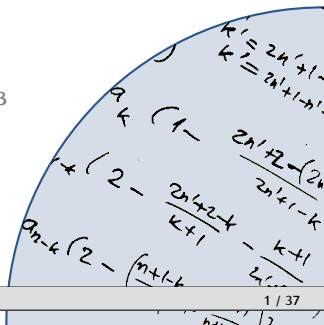




Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 1. Графы и сети

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков
usr10381@vyatsu.ru





Структура лекции

- 1 Введение в экономико-математическое моделирование
 - Модель и моделирование
 - Классификация моделей
- 2 Графы и сети
 - Графы. Основные понятия
 - Поиск кратчайшего пути в графе
 - Дерево решений
 - Сетевая модель
- 3 Резюме лекции и домашнее задание



Понятие модели

Модель — абстрактное представление реальности в какой-либо форме (например, в математической, физической, символической, графической или дескриптивной), предназначенное для представления определённых аспектов этой реальности и позволяющее получить ответы на изучаемые вопросы.

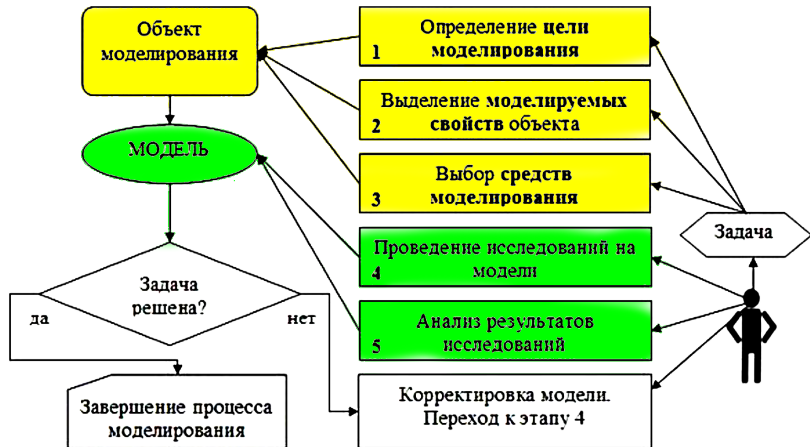
Экономико-математическая модель — математическое описание экономического процесса или объекта, произведенное в целях их исследования и управления ими.

История:

- ▶ Одна из первых ЭММ — модель воспроизводства Ф. Кенэ XVIII в.
- ▶ XX в. первая общая модель развивающейся экономики, Дж. фон Нейман.



Моделирование





Классификация моделей



Графы и сети



Графы. Основные понятия

- ▶ **Простой граф** $G(V, E)$ — совокупность двух множеств
 - ▶ непустого множества V **вершин графа**;
 - ▶ множества E неупорядоченных пар различных элементов множества V — **ребер графа**.
- ▶ **Ориентированный граф (орграф)** — совокупность двух множеств
 - ▶ непустого множества V **узлов графа**;
 - ▶ множества E упорядоченных пар различных элементов множества V — **дуг графа**. Первую вершину дуги называют началом дуги, вторую — концом.
- ▶ **Взвешенный граф** — граф, дугам которого поставлены в соответствие некоторые значения, называемые весом (или длиной, или стоимостью) дуги
- ▶ Будем считать, что в не взвешенном графе все ребра имеют одинаковый вес 1.



Пути и маршруты

- ▶ **Маршрут** в графе называется последовательность узлов и дуг вида

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

так, что узел v_{i-1} начало дуги e_i , а узел v_i — ее конец.

- ▶ Узел v_0 называется **начальным**, а v_k — **конечным** узлом пути.
- ▶ **Путь** — это маршрут, в котором все дуги (ребра) различны.
- ▶ **Длина пути** — сумма длин (весов) тех ребер, из которых состоит путь.

Виды путей:

- ▶ Путь называется **простым**, если все узлы в нем различны.
- ▶ **Цикл** — путь у которого начальный и конечный узлы совпадают.



Виды графов

Простые графы:

- ▶ Простой граф называется **деревом**, если он связан и не имеет циклов.
- ▶ **Сеть** — орграф, не содержащий циклов, в котором ровно одна вершина имеет нулевую степень захода (**корень дерева**), и ровно одна вершина имеет нулевую степень исхода.

Орграфы:

- ▶ Простой граф называется **связным**, если любые две его вершины соединены путем



Поиск кратчайшего пути в графе

Определение

Простой граф называется **связным**, если любые две его вершины соединены путем

Для связного графа формулируется задача поиска кратчайшего пути ведется между двумя заданными вершинами.

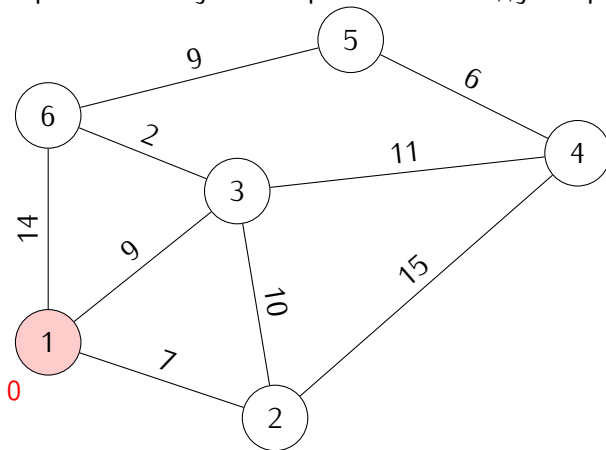
Ее решением является путь и его длина.

Для решения данной задачи можно использовать алгоритм, изобретённый нидерландским ученым Э. Дейкстрой в 1959 году.



Пример

Найти кратчайшие пути из вершины 1 в каждую вершину.

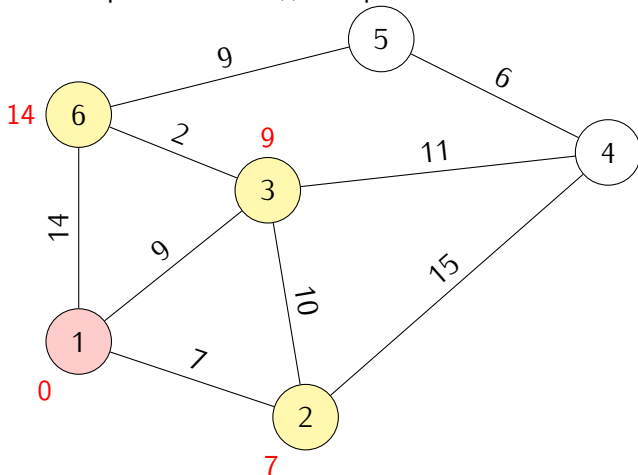


Кратчайший путь из 1 в 1 имеет длину 0.



Алгоритм Дейкстры. Шаг 1

Шаг 1. Рассмотрим всех соседей вершины 1.



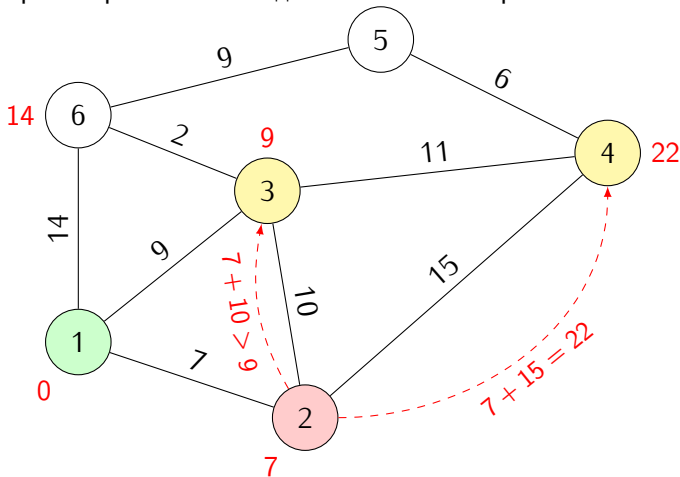
Найдем длины путей до них из вершины 1.



Алгоритм Дейкстры. Шаг 2

Вершину 1 считаем просмотренной и переходим к ее соседу с минимальной меткой — вершине 2.

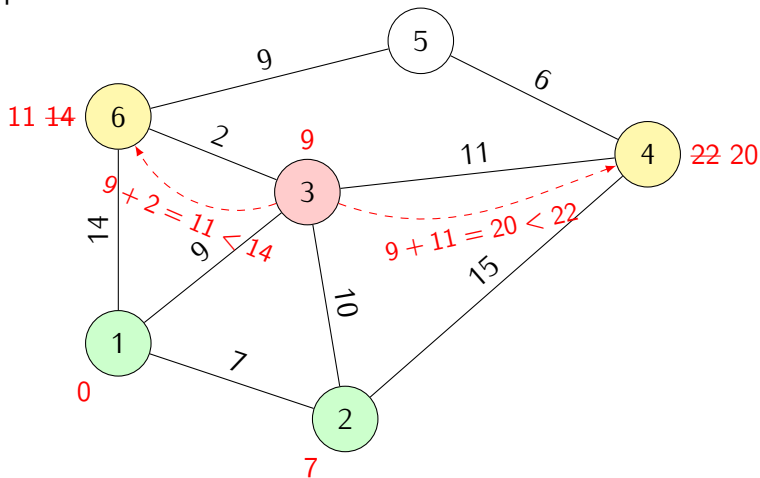
Ее непросмотренными соседями являются вершины 3 и 4.





Алгоритм Дейкстры. Шаг 3

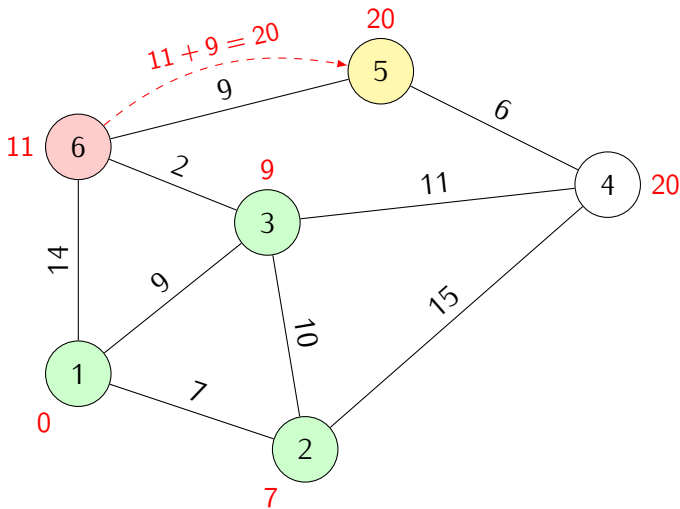
Вершину 2 просмотрена. Сосед с минимальной меткой — вершина 3.





Алгоритм Дейкстры. Шаг 4

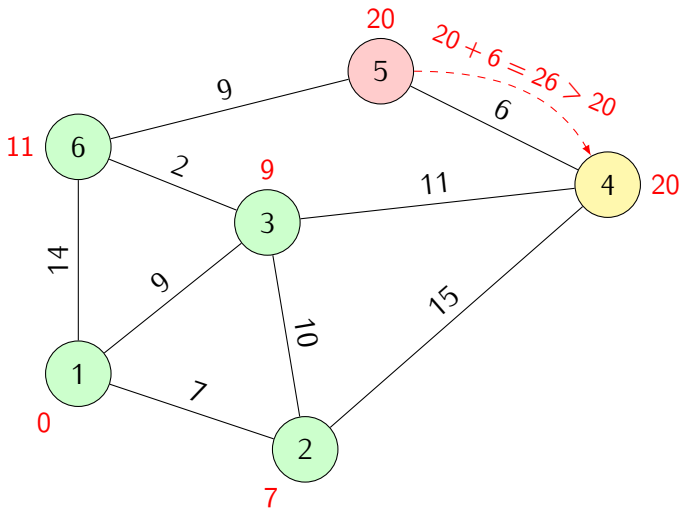
Вершина 3 просмотрена. Ее сосед с минимальной меткой — вершина 6.





Алгоритм Дейкстры. Шаг 5

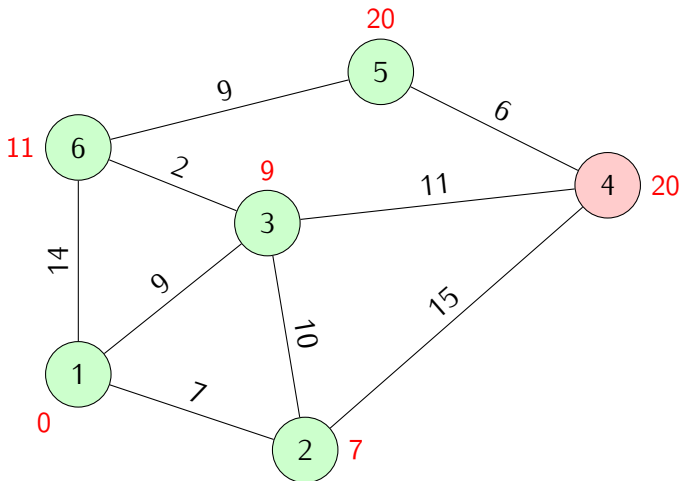
Вершина 6 просмотрена. Ее сосед с минимальной меткой — вершина 5.





Алгоритм Дейкстры. Шаг 6. Завершение

Вершина 5 просмотрена. Ее сосед с минимальной меткой — вершина 4. У которой, в свою очередь, нее нет не просмотренных соседей.





Кратчайшие пути из вершины 1

Из вершины 1 имеются следующие кратчайшие пути:

| Вершина | Длина пути | Путь |
|---------|------------|-----------|
| 2 | 7 | (1,2) |
| 3 | 9 | (1,3) |
| 4 | 20 | (1,3,4) |
| 5 | 20 | (1,3,6,5) |
| 6 | 11 | (1,3,6) |



Определение

Простой граф называется **деревом**, если он связан и не имеет циклов.

- ▶ Одну выделенную вершину, называют **корнем дерева**.
- ▶ Вершины степени 1 называются **листьями дерева**.

Идея метода: Представлении последовательности стратегических решений в виде дерева, где каждое решение и каждое событие становится точкой ветвления.

Пути от корня к листьям показывают возможные стратегии развития моделируемой системы.

Область применения: принятие решений в условиях риска.



Основные элементы дерева решений

- ▶ Выделяются два вида вершин:
 - ▶ квадраты — моменты принятия решений,
 - ▶ круги — моменты случайных событий — рисков.
- ▶ Ветви, исходящие из квадратных узлов, обозначают варианты решений.
- ▶ Ветви, исходящие из круглых узлов, — возможные события.



Принцип построения дерева решений

- ▶ Дерево «выстраивается» слева направо.
- ▶ Все моменты принятия решений упорядочиваются хронологически.
- ▶ Корнем является самый ранний момент принятия решения.
- ▶ От каждого квадрата отходят ребра к кругам – обозначающим события, которые возможны при выбранном варианте решения.
- ▶ От каждого круга отходят ребра к квадратам являющимся характеризующими момент реакции на событие.
- ▶ Процесс построения дерева продвигается вперед по времени через ряд последовательных решений и событий до тех пор, пока все логические последовательности и вытекающие из них отдачи не будут вычерчены.



Рассматривается проект инвестирования **7 млн. руб.** в разработку новой технологии.

- ▶ По предварительным оценкам технология будет востребована с вероятностью **0.6**. В этом случае инвестиции принесут доход **12 млн. руб.** Если же технология будет не востребована, то доход составит **0 рублей**.
- ▶ Через неделю будет опубликован аналитический прогноз аналитической фирмы относительно востребованности технологии. Надежность прогноза эксперты оценивают в **0,7**.
- ▶ Однако, в случае положительного прогноза пакет порождает до **10,6 млн. руб.**, а в случае отрицательного подешевеет до **3,4 млн. руб.**

Какой стратегии лучше придерживаться: инвестировать сейчас или ждать прогноза? Стоит ли инвестировать при том или ином результате прогноза?



Моменты принятия решений:

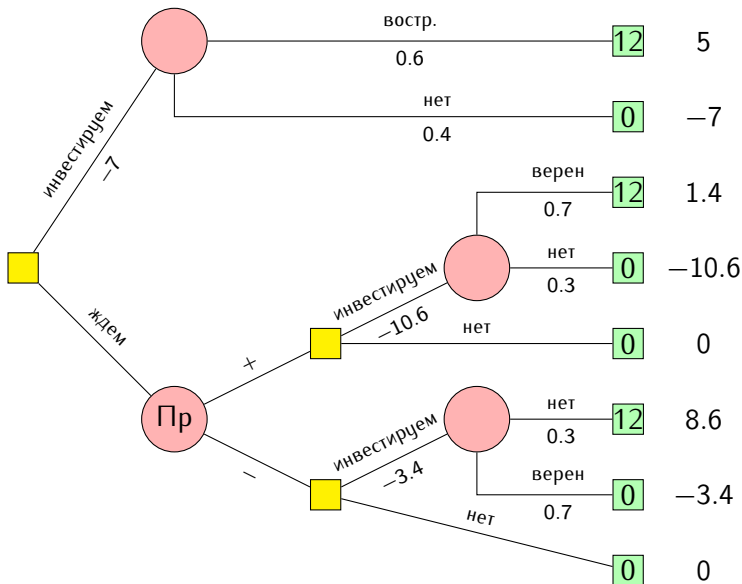
- ▶ Начальный момент: инвестировать или ждать прогноза.
- ▶ После опубликования прогноза: инвестировать или нет

Моменты принятия решений:

- ▶ Начальный момент: инвестировать или ждать прогноза.
- ▶ После опубликования прогноза: инвестировать или нет



Дерево решений





Анализ дерева решений

| Стратегии | Ожидаемый доход |
|----------------------------------|------------------------------------------|
| Инвестировать сразу: | $5 \cdot 0.6 - 7 \cdot 0.4 = 0.20$ |
| Инвестировать, если прогноз (+): | $1.4 \cdot 0.7 - 10.4 \cdot 0.3 = -2.14$ |
| Инвестировать, если прогноз (—): | $-3.4 \cdot 0.7 + 8.6 \cdot 0.3 = 0.20$ |

Инвестиция сразу столь же выгодна в среднем, как и инвестиция в случае отрицательного прогноза. Однако отсутствует риск положительного прогноза.

Оптимальный план — незамедлительная инвестиция.



Сетевая модель

Сетевая модель — изображение плана выполнения комплекса работ в виде связного орграфа, отражающего последовательность и зависимость выполняемых операций.

Область применения:

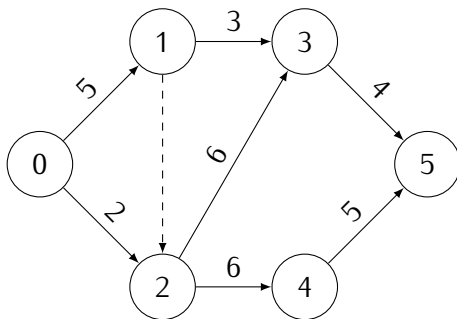
- ▶ Формирование календарного плана реализации комплекса работ.
- ▶ Принятие эффективных решений в процессе выполнения этого плана.

Достоинства:

- ▶ Наглядность.
- ▶ Инструмент для разделения полномочий и ответственности за выполнение работ.
- ▶ Можно и нужно применять для организации собственной деятельности уже сейчас!



Элементы сетевой модели



События — узлы орграфа

- ▶ 0 — исходное событие
- ▶ 5 — завершающее событие

Работы — дуги орграфа. Вес дуги — продолжительность работы.

- ▶ (0,1) — работа, продолжительностью 5 единиц.
- ▶ (1,2) — фиктивная работа, продолжительность 0 единиц.



Определение

Работа — совокупность приемов и действий, необходимых для выполнения конкретной задачи или достижения определенной цели.

Виды работ:

- ▶ **Работа-действие** — процесс, требующий затрат времени и ресурсов.
- ▶ **Работа-ожидание** — процесс, требующий затрат времени, но не требующий ресурсных затрат.
- ▶ **Зависимость (фиктивная работа)** — не требует ни затрат времени ни затрат ресурсов. Упорядочивает связываемые ей состояния.

Работы изображаются дугами орграфа.

- ▶ Работа-действие и работа-ожидание — сплошная линия;
- ▶ Зависимость — пунктирная линия.



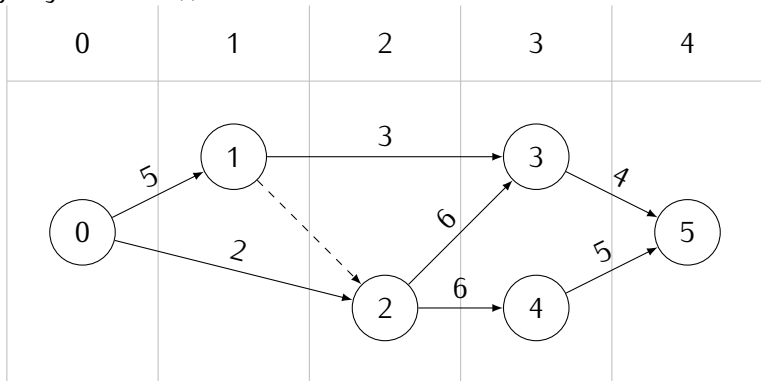
Правила построения сетевой модели

- ▶ В сетевом графике не должно быть «тупиковых» событий, то есть событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.
- ▶ В сетевом графике не должно быть «хвостовых» событий, то есть событий, которым не предшествует хотя бы одна работа, за исключением исходного.
- ▶ В нем не должно быть циклов.
- ▶ Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой.
- ▶ В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.
- ▶ Сетевой график должен быть упорядочен. То есть события и работы должны располагаться так, чтобы для любой работы предшествующее ей событие было расположено левее и имело меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием.



Упорядочение событий

Каждому событию I сопоставляется **ранг** — максимальное число дуг пути от исходного события к событию I .



Нумерация событий выполняется следующим образом:

- ▶ большему рангу соответствует больший номер события;
- ▶ события, с одинаковым рангом, нумеруются произвольно.



Временные параметры событий

$t_p(i)$ — ранний (ожидаемый) срок свершения i -го события:

$$t_p(i) = \max_j (t_p(j) + t(j, i))$$

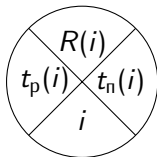
$t_n(i)$ — поздний (предельный) срок:

$$t_n(i) = \min_j (t_n(j) - t(i, j))$$

$R(i)$ — резерв времени i -го события:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

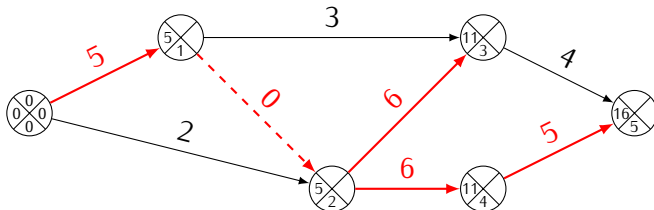
Изображение события:



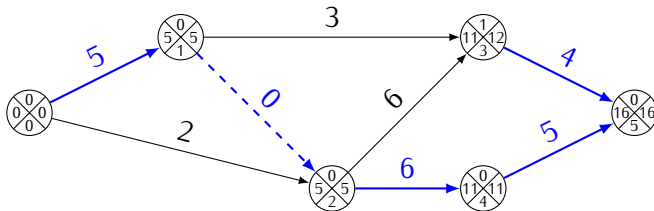


Вычисление временных параметров событий

Ранний срок свершения событий вычисляется **слева направо**:



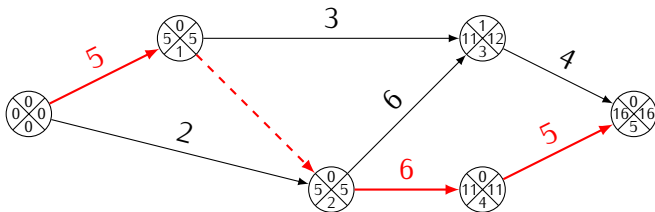
Поздний срок свершения событий вычисляется **справа налево**:





Критический путь

- ▶ **Полный путь** — это путь, соединяющий исходное событие с завершающим.
- ▶ **Критический путь** — полный путь наибольшей длины.



Теорема

Все вершины, лежащие на критическом пути имеют нулевой резерв времени.



В ходе лекции изучены три модели:

- ▶ графовая модель;
- ▶ дерево решений;
- ▶ сетевой график.

После проработки лекции вы должны уметь:

- ▶ представлять моделируемые системы в виде графов;
- ▶ находить кратчайший путь в графе;
- ▶ выбирать оптимальное решение из конечного множества в условиях риска;
- ▶ строить сетевой график выполнения этих работ;
- ▶ находить критические пути и их продолжительность;
- ▶ рассчитывать временные характеристики сетевого графика, выявлять узкие места;



Задание

Для завершения лекции вам необходимо подготовить конспект, в который должны войти:

1. Не менее двух определений экономико-математической модели (с указанием первоисточника определения).
2. Классификация экономико-математических моделей.
3. Основные понятия графов.
4. Этапы моделирования.
5. Алгоритм Дейкстры в форме последовательности действий.
6. Алгоритм построения дерева решений.
7. Построение линейной диаграммы проекта
8. Пример расчета временных параметров и их значение.
9. Алгоритм нахождения критического пути.

Конспект



- ▶ Сетевые модели: Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике Глава 14, с. 286–311.
 - ▶ Построение линейной диаграммы проекта: с. 288
 - ▶ Расчет временных параметров и поиск критического пути: с. 299–311
- ▶ Классификация экономико-математических моделей: Панкратов Е. Л., Булаева Е. А., Болдыревский П. Б. Ведение в экономико-математическое моделирование. Учебное пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. с. 5–10.
- ▶ Все материалы по курсу будут здесь:
<https://cloud.mail.ru/public/48BX/47oESuaQQ>



На следующей лекции мы научимся:

- ▶ определять стратегию минимального удорожания комплекса работ при сокращении сроков;
- ▶ определять коэффициенты напряженности работ;
- ▶ оценивать вероятность того, что фактический срок выполнения проекта не превзойдет заданного директивного срока;
- ▶ определять максимальный срок выполнения проекта, который возможен с заданной надежностью.