



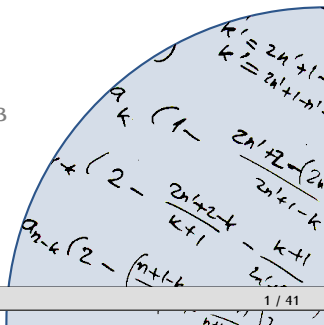
# Введение в экономико-математическое моделирование

## Лекция 2. Графы и сети

Анализ и оптимизация сетевой модели

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru





# Структура лекции

- 1 Исследование сетевой модели
  - Временные параметры
  - Календарный график
  - Коэффициент напряженности работ
  
- 2 Оптимизация сетевой модели
  - Оптимизация типа «время — затраты»
  - Оптимизация числа сотрудников
  - Неопределенность времени выполнения работ
  - Резюме лекции и домашнее задание



## Временные параметры событий

$t_p(i)$  — ранний (ожидаемый) срок свершения  $i$ -го события:

$$t_p(i) = \max_j (t_p(j) + t(j, i))$$

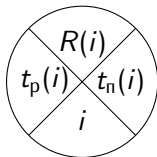
$t_n(i)$  — поздний (предельный) срок:

$$t_n(i) = \min_j (t_n(j) - t(i, j))$$

$R(i)$  — резерв времени  $i$ -го события:

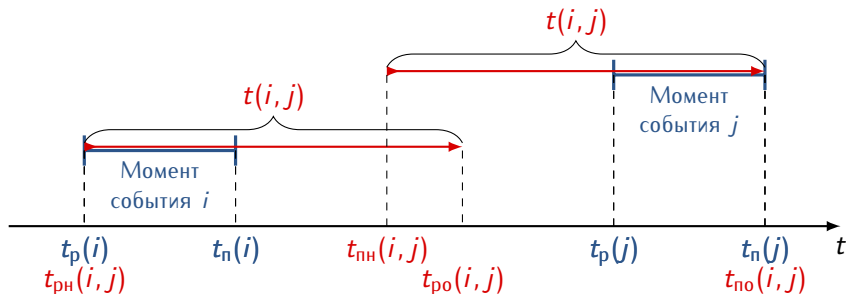
$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

Изображение события:





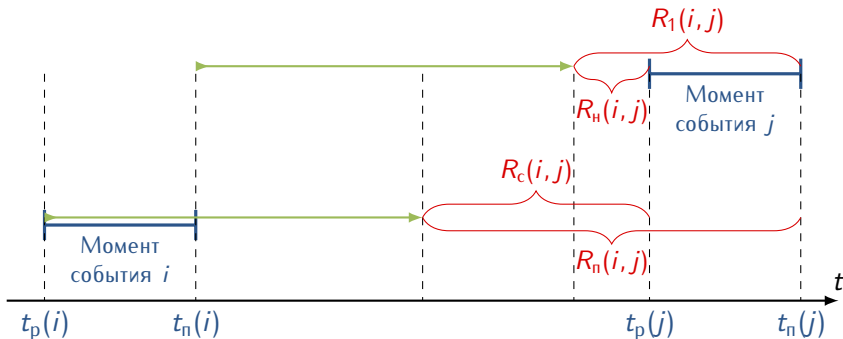
# Временные параметры работ



- $t_{pn}(i, j)$  — ранний срок начала работы:  $t_{pn}(i, j) = t_p(i)$   
 $t_{po}(i, j)$  — ранний срок окончания работы:  $t_{po}(i, j) = t_p(j) + t(i, j)$   
 $t_{pn}(i, j)$  — поздний срок начала работы:  $t_{pn}(i, j) = t_n(i) - t(i, j)$   
 $t_{po}(i, j)$  — поздний срок окончания работы:  $t_{po}(i, j) = t_n(j)$



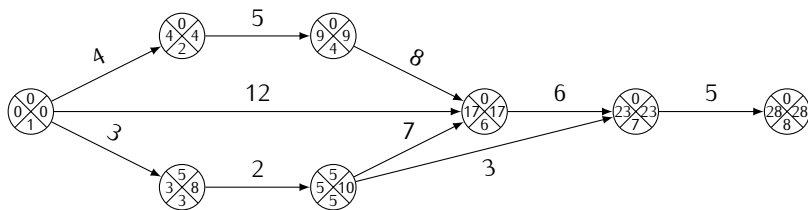
# Резервы времени



- ▶ Полный резерв времени:  $R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j)$
- ▶ Частный резерв первого вида:  $R_1(i, j) = t_n(j) - t_n(i) - t(i, j)$
- ▶ Свободный резерв времени:  $R_c(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i, j)$
- ▶ Независимый резерв времени:  $R_n(i, j) = t_p(j) - t_n(i) - t(i, j)$



# Резервы времени. Пример



$i, j$	$t(i, j)$	$t_{\text{рн}}(i, j)$	$t_{\text{по}}(i, j)$	$t_{\text{нн}}(i, j)$	$t_{\text{но}}(i, j)$	$R_{\text{н}}(i, j)$	$R_1(i, j)$	$R_{\text{с}}(i, j)$	$R_{\text{н}}(i, j)$
(1,2)	4	0	4	0	4	0	0	0	0
(1,3)	3	0	3	5	8	5	5	0	0
(1,6)	12	0	12	5	17	5	5	5	5
(2,4)	5	4	9	4	9	0	0	0	0
(3,5)	2	3	5	8	10	5	0	0	-5
(4,6)	8	9	17	9	17	0	0	0	0
(5,6)	7	5	12	10	17	5	0	5	0
(5,7)	3	5	8	20	23	15	10	15	10
(6,7)	6	17	23	17	23	0	0	0	0
(7,8)	5	23	28	23	28	0	0	0	0



# Календарный график

Календарный график отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени.

По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси — раннее начало и раннее окончание работ.

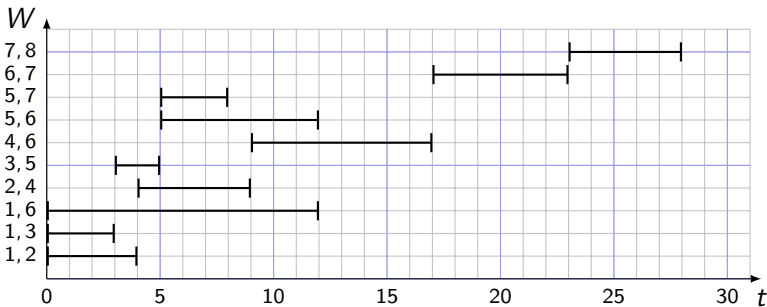
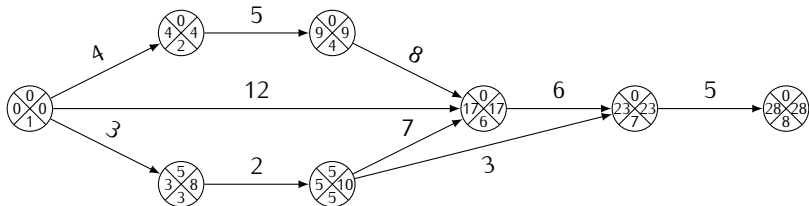
Для построения календарного графика достаточно рассчитать временные параметры событий.

**Дополнительно указываются:**

- ▶ величины полных и свободных резервов работ;
- ▶ число занятых сотрудников;
- ▶ стоимости работ.



# Календарный график. Пример







# Коэффициент напряженности работ

## Определение

**Коэффициентом напряженности работы** — отношение продолжительности не совпадающих отрезков пути максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, и критического пути.

$$K_H(i, j) = \frac{t(L_{\max}) - t'_{\text{кр}}}{t_{\text{кр}} - t'_{\text{кр}}}$$

- ▶  $t(L_{\max})$  — продолжительность максимального пути, проходящего через работу
- ▶  $t_{\text{кр}}$  — длина критического пути
- ▶  $t'_{\text{кр}}$  — длина общей части критического и рассматриваемого путей работу



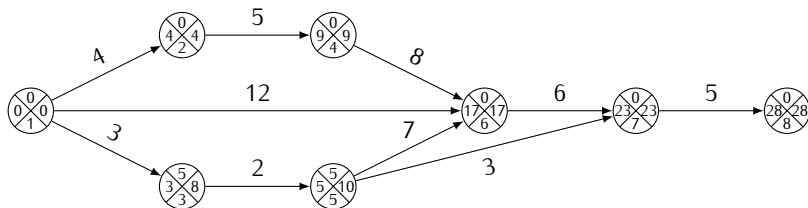
## Свойства коэффициента напряженности

- ▶  $K_H(i, j) = 1 - \frac{R_H(i, j)}{t_{кр} - t'_{кр}}$
- ▶  $K_H(i, j) \in [0, 1]$
- ▶  $K_H(i, j) = 1$  для работ, лежащих на критическом пути.
- ▶  $K_H(i, j) = 0$  для работ, у которых отрезки максимального из путей, не совпадающие с критическим путем, состоят из фиктивных работ.
- ▶ Работы, для которых максимальным является один и тот же путь имеют одинаковый коэффициент напряженности.

Для расчета коэффициента напряженности целесообразно выписать все полные пути сети.



# Расчет коэффициента напряженности



Полные пути:

(П1)  $1 \xrightarrow{(4)} 2 \xrightarrow{(5)} 4 \xrightarrow{(8)} 6 \xrightarrow{(6)} 7 \xrightarrow{(5)} 8$

длина 28

(П2)  $1 \xrightarrow{(12)} 6 \xrightarrow{(6)} 7 \xrightarrow{(5)} 8$

длина 23

(П3)  $1 \xrightarrow{(3)} 3 \xrightarrow{(2)} 5 \xrightarrow{(7)} 6 \xrightarrow{(6)} 7 \xrightarrow{(5)} 8$

длина 23

(П4)  $1 \xrightarrow{(3)} 3 \xrightarrow{(2)} 5 \xrightarrow{(3)} 7 \xrightarrow{(5)} 8$

длина 13



# Расчет коэффициента напряженности

Полные пути:

(П1)  $1 \xrightarrow{(4)} 2 \xrightarrow{(5)} 4 \xrightarrow{(8)} 6 \xrightarrow{(6)} 7 \xrightarrow{(5)} 8$       длина 28

(П2)  $1 \xrightarrow{(12)} 6 \xrightarrow{(6)} 7 \xrightarrow{(5)} 8$       длина 23

(П3)  $1 \xrightarrow{(3)} 3 \xrightarrow{(2)} 5 \xrightarrow{(7)} 6 \xrightarrow{(6)} 7 \xrightarrow{(5)} 8$       длина 23

(П4)  $1 \xrightarrow{(3)} 3 \xrightarrow{(2)} 5 \xrightarrow{(3)} 7 \xrightarrow{(5)} 8$       длина 13

- ▶ Работы, лежащие на критическом пути П1:

$$K_n(1, 2) = K_n(2, 4) = K_n(4, 6) = K_n(6, 7) = K_n(7, 8) = 1$$

- ▶ Работы, для которых П2 — максимальный путь:

$$K_n(1, 6) = \frac{t(1,6) - t(6,7,8)}{t(1,2,4,6) - t(6,7,8)} = \frac{12-11}{17-11} \approx 0.17$$

- ▶ Работы, для которых П3 — максимальный путь:

$$K_n(1, 3) = K_n(3, 5) = \frac{t(1,3,5,6) - t(6,7,8)}{t(1,2,4,6) - t(6,7,8)} = \frac{12-11}{17-11} \approx 0.17$$

- ▶ Работы, для которых П4 — максимальный путь:

$$K_n(5, 7) = \frac{t(1,3,5,7) - t(7,8)}{t(1,2,4,6,7) - t(7,8)} = \frac{8-5}{23-5} \approx 0.17$$

# Оптимизация типа «время — затраты»



# Оптимизация типа «время — затраты»

**Цель:** сокращение времени выполнения проекта в целом.

**Методы:**

- ▶ задействование дополнительных ресурсов;
- ▶ повышение затрат на выполнение работ.

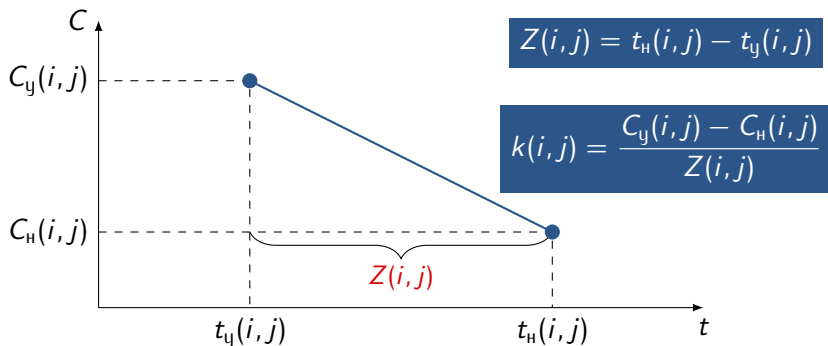
**Исходные данные:**

- ▶ нормальная длительность работы
- ▶ ускоренная длительность работы
- ▶ затраты на выполнение работы в нормальный срок;
- ▶ затраты на выполнение работы в ускоренный срок;

Для оценки величины дополнительных затрат, и минимальных сроков работ используются либо нормативы, либо данные о выполнении аналогичных работ в прошлом.



## Коэффициент роста затрат



### Экономический смысл коэффициента роста затрат $k(i, j)$

Коэффициент роста затрат равен затратам ресурсов для сокращения длительности выполнения работы  $(i, j)$  на одну единицу времени.



# Алгоритм оптимизации

1. Расчет сети исходя из нормальных длительностей работ.
2. Определяется сумма затрат на выполнение всего проекта при нормальной продолжительности работ.
3. Выбирается критическая работа (или работы) с наименьшим коэффициентом затрат и запасом сокращения времени.
4. Определяется в какие полные пути входит выбранная работа.
5. Вычисляется величина, на которую может быть сокращена продолжительность работ.
6. Определяется время, на которое необходимо сократить длительность работы.
7. Вычисляется новая стоимость проекта
8. Корректируются критические пути.
9. Переход на шаг 3, пока позволяет бюджет.





## Пример: формулировка

Работа ( $i, j$ )	Нормальный режим		Ускоренный режим	
	$t_n(i, j)$ нед.	$C_n(i, j)$ тыс. руб.	$t_y(i, j)$ нед.	$C_y(i, j)$ тыс. руб.
(1,2)	4	15	2	17
(1,3)	3	8	2	10
(1,6)	12	18	6	25
(2,4)	5	13	1	14
(3,5)	2	9	1	10
(4,6)	8	14	3	18
(5,6)	7	14	4	15
(5,7)	3	5	1	7
(6,7)	6	16	1	29
(7,8)	5	11	2	13

**Задача:** Достичь минимально возможного срока выполнения проекта при бюджете 130 тыс. руб.



## Пример: вычисления

Вычислим коэффициент роста затрат:

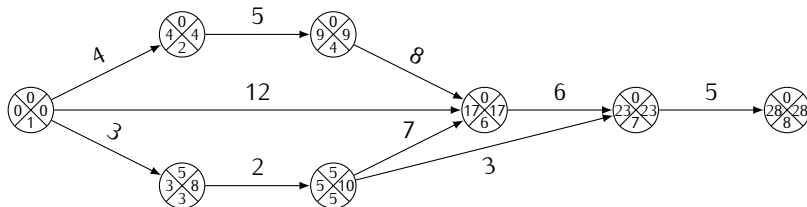
$(i,j)$	$t_n(i,j)$	$C_n(i,j)$	$t_y(i,j)$	$C_y(i,j)$	$Z(i,j)$	$k(i,j)$
(1,2)	4	15	2	17	2	1.00
(1,3)	3	8	2	10	1	2.00
(1,6)	12	18	6	25	6	1.17
(2,4)	5	13	1	14	4	0.25
(3,5)	2	9	1	10	1	1.00
(4,6)	8	14	3	18	5	0.80
(5,6)	7	14	4	15	3	0.33
(5,7)	3	5	1	7	2	1.00
(6,7)	6	16	1	29	5	2.60
(7,8)	5	11	2	13	3	0.67

Минимальная стоимость работ:

$$15 + 8 + 18 + 13 + 9 + 14 + 14 + 5 + 16 + 11 = 123$$



## Пример: расчет сети



Полные пути:

Над стрелкой  $k(i,j)$ , под стрелкой  $Z(i,j)$

(П1)  $1 \xrightarrow[2]{1.00} 2 \xrightarrow[4]{0.25} 4 \xrightarrow[5]{0.80} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$       длина 28

(П2)  $1 \xrightarrow[6]{1.17} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$       длина 23

(П3)  $1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[3]{0.33} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$       длина 23

(П4)  $1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[2]{1.00} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$       длина 13



## Пример: Итерация 1

Критический путь  $1 \xrightarrow[2]{1.00} 2 \xrightarrow[4]{0.25} 4 \xrightarrow[5]{0.80} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$

- ▶ Критическая работа с минимальным коэффициентом роста затрат:  $2 \rightarrow 4$ . Входит только в путь П1.
- ▶ Ее можно сократить на  $\min\{4, (28 - 23)\} = 4$  единицы.
- ▶ Критический путь: П1.
- ▶ Стоимость проекта составит  $123 + 4 \cdot 0.25 = 124 < 130$
- ▶ Продолжительность проекта составит  $28 - 4 = 24$  дня.

Новые полные пути:

(П1)  $1 \xrightarrow[2]{1.00} 2 \xrightarrow[0]{ } 4 \xrightarrow[5]{0.80} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$       длина 24

(П2)  $1 \xrightarrow[6]{1.17} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$       длина 23

(П3)  $1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[3]{0.33} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$       длина 23

(П4)  $1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[2]{1.00} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$       длина 13



## Пример: Итерация 2

Критический путь  $1 \xrightarrow[2]{1.00} 2 \xrightarrow[0]{ } 4 \xrightarrow[5]{0.80} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[3]{0.67} 8$

- ▶ Критическая работа с минимальным коэффициентом роста затрат:  $7 \rightarrow 8$ . Входит в пути П1, П2, П3, П4.
- ▶ Ее можно сократить на 3 единицы.
- ▶ Критический путь: П1.
- ▶ Стоимость проекта составит  $124 + 3 \cdot 0.67 = 126.1 < 130$
- ▶ Продолжительность проекта составит  $24 - 3 = 21$  нед.

Новые полные пути:

(П1)  $1 \xrightarrow[2]{1.00} 2 \xrightarrow[ ]{ } 4 \xrightarrow[5]{0.80} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[ ]{ } 8$  длина 21

(П2)  $1 \xrightarrow[6]{1.17} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[ ]{ } 8$  длина 20

(П3)  $1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[3]{0.33} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \xrightarrow[ ]{ } 8$  длина 20

(П4)  $1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[2]{1.00} 7 \xrightarrow[ ]{ } 8$  длина 10



## Пример: Итерация 3

Критический путь  $1 \xrightarrow[2]{1.00} 2 \longrightarrow 4 \xrightarrow[5]{0.80} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$

- ▶ Критическая работа с минимальным коэффициентом роста затрат:  $4 \rightarrow 6$ . Входит в пути **П1**.
- ▶ Ее можно сократить на  $\min\{5, (21 - 20)\} = 1$  единицу.
- ▶ Критический путь: П1, П2, П3.
- ▶ Стоимость проекта составит  $126.1 + 1 \cdot 0.80 = 126.9 < 130$
- ▶ Продолжительность проекта составит  $21 - 1 = 20$  день.

Новые полные пути:

(П1)  $1 \xrightarrow[2]{1.00} 2 \longrightarrow 4 \xrightarrow[4]{0.80} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$       длина 20

(П2)  $1 \xrightarrow[6]{1.17} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$       длина 20

(П3)  $1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[3]{0.33} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$       длина 20

(П4)  $1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[2]{1.00} 7 \longrightarrow 8$       длина 10



## Пример: Итерация 3

$$(П1) \quad 1 \xrightarrow[2]{1.00} 2 \longrightarrow 4 \xrightarrow[4]{0.80} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$$

$$(П2) \quad 1 \xrightarrow[6]{1.17} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$$

$$(П3) \quad 1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[3]{0.33} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$$

- ▶ Одновременное сокращение трех критических путей можно провести ускорив по одной работе в каждом пути. Выберем работу с наименьшей стоимостью в каждом пути. **Следует учитывать, что работа, входящая в два пути или более путей, может оказаться более выгодной.**

- ▶  $4 \rightarrow 6, 1 \rightarrow 6, 5 \rightarrow 6$ . Стоимость  $0.80 + 1.17 + 0.33 = 2.30$

- ▶  $6 \rightarrow 7$ . Стоимость 2.60

- ▶ Проект можно сократить на  $\min\{4, 6, 3, (20 - 10)\} = 3$  дня.
- ▶ Стоимость проекта составит  $124 + 3 \cdot 2.30 = 130.9 > 130$
- ▶ Будем уменьшать число сокращаемых дней, пока не впишемся в бюджет:  $124 + 2 \cdot 2.30 = 128.6 < 130$
- ▶ Продолжительность проекта составит  $20 - 2 = 18$  дней.



## Пример: итог

Полные пути:

$$(П1) \quad 1 \xrightarrow[2]{1.00} 2 \longrightarrow 4 \xrightarrow[2]{0.80} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$$

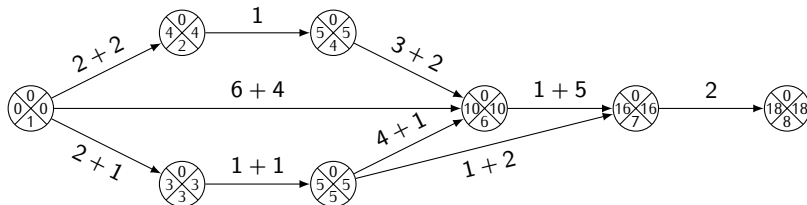
$$(П2) \quad 1 \xrightarrow[4]{1.17} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$$

$$(П3) \quad 1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[1]{0.33} 6 \xrightarrow[5]{2.60} 7 \longrightarrow 8$$

$$(П4) \quad 1 \xrightarrow[1]{2.00} 3 \xrightarrow[1]{1.00} 5 \xrightarrow[2]{1.00} 7 \longrightarrow 8$$

Отметим на дугах графа минимальные продолжительности работ и прибавим к ним оставшиеся значения запаса времени.

Сетевой план:

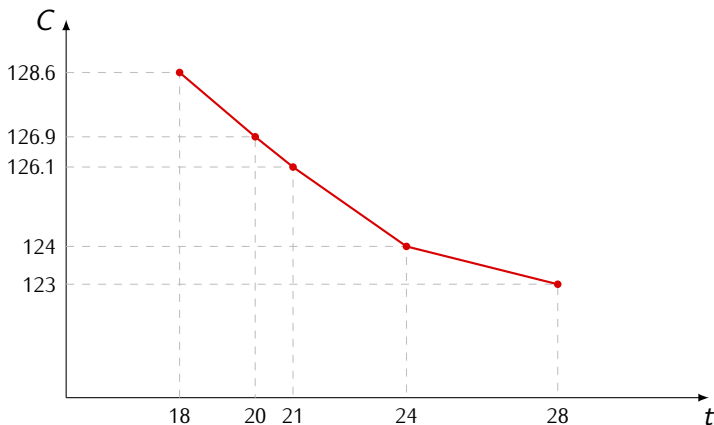






## Пример: график сокращения времени

Зависимость расходов на проект от времени реализации:



# Оптимизация числа сотрудников



# Оптимизация числа сотрудников

При оптимизации использования ресурса рабочей силы сетевые работы чаще всего стремятся организовать таким образом, чтобы:

- ▶ количество одновременно занятых исполнителей было минимальным;
- ▶ выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Для оптимизации используют временные резервы, смещая работы так, чтобы в каждый момент времени число занятых сотрудников не превышало заданной величины.

Манипуляции удобно проводить с помощью календарного графика и графика загрузки.



# График загрузки

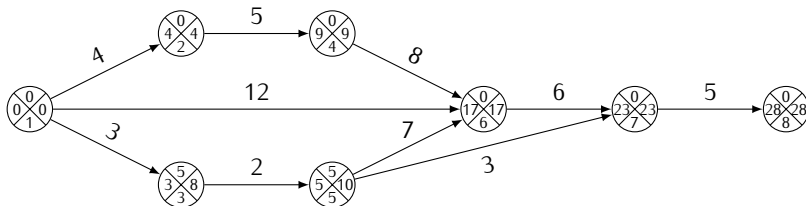
График загрузки строится на основе календарного графика с указанным числом исполнителей.

- ▶ По горизонтальной оси откладывается время
- ▶ По вертикальной — количество человек, занятых работой в каждый конкретный день;
- ▶ Календарный график и график загрузки располагают один над другим.



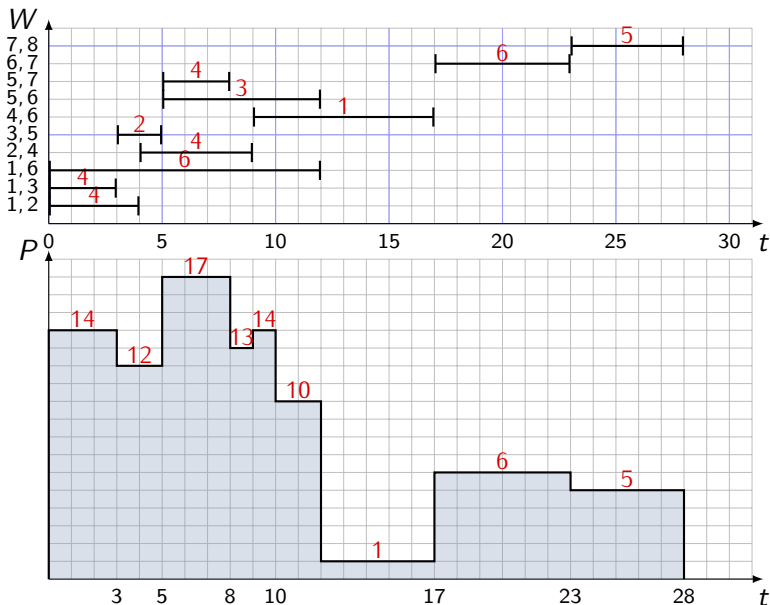
## Пример. Задача оптимизации загрузки

Код работ	Продолжительность работ	Количество исполнителей
(1,2)	4	4
(1,3)	3	4
(1,6)	12	6
(2,4)	5	4
(3,5)	2	2
(4,6)	8	1
(5,6)	7	3
(6,7)	3	4
(6,7)	6	6
(7,8)	5	5





# Пример. График загрузки





# Пример. Оптимизация

## Проблема:

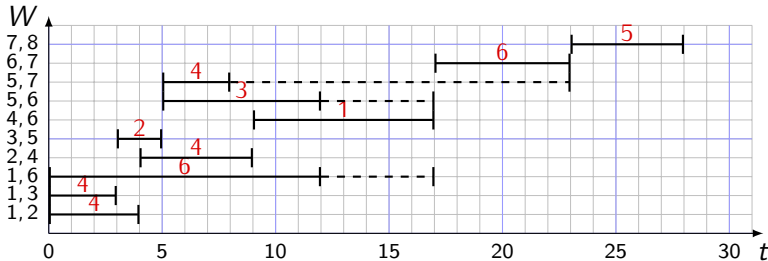
Предположим, в проекте задействовано всего **10 сотрудников**  
А нам требуется **17 сотрудников**.

## Возможный путь решения:

смещение работ во времени за счет свободных резервов работ.

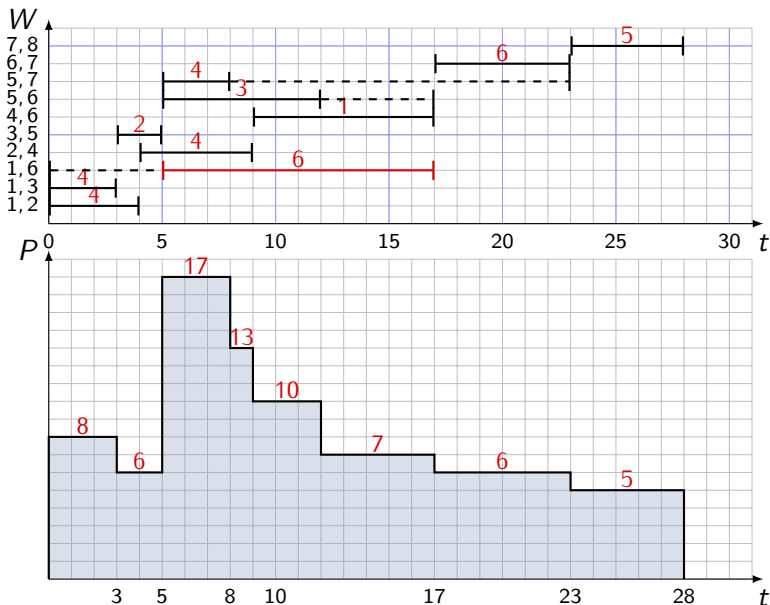
**Сдвиг работы в пределах ее свободного резерва времени не меняет моменты начала последующих за ней работ.**

## Свободные резервы работ





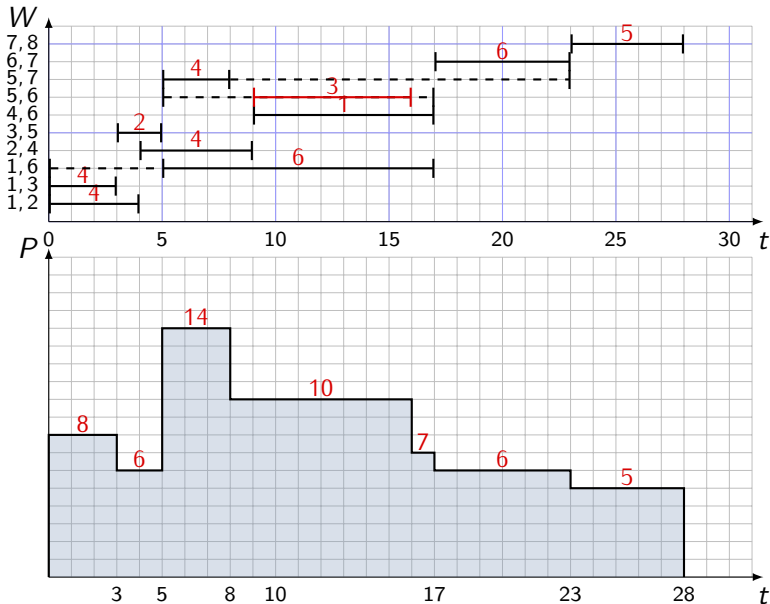
## Пример. Оптимизация-2





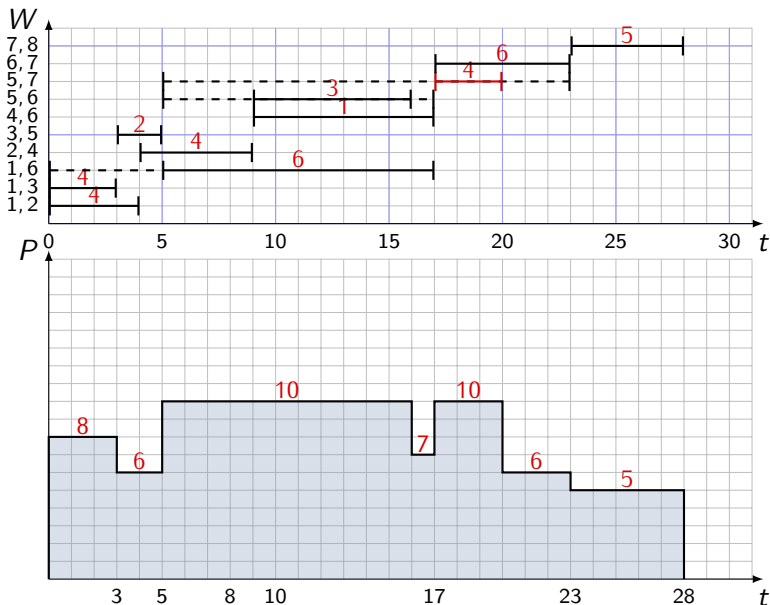


## Пример. Оптимизация-3





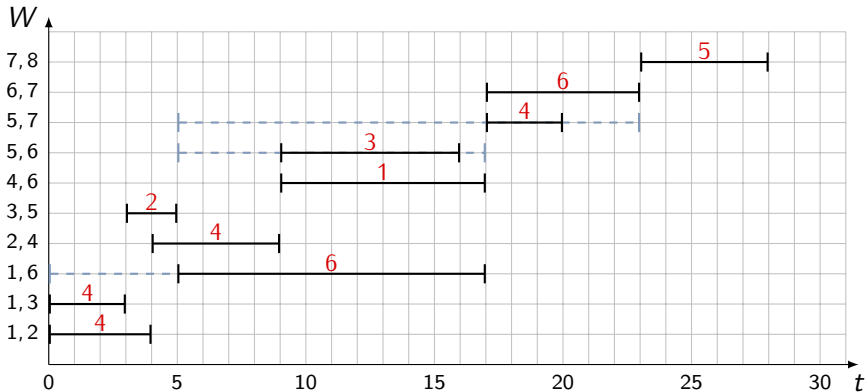
## Пример. Оптимизация-4





## Пример. Итог

Итоговый календарный график работ имеет вид:





# Модели с неопределенным сроком работ

На практике сроки выполнения работ сложно определить точно. Для построения сетевой модели используют экспертные оценки продолжительности работы:

$t_{\min}(i, j)$  — минимальная продолжительность работы;

$t_{\max}(i, j)$  — максимальная продолжительность работы;

Тогда ожидаемая продолжительность работы определяется по формуле

$$t(i, j) = \frac{2t_{\min}(i, j) + 3t_{\max}(i, j)}{5}$$

А среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(i, j) = \frac{t_{\max}(i, j) - t_{\min}(i, j)}{6}$$

Далее можно строить сетевую модель.



# Модели с неопределенным сроком работ

Опираясь на свойства случайных величин и используя методы статистической проверки гипотез можно оценивать:

- ▶ вероятности наступления событий в пределах их ранних и поздних сроков,
- ▶ вероятность завершения проекта к заранее установленной дате
- ▶ срок к которому будет завершен проект с заданной надежностью.

Эти задачи мы научимся решать после нового года.



После проработки лекции вы должны уметь:

- ▶ рассчитывать временные характеристики сетевого графика
- ▶ вычислять коэффициент напряженности, делать выводы о важности работы для проекта;
- ▶ оптимизировать время и бюджет проекта
- ▶ оптимизировать распределение работ с целью задействования минимального числа сотрудников.



# Задание

Для завершения лекции вам необходимо подготовить конспект, в который должны войти:

1. понятия и формулы, прозвучавшие в лекции;
2. краткие алгоритмы решения задач оптимизации (в Кремере есть еще один пример, но сети там очень большие);
3. примеры решения задач оптимизации на небольших сетях.



- ▶ Исследование и оптимизация моделей: Кремер Н. Ш. [Исследование операций в экономике](#) параграф 14.8, с. 320–330.
- ▶ Все материалы по курсу здесь:  
<https://cloud.mail.ru/public/48BX/47oESuaQQ>
- ▶ Каренов К. М. Теоретические и методические основы оптимизации сетевых моделей по времени // Вестник КарГУ, 2012 URL: <https://articlekz.com/article/5878>





## Анонс:

На следующей лекции мы поймем:

- ▶ что такое матрицы и как их вычислять.
- ▶ как решать системы линейных уравнений;
- ▶ как решать системы линейных уравнений;
- ▶ почему матрицы удобно использовать в экономических моделях.