Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 12. Случайные события и вероятности

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru

Структура лекции

1. Подходы к определению вероятности события
   - Понятие случайного события и вероятности
   - Статистическая вероятность
   - Исходы и события
   - Классическая вероятность
   - Воспоминание о комбинаторике
   - Геометрическая вероятность
2. Теоремы о вероятностях
   - Независимые и зависимые события. Теоремы о произведении событий
   - Несовместные и совместные события. Теоремы о сумме событий
   - Формула полной вероятности

Случайное явление

Случайным называется эксперимент, результат которого нельзя предсказать заранее.

Невозможность предсказать исход заранее — основное, что отличает случайное явление от детерминированного.

Методами теории вероятностей можно изучать а лишь те случайные явления A, которые:

- могут быть воспроизведены в одних и тех же условиях;
- обладают свойством статистической устойчивости: если A — некоторое событие, могущее произойти или не произойти в результате эксперимента, то и доля $\frac{n(A)}{n}$ числа экспериментов, в которых данное явление произошло, стабилизируется к некоторому числу $p(A)$.

Число $p(A)$ служит объективной характеристикой возможности появления события A и называется вероятностью явления A.

Статистическая вероятность

Формула
$$p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n},$$
где $n(A)$ — число появлений события A в n опытах, называется статистическим определением вероятности.

На практике используется приближенная формула
$$p(A) \approx \frac{n(A)}{n}, \qquad n \text{ — достаточно большое}$$

Пространство элементарных исходов

Понятие пространства элементарных исходов является базовым для теории вероятностей, так же как понятие точки в геометрии.

Под пространством элементарных исходов Ω понимается множество, содержащее ее возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в действительности происходит ровно один.

Элементы множества $\omega \in \Omega$, называются элементарными исходами.

Примеры пространств элементарных исходов

Пространство элементарных исходов является

- дискретным, если оно имеет конечное или счетное число элементов;
- непрерывным, если все точки отрезка, концами которого являются исходы так же являются исходами.

Примеры:

- При броске игральной кости $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — дискретное пространство;
- При стрельбе в мишень — точка листа с мишенью — непрерывное пространство.

Событие

В результате эксперимента произошло событие $A \subseteq \Omega$, если в результате эксперимента произошел один из элементарных исходов $\omega \in A$.

- Событием называется любое множество A пространства исходов Ω.
- Благоприятным исходом события A называется любой исход $\omega \in A$.

Виды событий

- Достоверное событие Ω — событие, содержащее все исходы пространства Ω. Достоверное событие всегда происходит в опыте Ω.
- Невозможное событие $\varnothing$ — событие, содержащее пустое множество исходов пространства Ω. Невозможное событие никогда не происходит в опыте Ω.
- Противоположное событие $\bar{A}$ — состоит из всех исходов, не благоприятных для A. Оно происходит тогда и только тогда, когда не наступает A
- Сумма событий $A + B$ — событие, состоящее из всех исходов, содержащихся в событии A или в B. Наступает, если наступит A или B.
- Произведение AB — событие, состоящее из всех исходов благоприятных как для A, так и для B. Наступает, лишь тогда, когда наступят A и B вместе.

Рассмотрим дискретное пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

Каждому элементарному исходу ω_i сопоставим число p_i так, что

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Назовем p_i — вероятностью исхода ω_i.

Определение

Вероятностью события $A \subseteq \Omega$ называется величина, равная сумме вероятностей исходов, благоприятных для события A:

$$p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

Определение классической вероятности

Классическая вероятность

Если

1. число исходов n конечно,
2. все исходы равновозможны: $p(\omega) = \frac{1}{n}$ для каждого $\omega \in \Omega$,

то вероятность каждого события A может быть найдена по формуле

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

где n_A —количество исходов, благоприятных событию A.

Приведенная формула носит название классической вероятности и
применима только при указанных условиях!

Формула классической вероятности сводит задачу к вычислению количества элементов множества, то есть делает ее комбинаторной.

Комбинаторный принцип умножения

Если элемент A можно выбрать n способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать m способами, то упорядоченную пару (A, B) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Комбинаторный принцип сложения

Если элементы A и B нельзя выбрать одновременно, при этом существует n способов выбрать элемент A и mспособов выбрать B, то выбрать A или B можно $n + m$ способами.

- Принцип умножения позволяет решать задачу поэтапно,
- принцип сложения — разбивать ее на частные случаи.

Примеры решения задач

Комбинаторные соединения

Комбинаторная задача очень часто сводится к подсчету конструкций элементов некоторого множества.

Типичными конструкциями являются:

- Кортежи — конечные последовательности $(a_1, a_2, \dots a_n)$ в которых важен порядок следования элементов.
- Наборы — конечные конструкции $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ в которых порядок следования элементов не важен, но элементы могут повторяться.

Такие конструкции будем называть комбинаторными соединениями.

Свойства комбинаторных соединений

Свойства:

- Упорядоченность — важен ли порядок следования элементов.
- Состав соединения — важно ли какие элементы входят в соединение.
- Повторяемость элементов — могут ли в соединение входить одинаковые элементы.

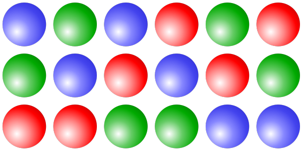
Перестановки без повторений

Определение

Рассмотрим множество A, состоящее из n элементов. **Перестановкой** называется кортеж, состоящий из всех элементов множества A, взятых по одному разу.

$$P_n = n!$$

Перестановки различаются только порядком элементов!



Пример. Перестановки без повторений

Восемь различных книг расставлены наудачу на одной книжной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

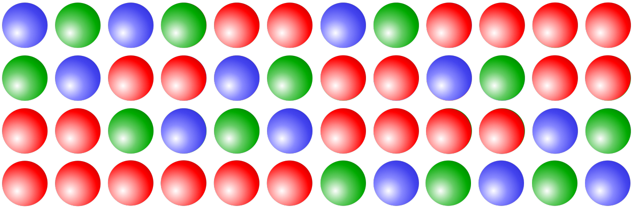
- Так как число книг конечно и расстановки произвольны можно пользоваться формулой классической вероятности.
- Количество исходов: Расставляются все книги. Важен порядок. Книги на полке не повторяются. Это сочетания без повторений: $n = P_8 = 8!$
- Событие A — две определенные книги 1 и 2 стоят рядом .
- Число благоприятных исходов $n(A)$: Склеим книги 1 и 2 в 12. Расставить 7 книг можно $n_1 = P_7 = 7!$ способами.
- Склеим книги 1 и 2 в 21. Расставить полученные 7 книг можно $n_1 = P_7 = 7!$ способами.
- Итак, $n(A) = n_1 + n_2 = 2 \cdot 7!$, $p(A) = \frac{2 \cdot 7!}{8!} = 0.25.$

Перестановки с повторениями

Определение

Пусть каждый элемент $a_i \in A$ входит в кортеж ровно k_i раз. Такой кортеж называется перестановкой с повторениями.

$$\tilde{P}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$



Пример. Перестановки с повторениями

Какова вероятность что из карточек с буквами A,H,A,H,A,C обезьяна сложит слово AHAHAC.

- Так как число букв конечно и обезьяна не отдает предпочтений буквам, можно пользоваться формулой классической вероятности.
- Количество исходов: Используются все буквы с заданными кратностями. Порядок важен. Это перестановки с повторениями.
- $n = P(3,2,1) = \frac{(3+2+1)!}{3!2!1!} = \frac{6!}{12} = 60$
- Благоприятный исход один, поэтому $n(A) = 1$.
- Итак, $p(A) = \frac{1}{60}$

Размещения без повторений

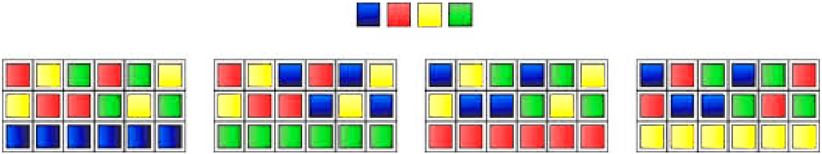
Рассмотрим множество A, состоящее из n элементов.

Определение

Кортежи длины m, различающиеся либо составом элементов, либо порядком их расположения, либо и тем и другим, называются размещениями из n по m

Размещения без повторений — все элементы в кортеже различны

$$A_m^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$



Размещения с повторениями

- Размещения с повторениями — элементы в кортеже могут повторяться

$$\tilde{A}_m^n = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m} = n^m$$

Пример

Код банковского сейфа состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что наудачу выбранный код подойдет.

- Исходы — введенные коды. их конечное число и вводятся наудачу.
- Число исходов порядок цифр важен и они могут повторяться, при этом используются не все.
- Это размещения с повторениями из 10 по 5.
- $n = A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$
- Событие A — код оказался верным. Благоприятный исход единственный. $n(A) = 1$.
- $p(A) = \frac{1}{30240}$.

Сочетания без повторений

Рассмотрим множество A, состоящее из n элементов.

Определение

m–элементные наборы множества A, отличающиеся только составом элементов, называются **сочетаниями из n по m**.

- Порядок элементов в сочетании не важен!
- Сочетания без повторений — это m–элементные подмножества множества A.

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Сочетания без повторений. Пример

В группе 15 студентов, в том числе 8 отличников. Наугад выбраны 9 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных ровно 5 отличников.

- Применим формулу классической вероятности.
- Опыт: выбор 9 человек из 15. Порядок выбора не важен, поэтому все исходы опыта — сочетания.
- $n = C_{15}^{9} = \frac{15!}{9!6!} = \frac{15{\cdot}14{\cdot}13{\cdot}12{\cdot}11{\cdot}10}{6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2} = 5005$
- Событие A — выбрано ровно 5 отличников и, следовательно, 4 не отличника.
- $n(A) = C_8^5 \cdot C_{15-8}^{9-5} = C_8^5 \cdot C_6^4 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{6!}{4!2!} = 56 \cdot 15 = 840$
- Итак $p(a) = \frac{840}{5005} \approx 0.168$

Сочетания с повторениями

Рассмотрим множество A, состоящее из n элементов.

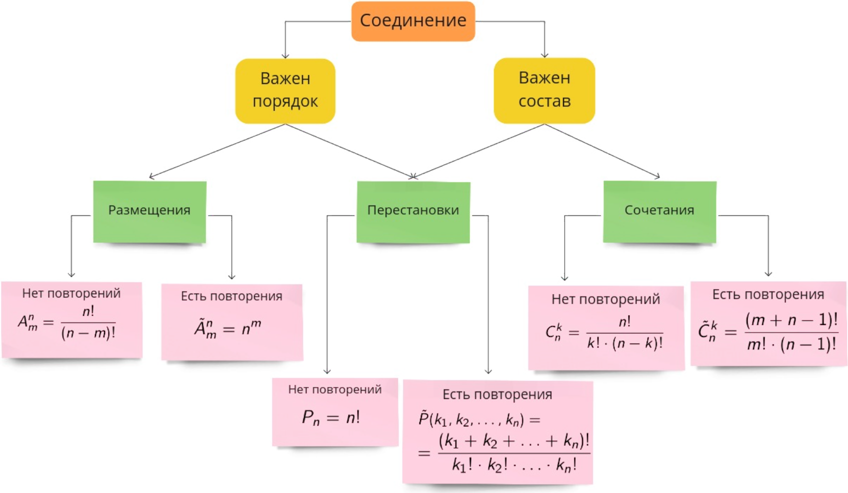
Определение

m–элементные неупорядоченные наборы множества A, допускающие повторения элементов и отличающиеся только составом элементов, называются **сочетаниями из n по m с повторениями**.

$$\tilde{C}_n^k = \frac{(m+n-1)!}{m! \cdot (n-1)!}$$

По конвейеру, движутся конфеты четырёх наименований. Мы запускаем руки в этот поток и вытаскиваем двадцать штук. Какова вероятность, того, что среди выбранных есть конфета каждого наименования.

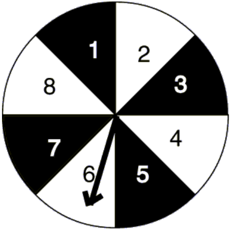
Комбинаторные соединения



Идея геометрической вероятности

- Допустим, пространство элементарных исходов опыта непрерывно.
- В этом случае формула классической вероятности неприменима.
- Определим формулу геометрической вероятности.

Очень часто мы применяем формулу геометрической вероятности неявно:



Геометрическая вероятность

Пусть имеется некоторая область Ω и в ней содержится другая область A. В область Ω наудачу бросается точка:

- брошенная точка может попасть в любую точку области;
- вероятность ее попадания в область A не зависит от ее расположения и формы, а только от меры области A.
- Мера $||A||$ – это длина, площадь, объем исследуемой области A.

Геометрическая вероятность

Если исходы опыта и можно изобразить множеством точек некоторой фигуры, и вероятность события A зависит только от меры $||A||$, то

$$p(A) = \frac{||A||}{||\Omega||}$$

Геометрическая вероятность. Пример I

Задача

Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих теплоходов независимо и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из них придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого теплохода шесть часов, а второго — восемь.

- Обозначим время прихода одного парохода как õ, а второго как y.
- Ограничения: $0 \leqslant x \leqslant 24$, $0 \leqslant y \leqslant 24$.
- Момент их прихода — точка квадрата со стороной 24.

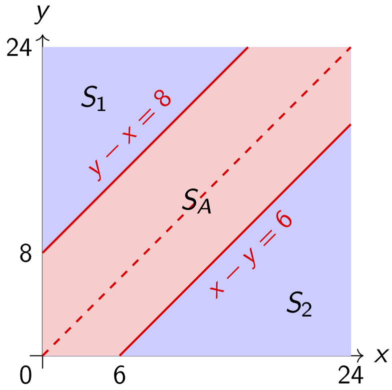
- Определим условия, когда первый пароход будет "мешать"второму. Второй пароход грузится шесть часов, а в это время придет первый:

$$x - y \leqslant 6, \qquad x \geqslant y$$

- Теперь, второй пароход грузится восемь часов, а в это время придет первый:

$$y - x \leqslant 8, \qquad y \geqslant x$$

- Изобразим граничные условия на графике



- $||\Omega|| = S_\Omega = 24^2 = 576$
- $||A|| = S_A = S_\Omega - S_1 - S_2 = 24^2 - \frac{16^2}{2} - \frac{18^2}{2} = 286$
- Итак, $p(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{286}{576} \approx 0.497.$

Статистическая вероятность

Если не применима ни формула классической вероятности, ни формула геометрической вероятности используется формула статистической вероятности.

$$p(A) \approx \frac{n(A)}{n}, \qquad n \text{ — достаточно большое}$$

где $n(A)$ — число появлений события A в n опытах.
Важно понимать, что

- она не является величиной постоянной;
- она зависит не только от числа проведённых испытаний, но и от условий их проведения.

При внешнем сходстве формул классической и статистической вероятностей они несут различную смысловую нагрузку, так

- классическая вероятность указывает на вероятность появления события, которая является величиной постоянной для данного события,
- статистическая — характеризует всего лишь относительную частоту появления наблюдаемого события в проведённых испытаниях.

Свойства вероятностей

Из определений канонической и геометрической вероятностей следует, что

- Вероятность события $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
- Вероятность достоверного события $p(\Omega) = 1$.
- Вероятность невозможного события $p(\varnothing) = 0$.

Независимые и зависимые события

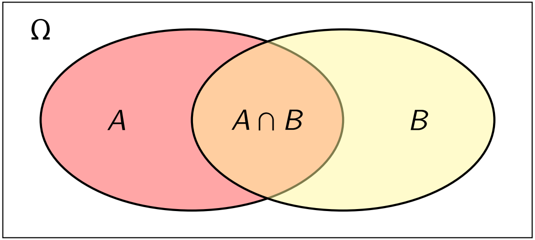
- Два события называются **независимыми**, если вероятность одного события не зависит от того наступило другое или нет.
- Два события называются **зависимыми**, если вероятность одного события зависит от того наступило другое или нет.

Пример:

- В цехе работают две автоматические линии, выпускающие разную продукцию. При этом линии не конкурируют за ресурсы и не используют продукцию друг друга. В этом случае события остановки каждой из линий — независимы.
- В цехе работают две автоматические линии, выпускающие одну продукцию. Объем выпускаемой продукции в день фиксирован. В случае остановки линии вторая работает в ускоренном режиме. В этом случае события остановки каждой из линий — зависимы, так как повышается износ второй линии, а следовательно и вероятность ее остановки.

Условная вероятность $p(A/B)$ — вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место другое событие B.

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n}}{\frac{n(B)}{n}} = \frac{p(AB)}{p(B)}$$



Произведение событий

Теорема (о произведении событий)

$$p(AB) = p(A/B) \cdot p(B) = p(B/A) \cdot p(A)$$

События независимы тогда и только тогда, когда

$$P(A) = P(A/B); \qquad P(B) = P(B/A).$$

Теорема (о произведении независимых событий)

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Пример применения произведения событий

Несовместные и совместные события

Определение

События A и B называются

- несовместными, если появление одного из них исключает появление других;
- совместными, если наступление одного из них не исключает наступления другого.

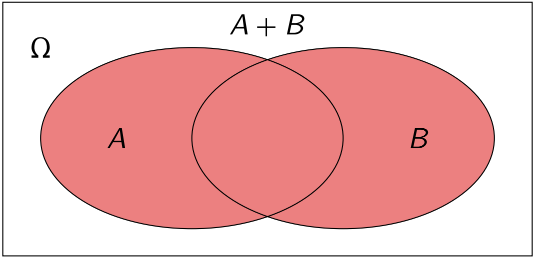
Пример: При броске игральной кости, рассмотрим события:

- A_1 — выпадение нечетного числа очков.
- A_2 — выпадение 6.
- A_3 – выпадение 2 или 4.
- B — выпадение числа очков меньше 3.

Не совместные	Совместные
(A_1, A_2, A_3)	(A_1, B)
(A_2, B)	(A_3, B)

Сумма событий

Суммой $A + B$ событий A и B называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.



Теоремы о сумме событий

- Сумма зависимых событий $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$
- Сумма независимых событий $p(A + B) = p(A) + p(B)$
- Противоположные события $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Пример вероятности суммы событий

Задача

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найти вероятность того, что к концу дня кофе закончится хотя бы в одном из автоматов.

- A — «кофе закончится в первом автомате» $p(A) = 0.3$;
- B — «кофе закончится во втором автомате» $p(B) = 0.3$;
- события являются совместными, так как $p(AB) = 0.12 \neq 0$.
- $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB) = 0.3 + 0.3 - 0.12 = 0.48$.

Полная группа событий

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий, если

1. события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместны;
2. $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = 1$

- События образуют полную группу, если в результате опыта происходит ровно одно из них.
- Все исходы опыта образуют полную группу событий.
- Событие A и противоположное к нему событие $\bar{A}$ образуют полную группу событий.

Полная вероятность

Следствием теорем о вероятностях является формула полной вероятности:

Теорема

Если

- $H_1, H_2, \dots, H_n$ — *полная группа событий;*
- *известны условные вероятности* $p(A/H_i)$ *для всех* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

то

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)p(A/H_i) = p(H_1)p(A/H_1) + \ldots + p(H_n)p(A/H_n)$$