ФГБОУ ВО Вятский государственный университет
Факультет экономики и финансов

Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 3. Линейные задачи

Матрицы. Определители. Системы линеных уравнений

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru

Структура лекции

1. Матрицы
   - Что такое матрица
   - Линейные операции над матрицами
   - Умножение матриц
2. Определитель
   - Определение определителя
   - Свойства определителя
   - Обратная матрица
   - Матричные уравнения
3. Системы линейных уравнений
   - Методы решения
4. Резюме лекции и домашнее задание

Определение

Прямоугольная таблица элементов какого-либо множества, имеющая m строк и n столбцов называется матрицей.

Обозначение

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Размерность матрицы: $\dim A = (m \times n)$

Виды матриц

$m = 1$: матрица-строка — $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

$n = 1$: матрица-столбец — $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$.

$n = m$: квадратная матрица — $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

n — порядок квадратной матрицы $n \times n$.

$n \neq m$: прямоугольная матрица.

Специальные виды матриц

Квадратные

Треугольная:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичная:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямоугольные

Нулевая:

$$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство матриц

Матрицы равны, если:

- они имеют одинаковую размерность;
- их соответствующие элементы равны.

$$A_{n\times m} = B_{n'\times m'} \iff \begin{cases} n = n' \\ m = m' \\ a_{i,j} = b_{i,j} \end{cases}$$

Применение

Метод неопределенных коэффициентов

Сумма матриц

Сумма матриц определена только для матриц одинакового размера. При нахождении суммы соответствующие элементы матриц складываются.

$$C = A + B \iff \begin{cases} \dim C = \dim A = \dim B \\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \end{cases}$$

Умножение матрицы на число

Результатом умножения матрицы A на число k является матрица того же размера, каждый элемент которой получается умножением соответствующего элемента матрицы A на k.

$$C = kA \iff \begin{cases} \dim C = \dim A \\ c_{i,j} = k \cdot a_{i,j} \end{cases}$$

Найти значение выражения:

$$C = 5A + B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 2 & 5 \cdot 3 - 4 & 5 \cdot 2 + 1 \\ 5 \cdot 0 - 5 & 5 \cdot (-1) + 0 & 5 \cdot 4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 11 \\ -5 & -5 & 22 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Транспонирование матрицы — это операция над матрицей, при которой ее строки и столбцы меняются местами:

$$(a_{ij})^T_{m\times n} = (a_{ji})_{n\times m}$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Связь с линейными операциями:

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$

Умножение матриц

Определение

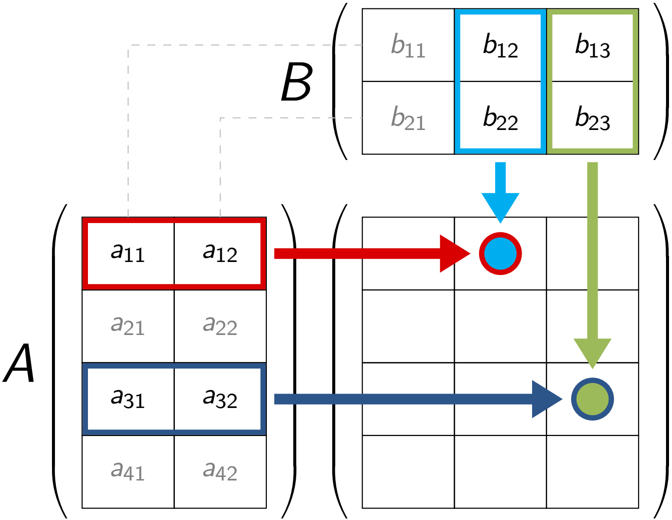
Произведением матриц $A \times B$ называется матрица C, если

- $\dim A = (m \times n)$, $\dim B = (n \times k)$
- $\dim C = (m \times k)$
- $c_{ij} = A_i \cdot B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

Правило размерностей:

$$(m \times n) \cdot (n \times k) = (m \times k)$$

Схема умножения матриц



$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$

$a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}$

Пример умножения матриц I

Задача

Вычислить: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Размерность (2×2), (2×3). Умножать можно. Произведение 2×3
- $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$

Пример умножения матриц II

- Вычисляем элементы:
  - $c_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-3) = -9$
  - $c_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 12$
  - $c_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5$
  - $c_{21} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 6 \cdot 3 + (-1) \cdot (-3) = 21$
  - $c_{22} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 4$
  - $c_{23} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$
- Итак, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 12 & 5 \\ 21 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Пример умножения матриц III

Заметим, что $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ не существует, так как число столбцов первого множителя не равно числу строк второго множителя.

Умножение матриц в экономике I

Задача

В таблице указана стоимость доставки единицы продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах 1 и 2 в магазины M_1, M_2 и M_3. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода, если с каждого молокозавода в магазин M_1 доставляют по 50 ед. продукции, в магазин M_2 — по 70, а в M_3 — по 130 ед. продукции.

	Магазины		
Молокозавод	M_1	M_2	M_3
1	20	35	10
2	15	27	8

Обозначим через A матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, а через B — матрицу количества единиц продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 \cdot 50 + 35 \cdot 70 + 10 \cdot 130 \\ 15 \cdot 50 + 27 \cdot 70 + 8 \cdot 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4750 \\ 3680 \end{pmatrix}$$

Задача решена, однако, если мы домножим AB на матрицу, характеризующую распределение поставок между молокозаводами $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, то получим суммарную стоимость доставки:

$$CAB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4750 \\ 3680 \end{pmatrix} = (8430)$$

Итак, на доставку товаров тратится 8430 руб ежедневно, причем 4750 руб. стоит доставка с первого завода и 3680 — со второго.

- $A(BC) = (AB)C$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- $(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC$
- $AB \neq BA$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $A_{m\times n}E_{n\times n} = A_{m\times n}$, $E_{m\times m}A_{m\times n} = A_{m\times n}$
- $AE = EA = E$, если A — квадратная матрица.

Определение

Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$.

Проблема деления матриц I

- Попробуем „разделить“ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

  Для этого решим уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

  Перемножим $\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

  По определению равенства матриц:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=1 \\ 3a+5c=1 \\ 3b+5d=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-10/3 \\ c=2 \\ d=13/6 \end{cases}$$

  Итак,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -10/3 \\ 2 & 13/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Проблема деления матриц II

- Попробуем теперь „разделить“ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=1 \\ a+c=1 \\ b+d=0 \end{cases} \Longrightarrow 0 = b+d = 1$$

Таким образом, операция деления матриц не определена.

Определение определителя

Каждой квадратной матрице сопоставляется число, называемое определителем, по следующим правилам:

1. Определитель матрицы первого порядка равен его единственному элементу: $A = \left(a_{11}\right) \Longrightarrow \det(A) = a_{11}$.
2. Определитель матрицы n–го порядка равен сумме произведений элементов его первой строки на соответствующие им алгебраические дополнения:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n},$$

где

- $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ — алгебраическое дополнение;
- M_{ij} — минор элемента a_{ij} — определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием i–й строки и j–го столбца.

Теорема

Определителем матрицы второго порядка является число
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Правило вычисления:
$$\begin{array}{c} + \\ - \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Доказательство. Разложим определитель по первой строке.
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{1+1}M_{11} + b_1(-1)^{1+2}M_{12} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Теорема

Определителем матрицы третьего порядка является число

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1 .$$

Правило Саррюса:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \multicolumn{3}{|c|}{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Внимание! Правило Саррюса применяется только для определителей 3 порядка.

Примеры вычисления определителя I

- Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 - (-5)\cdot 4 = 18.$$

- Определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \left|\begin{matrix} -6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}\right. & \hspace{-1em}\left|\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. & & & \\ - & - & - & & \end{array} \begin{matrix} -6 & 5 \\ 0 & -6 \\ 3 & 2 \end{matrix} =$$

$$= 72 - 30 + 0 - 0 - 24 - 0 = 18.$$

Примеры вычисления определителя II

- Определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0A_{11} + A_{12} + 2A_{13} + 0A_{14}$$

  - $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= -(0 - 6 - 12 - 0 - 4 - 0) = 22$$

- $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$
  $= 0 - 0 + 36 - 18 + 12 - 0 = 30$

- Подставим алгебраические дополнения в разложение определителя:
  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 18 + 2 \cdot 30 = 78$

1. Определитель может быть разложен в линейную комбинацию по любой строке и любому столбцу.
2. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
3. Умножение всех элементов строки или столбца определителя на некоторое число λ равносильно умножению определителя на это число:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
4. Если в определителе переставить местами любые две строки или два столбца, то определитель изменяет свой знак на противоположный.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Свойства определителя II

5. Если матрица содержит нулевую строку (столбец), то определитель этой матрицы равен нулю.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
6. Если две строки (столбца) матрицы равны, то определитель этой матрицы равен нулю:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
7. Если две строки (столбца) матрицы пропорциональны друг другу, то определитель этой матрицы равен нулю:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

8. Определитель не изменится, если к элементам любой его строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или соответствующего столбца), умноженные на некоторое число:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} {+5\text{I}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3+5 & 4+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 14 \end{vmatrix}$$
9. Если все элементы k–ой строки определителя представлены в виде сумм $a_{kj} + b_{kj}$, то определитель можно представить в виде суммы определителей, k–я строка которых состоит из элементов a_{kj} и b_{kj} соответственно:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2+1 & 5-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Свойства определителя IV

10. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6$$
11. Пусть A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда определитель произведения матриц равен произведению определителей.
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

1. К одной строке определителя прибавить другую строку, умноженную на некоторое число.
   Определитель не меняется
2. Переставить две строки местами
   и поменять знак перед определителем
3. Умножить строку на ненулевое число λ
   и перед определителем записать множитель $\frac{1}{\lambda}$

Любой определитель можно привести к треугольному виду, получив нули под диагональю.

Задача

Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ -3I \\ -4I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2-2 & 3-4 & 4-6 & 1-8 \\ 3-3 & 4-6 & 1-9 & 2-12 \\ 4-4 & 1-8 & 2-12 & 3-16 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2II \\ -7II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +III \end{matrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 40 = 160.
$$

Обратная матрица

Определение

Обратной матрицей A^{-1} по отношению к данной невырожденной квадратной матрице n–го порядка, называется матрица, которая, будучи умноженной как слева, так и справа на данную матрицу, дает единичную матрицу.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Критерий существования обратной матрицы

Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю.

Присоединенная матрица — матрица, в которой вместо каждого элемента поставлено его алгебраическое дополнение, а затем матрица транспонирована

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

Вычисление обратной матрицы

$$\det(A) \neq 0 \qquad \longrightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$$

Пример нахождения обратной матрицы I

Задача

Найти обратную матрицу к $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, если она существует.

1. Найдем определитель:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 4 - 8 - 0 - 0 = 2 \neq 0.$$

Обратная матрица существует!

2. Найдем алгебраические дополнения :

- $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Пример нахождения обратной матрицы III

- $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Пример нахождения обратной матрицы IV

- $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Составим присоединенную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. Составим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Выполним проверку

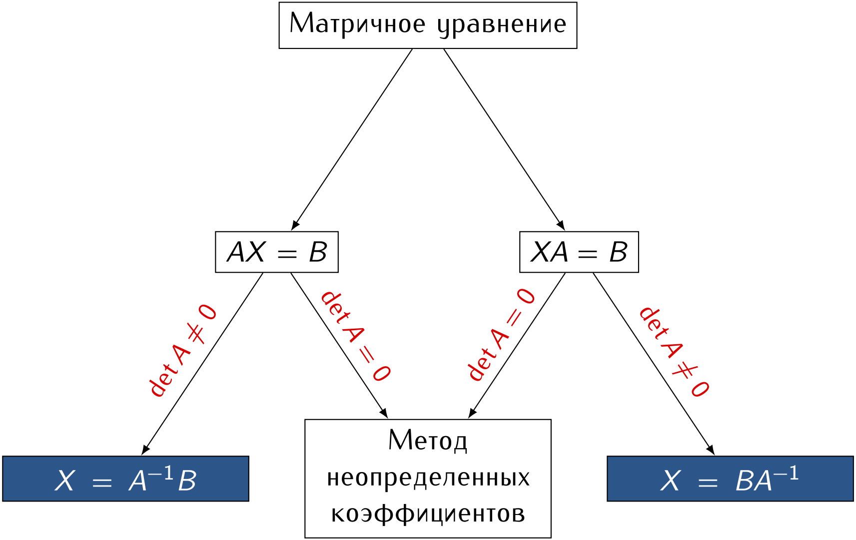
$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 0 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \\ 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \\ 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матричные уравнения

Пусть A — квадратная матрица, X — матрица неизвестных



Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

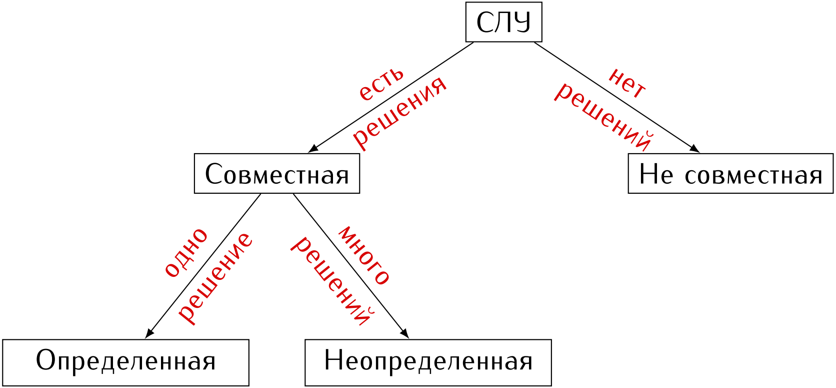
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где

- a_{ij} для всех $i = \{1, \ldots, m\}$; $b = \{1, \ldots, n\}$) — известные коэффициенты;
- $b_1, \ldots, b_n$ — известные свободные члены;
- $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные.

Решение системы — совокупность n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему обращает все ее уравнения в тождества.
Решить систему — найти множество всех ее решений.

Виды систем линейных уравнений:



Матричная форма СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$AX = B$$

- A — матрица коэффициентов $(m \times n)$;
- B — столбец свободных членов $(m \times 1)$;
- X — столбец неизвестных $(n \times 1)$.

Теорема (Матричный метод решения СЛУ)

Если в СЛУ число уравнений равно числу переменных и определитель матрицы коэффициентов

$$\Delta = \det(A) \neq 0,$$

то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение:

$$X = A^{-1}B$$

Пример матричного решения СЛУ I

Задача

Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \end{cases}$

- Представим СЛУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Матрица коэффициентов квадратная.

- Найдем определитель матрицы коэффициентов:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 2 - 9 - 2 - 4 = -8 \neq 0$$

  СЛУ имеет единственное решение

- Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

- Найдем решение матричного уравнения:

$$X = A^{-1}B =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5\cdot 2 - 3\cdot 2 + 1\cdot 8 \\ 4\cdot 2 + 4\cdot 2 - 4\cdot 8 \\ 11\cdot 2 + 5\cdot 2 - 7\cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$

Школьное решение СЛУ I

Решить СЛУ: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$

Решим систему методом сложения:

- Устраним y

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \mid \cdot\, a_{22}, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \mid \cdot\, a_{22}, \end{cases} \Leftrightarrow -\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1 a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x + a_{22}a_{12}y = b_2 a_{12}. \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1 a_{22} - b_2 a_{12},$$

Если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, то

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

Школьное решение СЛУ II

- Устраним x

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \mid \cdot\, a_{21}, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \mid \cdot\, a_{11}, \end{cases} \Leftrightarrow -\begin{cases} a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = b_1 a_{21}, \\ a_{21}a_{11}x + a_{22}a_{11}y = b_2 a_{11}. \end{cases}$$

$$(a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y = b_1 a_{21} - b_2 a_{11} \mid \cdot\, (-1),$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_1 a_{21} - b_2 a_{11},$$

Если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, то

$$y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

- Итак, если

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Теорема (правило Крамера)

Если в СЛУ число уравнений равно числу переменных и определитель матрицы коэффициентов $\Delta = \det(A) \neq 0$, *то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определитель Δ_i *получается из определителя матрицы коэффициентов* Δ *заменой* i*–го столбца на столбец свободных членов:*

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots$$

Пример правила Крамера I

Задача

Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \end{cases}$

Число переменных равно числу уравнений. Метод Крамера применим.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 2 - 9 - 2 - 4 = -8 \neq 0$$

СЛУ имеет единственное решение

Пример правила Крамера II

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 32 - 2 - 24 - 4 - 4 = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 16 + 6 - 16 - 4 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24 + 12 + 4 + 18 - 2 - 32 = -24.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Ответ: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$

После проработки лекции вы должны уметь:

- выполнять сложение, умножение, транспонирование матриц;
- вычислять определитель 2 3 и 4 порядков по определению и с помощью приведения к треугольному виду;
- решать системы уравнений матричным способом и по правилу Крамера.

Задание

Для завершения лекции вам необходимо подготовить конспект, в который должны войти:

1. Понятие матрицы и операции над матрицами: привести пример или краткую запись правила выполнения каждой операции, достаточную, чтобы восстановить метод вычисления.
2. Матрицы в экономике. Разобрать задачу 1.70 на стр. 130 Практикума [2]
3. Определение определителя. Примеры вычисления определителей 2го, 3го, 4го порядков понятые вам.
4. Ранг матрицы и его нахождение. (Стр. 29–35 учебника [1])
5. Обратная матрица и ее нахождение. Формула.
6. СЛУ. Что значит решить СЛУ. Метод Крамера решения СЛУ. Формулы. Пример.

Источники информации

- Высшая математика для экономистов.
  Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 1, с. 9–38.
- Высшая математика для экономистов. Практикум.
  Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 1, с. 6–28.

Анонс:

На следующей лекции:

- научимся решать произвольные системы линейных уравнений;
- вспомним, как строится прямая на плоскости;
- научимся решать системы линейных неравенств.