ФГБОУ ВО Вятский государственный университет
Факультет экономики и финансов

Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 5. Линейные задачи–3

Задача линейного программирования. Методы ее решения. Устойчивость

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru

Структура лекции

1 Линейное программирование
- Линейное программирование
- Основные понятия линейного программирования
- Каноническая форма ЗЛП

2 Геометрический смысл системы ограничений ЗЛП
- Выпуклые множества

3 Графический метод решения ЗЛП
- Обоснование графического метода
- Алгоритм графического метода
- Пример применения графического метода
- Виды областей ограничений

4 Симплекс-метод решения ЗЛП
- Обоснование симплекс-метода решения ЗЛП
- Критерии оптимальности
- Алгоритм симплекс-метода
- Поиск оптимального плана
- Пример решения симплекс-методом

Линейное программирование

Линейное программирование

Дисциплина, изучающая методы исследования и отыскания наибольшего и наименьшего значений линейной функции на аргументы которой наложены линейные ограничения

Достоинства линейных моделей

- Простота модели
- Хорошо разработанный аппарат исследования моделей
- Эффективность

На практике 80–85% всех задач оптимизации относятся именно к задачам линейного программирования.

Применение линейного программирования

- Составление смеси:
  - ассортимент изделий
  - регулировка запасов
- Задачи производства:
  - укрупненное планирование производства
  - кадровая политика
  - управление технологическим процессом
  - оптимизация местоположения объектов предприятия
- Задачи распределения:
  - планирование распределения продукции
  - календарное планирование перевозок
  - маршрутизация производства изделия

Пример линейного моделирования

Компания производит „Лимонад“ и „Тоник“.

- Для производства 1 л „Лимонада“ требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л „Тоника“ — 0,04 ч
- Расход сырья составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л „Лимонада“ и <<Тоника>> соответственно
- Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг сырья
- Прибыль фирмы составляет 10 ден. ед. за 1 л „Лимонада“ и 30 ден. ед. за 1 л „Тоника“

Требуется составить план производства, для максимизации ежедневной прибыли

Формальная модель

Параметр	ед.	Лимонад 1 л.	Тоник 1 л.	Запас
Время	ч	0.02	0.04	24
Сырьё	кг	0.01	0.04	16
Прибыль	руб.	10	30	

- x л. — объём производства лимонада
- y л. — объём производства тоника
- $F = 10x + 30y$ — ежедневная прибыль
- $0.02x + 0.04y \leqslant 24$ — ограничение времени работы
- $0.01x + 0.04y \leqslant 16$ — ограничение запасов сырья

Математическая модель

- x л. — объём производства лимонада
- y л. — объём производства тоника

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

$$\begin{cases} 0.02x + 0.04y \leqslant 24 \\ 0.01x + 0.04y \leqslant 16 \end{cases}$$

$$F = 10x + 30y \to \max$$

Модель линейная!

Основные понятия линейного программирования

Общая задача линейного программирования

Целевая функция

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Система ограничений

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leqslant b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

Основные понятия линейного программирования

Допустимый план — упорядоченный набор чисел

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

удовлетворяющих системе ограничений задачи линейного программирования

Оптимальный план — допустимый план

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*),$$

при котором функция Z достигает наибольшего или наименьшего значения.

Каноническая форма задачи линейного программирования

Целевая функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

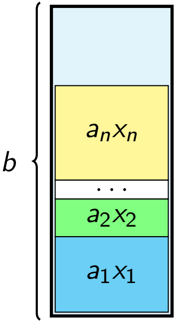
Система ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

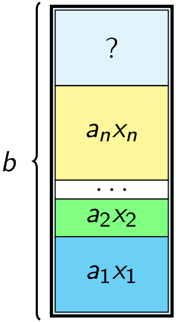
Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$$



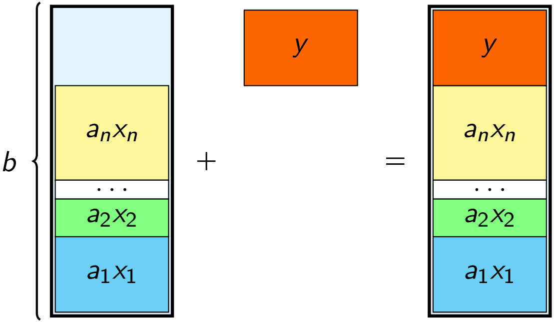
Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$$



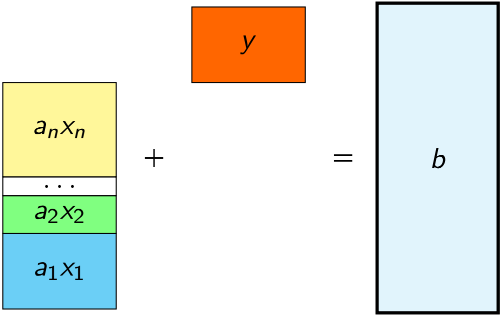
Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$$



Приведение к каноническому виду

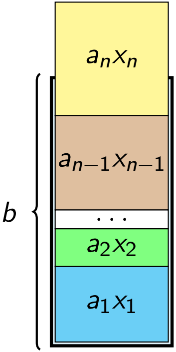
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$$



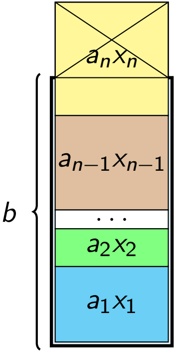
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + y = b$$

Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b$$

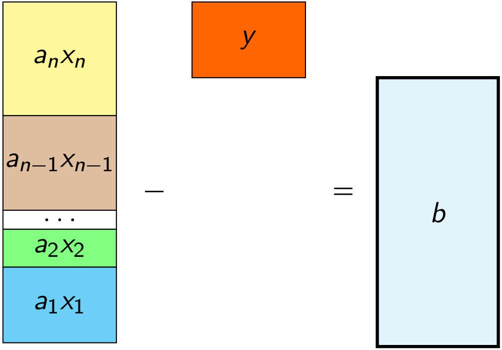


$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b$$



Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b$$



$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - y = b$$

Теорема

Любую задачу линейного программирования можно представить в каноническом виде.

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

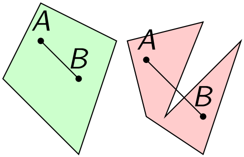
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

Геометрический смысл системы ограничений задачи линейного программирования

Определение

Множество Φ выпуклое если

$$A, B \in \Phi \Rightarrow AB \subseteq \Phi$$



Свойства

- Φ — выпуклое $\Leftrightarrow C = \alpha A + \beta B \in \Phi$ для любых $A, B \in \Phi$, $\alpha + \beta = 1$.
- $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ — выпуклое множество
- Пересечение выпуклых множеств — выпуклое множество

Теорема

Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло.

Теорема об оптимальном значении

Теорема

Целевая функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения в угловой вершине многоугольника решений.

Графический метод решения задачи линейного программирования

Графический метод

применяется для решения задач линейного программирования, зависящих от двух переменных

Обоснование графического метода

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования

- $F = c_1x_1 + c_2x_2$ — уравнение прямой при каждом F
- Ограничение $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \leqslant b_k$ — уравнение полуплоскости
- Система ограничений — выпуклая многоугольная область

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \leqslant b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \leqslant b_2 & x \geqslant 0 \\ \qquad\qquad \dots & y \geqslant 0 \\ a_{m1}x + a_{m2}y \leqslant b_m \end{cases}$$

Обоснование графического метода

Теорема

Значения функции $F = c_1x + c_2y$ *возрастают в направлении вектора* $\vec{n} = (c_1, c_2)$.

Теорема

Значения функции $F = c_1 x + c_2 y$ *возрастают в направлении вектора* $\vec{n} = (c_1, c_2)$.

Доказательство

- $l\colon F = c_1 x_1 + c_2 x_2, \qquad \vec{n} = (c_1, c_2) \perp l$
- Сдвиг l на вектор $k\vec{n}$:

$$\begin{cases} x' = x + kc_1, \\ y' = y + kc_2, \end{cases} \quad k > 0$$

$$F' = c_1 x' + c_2 y' =$$

Теорема

Значения функции $F = c_1x + c_2y$ *возрастают в направлении вектора* $\vec{n} = (c_1, c_2)$.

Доказательство

- $l\colon F = c_1x_1 + c_2x_2, \qquad \vec{n} = (c_1, c_2) \perp l$
- Сдвиг l на вектор $k\vec{n}$:

$$\begin{cases} x' = x + kc_1, \\ y' = y + kc_2, \end{cases} \quad k > 0$$

$$F' = c_1(x + kc_1) + c_2(y + kc_2) = \underbrace{c_1x + c_2y}_{=F} + \underbrace{k(c_1^2 + c_2^2)}_{>0} > F$$

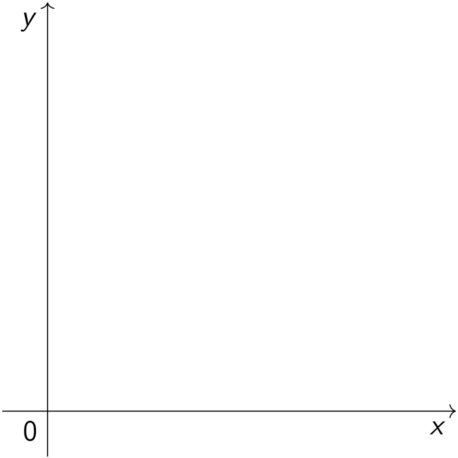
Алгоритм графического метода

1. Построить область ограничений
2. Построить опорную прямую l: $F = c_1 x + c_2 y$ при $F = 0$
3. Построить вектор $\vec{n} = (c_1, c_2)$
4. Прямую l в область ограничений!
5. Двигать l, пока она не выйдет из области ограничений
   - для max: по вектору $\vec{n}$
   - для min: против вектора $\vec{n}$
6. Найти координаты последней угловой точки P пересечения прямой с областью ограничений
7. Найти значение F в точке P

Построение области ограничений

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 \end{cases}$$

1. Построение $x + 3y \leqslant 21$

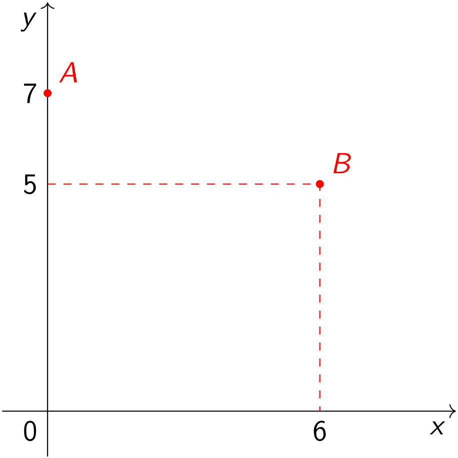


$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 \\ 3x + 2y \leqslant 21 \\ x \leqslant 5 \\ 3x + 5y \geqslant 15 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{matrix}$$

1. Построение $x + 3y \leqslant 21$

- Построение границы:
  $x + 3y = 21$

x	0	6
y	7	5

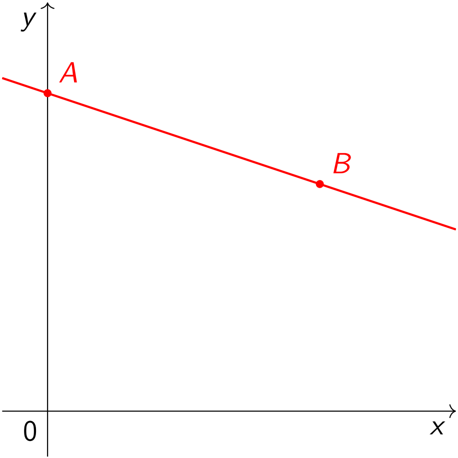


$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 \end{cases}$$

1. Построение $x + 3y \leqslant 21$

- Построение границы:
  $x + 3y = 21$

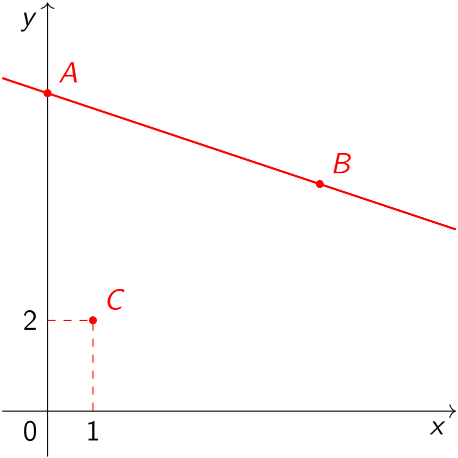
x	0	6
y	7	5



Построение области ограничений

$$\begin{cases} x+3y \leqslant 21 \\ 3x+2y \leqslant 21 \qquad x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 \qquad y \geqslant 0 \\ 3x+5y \geqslant 15 \end{cases}$$

1. Построение $x+3y \leqslant 21$



- Построение границы:
  $x+3y=21$

x	0	6
y	7	5

- Выбор полуплоскости:
  $C(1,2) \notin AB$
  $1+3\cdot 2=7 \leqslant 21$

Построение области ограничений

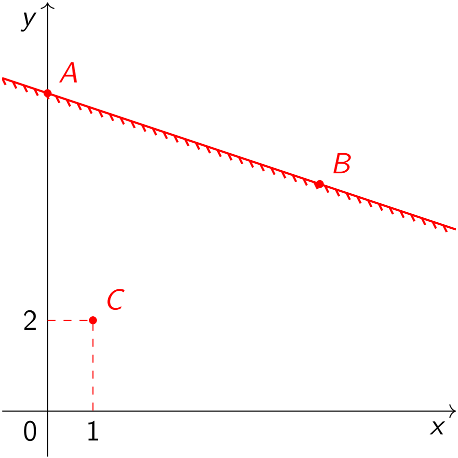
$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

1. Построение $x + 3y \leqslant 21$

- Построение границы:
  $x + 3y = 21$

x	0	6
y	7	5

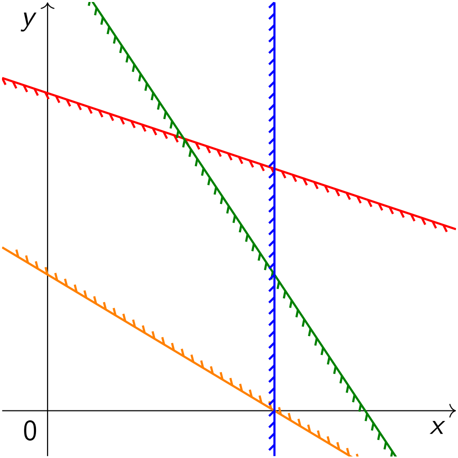
- Выбор полуплоскости:
  $C(1, 2) \notin AB$
  $1 + 3 \cdot 2 = 7 \leqslant 21$



Построение области ограничений

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 \\ 3x + 2y \leqslant 21 \\ x \leqslant 5 \\ 3x + 5y \geqslant 15 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{matrix}$$

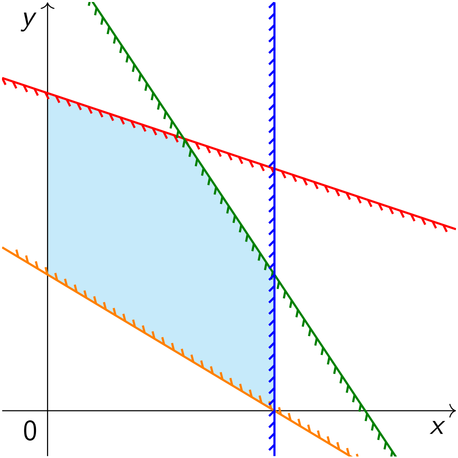
1. Построение $x + 3y \leqslant 21$
2. Построение $3x + 2y \leqslant 21$
3. Построение $x \leqslant 5$



Построение области ограничений

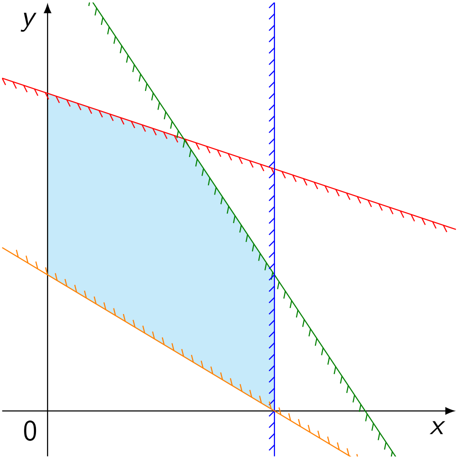
$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 \end{cases}$$

1. Построение $x + 3y \leqslant 21$
2. Построение $3x + 2y \leqslant 21$
3. Построение $x \leqslant 5$



$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$$F = x + 2y \to max$$

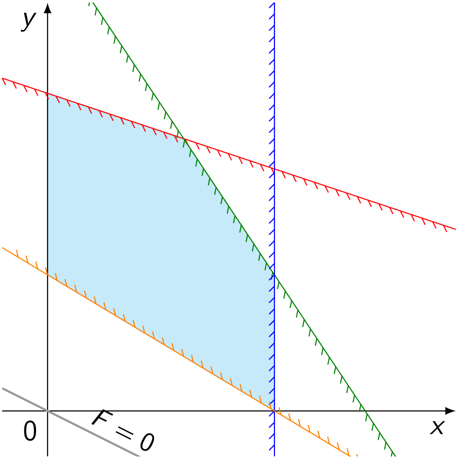


Решение задачи ЛП

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$F = x + 2y \to max$

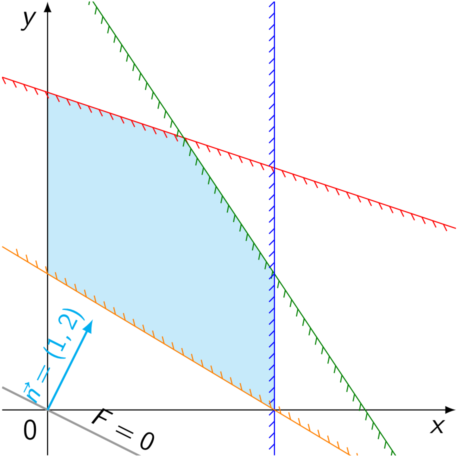
- $F = 0 \quad x + 2y = 0$



$$\begin{cases} x+3y \leqslant 21 & \\ 3x+2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x+5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$$F = x + 2y \rightarrow max$$

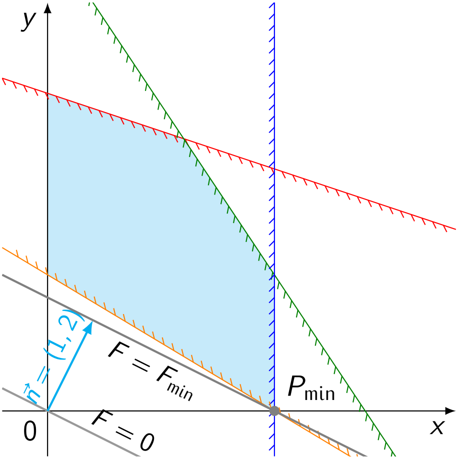
- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$



$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$F = x + 2y \to max$

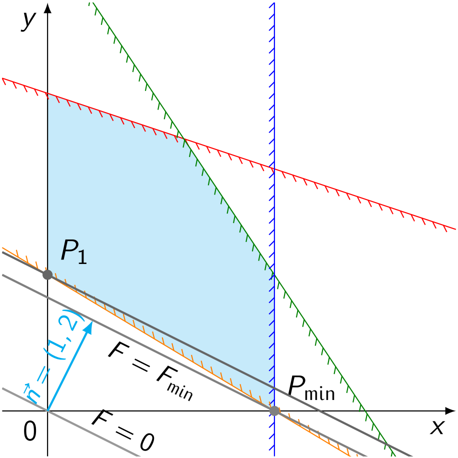
- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$
- Перемещение прямой



$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$F = x + 2y \to max$

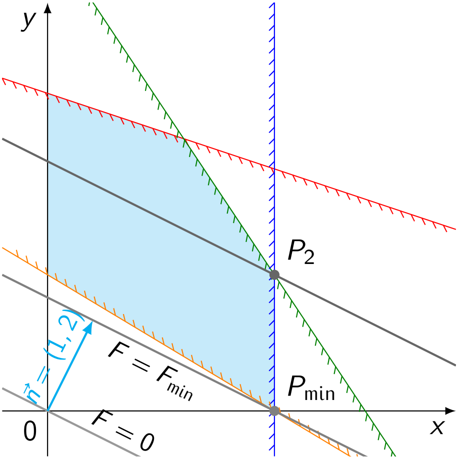
- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$
- Перемещение прямой



$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$$F = x + 2y \to max$$

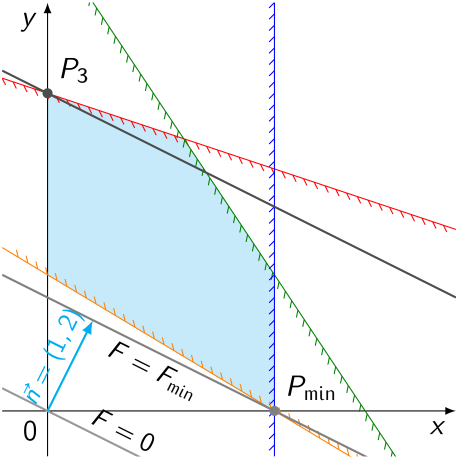
- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$
- Перемещение прямой



$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$F = x + 2y \to max$

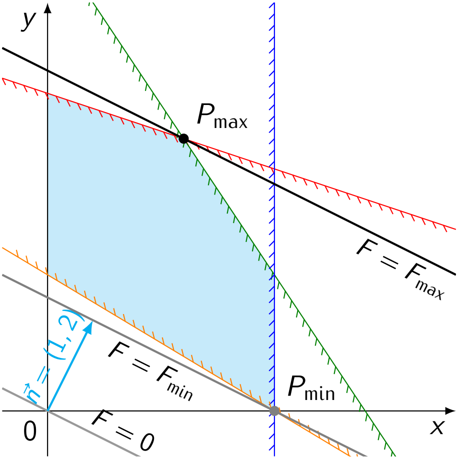
- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$
- Перемещение прямой



$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$$F = x + 2y \to max$$

- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$
- Перемещение прямой

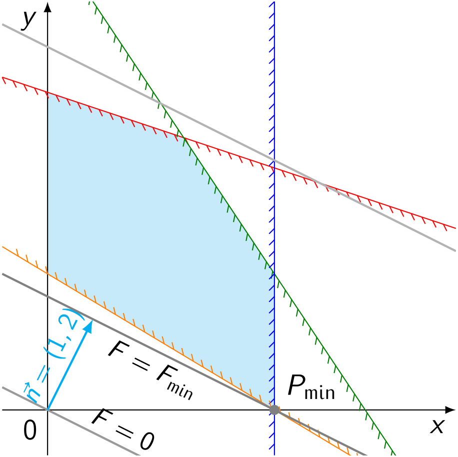


Решение задачи ЛП

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$$F = x + 2y \rightarrow max$$

- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$
- Перемещение прямой

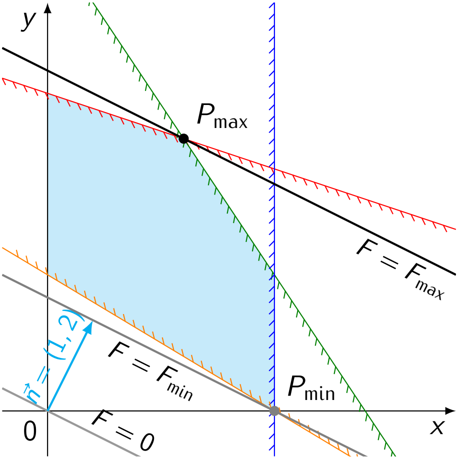


Решение задачи ЛП

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$$F = x + 2y \to max$$

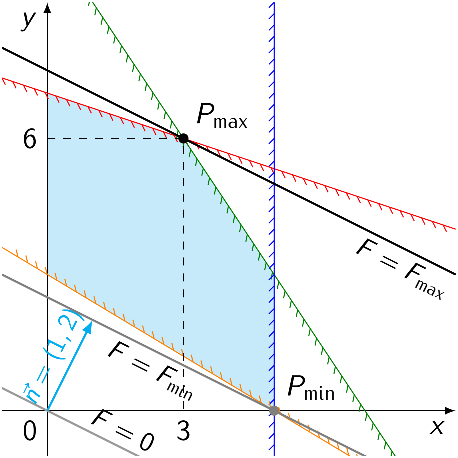
- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$
- Перемещение прямой
- $P_{\max}: \begin{cases} x + 3y = 21 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases}$



$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

$F = x + 2y \to max$

- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$
- Перемещение прямой
- $P_{\max}: \begin{cases} x + 3y = 21 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases}$
- $P_{\max}(3, 6)$

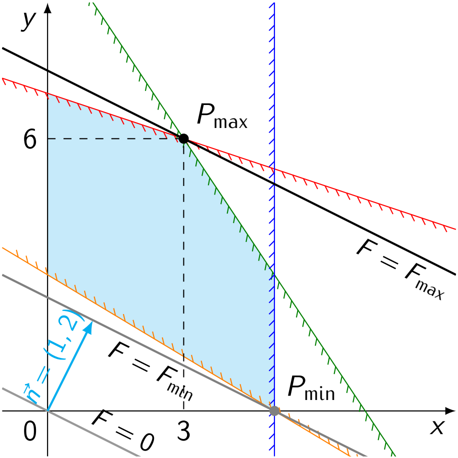


Решение задачи ЛП

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 \end{cases}$$

$$F = x + 2y \to max$$

- $F = 0 \quad x + 2y = 0$
- $\vec{n} = (1, 2)$
- Перемещение прямой
- $P_{\max}: \begin{cases} x + 3y = 21 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases}$
- $P_{\max}(3, 6)$
- $F_{\max} = F(3, 6) = 15$



Результат решения задачи ЛП

- Математическая модель:
  - Система ограничений:

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 21 & \\ 3x + 2y \leqslant 21 & x \geqslant 0 \\ x \leqslant 5 & y \geqslant 0 \\ 3x + 5y \geqslant 15 & \end{cases}$$

  - Целевая функция

$$F = x + 2y \to max$$

- Результат исследования модели:
  - Оптимальный план:

$$x = 3, y = 6$$

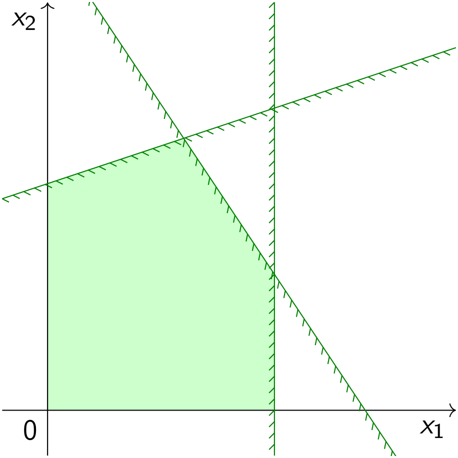
  - Целевая функция достигает оптимального значения:

$$F_{\max} = 15$$

Свойства области ограничений

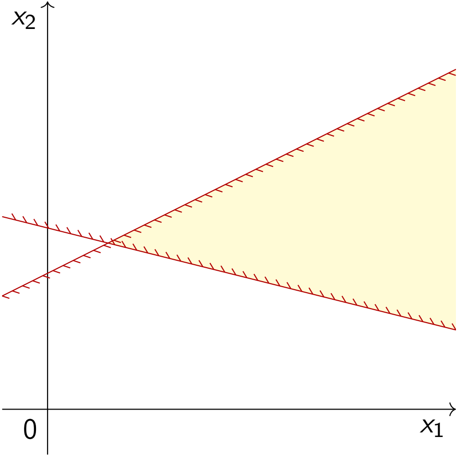
Ограниченная область

Любая целевая функция имеет минимальный и максимальный планы



Неограниченная область

Возможен неограниченный оптимум — ситуация, когда для любого допустимого плана существует другой допустимый план, которому соответствует лучшее значение целевой функции

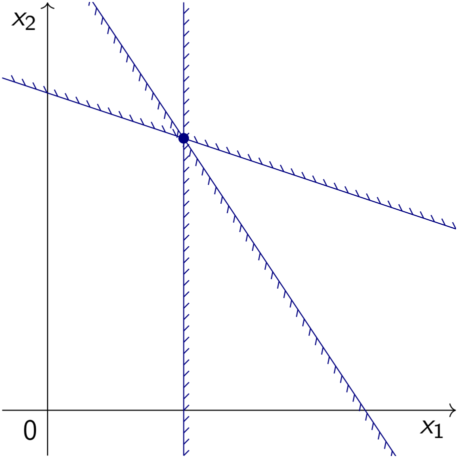


На практике:

скорее всего, при построении модели пропущено ограничение

Вырожденная область

Минимальный и максимальные планы совпадают

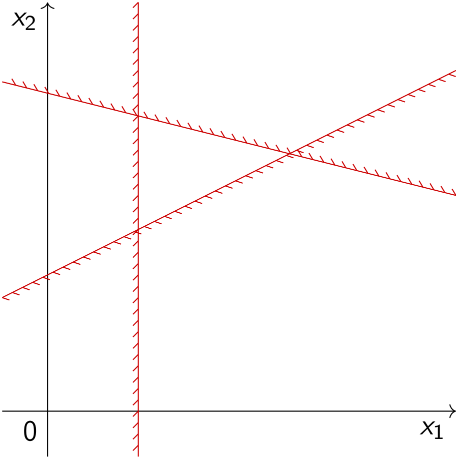


Пустая область

Система ограничений несовместна

Задача не имеет решений.

На практике:
допущена ошибка при моделировании



Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Симплекс

Простейший n-мерный многогранник

- треугольник — двумерный симплекс
- тетраэдр — трёхмерный симплекс

Каноническая форма

$$F = d + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad \text{при} \quad \begin{array}{l} x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0, \\ \quad \ldots \\ x_n \geqslant 0 \end{array}$$

- Система ограничений — система линейных уравнений.
- В каждом решении $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ какие-то k переменных зависимы, а остальные $n - k$ свободны.
- Множество решений этой системы выпуклое.
- Оптимальный план является угловой точкой области ограничений!

Каноническая форма

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = -d + F \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Симплекс-таблица

Базис	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b	
x_{i_1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	
x_{i_2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
x_{i_m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	
F	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	$-d$	

Вид угловых точек области ограничений

Теорема

Решение $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *системы ограничений канонической задачи линейного программирования является угловой точкой тогда и только тогда, когда все её свободные переменные этого решения равны нулю.*

Вид угловых точек области ограничений

Теорема

Решение $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *системы ограничений канонической задачи линейного программирования является угловой точкой тогда и только тогда, когда все её свободные переменные этого решения равны нулю.*

Угловые вершины — это опорные решения системы ограничений.
Они могут быть найдены методом Гаусса—Жордана.

- $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ — основные
- $x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}$ — свободные (равны НУЛЮ)

$$F - \delta = \gamma_1 x_{i_{k+1}} + \gamma_2 x_{i_{k+2}} + \ldots + \gamma_{n-k} x_{i_n} \to \max$$

$$\begin{cases} x_{i_1} = \beta_1 + \alpha_{11} x_{i_{k+1}} + \ldots + \alpha_{1,(n-k)} x_{i_n}, \\ x_{i_2} = \beta_2 + \alpha_{21} x_{i_{k+1}} + \ldots + \alpha_{2,(n-k)} x_{i_n}, \\ \quad \ldots \\ x_{i_k} = \beta_k + \alpha_{k1} x_{i_{k+1}} + \ldots + \alpha_{k,(n-k)} x_{i_n}, \end{cases}$$

Идея!

Будем перемещаться в соседние угловые точки, переводя переменные из основных в свободные.

Целевая функция:

$$F = \delta + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\gamma_1 x_{i_{k+1}}} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\gamma_2 x_{i_{k+2}}} + \ldots + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\gamma_{n-k} x_{i_n}}$$

- Если $\gamma_t > 0$, то перевод $x_{i_{k+t}}$ в основные переменные увеличит F,
- Если $\gamma_t < 0$, то перевод $x_{i_{k+t}}$ в основные переменные уменьшит F

Критерии оптимальности плана

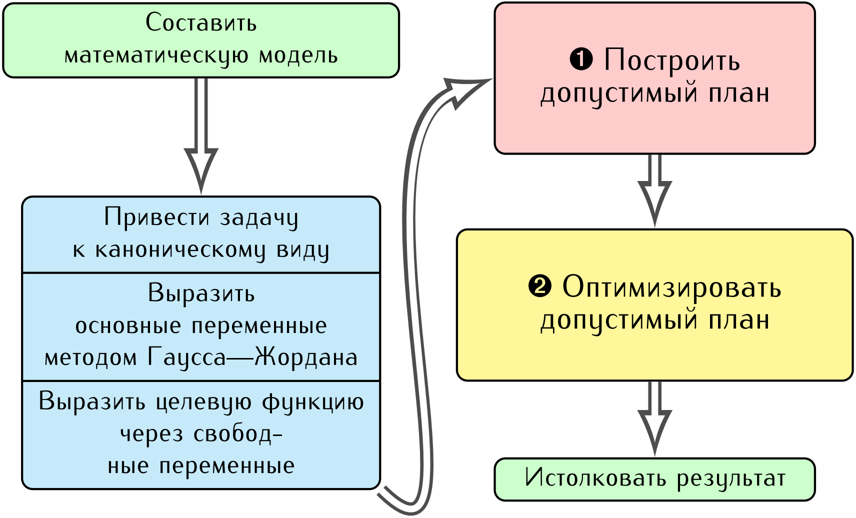
Критерии максимальности плана

Допустимый план максимален тогда, и только тогда, когда целевая функция, выраженная через свободные переменные, не содержит переменных с положительными коэффициентами.

Критерии минимальности плана

Допустимый план минимален тогда, и только тогда, когда целевая функция, выраженная через свободные переменные, не содержит переменных с отрицательными коэффициентами.

Алгоритм симплекс-метода



Этап оптимизации допустимого плана (шаг 2)

Выбор разрешающего элемента

Для решения задачи нахождения максимума:

- В основные переменные переводится переменная x_j, входящая в запись целевой функции с наибольшим положительным коэффициентом.
- В столбце j элемент a_{ij} является разрешающим, если на нем достигается минимум отношения элементов столбца b к положительным элементам столбца j.

Задача о планировании производства

- На предприятии, в состав которого входят 4 производственных цеха, изготовляются два изделия.
- Нормы времени, необходимого для изготовления единицы изделия №1 и №2 в соответствующих цехах, и производственные мощности цехов приведем в таблице:

Цех	Норма времени		Производ. мощности
	Изд. №1	Изд. №2	
I	2	3	12
II	1	2	8
III	4	0	16
IV	0	4	12

- Прибыль от продажи единицы изделия № 1 составляет 2 тыс. ед, а единицы изделия № 2 составляет 3 тыс. ед.

Установить производственный план, при котором обеспечивается максимальная прибыль

Математическая модель

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 & x_1 \geqslant 0 \\ 4x_1 \leqslant 16 & x_2 \geqslant 0 \\ 4x_2 \leqslant 12 \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 16 \\ 4x_2 + x_6 = 12 \end{cases} \qquad x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,6}$$

$$F - 0 = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Симплекс–таблица:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	2	3	1	0	0	0	12
x_4	1	2	0	1	0	0	8
x_5	4	0	0	0	1	0	16
x_6	0	4	0	0	0	1	12
F	2	3	0	0	0	0	-0

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	2	3	1	0	0	0	12
x_4	1	2	0	1	0	0	8
x_5	4	0	0	0	1	0	16
x_6	0	4	0	0	0	1	12
F	2	3	0	0	0	0	-0

$$\begin{cases} x_3 = 12 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 16 - 4x_1 \\ x_6 = 12 - 4x_2 \end{cases} \qquad x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,6} \qquad F - 0 = 2x_1 + 3x_2$$

- Основные: x_3, x_4, x_5, x_6
- Свободные: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$
- Допустимый план: $X_0 = (0, 0, 12, 8, 16, 12)$
- $F_0 = 0$

План не оптимален!

Переход к новым основным переменным

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b		
x_3	2	3	1	0	0	0	12	$12/3 = 4$	$-\frac{3}{4}x_6$
x_4	1	2	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$	$-\frac{1}{2}x_6$
x_5	4	0	0	0	1	0	16	$-$	
x_6	0	4	0	0	0	1	12	$12/4 = 3$ (min)	$:4$
F	2	3	0	0	0	0	-0		$-\frac{3}{4}x_6$

$$\begin{cases} x_3 = 12 - 2x_1 - 3x_2 \geqslant 0 \\ x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \geqslant 0 \\ x_5 = 16 - 4x_1 \geqslant 0 \\ x_6 = 12 - 4x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Переход к новым основным переменным

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b		
x_3	2	3	1	0	0	0	12	$12/3 = 4$	$-\frac{3}{4}x_6$
x_4	1	2	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$	$-\frac{1}{2}x_6$
x_5	4	0	0	0	1	0	16	—	
x_6	0	4	0	0	0	1	12	$12/4 = 3$ (min)	$: 4$
F	2	3	0	0	0	0	-0		$-\frac{3}{4}x_6$

$$\begin{cases} x_3 = 12 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 16 - 4x_1 \\ x_6 = 12 - 4x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12 - 3x_2 \geqslant 0 \\ 8 - 2x_2 \geqslant 0 \\ 16 \geqslant 0 \\ 12 - 4x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Переход к новым основным переменным

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b		
x_3	2	3	1	0	0	0	12	$12/3 = 4$	$-\frac{3}{4}x_6$
x_4	1	2	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$	$-\frac{1}{2}x_6$
x_5	4	0	0	0	1	0	16	—	
x_6	0	4	0	0	0	1	12	$12/4 = 3$ (min)	$:4$
F	2	3	0	0	0	0	-0		$-\frac{3}{4}x_6$

$$\begin{cases} x_3 = 12 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 16 - 4x_1 \\ x_6 = 12 - 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_2 \leqslant 12 \\ 2x_2 \leqslant 8 \\ 0 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \end{cases}$$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b		
x_3	2	3	1	0	0	0	12	$12/3 = 4$	$-\frac{3}{4}x_6$
x_4	1	2	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$	$-\frac{1}{2}x_6$
x_5	4	0	0	0	1	0	16	—	
x_6	0	4	0	0	0	1	12	$12/4 = 3$ (min)	$: 4$
F	2	3	0	0	0	0	-0		$-\frac{3}{4}x_6$

$$\begin{cases} x_3 = 12 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 16 - 4x_1 \\ x_6 = 12 - 4x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_2 \leqslant 12 \\ 2x_2 \leqslant 8 \\ 0 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 4 \\ 0 \leqslant 16 \\ x_2 \leqslant 3 \end{cases}$$

$$x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_6$$

Новый допустимый план

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	2	0	1	0	0	$-3/4$	3
x_4	1	0	0	1	0	$-1/2$	2
x_5	4	0	0	0	1	0	16
x_2	0	1	0	0	0	$1/4$	3
F	2	0	0	0	0	$-3/4$	-9

- Основные: x_2, x_3, x_4, x_5
- Свободные: x_1, x_6
- Допустимый план: $X_1 = (0, 3, 3, 2, 16, 0)$
- $F_1 = 9$ (Берем из таблицы с противоположным знаком)

План не оптимален!

Дальнейшая оптимизация

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b		
x_3	2	0	1	0	0	$-3/4$	3	3/2 (min)	$:2$
x_4	1	0	0	1	0	$-1/2$	2	2	$-\frac{1}{2}x_3$
x_5	4	0	0	0	1	0	16	$16/4 = 4$	$-2x_3$
x_2	0	1	0	0	0	$1/4$	3		
F	2	0	0	0	0	$-3/4$	-9		$-x_3$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	$1/2$	0	0	$-3/8$	$3/2$
x_4	0	0	$-1/2$	1	0	$-1/8$	$1/2$
x_5	0	0	-2	0	1	$3/2$	10
x_2	0	1	0	0	0	$1/4$	3
F	0	0	-1	0	0	0	-12

Положительные коэффициенты в строке F отсутствуют.

План оптимален!!!

Оптимальный план

$$F = 12 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{8}x_6 \\ x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{8}x_6 \\ x_5 = 10 + 2x_3 - \frac{3}{2}x_6 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_6 \end{cases}$$

- Основные: x_1, x_2, x_4, x_5
- Свободные: x_3, x_6
- Допустимый план: $X_2 = (1.5, 3, 0, 0.5, 10, 0)$
- $F_2 = 12$

Возвращаясь к задаче

Максимальная прибыль:

$$F_{\max} = 12$$

Оптимальный план:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.5 && \text{— количество изделий №1} \\ x_2 &= 3 && \text{— количество изделий №2} \end{aligned}$$

Неиспользованные мощности:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 && \text{— I цех} \\ x_4 &= 0.5 && \text{— II цех} \\ x_5 &= 10 && \text{— III цех} \\ x_6 &= 0 && \text{— IV цех} \end{aligned}$$

Этап поиска допустимого плана (шаг 1)

Метод искусственного базиса

Понятие искусственного базиса

ЗЛП в канонической форме:

$$F = d + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ b_1, b_2, \cdots, b_m \geqslant 0 \end{array}$$

ЗЛП поиска допустимого плана:

$$\xi = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ y_m = b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \geqslant 0 \\ b_1, b_2, \ldots, b_m \geqslant 0 \end{array}$$

$\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ — искусственный базис

Идея метода искусственного базиса

Ясно, что $\xi \geqslant 0$

- $\xi_{\min} > 0$ — система ограничений противоречива
- $\xi_{\min} = 0$, то $y_1 = \ldots = y_m = 0$.
  - Занулим все переменные $y_1, \ldots y_m$ в системе ограничений, соответствующей оптимальному плану $\xi_{\min} = 0$.
  - Получим систему ограничений для некоторого допустимого плана.

Почему?

1. Если y_i — свободная, то $y_i = 0$ может быть безопасно удалена из всех правых частей системы ограничений.
2. Если $y_i = 0$ — основная, то уравнение $y_i = 0 + a'_{i1}x_1 + a'_{i2}x_2 + \ldots + a'_{in}x_n$ представимо в виде $0 = a'_{i1}x_1 + a'_{i2}x_2 + \ldots + a'_{in}x_n$
3. Если некоторый коэффициент $a'_{ij} \neq 0$, то выразим переменную x_j как новую основную переменную.
4. Если все $a'_{ij} = 0$, то вычеркнем нулевое уравнение.

$$\begin{cases} x_3 = -9 + 3x_1 + x_2 \\ x_4 = -8 + x_1 + 2x_2 \\ x_5 = -12 + x_1 + 6x_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{matrix}$$

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

Формируем искусственный базис:

$$\begin{cases} y_1 = 9 + x_3 - 3x_1 - x_2 \\ y_2 = 8 + x_4 - x_1 - 2x_2 \\ y_3 = 12 + x_5 - x_1 - 6x_2 \end{cases} \quad x_i, y_j \geqslant 0$$

$$\xi = y_1 + y_2 + y_3 =$$

$$= 9 + x_3 - 3x_1 - x_2 + 8 + x_4 - x_1 - 2x_2 + 12 + x_5 - x_1 - 6x_2 =$$

$$= 29 - 5x_1 - 9x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} y_1 - x_3 + 3x_1 + x_2 = 9 \\ y_2 - x_4 + x_1 + 2x_2 = 8 \\ y_3 - x_5 + x_1 + 6x_2 = 12 \end{cases} \qquad \xi - 29 = -5x_1 - 9x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min$$

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
y_1	1	0	0	3	1	-1	0	0	9	$9/1$	$-\frac{1}{6}y_3$
y_2	0	1	0	1	2	0	-1	0	8	$8/2 = 4$	$-\frac{1}{3}y_3$
y_3	0	0	1	1	6	0	0	-1	12	$12/6 = 2$	$:6$
ξ	0	0	0	-5	-9	1	1	1	-29		$+\frac{3}{2}y_3$

Пример применения искусственного базиса

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
y_1	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{17}{6}$	0	-1	0	$\frac{1}{6}$	7	$\frac{42}{17}=2\frac{8}{17}$	$\cdot\frac{6}{17}$
y_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{12}{2}=6$	$-\frac{4}{17}y_1$
x_2	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	2	12	$-\frac{1}{17}y_1$
ξ	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	-11		$+\frac{21}{17}y_1$

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	$\frac{6}{17}$	0	$-\frac{1}{17}$	1	0	$-\frac{6}{17}$	0	$\frac{1}{17}$	$\frac{42}{17}$
y_2	$-\frac{4}{17}$	0	$-\frac{5}{17}$	0	0	$\frac{4}{17}$	-1	$\frac{5}{17}$	$\frac{40}{17}$
x_2	$-\frac{1}{17}$	0	$\frac{3}{17}$	0	1	$\frac{1}{17}$	0	$-\frac{3}{17}$	$\frac{27}{17}$
ξ	$\frac{21}{17}$	0	$\frac{22}{17}$	0	0	$-\frac{4}{17}$	1	$-\frac{5}{17}$	$-\frac{40}{17}$

Пример применения искусственного базиса

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
x_1	$\frac{6}{17}$	0	$-\frac{1}{17}$	1	0	$-\frac{6}{17}$	0	$\frac{1}{17}$	$\frac{42}{17}$	42	$-\frac{1}{5}y_2$
y_2	$-\frac{4}{17}$	1	$-\frac{5}{17}$	0	0	$\frac{4}{17}$	-1	$\frac{5}{17}$	$\frac{40}{17}$	8	$\cdot\frac{17}{5}$
x_2	$-\frac{1}{17}$	0	$\frac{3}{17}$	0	1	$\frac{1}{17}$	0	$-\frac{3}{17}$	$\frac{27}{17}$	$-$	$+\frac{3}{5}y_2$
ξ	$\frac{21}{17}$	0	$\frac{22}{17}$	0	0	$-\frac{4}{17}$	1	$-\frac{5}{17}$	$-\frac{40}{17}$		$+y_2$

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	2
x_5	$-\frac{4}{5}$	$\frac{17}{5}$	-1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{17}{5}$	1	8
x_2	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	3
ξ	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Получили оптимальное решение задачи поиска допустимого плана

Все переменные искусственного базиса y_1, y_2, y_3 — свободные. Уберем их из системы ограничений:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	2
x_5	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{17}{5}$	1	8
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	3
ξ	0	0	0	0	0	0

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2x_3}{5} + \frac{x_4}{5} = 2 \\ x_2 + \frac{x_3}{5} - \frac{3x_4}{5} = 3 \\ \frac{4x_3}{5} - \frac{17x_4}{5} + x_5 = 8 \end{cases}$$

$X = (2, 3, 0, 0, 8)$ — допустимый план

$$F = x_1 + 2x_2 = 5 + x_4 \to \max$$

ЗЛП готова к оптимизации симплекс-методом

Вырожденное решение задачи линейного программирования

Вырожденное решение ЗЛП

Оптимальный план задачи линенйного программирования в канонической форме называется вырожденным, если значение некоторой основной переменной равно нулю.
Такую переменную также будем называть вырожденной.

При переносе вырожденной переменной в свободные значение целевой функции не меняется.
Это может привести к зацикливанию симплекс-метода.

Зацикливания можно избежать, используя правило Бленда:

1. В качестве переменной, переводимых в основные, выбирается переменная с наименьшим индексом, имеющая положительный коэффициент в целевой функции.
2. Из всех переменных x_i которые можно перевести в свободные выбирается переменная с наименьшим индексом.

Резюме

К настоящему моменту вы знаете:

1. Постановку задачи линейного программирования:
2. Графический метод решения ЗЛП:
3. Симплекс-метод решения ЗЛП:

Убедитесь, что вы не только знаете, но и умеете применять рассказанные вам методы.

Источники информации

- Исследование и оптимизация моделей: Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике. Главы 4, 5 с. 16–28.

Анонс:

На следующей лекции рассмотрим распространенный частный случай задачи линейного программирования — транспортную задачу.