаусса—Жордана. Пример V

- Шаг 4:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}
\end{array}\right)
\end{array} \sim
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Метод Гаусса—Жордана. Пример VI

- Восстанавливаем систему: $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
- Выражаем элементы на диагонали: $\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_4 \\ x_2 = 3 - 3x_4 \\ x_3 = -1 + x_4 \end{cases}$
- Обозначим x_4 за a и выпишем ответ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2a \\ 3 - 3a \\ 1 + a \\ a \end{pmatrix}$$

Свободные и зависимые переменные

В решении выше переменная x_4 может принимать любые значения: Такие переменные называются свободными или неосновными.

Переменные x_1, x_2, x_3 однозначно вычисляются по значениям неосновных переменных. Это зависимые или основные переменные.

Как выявить основные переменные?

В системе, полученной методом Гаусса—Жордана, основная переменная x_j

- входит в одно из уравнений системы с коэффициентом 1, а в остальные уравнения системы входит с коэффициентами, равными 0;
- в каждое уравнение входит не более одной основной переменной.

Пример основных и свободных переменных

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 6x_4 = 7 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

- x_1, x_3 — основные
- x_2, x_3 — свободные

Разрешенная система уравнений

Система линейных уравнений называется разрешенной, если каждое уравнение системы линейных уравнений содержит разрешенную переменную.

Разрешенная система линейных уравнений всегда совместна.

> Количество базисных переменных не превосходит числа уравнений.

Виды решений СЛУ I

- Если свободные переменные объявить параметрами и перенести вправо, то получим общее решение СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = a \\ x_4 = b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 5a - 6b \\ a \\ 2 - 3a + b \\ b \end{pmatrix}$$

- Если свободным переменным придать числовые значения и вычислить значения разрешенных переменных, то получим частное решение СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Если свободным переменным придать нулевые значения, то получим базисное решение СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Исследование СЛУ

- Если в каждом уравнении системы есть зависимая переменная, то СЛУ совместная — имеет решения.
- Если все переменные в системе линейных уравнений разрешенные, то СЛУ определенная — имеет единственное решение.
- Если в совместной слу есть хотя бы одна свободная переменная, то СЛУ неорпеделенная — имеет бесконечное число решений.

Противоречивое уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$$

Теорема (Критерий несовместности)

Система несовместна тогда и только тогда, когда в результате применения метода Гаусса—Жордна получено противоречивое уравнение.

Задача

Найти все базисные решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$

- Решая СЛУ методом жордана—Гаусса получаем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Переход от базиса к базису. Пример II

- Сделаем основной переменную x_4 а x_3 превратим в свободную переменную.

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
+2III \\
+3III \\

\end{array}
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right]
$$

- Итак, новое базисное решение

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

Переход от базиса к базису. Пример I

Для перехода к новому базису нужно выбрать свободную переменную x_j, которая станет зависимой и зависимую переменную x_i, которая станет свободной.
Затем применить шаг метода Гаусса—Жордана к элементу aq_{ij}

Задача

Найти все базисные решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$

Переход от базиса к базису. Пример II

- Решая СЛУ методом жордана—Гаусса получаем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

- Сделаем основной переменную x_4 а x_3 превратим в свободную переменную.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} +2III \\ +3III \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

- Итак, новое базисное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Опорное решение

Базисное решение СЛУ, у которого значения переменных неотрицательны называется **опорным решением**.

- Если найдено хотя бы одно опорное решение, то все остальные могут быть найдены путем перехода от одного опорного решения к другому
- Для перехода от одного опорного решения к другому достаточно уметь выбирать разрешающий элемент.

Алгоритм выбора разрешающего элемента a_{ij}:

1. Столбец j должен содержать положительные элементы.
2. В столбце j элемент a_{ij} является разрешающим, если на нем достигается минимум отношения элементов столбца b к положительным элементам столбца j.

Задача

Найти все опорные решения системы $\begin{cases} x_1 + -2x_2 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \\ \blacktriangleright \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \color{red}{x_3} & \color{red}{x_4} & \color{red}{x_5} & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ +2I \\ -I \end{array} \qquad (0, 0, 2, 2, 5)$$

$$\frac{b_1}{a_{11}} < \frac{b_2}{a_{31}} \qquad \frac{2}{1} < \frac{5}{1}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \color{red}{x_1} & x_2 & \color{red}{x_3} & x_4 & \color{red}{x_5} & b \end{array} \\ \blacktriangleright & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 + 2III \\ +III \\ \end{array} \end{array} \qquad (2, 0, 6, 0, 3)$$

a_{32} — единственный положительный элемент.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \color{red}{x_1} & \color{red}{x_2} & \color{red}{x_3} & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \blacktriangleright & \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \qquad (\tfrac{12}{3}, \tfrac{3}{3}, 9, 0, 0) = (4, 1, 9, 0, 0)$$

Переход между опорными решениями III

- Далее в основные переменные не целесообразно переводить x_5, так как придем к уже рассмотренному базису x_1, x_3, x_5. Однако, можно взять x_4 и в качестве разрешающего элемента выбрать a_{24}. Получим еще не рассмотренный базис x_1, x_2, x_4.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} {\color{red}x_1} & {\color{red}x_2} & {\color{red}x_3} & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -II \\ \\ +II \end{array} \end{array} \qquad (4, 1, 9, 0, 0)$$

$$\frac{b_2}{a_{24}} < \frac{b_1}{a_{14}} \qquad 9 < 12$$

Переход между опорными решениями IV

$$
\begin{array}{cccccc}
\color{red}{x_1} & \color{red}{x_2} & x_3 & \color{red}{x_4} & x_5 & b \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 12
\end{array}\right)
\qquad
\left(\frac{3}{3}, \frac{12}{3}, 9, 0, 0\right) = (1, 4, 0, 9, 0)
$$

- И так далее...

Резюме

После проработки лекции вы должны уметь:

- выполнять сложение, умножение, транспонирование матриц;
- вычислять определитель 2 3 и 4 порядков по определению и с помощью приведения к треугольному виду;
- решать системы уравнений матричным способом и по правилу Крамера.

Задание

Для завершения лекции вам необходимо подготовить конспект, в который должны войти:

1. Понятие матрицы и операции над матрицами: привести пример или краткую запись правила выполнения каждой операции, достаточную, чтобы восстановить метод вычисления.
2. Матрицы в экономике. Разобрать задачу 1.70 на стр. 130 Практикума [2]
3. Определение определителя. Примеры вычисления определителей 2го, 3го, 4го порядков понятые вам.
4. Ранг матрицы и его нахождение. (Стр. 29–35 учебника [1])
5. Обратная матрица и ее нахождение. Формула.
6. СЛУ. Что значит решить СЛУ. Метод Крамера решения СЛУ. Формулы. Пример.

Источники информации

- Высшая математика для экономистов.
  Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 1, с. 9–38.
- Высшая математика для экономистов. Практикум.
  Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 1, с. 6–28.

Анонс:

На следующей лекции:

- научимся решать произвольные системы линейных уравнений;
- вспомним, как строится прямая на плоскости;
- научимся решать системы линейных неравенств.