

Введение в экономико-математическое моделирование

Лекция 4. Линейные задачи-2

Исследование систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Системы линейных неравенств

канд. физ.-матем. наук, доцент Д. В. Чупраков

usr10381@vyatsu.ru



Структура лекции



Системы линейных уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где

- ▶ a_{ij} для всех $i = \{1, \dots, m\}$; $j = \{1, \dots, n\}$ — известные коэффициенты;
- ▶ b_1, \dots, b_m — известные свободные члены;
- ▶ x_1, \dots, x_n — неизвестные.

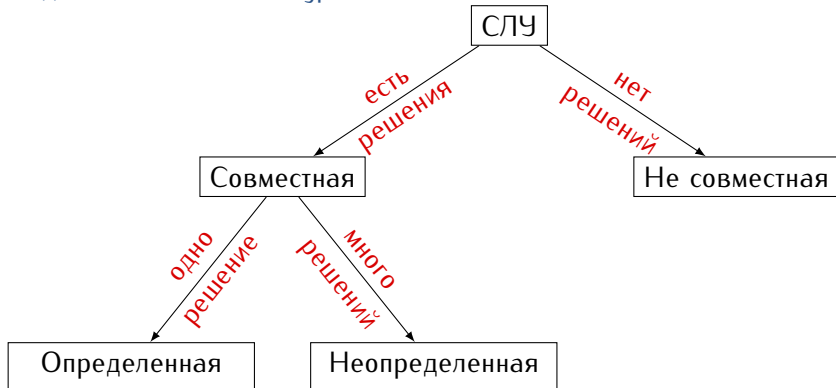


Решение СЛУ

Решение системы — совокупность n чисел c_1, c_2, \dots, c_n , таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему обращает все ее уравнения в тождества.

Решить систему — найти множество всех ее решений.

Виды систем линейных уравнений:





Элементарные преобразования СЛУ

1. Исключить из СЛУ **тривиальное** уравнение
 $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0.$
2. Умножить уравнение системы на число $\lambda \neq 0$
3. К одному уравнению системы прибавить другое, умноженное на некоторое число.
4. Переставить любые два уравнения в системе.

Теорема

Элементарные преобразования не меняют множества решений системы линейных уравнений.



Расширенная матрица

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$



$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$



Ступенчатая матрица

Ступенчатой называется матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

1. если эта матрица содержит нулевую строку, то все строки, расположенные под нею, также нулевые;
2. если первый ненулевой элемент некоторой строки расположен в столбце с номером i , то первый ненулевой элемент следующей строки должен находиться в столбце с номером большим, чем i .



Теорема

Любая расширенная матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Метод Гаусса — метод исключения переменных:

- ▶ **Прямой ход** — приведение матрицы коэффициентов к ступенчатому виду.

Осуществляется сверху вниз

- ▶ **Обратный ход** — выражение из каждого уравнения по одной переменной.

Осуществляется снизу вверх



Метод Гаусса—Жордана

Мы рассмотрим метод **Гаусса—Жордана**, позволяющий выполнять прямой и обратный ход одновременно.

На шаге i выполняются следующие действия:

1. Строки и столбцы с номерами $j \geq i$ переставляются так, чтобы $a_{ij} \neq 0$. Причем желательно, чтобы $a_{ij} = 1$.
2. Все строки с номером $k \neq i$ домножаются на λ_k так, $\lambda_k a_{ki}$ делилось на a_{ij} .
3. Строка i вычитается из всех других строк так, чтобы в i -столбце обратились в ноль все элементы кроме a_{ij} .



Метод Гаусса—Жордана. Пример I

Задача

Решить СЛУ:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$

► Составим расширенную матрицу:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 \end{array} \right] \end{array}$$



Метод Гаусса—Жордана. Пример II

► Шаг 1:

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 & -/ \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 & -2/ \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 & -/ \end{array}$$



Метод Гаусса—Жордана. Пример III

► Шаг 2:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & -8 \end{array} \right] \end{array} \quad \sim$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & -8 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} +// \\ \\ -3// \\ -3// \end{array}$$



Метод Гаусса—Жордана. Пример IV

► Шаг 3:

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ \hline 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 & \\ 0 & 0 & 12 & -12 & -12 & : 12 \\ 0 & 0 & 17 & -17 & -17 & : 17 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ \hline 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & +5/// \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 & +5/// \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -/// \end{array}$$



Метод Гаусса—Жордана. Пример V

► Шаг 4:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$



Метод Гаусса—Жордана. Пример VI

- ▶ Восстанавливаем систему:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$
- ▶ Выражаем элементы на диагонали:
$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_4 \\ x_2 = 3 - 3x_4 \\ x_3 = -1 + x_4 \end{cases}$$
- ▶ Обозначим x_4 за a и выпишем ответ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2a \\ 3 - 3a \\ 1 + a \\ a \end{pmatrix}$$



Свободные и зависимые переменные

В решении выше переменная x_4 может принимать любые значения: Такие переменные называются **свободными** или **неосновными**.

Переменные x_1, x_2, x_3 однозначно вычисляются по значениям неосновных переменных. Это **зависимые** или **основные** переменные.

Как выявить основные переменные?

В системе, полученной методом Гаусса—Жордана, основная переменная x_j

- ▶ входит в одно из уравнений системы с коэффициентом 1, а в остальные уравнения системы входит с коэффициентами, равными 0;
- ▶ в каждое уравнение входит не более одной основной переменной.



Пример основных и свободных переменных

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 6x_4 = 7 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

- ▶ x_1, x_3 — основные
- ▶ x_2, x_4 — свободные



Разрешенная система уравнений

Система линейных уравнений называется **разрешенной**, если каждое уравнение системы линейных уравнений содержит разрешенную переменную.

Разрешенная система линейных уравнений всегда совместна.

Количество базисных переменных не превосходит числа уравнений.



Виды решений СЛУ I

- ▶ Если свободные переменные объявить параметрами и перенести вправо, то получим **общее решение СЛУ**.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = a \\ x_4 = b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 5a - 6b \\ a \\ 2 - 3a + b \\ b \end{pmatrix}$$



Виды решений СЛУ II

- ▶ Если свободным переменным придать числовые значения и вычислить значения разрешенных переменных, то получим **частное решение СЛУ**.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Виды решений СЛУ III

- ▶ Если свободным переменным придать нулевые значения, то получим **базисное решение СЛУ**.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 5x_2 - 6x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_2 + x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



- ▶ Если в каждом уравнении системы есть зависимая переменная, то СЛУ совместная — имеет решения.
- ▶ Если все переменные в системе линейных уравнений разрешенные, то СЛУ определенная — имеет единственное решение.
- ▶ Если в совместной слу есть хотя бы одна свободная переменная, то СЛУ неопределенная — имеет бесконечное число решений.



Критерий несовместности

Противоречивое уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b \neq 0$$

Теорема (Критерий несовместности)

Система несовместна тогда и только тогда, когда в результате применения метода Гаусса—Жордана получено противоречивое уравнение.



Переход от базиса к базису. Пример I

Задача

Найти все базисные решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$

► Решая СЛУ методом жордана—Гаусса получаем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$



Переход от базиса к базису. Пример II

- Сделаем основной переменную x_4 а x_3 превратим в свободную переменную.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} +2/// \\ +3/// \end{array} \sim \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

- Итак, новое базисное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Переход от базиса к базису. Пример I

Для перехода к новому базису нужно выбрать свободную переменную x_j , которая станет зависимой и зависимую переменную x_i , которая станет свободной.

Затем применить шаг метода Гаусса—Жордана к элементу a_{qij}

Задача

Найти все базисные решения СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$



Переход от базиса к базису. Пример II

- Решая СЛУ методом жордана—Гаусса получаем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

- Сделаем основной переменную x_4 а x_3 превратим в свободную переменную.

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \begin{array}{l} +2/// \\ +3/// \end{array} \sim \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$



Переход от базиса к базису. Пример III

► Итак, новое базисное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Опорное решение

Базисное решение СЛУ, у которого значения переменных неотрицательны называется **опорным решением**.

- ▶ Если найдено хотя бы одно опорное решение, то все остальные могут быть найдены путем перехода от одного опорного решения к другому
- ▶ Для перехода от одного опорного решения к другому достаточно уметь выбирать разрешающий элемент.

Алгоритм выбора разрешающего элемента a_{ij} :

1. Столбец j должен содержать положительные элементы.
2. В столбце j элемент a_{ij} является разрешающим, если на нем достигается минимум отношения элементов столбца b к положительным элементам столбца j .



Переход между опорными решениями I

Задача

Найти все опорные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + -2x_2 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

►

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-2	0	1	0	2
-2	1	1	0	0	2
1	1	0	0	1	5

$+2I$
 $-I$

$(0, 0, 2, 2, 5)$

$$\frac{b_1}{a_{11}} < \frac{b_2}{a_{31}} \quad \frac{2}{1} < \frac{5}{1}$$



Переход между опорными решениями II

$$\rightarrow \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad b \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot 3 + 2III \\ + III \end{array} \end{array} \quad (2, 0, 6, 0, 3)$$

a_{32} — единственный положительный элемент.

$$\rightarrow \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad b \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{array} \quad \left(\frac{12}{3}, \frac{3}{3}, 9, 0, 0 \right) = (4, 1, 9, 0, 0)$$



Переход между опорными решениями III

- Далее в основные переменные не целесообразно переводить x_5 , так как придем к уже рассмотренному базису x_1, x_3, x_5 . Однако, можно взять x_4 и в качестве разрешающего элемента выбрать a_{24} . Получим еще не рассмотренный базис x_1, x_2, x_4 .

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} -// \\ \\ +// \end{array} \quad (4, 1, 9, 0, 0)$$

$$\frac{b_2}{a_{24}} < \frac{b_1}{a_{14}} \quad 9 < 12$$



Переход между опорными решениями IV

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{array} \right] & \left(\frac{3}{3}, \frac{12}{3}, 9, 0, 0 \right) = (1, 4, 0, 9, 0) \end{array}$$

► И так далее...



После проработки лекции вы должны уметь:

- ▶ выполнять сложение, умножение, транспонирование матриц;
- ▶ вычислять определитель 2 3 и 4 порядков по определению и с помощью приведения к треугольному виду;
- ▶ решать системы уравнений матричным способом и по правилу Крамера.



Задание

Для завершения лекции вам необходимо подготовить конспект, в который должны войти:

1. Понятие матрицы и операции над матрицами: привести пример или краткую запись правила выполнения каждой операции, достаточную, чтобы восстановить метод вычисления.
2. Матрицы в экономике. Разобрать задачу 1.70 на стр. 130 Практикума [2]
3. Определение определителя. Примеры вычисления определителей 2го, 3го, 4го порядков понятые вам.
4. Ранг матрицы и его нахождение. (Стр. 29–35 учебника [1])
5. Обратная матрица и ее нахождение. Формула.
6. СЛУ. Что значит решить СЛУ. Метод Крамера решения СЛУ. Формулы. Пример.



- ▶ Высшая математика для экономистов.
Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 1, с. 9–38.
- ▶ Высшая математика для экономистов. Практикум.
Под ред. Н. Ш. Кремера. Глава 1, с. 6–28.
- ▶ Все материалы по курсу здесь:
<https://cloud.mail.ru/public/48BX/47oESuaQQ>



Анонс:

На следующей лекции:

- ▶ научимся решать произвольные системы линейных уравнений;
- ▶ вспомним, как строится прямая на плоскости;
- ▶ научимся решать системы линейных неравенств.