Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 6. Линейные задачи–4

Теория двойственности и транспортная задача

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru

Структура лекции

1. Двойственная ЗЛП
   - Теоремы двойственности
   - Экономический смысл двойственности
   - Одновременное решение двойственных задач
   - Пример
2. Транспортная задача
   - Основные понятия транспортной задачи
   - Поиск допустимого решения
   - Поиск оптимального решения транспортной задачи
3. Резюме и источники

Двойственная задача линейного программирования

Ситуация

Предприятие производит продукцию n видов из сырья m видов. Какое количество продукции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях $c_1, c_2, \ldots c_n$ единицы продукции и объемах имеющегося сырья $b_1, b_2, \ldots b_m$ максимизировать доход от продажи продукции.

Ситуация

Предприятие производит продукцию n видов из сырья m видов. Какое количество продукции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях $c_1, c_2, \ldots c_n$ единицы продукции и объемах имеющегося сырья $b_1, b_2, \ldots b_m$ максимизировать доход от продажи продукции.

Некоторое предприятие решило перекупить это сырье.

- Продавцу сырья сделка выгодна, если доход от продажи сырья превзойдет доход от реализации продукции.
- Покупателю хочется купить сырье по минимальной цене.

Какие цены на сырье удовлетворят обе строны?

Формализация. Прямая задача

	Продукт 1	Продукт 2	$\cdots$	Продукт n	Запас	Цена
Сырье 1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	y_1
Сырье 2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	y_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Сырье m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	y_m
Цена	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		
План	x_1	x_2	$\cdots$	x_n		

	Продукт 1	Продукт 2	$\cdots$	Продукт n	Запас	Цена
Сырье 1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	y_1
Сырье 2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	y_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
Сырье m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	y_m
Цена	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		
План	x_1	x_2	$\cdots$	x_n		

Прямая задача: $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases} \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

Формализация. Двойственная задача

	Продукт 1	Продукт 2	$\cdots$	Продукт n	Запас	Цена
Сырье 1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	y_1
Сырье 2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	y_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Сырье m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	y_m
Цена	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		
План	x_1	x_2	$\cdots$	x_n		

Двойственная задача: $H = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geqslant c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geqslant c_2 \\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geqslant c_n \end{cases}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \geqslant 0$$

Прямая задача: $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases} \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

Двойственная задача: $H = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geqslant c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geqslant c_2 \\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geqslant c_n \end{cases} \qquad y_1, y_2, \ldots, y_m \geqslant 0$$

Прямая задача: $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases} \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

Двойственная задача: $H = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geqslant c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geqslant c_2 \\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geqslant c_n \end{cases} \qquad y_1, y_2, \ldots, y_m \geqslant 0$$

Теорема

Двойственная к двойственной ЗЛП является прямой ЗЛП.

Составление двойственной задачи

1. Преобразовать прямую задачу так, чтобы все ограничения были неравенствами $\leqslant$, а целевая функция $F \to \max$.
2. Ввести столько переменных y_i, сколько ограничений в прямой задаче.
3. Составить целевую функцию:
   - коэффициентами целевой функции двойственной задачи станут свободные члены ограничений прямой задачи;
   - целевой функция $H \to \min$.
4. Составить целевую функцию:
   - транспонировать матрицу коэффициентов;
   - в качестве свободных членов взять коэффициенты целевой функции прямой задачи;
   - все неравенства должны быть $\geqslant$.

Пример I

Задача

Построить двойственную задачу к задаче линейного программирования

$$F = -x_1 + 2x_2 \to \min \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ x_1 - x_2 \leqslant 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{matrix}$$

В системе ограничений все неравенства $\leqslant$:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant -1 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ x_1 - x_2 \leqslant 3 \end{cases}$$

Целевая функция должна максимизироваться:

$$F_1 = -F = x_1 - 2x_2 \to \max$$

Пример II

$$F_1 = 1x_1 - 2x_2 \to \max \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant -1 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ x_1 - x_2 \leqslant 3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{matrix}$$

Составим двойственную целевую функцию:

$$H = -1y_1 + 24y_2 + 3y_3 \to \min$$

Составим двойственную систему ограничений:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 \geqslant 1 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 \geqslant -2 \end{cases} \qquad y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$$

Пример III

Построенная двойственная задача:

$$H = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 \geqslant 1 \\ \quad y_1 + 4y_2 - y_3 \geqslant -2 \end{cases} \qquad y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$$

Слабая теорема двойственности

Теорема (Слабая теорема двойственности)

Для любых допустимых планов X, Y прямой ($F \to \max$) *и двойственной* ($H \to \min$) *задач соответственно справедливо неравенство*

$$F(X) \leqslant H(Y)$$

Экономический смысл

- Прибыль, полученная предприятием от реализации выпущенной продукции, при любом плане выпуска продукции не превосходит суммарной оценки сырья, израсходованного на производство этой продукции.
- Разность $H(Y) - F(X)$ — производственные потери в зависимости от принятого плана выпуска продукции и выбранных оценок ресурсов.

Слабая теорема двойственности

Теорема (Достаточное условие оптимальности)

Если для некоторых допустимых планов X^* Y^* *прямой и двойственной задач соответственно справедливо неравенство*

$$F(X^*) = H(Y^*)$$

то X^* *— оптимальный план прямой задачи,*
Y^* *— оптимальный план двойственной задачи.*

Первая теорема двойственности

Теорема (Первая теорема двойственности)

Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы. При этом

- *Если задачи разрешимы, то оптимальные значения целевых функций совпадают.*
- *Если одна из задач имеет не ограниченый оптимум, то система ограничений второй задачи несовместна.*

Экономический смысл

- Предприятие получит одинаковую прибыль, не зависимо от того, будет оно производить продукцию по оптимальному плану, либо продаст свои ресурсы по оптимальным ценам (возместив тем самым минимальные затраты на ресурсы).

Вторая теорема двойственности

Теорема (Вторая теорема двойственности)

Допустимые планы

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$y_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\};$$

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j\right) = 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}$$

Экономический смысл двойственности

- Двойственные оценки служат мерой дефицитности ресурса:
  - Чем больше оценка, тем сильнее влияет изменение запасов данного ресурса на оптимальный план.
  - Оценка ресурсов, запас которых избыточен равна нулю.
- Двойственные оценки позволяют установить целесообразность выпуска того или иного вида продукции, т. е. являются мерой убыточности при производстве невыгодных видов продукции.
- Двойственные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальная прибыль от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу.

Следствие 1 второй теоремы двойственности

Пусть прямая и двойственная задачи преобразованы к канонической форме.

Тогда все переменные разбиваются на пары:

Прямая задача						
Основные				Свободные		
x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_{n+m}
y_{m+1}	y_{m+2}	$\dots$	y_{m+n}	y_1	$\dots$	y_m
Свободные				Основные		
Двойственная задача						

Для оптимальных решений прямой и двойственной задач

$$x_j y_{m+j} = 0, \qquad x_{n+i} y_i = 0$$

Положительным компонентам оптимального плана одной из взаимно двойственных задач, представленных в канонической форме, соответствуют нулевые компоненты второй задачи

Следствие 2 второй теоремы двойственности

Компоненты оптимального плана двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных целевой функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения

Пример.

Решить задачу линейного программирования:

$$F = 36x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leqslant 376, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 280, \end{cases}, \qquad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

- Задача имеет 2 ограничения и три переменные.
- Двойственная будет иметь две переменные и 3 ограничения.
- Двойственная задача может быть решена графически.

Перейдем к двойственной задаче.

Прямая задача

$$F = 36x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leqslant 376, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 280, \end{cases} \qquad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

Переход к двойственной

- Целевая функция максимизируется.
- Все ограничения $\leqslant$

Двойственная задача

$$H = 376y_1 + 280y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geqslant 36, \\ 7y_1 + 5y_2 \geqslant 20, \\ 4y_1 + 4y_2 \geqslant 40, \end{cases} \qquad y_1, y_2 \geqslant 0$$

Прямая задача

$$F = 36x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leqslant 376, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 280, \end{cases} \qquad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

Переход к двойственной

- Целевая функция максимизируется.
- Все ограничения $\leqslant$

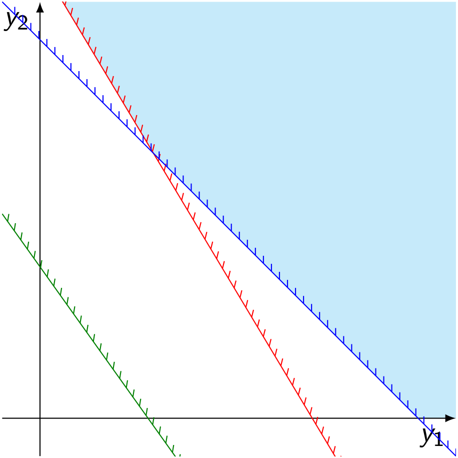
Двойственная задача

$$H = 376y_1 + 280y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geqslant 36, \\ 7y_1 + 5y_2 \geqslant 20, \\ 4y_1 + 4y_2 \geqslant 40, \end{cases} \qquad y_1, y_2 \geqslant 0$$

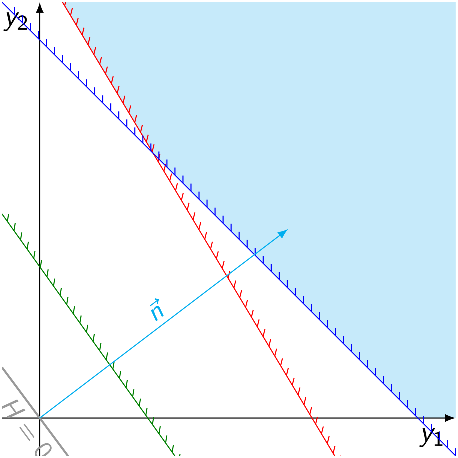
$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geqslant 36 \\ 7y_1 + 5y_2 \geqslant 20 \\ 4y_1 + 4y_2 \geqslant 40 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y_1 \geqslant 0 \\ y_2 \geqslant 0 \end{array}$$

$$H = 376y_1 + 280y_2 \to \min$$



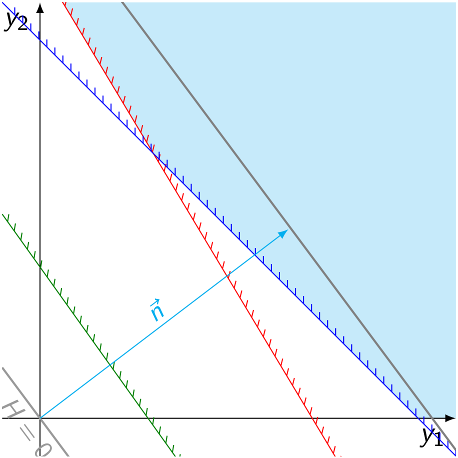
$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geqslant 36 \\ 7y_1 + 5y_2 \geqslant 20 \\ 4y_1 + 4y_2 \geqslant 40 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y_1 \geqslant 0 \\ y_2 \geqslant 0 \end{matrix}$$

$$H = 376y_1 + 280y_2 \to \min$$



$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geqslant 36 \\ 7y_1 + 5y_2 \geqslant 20 \\ 4y_1 + 4y_2 \geqslant 40 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 \geqslant 0 \\ y_2 \geqslant 0 \end{matrix}$$

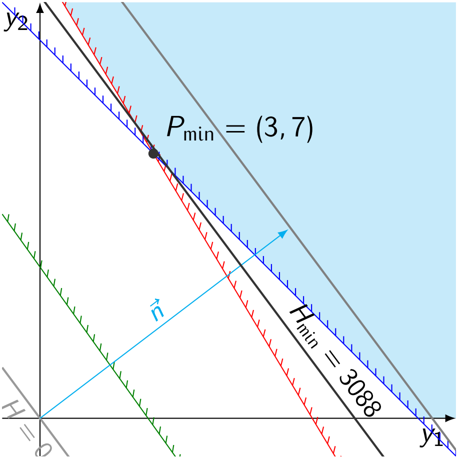
$$H = 376y_1 + 280y_2 \to \min$$



$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geqslant 36 \\ 7y_1 + 5y_2 \geqslant 20 \\ 4y_1 + 4y_2 \geqslant 40 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y_1 \geqslant 0 \\ y_2 \geqslant 0 \end{array}$$

$$H = 376y_1 + 280y_2 \to \min$$

- $P_{\min} = (3, 7)$
- $H_{\min} = 3088$



Пример. Переход к каноническому виду

$$H = 376y_1 + 286y_2 \to \min$$

Перейдем к каноническому виду

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geqslant 36 \\ 7y_1 + 5y_2 \geqslant 20 \\ 4y_1 + 4y_2 \geqslant 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5y_1 + 3y_2 - y_3 = 36 \\ 7y_1 + 5y_2 - y_4 = 20 \\ 4y_1 + 4y_2 - y_5 = 40 \end{cases}$$

Подставим в систему оптимальный план $(y_1, y_2) = (3, 7)$

$$\begin{cases} 5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - y_3 = 36 \\ 7 \cdot 3 + 5 \cdot 7 - y_4 = 20 \\ 4 \cdot 3 + 4 \cdot 7 - y_5 = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_4 = 35 \\ y_5 = 0 \end{cases}$$

Определим вид переменных

- Основные переменные: y_1, y_2, y_4
- Свободные переменные: y_3, y_5

Пример. Переход к каноническому виду

$$H = 376y_1 + 280y_2 \to \min$$

Перейдем к каноническому виду

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geqslant 36 \\ 7y_1 + 5y_2 \geqslant 20 \\ 4y_1 + 4y_2 \geqslant 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5y_1 + 3y_2 - y_3 = 36 \\ 7y_1 + 5y_2 - y_4 = 20 \\ 4y_1 + 4y_2 - y_5 = 40 \end{cases}$$

Подставим в систему оптимальный план $(y_1, y_2) = (3, 7)$

$$\begin{cases} 5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - y_3 = 36 \\ 7 \cdot 3 + 5 \cdot 7 - y_4 = 20 \\ 4 \cdot 3 + 4 \cdot 7 - y_5 = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_4 = 35 \\ y_5 = 0 \end{cases}$$

Определим вид переменных

- Основные переменные: y_1, y_2, y_4
- Свободные переменные: y_3, y_5

Оптимальное значение По первой теореме двойственности

$$F_{\max} = H_{min} = 3088$$

Найдем оптимальный план

Для этого:

Преобразуем прямую задачу к канонической форме

$$F = 36x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leqslant 376, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 280, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 376, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_5 = 280, \end{cases}$$

Найдем значения некоторых переменных прямой задачи

По следствию 1 имеем:

Двойственная задача				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
3	7	0	35	0
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0	0	?	0	?
x_4	x_5	x_1	x_2	x_3
Прямая задача				

Найдем значения переменных x_1 и x_3.

Подставим нули в систему ограничений

$$\begin{cases} 5x_1 + 7 \cdot 0 + 4x_3 + 0 = 376, \\ 3x_1 + 5 \cdot 0 + 4x_3 + 0 = 280, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 48, \\ x_3 = 34. \end{cases}$$

Пример. Ответ

Запишем ответ задачи

- Оптимальный план $(x_1, x_2, x_3) = (48, 0, 34)$
- Максимальное значение $F_{\max} = 3088$

Пример. Исследование. Дефицит

Дефицитные ресурсы: Рассмотрим оптимальное решение двойственной задачи:

$$P_{\min} = (3, 7) \qquad H_{\min} = 3088$$

Оценки обоих ресурсов положительны, поэтому они будут израсходованы полностью и, следовательно, являются дефицитными при этом второй ресурс более дефицитен, чем первый.

Влияние запасов на целевую функцию:

- При увеличении первого ресурса на 1 значение целевой функции возрастет на 3
- При увеличении второго ресурса на 1 значение целевой функции возрастет на 7.

Пример. Исследование. Целесообразность производства

Для исследования целесообразности производства товаров подставим оптимальное решение в систему ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 = 5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 36 = 36 \\ 7y_1 + 5y_2 = 7 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 56 > 20 \\ 4y_1 + 4y_2 = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 7 = 40 = 40 \end{cases}$$

Вторая строка соответствует второму товару. Неравенство $56 > 20$ означает, что:

- если мы продадим сырье, предназначенное для производства второго продукта, то получим доход 56 вместо 20;
- в сложившихся технолого–экономических условиях, производить второй продукт, не целесообразно.

Транспортная задача

Транспортная задача — это задача минимизации затрат на перевозки некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, \ldots, A_m$ в n пунктов назначения $B_1, \ldots, B_n$.

Обозначим:

- x_{ij} — объем перевозки из A_i в B_j
- c_{ij} — затраты на перевозку из A_i в B_j
- a_i — запас товаров в пункте A_i
- b_j — потребность товаров в пункте B_j

Возможны три случая:

1. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ — замкнутая транспортная задача
2. $\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$ — открытая транспортная задача, спрос всех пунктов назначения должен быть удовлетворен.
3. $\sum_{i=1}^{m} a_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$ — открытая транспортная задача, товары из всех пунктов отправления должен быть перевезен.

Замыкание транспортной задачи

Любая транспортная задача может быть приведена к замкнутой.

$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Добавим фиктивного поставщика A^*_{m+1}:

- $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$
- $c_{m+1,j} = 0$ для всех $j = \overline{1, n}$

$\sum_{i=1}^{m} a_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Добавим фиктивного потребителя B^*_{n+1}:

- $b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$
- $c_{i,n+1} = 0$ для всех $i = \overline{1, m}$

Пусть дана замкнутая транспортная задача.

- x_{ij} — объем перевозки из A_i в B_j, $x_{ij} \geqslant 0$
- c_{ij} — затраты на перевозку из A_i в B_j
- a_i — запас товаров в пункте A_i
- b_j — потребность товаров в пункте B_j

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, n} & \text{спрос всех потребителей должен быть удовлетворен} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, m} & \text{запасы всех поставщиков должны быть перевезены} \end{cases}$$

Особенности

Матрица издержек:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

План перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

1. Система ограничений содержит $n + m$ уравнений.
2. Каждая переменная входит не более чем в два уравнения.
3. Каждое уравнение содержит не более $\max\{m, n\}$ переменных.
4. Целевая функция зависит от всех $m \cdot n$ переменных.

Транспортная матрица

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_m
Потребности	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

Поиск допустимого плана

- Метод северо-западного угла
- Метод наименьших затрат

Допустимый план

Теорема (о совместности транспортной задачи)

Транспортная задача имеет допустимый план тогда и только тогда, когда она замкнута ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$).

Теорема (о совместности транспортной задачи)

Транспортная задача имеет допустимый план тогда и только тогда, когда она замкнута ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$).

Необходимость очевидна.
Достаточность. Пусть $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.
Рассмотрим поставщика A_i и потребителя B_j с наименьшими номерами i и j. Выполним перевозку $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$.
Тогда

- $a_i' = a_i - x_{ij}$ — новые запасы поставщика A_i,
- $b_j' = b_j - x_{ij}$ — новые запасы поставщика B_j,
- Из перевозок выбывает либо A_i, либо B_j (но не оба).
- Задача остается замкнутой.

За $n + m - 1$ шаг будет составлен допустимый план перевозок.

Допустимый план и его смысл

Выбранные $n + m - 1$ соответствуют основным переменным задачи линейного программирования.

В системе ограничений $n + m$ уравнений. Почему основных переменных всего $n + m - 1$?

Пример

Три фермерских хозяйства ежедневно могут доставлять в город соответственно 60, 60 и 50 ц молока для обеспечения пяти торговых точек. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребности торговых точек в молоке указаны в таблице

Фермерские хозяйства	Торговая точка					Запасы молока, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	50
A_1	9	5	7	4	6	50
A_1	6	8	4	9	7	40
Спрос на молоко, ц	30	20	55	20	25	

Определить оптимальный план доставки молока в каждую торговую точку так, чтобы суммарные издержки были минимальными.

Пример. Балансировка

- Суммарное предложение фермерских хозяйств $50 + 50 + 40 = 140$ ц
- Суммарный спрос $30 + 20 + 55 + 20 + 25 = 150$ ц
- Спрос превосходит предложение, добавляем поставщика A_4^* с запасом $150 - 140 = 10$ ц. и с нулевыми стоимостями перевозок.

Фермерские хозяйства	Торговая точка					Запасы молока, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	50
A_2	9	5	7	4	6	50
A_3	6	8	4	9	7	40
A_4^*	0	0	0	0	0	10
Спрос на молоко, ц	30	20	55	20	25	

Задача приведена к замкнутому виду.

Пример. Составление допустимого плана

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	50
A_2	9	5	7	4	6	50
A_3	6	8	4	9	7	40
A_4^*	0	0	0	0	0	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Составление допустимого плана

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 30	6	8	10	12	50
A_2	9 / —	5	7	4	6	50
A_3	6 / —	8	4	9	7	40
A_4^*	0 / —	0	0	0	0	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Составление допустимого плана

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 30	6 20	8 —	10 —	12 —	50
A_2	9 —	5	7	4	6	50
A_3	6 —	8	4	9	7	40
A_4^*	0 —	0	0	0	0	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Составление допустимого плана

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 30	6 20	8 —	10 —	12 —	50
A_2	9 —	5 0	7	4	6	50
A_3	6 —	8 —	4	9	7	40
A_4^*	0 —	0 —	0	0	0	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Составление допустимого плана

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 30	6 / 20	8 / —	10 / —	12 / —	50
A_2	9 / —	5 / 0	7 / 50	4 / —	6 / —	50
A_3	6 / —	8 / —	4	9	7	40
A_4^*	0 / —	0 / —	0	0	0	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Составление допустимого плана

Хоз-ва	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запас
A_1	7 / 30	6 / 20	8 / —	10 / —	12 / —	50
A_2	9 / —	5 / 0	7 / 50	4 / —	6 / —	50
A_3	6 / —	8 / —	4 / 5	9	7	40
A_4^*	0 / —	0 / —	0 / —	0	0	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Составление допустимого плана

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 30	6 / 20	8 / —	10 / —	12 / —	50
A_2	9 / —	5 / 0	7 / 50	4 / —	6 / —	50
A_3	6 / —	8 / —	4 / 5	9 / 20	7	40
A_4^*	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	0	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Составление допустимого плана

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 30	6 20	8 —	10 —	12 —	50
A_2	9 —	5 0	7 50	4 —	6 —	50
A_3	6 —	8 —	4 5	9 20	7 15	40
A_4^*	0 —	0 —	0 —	0 —	0	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Составление допустимого плана

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 30	6 / 20	8 / —	10 / —	12 / —	50
A_2	9 / —	5 / 0	7 / 50	4 / —	6 / —	50
A_3	6 / —	8 / —	4 / 5	9 / 20	7 / 15	40
A_4^*	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	0 / 10	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 30	6 / 20	8 / —	10 / —	12 / —	50
A_2	9 / —	5 / 0	7 / 50	4 / —	6 / —	50
A_3	6 / —	8 / —	4 / 5	9 / 20	7 / 15	40
A_4^*	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	0 / 10	10
Спрос	30	20	55	20	25	

- Число заполненных клеток $n + m - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$
- $F = 7 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 50 + 4 \cdot 5 + 9 \cdot 20 + 7 \cdot 15 + 0 \cdot 10 = 985$

Методы получения допустимого плана

1. Метод северо-западного угла. Рассмотрен в доказательстве теоремы о совместности транспортной задачи.
2. Метод наименьших затрат
   - На каждом шаге заполняется клетка (i, j) таблицы с наименьшей стоимость перевозки $c_{i,j}$.
   - На каждом шаге вычеркивается либо столбец, либо строка, но не одновременно.
   - Выполняется ровно $n + m - 1$ шаг.

Пример. Метод наименьших затрат

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	50
A_2	9	5	7	4	6	50
A_3	6	8	4	9	7	40
A_4^*	0	0	0	0	0	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	50
A_2	9	5	7	4	6	50
A_3	6	8	4	9	7	40
A_4^*	0 10	0 —	0 —	0 —	0 —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Метод наименьших затрат

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	50
A_2	9	5	7	4	6	50
A_3	6 —	8 —	4 40	9 —	7 —	40
A_4^*	0 10	0 —	0 —	0 —	0 —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Метод наименьших затрат

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10 —	12	50
A_2	9	5	7	4 20	6	50
A_3	6 —	8 —	4 40	9 —	7 —	40
A_4^*	0 10	0 —	0 —	0 —	0 —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Метод наименьших затрат

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6 —	8	10 —	12	50
A_2	9	5 20	7	4 20	6	50
A_3	6 —	8 —	4 40	9 —	7 —	40
A_4^*	0 10	0 —	0 —	0 —	0 —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Метод наименьших затрат

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6 —	8	10 —	12	50
A_2	9 —	5 20	7 —	4 20	6 10	50
A_3	6 —	8 —	4 40	9 —	7 —	40
A_4^*	0 10	0 —	0 —	0 —	0 —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Метод наименьших затрат

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / —	8	10 / —	12	50
A_2	9 / —	5 / 20	7 / —	4 / 20	6 / 10	50
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	40
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Метод наименьших затрат

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / —	8 / 15	10 / —	12	50
A_2	9 / —	5 / 20	7 / —	4 / 20	6 / 10	50
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	40
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Метод наименьших затрат

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 20	6 —	8 15	10 —	12 15	50
A_2	9 —	5 20	7 —	4 20	6 10	50
A_3	6 —	8 —	4 40	9 —	7 —	40
A_4^*	0 10	0 —	0 —	0 —	0 —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример. Метод наименьших затрат

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / —	8 / 15	10 / —	12 / 15	50
A_2	9 / —	5 / 20	7 / —	4 / 20	6 / 10	50
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	40
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

- Число заполненных клеток $n + m - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$
- $F = 7\cdot20+8\cdot15+12\cdot15+5\cdot20+4\cdot20+6\cdot10+4\cdot40+0\cdot10 = 840$

Случай вырожденного плана

- Если число заполненных клеток равно $m+n-1$, то план является невырожденным.
- Если число заполненных клеток меньше $m+n-1$, то план является вырожденным, то есть содержит нулевые значения основных переменных.
- В случае вырожденности плана необходимо отметить одну или несколько клеток и поместить в них нулевое значение так, чтобы:
  - число заполненных клеток стало равно $m+n-1$;
  - не появилось циклов, состоящих из заполненных клеток, по которым можно пройти, побывав в каждой по разу и меняя направление под прямым углом;
- Предложенные методы расставляют нули автоматически за счет запрета одновременного вычеркивания строки и столбца.

Оптимизация допустимого плана

Метод потенциалов

- Изобретен академиком Л. В Канторовичем и профессором М. К. Гавуриным до появления симплекс-метода.
- Фактически является другим способом записи симплекс-метода.

Потенциалы

Предположим, что расходы на перевозки оплачивают участники следующим образом:

- отправитель A_i платит перевозчику некоторую сумму α_i
- получатель B_j платит перевозчику некоторую сумму β_j.
- $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$
- величины α_i, β_j могут быть отрицательными.

Величины α_i, β_j назовем потенциалами.

Потенциалы являются переменными ЗЛП двойственной к транспортной задаче.

Система потенциалов

Для допустимого плана перевозок имеем систему $n+m-1$ линейных уравнений с $n+m$ неизвестными

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_j = c_{ij} \end{cases}$$

- Данная система совместна
- Одна из переменных будет свободной — ее можно задавать произвольно.
- Остальные переменные находятся однозначно.

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / —	8 / 15	10 / —	12 / 15	50
A_2	9 / —	5 / 20	7 / —	4 / 20	6 / 10	50
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	40
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	10
Спрос	30	20	55	20	25	

Пример

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 7 \\ \alpha_1 + \beta_3 = 8 \\ \alpha_1 + \beta_5 = 12 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 5 \\ \alpha_2 + \beta_4 = 4 \\ \alpha_2 + \beta_5 = 6 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 4 \\ \alpha_4 + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Пример

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 7 \\ \alpha_1 + \beta_3 = 8 \\ \alpha_1 + \beta_5 = 12 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 5 \\ \alpha_2 + \beta_4 = 4 \\ \alpha_2 + \beta_5 = 6 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 4 \\ \alpha_4 + \beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \color{red}{\alpha_1 = 0} \\ \beta_1 = 7 \\ \beta_3 = 8 \\ \beta_5 = 12 \\ \alpha_4 = -7 \\ \alpha_2 = -6 \\ \alpha_3 = -4 \\ \beta_2 = 11 \\ \beta_4 = 10 \end{cases}$$

Пример

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 7 \\ \alpha_1 + \beta_3 = 8 \\ \alpha_1 + \beta_5 = 12 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 5 \\ \alpha_2 + \beta_4 = 4 \\ \alpha_2 + \beta_5 = 6 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 4 \\ \alpha_4 + \beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \color{red}{\alpha_1 = 0} \\ \beta_1 = 7 \\ \beta_3 = 8 \\ \beta_5 = 12 \\ \alpha_4 = -7 \\ \alpha_2 = -6 \\ \alpha_3 = -4 \\ \beta_2 = 11 \\ \beta_4 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -6 \\ \alpha_3 = -4 \\ \alpha_4 = -7 \\ \beta_1 = 7 \\ \beta_2 = 11 \\ \beta_3 = 8 \\ \beta_4 = 10 \\ \beta_5 = 12 \end{cases}$$

Псевдостоимости

- Для каждой пары (i, j) введем понятие псевдостоимости перевозки
$$\bar{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$
- Ясно, что для заполненных клеток допустимого плана псевдостоимости будут совпадать с затратами на перевозки.
- Невязкой перевозки (i, j) назовем разность
$$\delta_{ij} = \bar{c}_{ij} - c_{ij}$$
- Экономический смысл невязки — штраф, которую платят поставщик i и потребитель j за отказ от перевозки единицы товара.

Критерий оптимальности

Теорема

Допустимый план является оптимальным тогда и только тогда, когда $\delta_{ij} = 0$ для всех заполненных клеток (основных переменных x_{ij}) и $\delta_{ij} \leqslant 0$ для всех свободных клеток (неосновных переменных x_{ij}).

Пример:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 0+7 & 0+11 & 0+8 & 0+10 & 0+12 \\ -6+7 & -6+11 & -6+8 & -6+10 & -6+12 \\ -4+7 & -4+11 & -4+8 & -4+10 & -4+12 \\ -7+7 & -7+11 & -7+8 & -7+10 & -7+12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 11 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 9 & 5 & 7 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

План не оптимален!

Шаг оптимизации

1. Выбирается ячейка с максимальной невязкой.
2. Она объявляется новой заполненной ячейкой.
3. Строится циклический маршрут передачи товара, удовлетворяющий следующим условиям:
   - Начинается и заканчивается в выбранной клетке
   - Маршрут проходит только по заполненным клеткам
   - Каждая клетка встречается на маршруте не более одного раза.
   - В каждой клетке маршрут меняет направление на угол 90°.
4. Помечаем вершины маршрута знаками $(+)$ и $(-)$ чередуя их.
5. Находим минимальной значение груза в ячейках цикла имеющих знак $(-)$.
6. Добавляем это значение к ячейке со знаками $(+)$ и вычитаем из ячеек со знаками $(-)$.

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / —	8 / 15	10 / —	12 / 15	0
A_2	9 / —	5 / 20	7 / —	4 / 20	6 / 10	−6
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	−4
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	−7
β	7	11	8	10	12	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / —	8 / 15	10 / —	12 / 15	0
A_2	9 / —	5 / 20	7 / —	4 / 20	6 / 10	−6
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	−4
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	−7
β	7	11	8	10	12	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / —	8 / 15	10 / —	12 / 15	0
A_2	9 / —	5 / 20	7 / —	4 / 20	6 / 10	−6
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	−4
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	−7
β	7	11	8	10	12	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / —	8 / 15	10 / —	12 / 15	0
A_2	9 / —	5 / 20	7 / —	4 / 20	6 / 10	-6
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	-4
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	-7
β	7	11	8	10	12	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / — +15	8 / 15	10 / —	12 / 15 −15	0
A_2	9 / —	5 / 20 −15	7 / —	4 / 20	6 / 10 +15	−6
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	−4
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	−7
β	7	11	8	10	12	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / 15	8 / 15	10 / —	12 / —	0
A_2	9 / —	5 / 5	7 / —	4 / 20	6 / 25	−1
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	−4
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	−7
β	7	6	8	5	7	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / 15	8 / 15	10 / —	12 / —	0
A_2	9 / —	5 / 5	7 / —	4 / 20	6 / 25	−1
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	−4
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	−7
β	7	6	8	5	7	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20	6 / 15	8 / 15	10 / —	12 / —	0
A_2	9 / —	5 / 5	7 / —	4 / 20	6 / 25	-1
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	-4
A_4^*	0 / 10	0 / —	0 / —	0 / —	0 / —	-7
β	7	6	8	5	7	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & -1 & \color{red}{1} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 20 (+)	6 / 15	8 / 15 (−)	10 / —	12 / —	0
A_2	9 / —	5 / 5	7 / —	4 / 20	6 / 25	−1
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	−4
A_4^*	0 / 10 (−)	0 / —	0 / — (+)	0 / —	0 / —	−7
β	7	6	8	5	7	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 20 +10	6 15	8 15 −10	10 —	12 —	0
A_2	9 —	5 5	7 —	4 20	6 25	−1
A_3	6 —	8 —	4 40	9 —	7 —	−4
A_4^*	0 10 −10	0 —	0 — +10	0 —	0 —	−7
β	7	6	8	5	7	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

Хоз-ва	Торговая точка					α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7 / 30	6 / 15	8 / 5	10 / —	12 / —	0
A_2	9 / —	5 / 5	7 / —	4 / 20	6 / 25	-1
A_3	6 / —	8 / —	4 / 40	9 / —	7 / —	-4
A_4^*	0 / —	0 / —	0 / 10	0 / —	0 / —	-8
β	7	6	8	5	7	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & -8 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{— план оптимален!}$$

$$F = 7 \cdot 30 + 6 \cdot 15 + 8 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 25 + 4 \cdot 40 + 0 \cdot 10 = 755$$

Резюме

К настоящему моменту вы знаете:

1. Метод построения двойственной задачи и ее экономический смысл.
2. Метод решения транспортной задачи.
3. Симплекс-метод решения ЗЛП:

Убедитесь, что вы не только знаете, но и умеете применять рассмотренные методы.

Источники информации

- Двойственная задача Исследование и оптимизация моделей: Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике. Глава 6 с. 99–123.
- Транспортная задача Исследование и оптимизация моделей: Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике. Глава 7 с. 123–153.