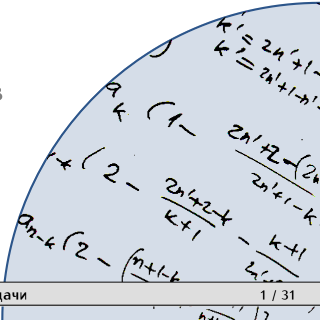
Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 10. Многокритериальные задачи

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru



Структура лекции

1. Проблема нормализации критериев, то есть приведение критериев к единому масштабу измерения.
2. Проблема выбора принципа оптимальности, то есть установление, в каком смысле оптимальное решение лучше всех остальных решений.
3. Проблема учета приоритетов критериев, возникающая в тех случаях, когда из экономического смысла критериев ясно, что некоторые из них имеют приоритет над другими.
4. Проблема выбора метода вычисления оптимума задачи.

Многокритериальная задача может не иметь оптимального решения.

- Имеется область допустимых планов.
- Есть несколько целевых функций.
- Целевые функции не могут быть совмещены в одну.

Требуется найти точку области допустимых решений, в которой достигается максимум (или минимум) всех целевых функций.

Важно: В оптимальном плане многокритериальной задачи каждый критерий в отдельности может не достигать своего оптимума.

Каноническая двукритериальная задача оптимизации

- Каждый из критериев максимизируется:

$$F_1(x_1, x_2) \to \max, \qquad F_2(x_1, x_2) \to \max$$

- Область допустимых планов задана системой ограничений в форме нестрогих неравенств.

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) \leqslant b_1 \\ h_2(x_1, x_2) \leqslant b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ h_n(x_1, x_2) \leqslant b_n \end{cases}$$

Сведение задачи к канонической форме

Задача может быть поставлена по разному:

- $F_1(x_1, x_2) \to \max, \qquad F_2(x_1, x_2) \to \max$
- $F_1(x_1, x_2) \to \min, \qquad F_2(x_1, x_2) \to \max$
- $F_1(x_1, x_2) \to \min, \qquad F_2(x_1, x_2) \to \min$

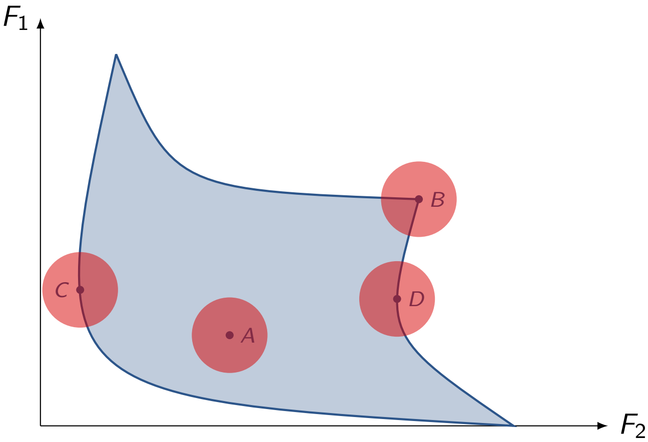
Задача может быть поставлена по разному:

- $F_1(x_1, x_2) \to \max, \qquad F_2(x_1, x_2) \to \max$
- $F_1(x_1, x_2) \to \min, \qquad F_2(x_1, x_2) \to \max$
- $F_1(x_1, x_2) \to \min, \qquad F_2(x_1, x_2) \to \min$

$$F(x_1, x_2) \to \min \iff G(x_1, x_2) = -F(x_1, x_2) \to \max$$

Если критерий минимизируется, то нужно умножить его на -1.

Типы точек системы ограничений



- A — внутренняя точка;
- B — вершинная точка;
- C, D — граничные точки.

Оптимальность по Парето

Определеине

План $A(x_1, x_2)$ лучше плана $B_(y_1, y_2)$ по Парето $(A \succcurlyeq Y)$, если

$$F_1(x_1, x_2) \geqslant F_1(y_1, y_2), \qquad F_2(x_1, x_2) \geqslant F_2(y_1, y_2)$$

„Всякое изменение, которое никому не приносит убытков, а некоторым людям приносит пользу (по их собственной оценке), является улучшением“

Вильфредо Парето
(15 июля 1848 – 20 августа 1923)
итальянский инженер, экономист и социолог

План A — Парето-оптимальный решение, если не существует такого плана B, что $B \succcurlyeq A$ по Парето.

Множество Парето — множество всех Парето-оптимальных решений задачи.

Итак, множество Парето — это множество допустимых планов в задаче многокритериальной оптимизации, для которых не существует другого допустимого плана, имеющей по всем критериям не худшие оценки и хотя бы по одному критерию — лучшие.

Пример

Приближенно построить множество Парето для следующей задачи двухкритериальной оптимизации:

$$F_1 = (x-2)^2 + (y-1)^2 \to \max \qquad D_X: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 1 \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$$
$$F_2 = -(x-5)^2 - (y-5)^2 \to \min$$

Пример

Приближенно построить множество Парето для следующей задачи двухкритериальной оптимизации:

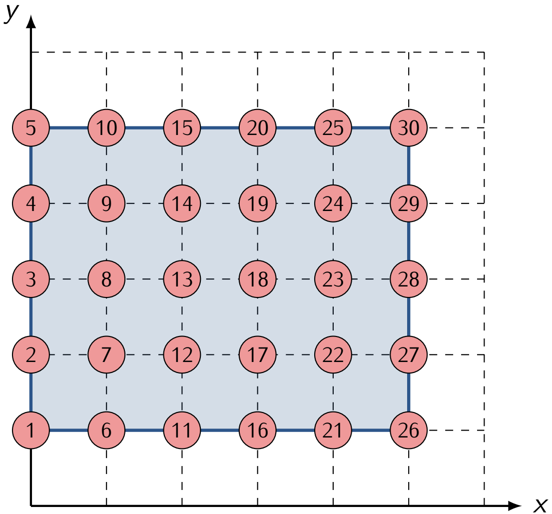
$$F_1 = (x-2)^2 + (y-1)^2 \to \max \qquad D_X: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 1 \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$$
$$F_2 = -(x-5)^2 - (y-5)^2 \to \min$$

Преобразуем задачу:

$$G_1 = F_1 = (x-2)^2 + (y-1)^2 \to \max \qquad D_X: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 1 \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$$
$$G_2 = -F_2 = (x-5)^2 + (y-5)^2 \to \max$$

Пример. Сетка.

Покроем множество допустимых значений сеткой с шагом 1:

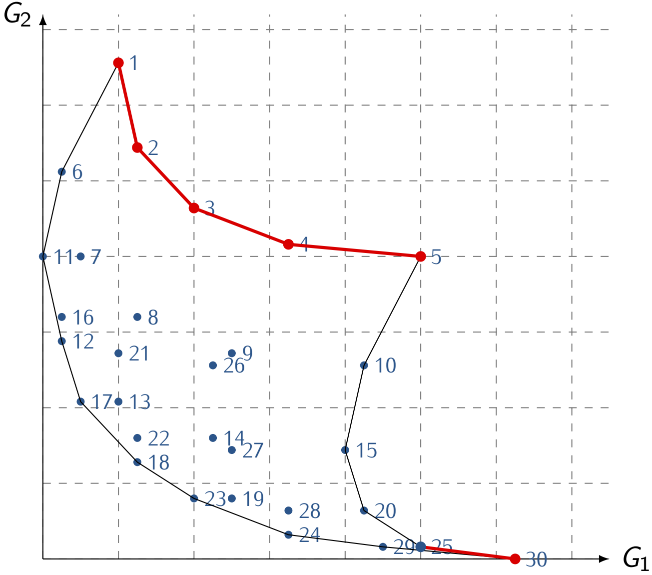


Пример. Вычисление критериев в узлах

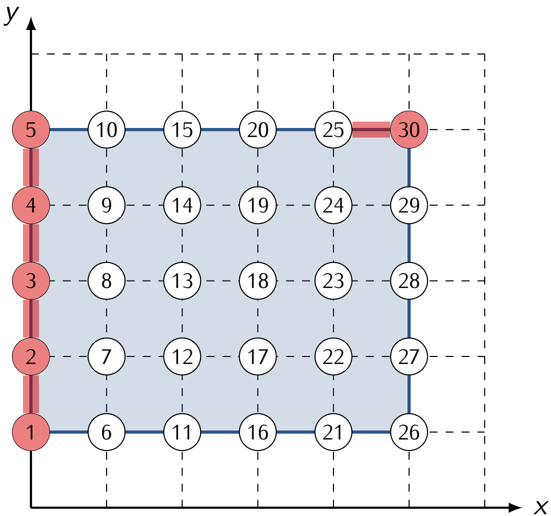
$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5
1	4 / 41	1 / 32	0 / 25	1 / 20	4 / 17	9 / 16
2	5 / 34	2 / 25	1 / 18	2 / 13	5 / 10	10 / 9
3	8 / 29	5 / 20	4 / 13	5 / 8	8 / 5	13 / 4
4	13 / 26	10 / 17	9 / 10	10 / 5	13 / 2	18 / 1
5	20 / 25	17 / 16	16 / 9	17 / 4	20 / 1	25 / 0

- сверху слева $G_1 = (x-2)^2 + (y-1)^2$
- снизу справа $G_2 = (x-5)^2 + (y-5)^2$

Пример. Множество достижимых значений G



Множество Парето



Алгоритм построения множества Парето

Пусть дана задача с двумя переменными и двумя критериями

1. Построить систему ограничений.
2. Выбрать шаг сетки и отметить узлы этой сетки, лежащие внутри области допустимых планов.
3. Посчитать значение критериев F_1, F_2 в каждом узле. Отметить соответствующие точки в системе координат OF_1F_2.
4. Для задачи минимума отметить все точки такие, что ниже и левее них нет точек, соответствующих другим узлам сетки.
5. Для задачи максимума отметить все точки такие, что выше и праее них нет точек, соответствующих другим узлам сетки.
6. Соединить последовательно отмеченные точки.
7. Выделить соответствующие узлы сетки и соединить их в той же последовательности. Это и есть приближенная граница Парето.

Идеальная точка

Определеине

Идеальной точкой называют план, в котором все критерии достигают своих оптимальных значений.

- Если эта точка принадлежит достижимому множеству G, то множество Парето состоит только из этой точки.
- Если идеальная точка не принадлежит G — нужно найти точку множества Парето, наиболее близкую к идеальной.

Пример

Пример решения двухкритериальной ЗЛП

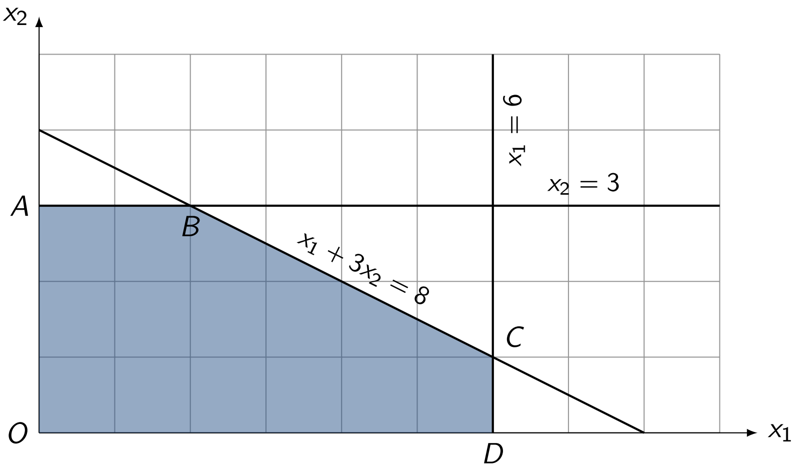
Найти значения переменных, при которых функции

$$F_1 = 2x_1 + x_2 + 1, \qquad F_2 = x_1 - x_2 + 5$$

достигают максимальных значений, если x_1, x_2 удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 6, \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

Построение системы ограничеинй



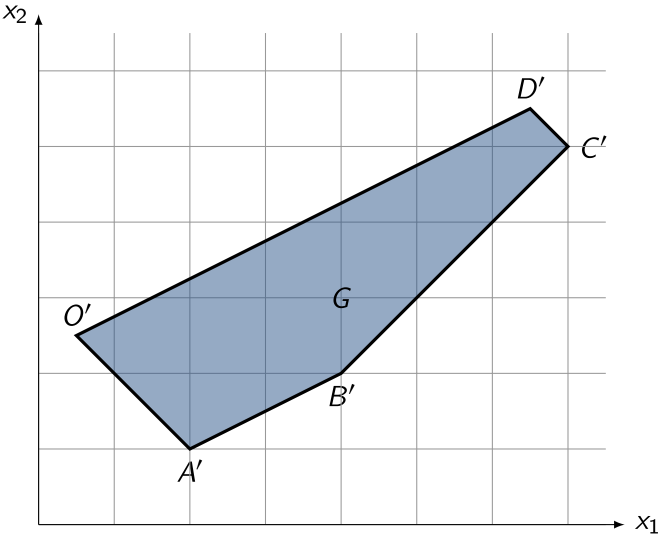
- Построим достижимое множество G в пространстве признаков F_1, F_2
- Каждой точке (x_1, x_2) из области ограничений поставим в соответствие точку F_1, F_2 по правилу:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 - x_2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

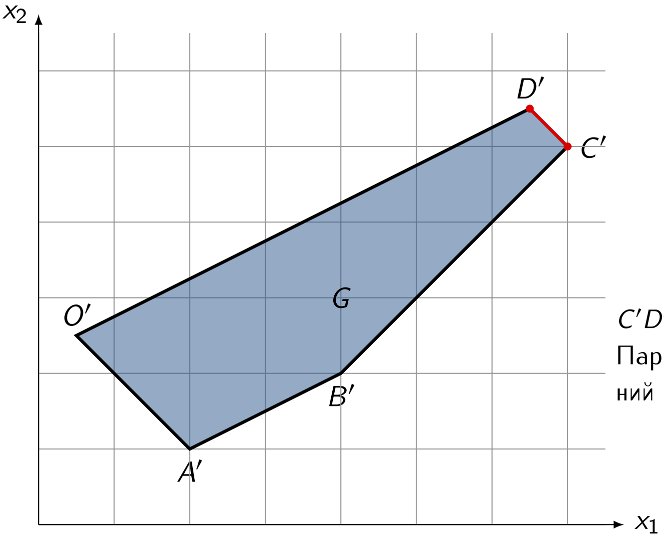
- в силу линейности проводимых преобразований многоугольник $OABCD$ в многоугольник $O'A'B'C'D'$:

$$O'(1;5), \quad A'(4;2), \quad B'(8;4), \quad C'(14;10), \quad D'(13;11).$$

Множество достижимых значений G

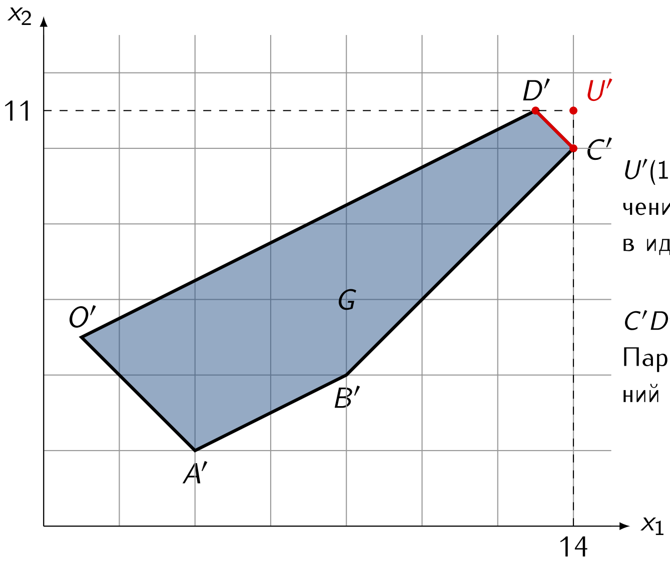


Множество достижимых значений G



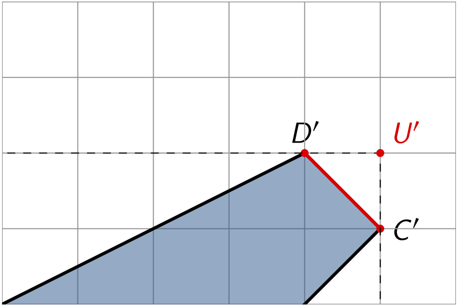
$C'D'$ — множество Парето для значений критериев

Множество достижимых значений G



$U'(14, 11)$ — значения критериев в идеальной точке

$C'D'$ — множество Парето для значений критериев



Найдем точку V', принадлежащую границе Парето и удаленную на наименьшее расстояние от идеальной точки U':

- $V'(f_1, f_2) \in D'C'$
- $|V'U'| = \sqrt{(f_1 - f_{1u})^2 + (f_2 - f_{2u})^2} \to \min$

Вычисление ближайшей точки I

- Обозначим $x = f_1$, $y = f_2$.
- Заметим, что $x \in [13, 14]$, $y \in [10, 11]$.
- Построим прямую $C'D'$: $y = kx$
  по точкам $C'(14, 10)$ и $D'(13, 11)$:

$$\begin{cases} 10 = k14 + b \\ 11 = k13 + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ b = 24 \end{cases} \Longleftrightarrow C'D'\colon y = -x + 24$$

- Рассмотрим целевую функцию — квадрат расстояния до $U'(14, 11)$:

$$\Phi(X, y) = (x - 14)^2 + (y - 11)^2$$

- Подставим $y = -x + 24$ из ограничения:

$$\Phi(x) = (x-14)^2+(-x+24-11)^2 = (x-14)^2+(13-x)^2 \to \min$$

Вычисление ближайшей точки II

- Вычислим производную

$$\Phi'(x) = 2(x - 14) - 2(13 - x) = 4x - 54$$

- Найдем стационарные точки

$$\Phi'(x) = 0,$$
$$4x - 54 = 0,$$
$$x = 13.5 \in [13, 14]$$

- Убеждаемся, что $x = 13.5$ — точка минимума.
- Вычисляем координаты точки V':

$$\begin{cases} x = 13.5 \\ y = -13.5 + 24 = 10.5 \end{cases}$$

Вычисление ближайшей точки III

- Итак, оптимальные значения критериев $F_1 = 13.5$, $F_2 = 10.5$.

- Вспомним, что

$$F_1 = 2x_1 + x_2 + 1, \qquad F_2 = x_1 - x_2 + 5$$

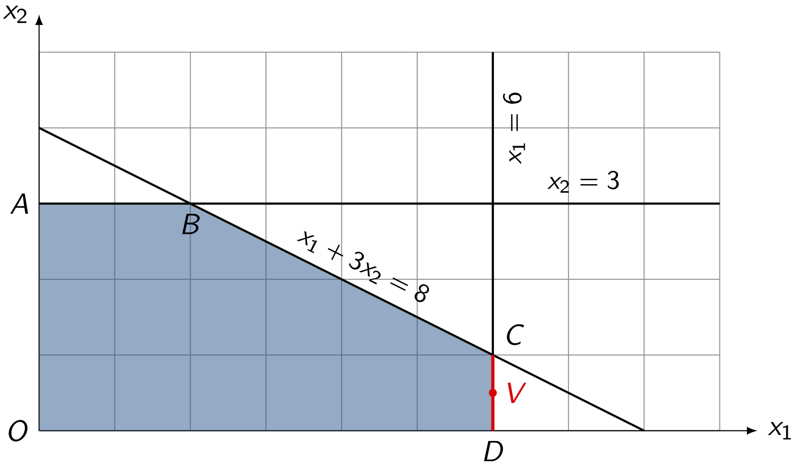
- Подставим в критерии $F_1 = 13.5$, $F_2 = 10.5$.

$$\begin{cases} 13.5 = 2x_1 + x_2 + 1 \\ 10.5 = x_1 - x_2 + 5 \end{cases}$$

- Решаем систему и получаем оптимальный план:

$$x_1 = 6, \qquad x_2 = 0.5$$

Построение системы ограничеинй



- CD — граница Парето
- $V(6, 0.5)$ — оптимальный план.

Пусть дана задача линейного программирования с двумя переменными x_1, x_2 и двумя ограничениями F_1, F_2.

1. Построить многоугольник допустимых планов в системе Ox_1x_2. Обозначить его вершины.
2. Вычислить значения критериев (F_1, F_2) в каждой вершине многоугольника допустимых планов. Построить эти точки в системе OF_1F_2.
3. В системе OF_1F_2 построить многоугольник достижимых значений критерия, соединив те точки, прообразы которых были соединены в системе Ox_1x_2.
4. Построить границу Парето значений критериев.

Алгоритм решения двухкритериальной ЗЛП II

5. Найти идеальную точку U'. Её координаты — максимальные возможные значения каждой из переменных.
6. Найти точку $V'(F_1^*, F_2^*)$ — ближайшую к идеальной на границе Парето. Для этого минимизировать квадрат расстояния между U' и V'. Это оптимальные значения критериев для двухкритериальной задачи.
7. Подставить F_1^*, F_2^* в функции критериев и найти оптимальный план, решив систему линейных уравнений.
8. Отметить оптимальный план на множестве ограничений.

Резюме

Теперь вы знаете:

1. Понятие многокритериальной задачи.
2. Понятие границы Парето.
3. Метод идеальной точки.

Вы должны уметь:

- Применять метод сетки для приближенного нахождения границы Парето.
- Приводить многокритериальную задачу к каноническому виду.
- Решать многокритериальные задачи линейного программирования методом идеальной точки.

Литература

- Очень рекомендуется посмотреть лекции А. В. Ряттель по этой теме.
- Все материалы по курсу здесь: https://cloud.mail.ru/public/48BX/47oESuaQQ