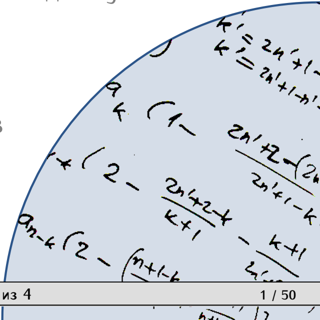
Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 4. Линейные задачи–2

Исследование систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Системы линейных неравенств

канд. физ.–матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru



Структура лекции

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где

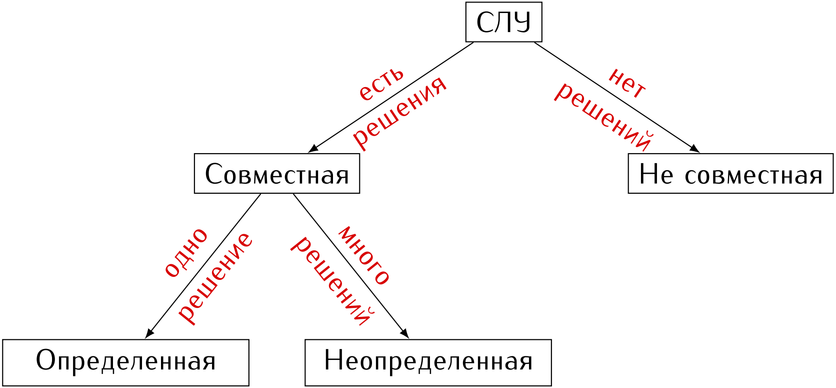
- a_{ij} для всех $i = \{1, \ldots, m\}$; $b = \{1, \ldots, n\})$ — известные коэффициенты;
- $b_1, \ldots, b_n$ — известные свободные члены;
- $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные.

Решение СЛУ

Решение системы — совокупность n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему обращает все ее уравнения в тождества.

Решить систему — найти множество всех ее решений.

Виды систем линейных уравнений:



Элементарные преобразования СЛУ

1. Исключить из СЛУ тривиальное уравнение $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$.
2. Умножить уравнение системы на число $\lambda \neq 0$
3. К одному уравнению системы прибавить другое, умноженное на некоторое число.
4. Переставить любые два уравнения в системе.

Теорема

Элементарные преобразования не меняют множества решений системы линейных уравнений.

Расширенная матрица

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ступенчатая матрица

Ступенчатой называется матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

1. если эта матрица содержит нулевую строку, то все строки, расположенные под нею, также нулевые;
2. если первый ненулевой элемент некоторой строки расположен в столбце с номером i, то первый ненулевой элемент следующей строки должен находиться в столбце с номером большим, чем i.

Метод Гаусса

Теорема

Любая расширенная матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Метод Гаусса — метод исключения переменных:

- Прямой ход — приведение матрицы коэффициентов к ступенчатому виду.

  Осуществляется сверху вниз

- Обратный ход — выражение из каждого уравнения по одной переменной.

  Осуществляется снизу вверх

Метод Гаусса—Жордана

Мы рассмотрим метод Гаусса—Жордана, позволяющий выполнять прямой и обратный ход одновременно.
На шаге i выполняются следующие действия:

1. Строки и столбцы с номерами $j \geqslant i$ переставляются так, чтобы $a_{ii} \neq 0$ Причем желательно, чтобы $(a_{ii} = 1)$.
2. Все строки с номером $k \neq i$ домножаются на λ_k так, $\lambda_k a_{ki}$ делилось на a_{ii}.
3. Строка i вычитается из всех других строк так, чтобы в i-столбце обратились в ноль все элементы кроме a_{ii}.

Метод Гаусса—Жордана. Пример I

Задача

Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$

- Составим расширенную матрицу: $\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 \end{array}\right) \end{array}$

- Шаг 1:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & -1 & 1 & -1 & -2 \\
1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\
2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\
1 & 2 & 3 & -6 & -10
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ -I \\ -2I \\ -I \end{array}
\end{array}
$$

- Шаг 2:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\
0 & 3 & 2 & -5 & -8
\end{array}\right)
\end{array}
\sim
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\
0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 3 & 2 & -5 & -8
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l} +II \\ \\ -3II \\ -3II \end{array}
$$

Метод Гаусса—Жордана. Пример IV

- Шаг 3:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\
0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 12 & -12 & -12 \\
0 & 0 & 17 & -17 & -17
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ :12 \\ :17 \end{array}
\end{array}
\sim
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\
0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} +5III \\ +5III \\ \\ -III \end{array}
\end{array}
$$

- Шаг 4:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}
\end{array}\right)
\end{array} \sim
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Метод Гаусса—Жордана. Пример VI

- Восстанавливаем систему: $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ \quad x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
- Выражаем элементы на диагонали: $\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_4 \\ x_2 = 3 - 3x_4 \\ x_3 = -1 + x_4 \end{cases}$
- Обозначим x_4 за a и выпишем ответ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2a \\ 3 - 3a \\ 1 + a \\ a \end{pmatrix}$$

Свободные и зависимые переменные

В решении выше переменная x_4 может принимать любые значения: Такие переменные называются свободными или неосновными.

Переменные x_1, x_2, x_3 однозначно вычисляются по значениям неосновных переменных. Это зависимые или основные переменные.

Как выявить основные переменные?

В системе, полученной методом Гаусса—Жордана, основная переменная x_j

- входит в одно из уравнений системы с коэффициентом 1, а в остальные уравнения системы входит с коэффициентами, равными 0;
- в каждое уравнение входит не более одной основной переменной.

Пример основных и свободных переменных

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 6x_4 = 7 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

- x_1, x_3 — основные
- x_2, x_3 — свободные

Разрешенная система уравнений

Система линейных уравнений называется разрешенной, если каждое уравнение системы линейных уравнений содержит разрешенную переменную.
Разрешенная система линейных уравнений всегда совместна.

Количество базисных переменных не превосходит числа уравнений.

Виды решений СЛУ I

- Если свободные переменные объявить параметрами и перенести вправо, то получим общее решение СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = a \\ x_4 = b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 5a - 6b \\ a \\ 2 - 3a + b \\ b \end{pmatrix}$$

Виды решений СЛУ II

- Если свободным переменным придать числовые значения и вычислить значения разрешенных переменных, то получим частное решение СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Виды решений СЛУ III

- Если свободным переменным придать нулевые значения, то получим базисное решение СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Исследование СЛУ

- Если в каждом уравнении системы есть зависимая переменная, то СЛУ совместная — имеет решения.
- Если все переменные в системе линейных уравнений разрешенные, то СЛУ определенная — имеет единственное решение.
- Если в совместной слу есть хотя бы одна свободная переменная, то СЛУ неорпеделенная — имеет бесконечное число решений.

Критерий несовместности

Противоречивое уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$$

Теорема (Критерий несовместности)

Система несовместна тогда и только тогда, когда в результате применения метода Гаусса—Жордна получено противоречивое уравнение.

Задача

Найти все базисные решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$

- Решая СЛУ методом жордана—Гаусса получаем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Переход от базиса к базису. Пример II

- Сделаем основной переменную x_4 а x_3 превратим в свободную переменную.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l} +2III \\ +3III \\ \end{array}
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right)
\end{array}$$

- Итак, новое базисное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для перехода к новому базису нужно выбрать свободную переменную x_j, которая станет зависимой и зависимую переменную x_i, которая станет свободной.
Затем применить шаг метода Гаусса—Жордана к элементу aq_{ij}

Задача

Найти все базисные решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$

- Решая СЛУ методом жордана—Гаусса получаем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

- Сделаем основной переменную x_4 а x_3 превратим в свободную переменную.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2III \\ +3III \\ \end{array} \sim \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Переход от базиса к базису. Пример III

- Итак, новое базисное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Опорное решение

Базисное решение СЛУ, у которого значения переменных неотрицательны называется опорным решением.

- Если найдено хотя бы одно опорное решение, то все остальные могут быть найдены путем перехода от одного опорного решения к другому
- Для перехода от одного опорного решения к другому достаточно уметь выбирать разрешающий элемент.

Алгоритм выбора разрешающего элемента a_{ij}:

1. Столбец j должен содержать положительные элементы.
2. В столбце j элемент a_{ij} является разрешающим, если на нем достигается минимум отношения элементов столбца b к положительным элементам столбца j.

Задача

Найти все опорные решения системы $\begin{cases} x_1 + -2x_2 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \color{red}{x_3} & \color{red}{x_4} & \color{red}{x_5} & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ +2I \\ -I \end{array} \qquad (0, 0, 2, 2, 5)$$

$$\frac{b_1}{a_{11}} < \frac{b_2}{a_{31}} \qquad \frac{2}{1} < \frac{5}{1}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot 3 + 2III \\ +III \\ \end{array} \qquad (2, 0, 6, 0, 3)$$

a_{32} — единственный положительный элемент.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \qquad \left(\tfrac{12}{3}, \tfrac{3}{3}, 9, 0, 0\right) = (4, 1, 9, 0, 0)$$

- Далее в основные переменные не целесообразно переводить x_5, так как придем к уже рассмотренному базису x_1, x_3, x_5. Однако, можно взять x_4 и в качестве разрешающего элемента выбрать a_{24}. Получим еще не рассмотренный базис x_1, x_2, x_4.

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} \color{red}{x_1} & \color{red}{x_2} & \color{red}{x_3} & x_4 & x_5 & b \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) & \begin{array}{c} -II \\ \\ +II \end{array}
\end{array} \qquad (4, 1, 9, 0, 0)$$

$$\frac{b_2}{a_{24}} < \frac{b_1}{a_{14}} \qquad 9 < 12$$

Переход между опорными решениями IV

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right) \quad \left(\frac{3}{3}, \frac{12}{3}, 9, 0, 0\right) = (1, 4, 0, 9, 0)$$

- И так далее...

Линейное программирование

Линейное программирование

Дисциплина, изучающая методы исследования и отыскания наибольшего и наименьшего значений линейной функции на аргументы которой наложены линейные ограничения

Достоинства линейных моделей

- Простота модели
- Хорошо разработанный аппарат исследования моделей
- Эффективность

На практике 80–85% всех задач оптимизации относятся именно к задачам линейного программирования.

Применение линейного программирования

- Составление смеси:
  - ассортимент изделий
  - регулировка запасов
- Задачи производства:
  - укрупненное планирование производства
  - кадровая политика
  - управление технологическим процессом
  - оптимизация местоположения объектов предприятия
- Задачи распределения:
  - планирование распределения продукции
  - календарное планирование перевозок
  - маршрутизация производства изделия

Пример линейного моделирования

Компания производит „Лимонад“ и „Тоник“.

- Для производства 1 л „Лимонада“ требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л „Тоника“ — 0,04 ч
- Расход сырья составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л „Лимонада“ и <<Тоника>> соответственно
- Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг сырья
- Прибыль фирмы составляет 10 ден. ед. за 1 л „Лимонада“ и 30 ден. ед. за 1 л „Тоника“

Требуется составить план производства, для максимизации ежедневной прибыли

Формальная модель

Параметр	ед.	Лимонад 1 л.	Тоник 1 л.	Запас
Время	ч	0.02	0.04	24
Сырьё	кг	0.01	0.04	16
Прибыль	руб.	10	30	

- x л. — объём производства лимонада
- y л. — объём производства тоника
- $F = 10x + 30y$ — ежедневная прибыль
- $0.02x + 0.04y \leqslant 24$ — ограничение времени работы
- $0.01x + 0.04y \leqslant 16$ — ограничение запасов сырья

Математическая модель

- x л. — объём производства лимонада
- y л. — объём производства тоника

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

$$\begin{cases} 0.02x + 0.04y \leqslant 24 \\ 0.01x + 0.04y \leqslant 16 \end{cases}$$

$$F = 10x + 30y \to \max$$

Модель линейная!

Основные понятия линейного программирования

Общая задача линейного программирования

Целевая функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Система ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

Основные понятия линейного программирования

Допустимый план — упорядоченный набор чисел

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

удовлетворяющих системе ограничений задачи линейного программирования

Оптимальный план — допустимый план

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*),$$

при котором функция Z достигает наибольшего или наименьшего значения.

Каноническая форма задачи линейного программирования

Целевая функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

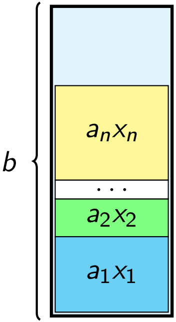
Система ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

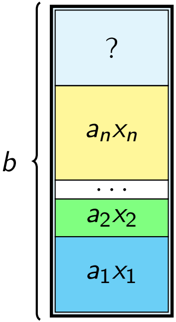
Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$$



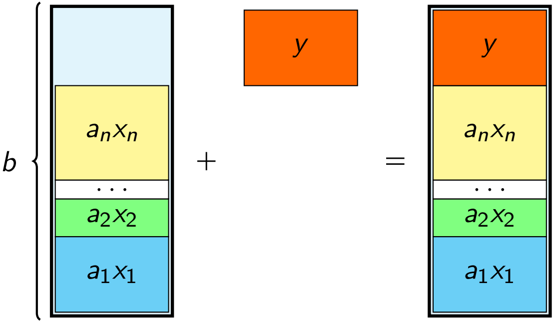
Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$$



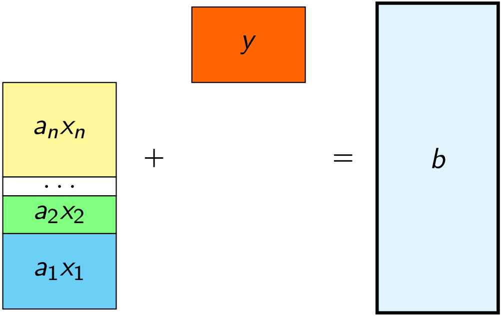
Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$$



Приведение к каноническому виду

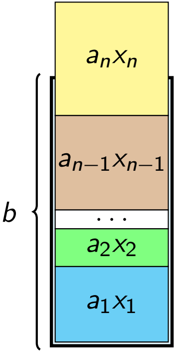
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$$



$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + y = b$$

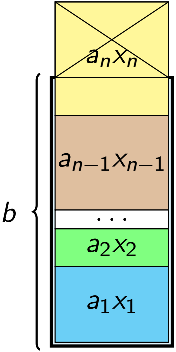
Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b$$



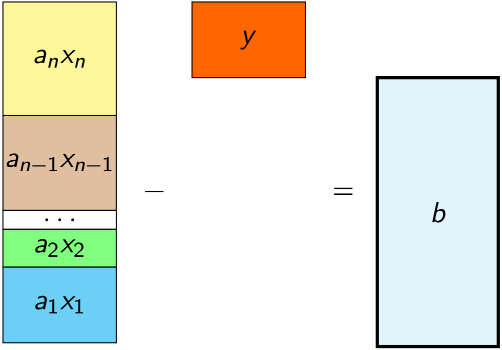
Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b$$



Приведение к каноническому виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b$$



$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - y = b$$

Теорема

Любую задачу линейного программирования можно представить в каноническом виде.

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

Резюме

К настоящему моменту вы знаете:

1. 4 метода решения систем линейных уравнений: подстановка, матричный метод, формулы Крамера, метод Гаусса—Жордана,
2. Способ перебора неотрицательных решений системы.
3. Способ перехода от системы неравенств к системе уравнений.
4. Способ перехода от системы неравенств к системе уравнений.
5. Понятие задачи линейного программирования и область ее применения.

Убедитесь, что вы не только знаете, но и умеете применять рассказанные вам методы.

Задание

Для завершения лекции вам, как всегда, необходимо подготовить конспект:

1. Отразите в нем идеи лежащие в основе методов Гаусса и Гаусса—Жордана.
2. Как понять, что система имеет бесконечное множество решений?
3. Как понять, что система не имеет решений?
4. Как понять, что решение системы единственно?
5. Как определить число свободных и зависимых переменных?
6. Как перебрать неотрицательные (опорные) решения системы линейных уравнений?
7. Как из системы неравенств сделать систему уравнеиний и зачем это нужно?

Источники информации

- Высшая математика для экономистов.
  Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 2, §2.3,2.4,2.5 с. 44–52.
- Высшая математика для экономистов. Практикум.
  Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 2, §2.1,2.2,2.3 с. 34–47.
- Исследование и оптимизация моделей: Кремер Н. Ш.
  Исследование операций в экономике глава 1 с. 16–28.

Анонс:

На следующей лекции рассмотрим задачи два метода решения задач линейного программирования: графический метод и симплекс метод;