



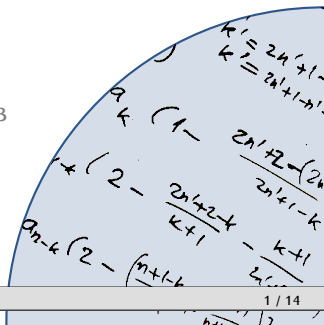
Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 2. Графы и сети

Анализ и оптимизация сетевой модели

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru





Структура лекции

- 1 Сетевая модель
 - Основные понятия
 - Построение сетевой модели
 - Параметры событий

- 2 Исследование сетевой модели
 - Временные параметры



Сетевая модель

Сетевая модель — изображение плана выполнения комплекса работ в виде связного орграфа, отражающего последовательность и зависимость выполняемых операций.

Область применения:

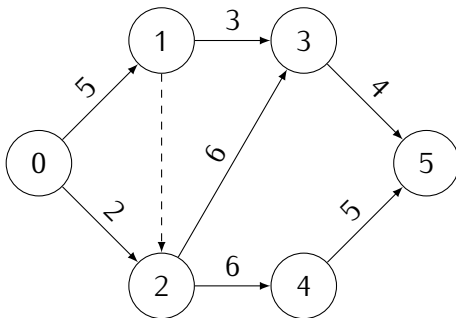
- ▶ Формирование календарного плана реализации комплекса работ.
- ▶ Принятие эффективных решений в процессе выполнения этого плана.

Достоинства:

- ▶ Наглядность.
- ▶ Инструмент для разделения полномочий и ответственности за выполнение работ.
- ▶ Можно и нужно применять для организации собственной деятельности уже сейчас!



Элементы сетевой модели



События — узлы орграфа

- ▶ 0 — исходное событие
- ▶ 5 — завершающее событие

Работы — дуги орграфа. Вес дуги — продолжительность работы.

- ▶ (0,1) — работа, продолжительностью 5 единиц.
- ▶ (1,2) — фиктивная работа, продолжительность 0 единиц.



Определение

Работа — совокупность приемов и действий, необходимых для выполнения конкретной задачи или достижения определенной цели.

Виды работ:

- ▶ **Работа-действие** — процесс, требующий затрат времени и ресурсов.
- ▶ **Работа-ожидание** — процесс, требующий затрат времени, но не требующий ресурсных затрат.
- ▶ **Зависимость (фиктивная работа)** — не требует ни затрат времени ни затрат ресурсов. Упорядочивает связываемые ей состояния.

Работы изображаются дугами орграфа.

- ▶ Работа-действие и работа-ожидание — сплошная линия;
- ▶ Зависимость — пунктирная линия.



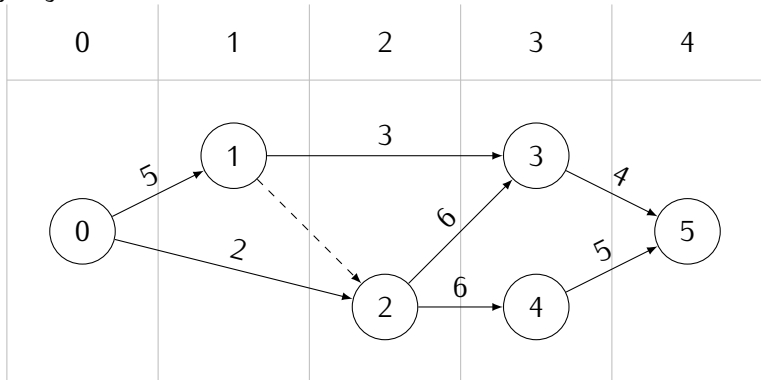
Правила построения сетевой модели

- ▶ В сетевом графике не должно быть «тупиковых» событий, то есть событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.
- ▶ В сетевом графике не должно быть «хвостовых» событий, то есть событий, которым не предшествует хотя бы одна работа, за исключением исходного.
- ▶ В нем не должно быть циклов.
- ▶ Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой.
- ▶ В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.
- ▶ Сетевой график должен быть упорядочен. То есть события и работы должны располагаться так, чтобы для любой работы предшествующее ей событие было расположено левее и имело меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием.



Упорядочение событий

Каждому событию I сопоставляется **ранг** — максимальное число дуг пути от исходного события к событию I .



Нумерация событий выполняется следующим образом:

- ▶ большему рангу соответствует больший номер события;
- ▶ события, с одинаковым рангом, нумеруются произвольно.



Временные параметры событий

$t_p(i)$ — ранний (ожидаемый) срок свершения i -го события:

$$t_p(i) = \max_j (t_p(j) + t(j, i))$$

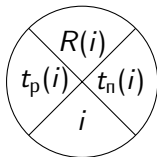
$t_n(i)$ — поздний (предельный) срок:

$$t_n(i) = \min_j (t_n(j) - t(i, j))$$

$R(i)$ — резерв времени i -го события:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

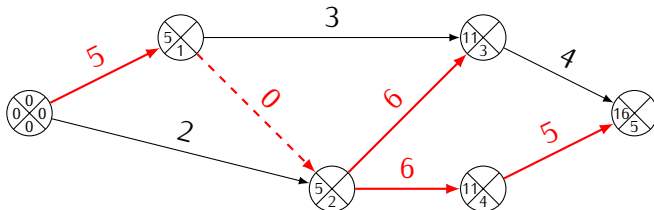
Изображение события:



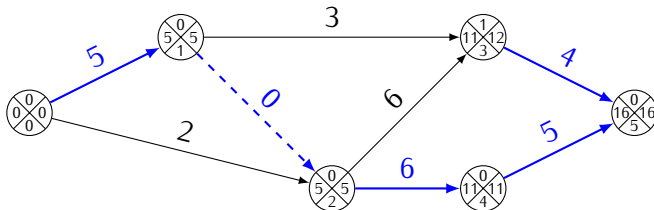


Вычисление временных параметров событий

Ранний срок свершения событий вычисляется **слева направо**:



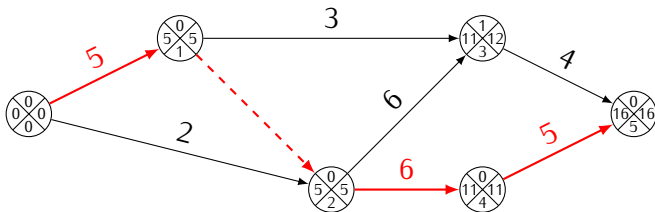
Поздний срок свершения событий вычисляется **справа налево**:





Критический путь

- ▶ **Полный путь** — это путь, соединяющий исходное событие с завершающим.
- ▶ **Критический путь** — полный путь наибольшей длины.



Теорема

Все вершины, лежащие на критическом пути имеют нулевой резерв времени.



Временные параметры событий

$t_p(i)$ — ранний (ожидаемый) срок свершения i -го события:

$$t_p(i) = \max_j (t_p(j) + t(j, i))$$

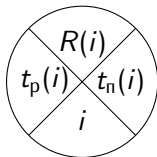
$t_n(i)$ — поздний (предельный) срок:

$$t_n(i) = \min_j (t_n(j) - t(i, j))$$

$R(i)$ — резерв времени i -го события:

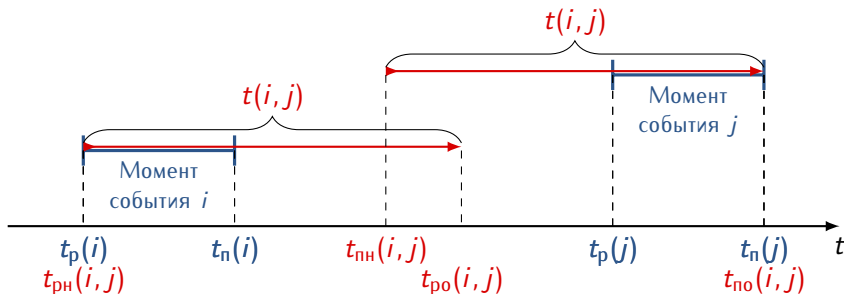
$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

Изображение события:





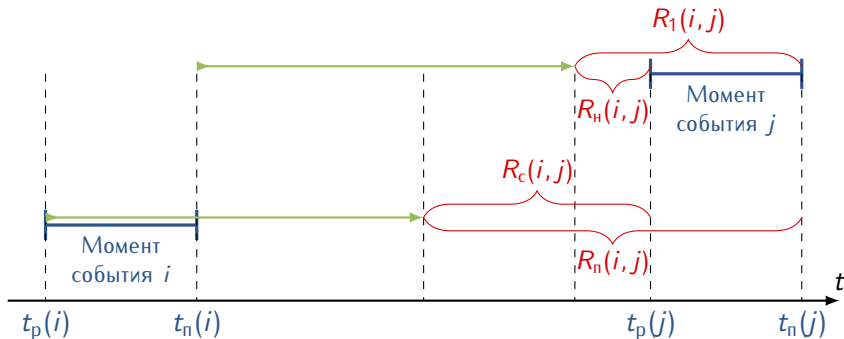
Временные параметры работ



- $t_{рн}(i, j)$ — ранний срок начала работы: $t_{рн}(i, j) = t_p(i)$
 $t_{ро}(i, j)$ — ранний срок окончания работы: $t_{ро}(i, j) = t_p(i) + t(i, j)$
 $t_{пн}(i, j)$ — поздний срок начала работы: $t_{пн}(i, j) = t_n(j) - t(i, j)$
 $t_{но}(i, j)$ — поздний срок окончания работы: $t_{но}(i, j) = t_n(j)$



Резервы времени



- ▶ Полный резерв времени: $R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j)$
- ▶ Частный резерв первого вида: $R_1(i, j) = t_n(j) - t_n(i) - t(i, j)$
- ▶ Свободный резерв времени: $R_c(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i, j)$
- ▶ Независимый резерв времени: $R_n(i, j) = t_p(j) - t_n(i) - t(i, j)$



Резервы времени. Экономический смысл

- ▶ **Полный резерв времени $R_n(i, j)$** — количество времени, на которое может быть увеличена продолжительность работы при условии, что наибольший из путей, проходящих через эту работу, не превысит длины критического пути.
- ▶ **Частный резерв первого вида $R_1(i, j)$** характеризует возможность изменить позднее начало работы на более ранние сроки без изменения поздних сроков окончания предшествующих работ.
- ▶ **Свободный резерв времени $R_c(i, j)$** — время, на которое можно увеличить продолжительность работы при условии своевременности ее начала и без сдвига раннего начала последующих работ.
- ▶ **Независимый резерв времени $R_n(i, j)$** — время, на которое может быть задержано выполнение работы без ущерба для времени начала последующих действий и времени окончания предшествующих действий.