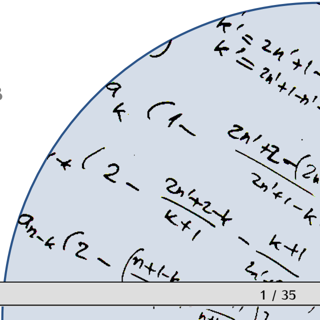
Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 8. Балансовые модели

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru



Структура лекции

Понятие балансовой модели

Определение

Балансовая модель — система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

- система состоит из объектов,
- каждый объект выпускает некоторый продукт,
- часть продукта потребляется другими объектами системы,
- часть выводится за пределы системы в качестве конечного продукта.

Балансовый метод

Балансовое соответствие — равенство объемов запаса ресурсов и величины потребности в нем.

Примеры:

- наличие рабочей силы — количества рабочих мест
- платежеспособный спроса населения — предложение товаров и услуг

Определение

Балансовый метод — метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Область и границы применения

Область применения:

Балансовый метод — основной инструмент поддержания пропорций в народном хозяйстве.

Границы применения:

- не имеют механизмов сравнения отдельных вариантов экономических решений
- не предусматривают взаимозаменяемости ресурсов,
- не позволяют сделать выбор оптимального варианта развития экономической системы.

Виды балансовых моделей

- межотраслевые балансы;
- частные материальные, трудовые и финансовые балансы;
- матричные финансовые планы предприятий;

Все модели имеют общий принцип построения и системы расчетов.

Межотраслевой баланс (МОБ) — каркасная модель экономики:

- отражает натуральные и стоимостные связи;
- дает комплексную характеристику процесса формирования и использования совокупного продукта в отраслевом разрезе.

Основные предположения МОБ

- каждая отрасль производит только один продукт;
- каждая отрасль имеет только одну технологию производства продукции, которая характеризуется коэффициентами затрат;
- коэффициенты затрат отражают взаимосвязь между отраслями и являются отраслевыми нормативами затрат.

Основные обозначения МОБ I

- X_i — валовой выпуск продукции i-й отрасли за рассматриваемый промежуток времени;
- Y_i — конечное потребление, — объем продукции отрасли i, потребляемый в непроизводственной сфере:
  - личное потребление
  - обеспечение общественных потребностей
  - экспорт
- Z_j — Условно-чистая продукция j-й отрасли:
  - чистый доход
  - сумма оплаты труда
  - сумма амортизации

Основные обозначения МОБ II

- x_{ij} — межотраслевые потоки продукции, — объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j;
- x_{ii} — внутреннее потребление i–ой отрасли;
- $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}$ — производственные затраты j–й отрасли на приобретение продукции других отраслей;
- $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ — сумма всех поставок i–й
- $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ — промежуточный продукт экономики;

Таблица межотраслевого баланса

Производящие отрасли	Потребители 1	2	$\cdots$	n	Промежут. потребление	Конечное потребление	Валовой продукт
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	Y_2	X_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	Y_n	X_n
Промежут. затраты	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} Y_i$	X_n
Условно-чистая продукция	Z_1	Z_2	$\cdots$	Z_n	$\sum_{j=1}^{n} Z_j$	$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$	
Валовой продукт	X_1	X_2	$\cdots$	X_n			$\sum_{j=1}^{n} X_j$

Квадратны таблицы

- I квадрант — таблица межотраслевых взаимосвязей.
- II квадрант — материально-вещественный состав конечной продукции.
- III квадрант — стоимостной состав конечной продукции.
- IV квадрант — конечное распределение и использование национального дохода.

Основные соотношения МОБ

- Распределение продукции отраслей по направлениям использования:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \qquad i = \overline{1, n}$$

- Стоимостной состав продукции:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \qquad j = \overline{1, n}$$

Теорема

В МОБ соблюдается принцип единства материального и стоимостного составов национального дохода:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

Теорема

В МОБ соблюдается принцип единства материального и стоимостного составов национального дохода:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

Действительно:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

Теорема

В МОБ соблюдается принцип единства материального и стоимостного составов национального дохода:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

Действительно:

$$-\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j \end{array}\right| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{j=1}^{n} Z_j = 0$$

Выделяют два вида моделей межотраслевого баланса:

1. модель отчетного МОБ:

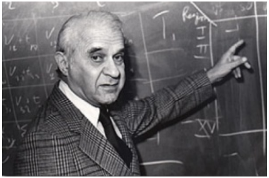
$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \qquad X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j,$$

2. модель прогнозного МОБ:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i$$

Модель прогнозного межотраслевого баланса также называется моделью «затраты — выпуск» В. Леонтьева.

Василий Васильевич Леонтьев (1906–1999)



Лауреат Премии Шведского национального банка по экономическим наукам памяти А. Нобеля (1973) «за развитие метода „затраты — выпуск“ и за применение этого метода в основных проблемах экономики»

- 1936 —Впервые сформулирована проблема расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида.
- 1941 — „Структура Американской экономики, 1919–1939“
- 1953 — „Исследования структуры американской экономики“
- 1966 — „Экономическая теория затраты-выпуск“
- 1977 — „Будущее мировой экономики“
- 1977 — „Очерки по экономике“

Исходные посылки модели Леонтьева

- Экономика состоит из взаимосвязанных отраслей.
- Каждая отрасль выпускает только один вид продукта.
- Каждый продукт производится только одной отраслью.
- В каждой отрасли имеется единственная технология производства; не допускается замещение одного ресурса другим.
- Взаимосвязь между выпуском продукции отраслей и затратами описывается линейными уравнениями.

Условие линейности прямых затрат

Определение

Коэффициент прямых материальных затрат a_{ij} — количество продукции i–й отрасли, которое требуется предоставить j–й отрасли для производства единицы продукции.

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

Экономический смысл Затраты i–ой отрасли в j–ую линейно зависят от валового выпуска X_j.

Технологическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Свойства технологической матрицы:

1. Неотрицательность, $a_{ij} \geqslant 0$.
2. Диагональные элементы $a_{ii} \leqslant 1$.
3. Сумма элементов матрицы A по любому из столбцов не превосходит единицы.

Математическая модель Леонтьева

Распределение продукции по направлениям использования:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_j$$

Модель в форме СЛУ

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n + Y_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + Y_2 \\ \quad \ldots \\ X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n + Y_n \end{cases}$$

Матричная форма модели Леонтьева

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = AX + Y$$

Связь производства и конечного потребления

$$Y = (A - E)X, \qquad X = (A - E)^{-1}Y$$

Коэффициенты полных затрат

Матрица полных затрат

$$B = (E - A)^{-1}$$

Экономический смысл:

Коэффициент полных материальных затрат b_{ij} — величина валового выпуска продукции i-й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-й отрасли.

Основная задача межотраслевого баланса: определить, как скажется на валовом выпуске каждой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X = (E - A)^{-1} \Delta Y$$

Пример I

Дана неполная балансовая таблица:

Производство	Потребление 1	Потребление 2	Валовой выпуск
1	26	164	260
2	208	82	410

Задачи:

1. определить объем конечной продукции.
2. найти объем валового выпуска каждой отрасли, если в плановом периоде выпуск конечной продукции должен повысится в 1-ой отрасли на 50%, во 2-ой отрасли на 20%,

Пример II

Найдем объем конечной продукции.

Вычтем из валового продукта расходы на внутренние расходы

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 410 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26 \\ 208 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 164 \\ 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Производство	Потребление 1	Потребление 2	Конечное потребление	Валовой выпуск
1	26	164	70	260
2	208	82	120	410

Пример III

В плановом периоде выпуск конечной продукции должен повысится в 1-ой отрасли на 50%, во 2-ой отрасли на 20%, Таким образом,

$$Y_{\text{план.}} = \begin{pmatrix} 1.5\,Y_1 \\ 1.2\,Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 144 \end{pmatrix}$$

Найдем требуемый объем выпуска

- Составим технологическую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} x_{11}/X_1 & x_{12}/X_2 \\ x_{21}/X_1 & x_{22}/X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26/260 & 164/410 \\ 208/260 & 82/410 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Пример IV

- Запишем уравнение модели Леонтьева: $AX + Y = X$ и выразим $X = (E-A)^{-1}Y$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.4 \\ -0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

- Найдем обратную матрицу:

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{\det(E-A)} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{0.4} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{0.4} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.8 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2.25 \end{pmatrix}$$

- Итак,

$$X_{\text{план.}} = (E-A)^{-1} Y_{\text{план.}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 105 \\ 144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 354 \\ 534 \end{pmatrix}$$

Пример V

Плановый баланс:

Производство	Потребление 1	Потребление 2	Конечное потребление	Валовой выпуск
1	26	164	105	354
2	208	82	144	534

Продуктивность матрицы прямых затрат

Определение

Неотрицательную матрицу A называют продуктивной, если существует такой неотрицательный вектор $X \geqslant 0$, что $X > AX$.

Экономический смысл:

Матрица A продуктивная тогда и только тогда, когда существует неотрицательный ненулевой вектор конечной продукции Y для модели межотраслевого баланса.

Условия продуктивности

Теорема (Первый критерий продуктивности)

Чтобы матрица A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $(E - A)^{-1} \geqslant 0$

Теорема (Второй критерий продуктивности)

Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда суммы элементов каждого столбца не превосходят 1, причем существует столбец, сумма элементов которого строго меньше 1.

Пример

Убедимся, что технологическая матрица из предыдущего примера продуктивная

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Действительно

- $0.1 + 0.8 < 1,$
- $0.4 + 0.2 < 1$

По второму критерию матрица продуктивна.

Косвенные затраты

Косвенные затраты — это затраты, которые входят в данный продукт не непосредственно (как прямые затраты), а через затраты других отраслей.

Обозначение: $A^{(k)}$ — матрица коэффициентов косвенных материальных затрат k–го порядка.

Вычисление:

$$A^{(1)} = A^2, \qquad A^{(2)} = A^{(1)}A = A^3, \qquad \dots, \qquad A^{(k)} = A^{k-1}$$

Полные затраты на выпуск единицы продукции могут быть получены, как сумма прямых и всех косвенных затрат плюс единица продукции которая выходит за сферу производства

$$B = E + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k + \ldots$$

Пример

Найдем косвенные затраты первого порядка:

$$A^{(1)} = A^2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.09 \\ 0.24 & 0.36 \end{pmatrix}$$

Цель: установить взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами развития экономики.

В основе модели: зависимость между величиной капитальных вложений и приростом продукции.

Уравнение распределения

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \qquad i = \overline{1, n}.$$

- $\left(x_{ij}\right)_{n\times n}$ — матрица межотраслевых потоков текущих затрат

Цель: установить взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами развития экономики.

В основе модели: зависимость между величиной капитальных вложений и приростом продукции.

Уравнение распределения

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + Y_i, \qquad i = \overline{1, n}.$$

- $\left(x_{ij}\right)_{n\times n}$ — матрица межотраслевых потоков текущих затрат
- $\left(\Delta\Phi_{ij}\right)_{n\times n}$ — матрица межотраслевых потоков капитальных вложений, элементы которой показывают, какое количество продукции i-й отрасли направлено в текущем периоде в j-ю отрасль в качестве производственных капитальных вложений в ее основные фонды.

Резюме

Теперь вы знаете:

1. Общую балансовую модель.
2. Модель Леонтьева.

Убедитесь, что вы не только знаете, но и умеете применять рассмотренные методы.
Для успешного применения модели вы должны уметь:

- Умножать матрицы.
- Вычислять определители.
- Находить обратную матрицу
- Проверять матрицу на продуктивность.

Источники информации

- Высшая математика для экономистов.
  Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 2, §2.7 с. 56–60.
- Высшая математика для экономистов. Практикум.
  Под ред. Н. Ш. Кремера. §2.5 с. 50–55.
- Все материалы по курсу здесь:
  https://cloud.mail.ru/public/48BX/47oESuaQQ