第三章 习题解答

3.1 试问基态氢原子是否能吸收可见光？

解： 基态氢原子跃迁到第一激发态需能量 10.2eV, 对应的光波长 121.8nm, 基态氢原子吸收光的波长必须比 121.8nm 短, 所以氢原子不能吸收可见光.

3.2 试问氢原子处于 $n = 2$ 的能级有多少个不同的状态？并列出各个状态的量子数。

解： 可以处于状态: 2 个态 $^2S_{1/2}$ $s=1/2$，$l=0$，$j=1/2$，$m_j=\pm1/2$

2 个态 $^2P_{1/2}$ $s=1/2$,，$l=1$，$j=1/2$，$m_j=\pm1/2$

4 个态 $^2P_{3/2}$ $s=1/2$，$l=1$，$j=3/2$，$m_j=\pm3/2$，$\pm1/2$

3.3 已知氢原子的状态波函数为

$$u_{nlm}=\frac{1}{81\sqrt{6\pi}a_0^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}(3\cos^2\theta-1)$$

试通过 u_{nlm} 的主要特征的分析，确定量子数 n，l，m_l 的值。

解: 对照氢原子波函数的一般形式, 由 $\exp(-r/na_0)$可定出 n, 由 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的次方得 l 量子数，由 $e^{im\varphi}$ 得 m 量子数。由此可推得此状态的量子数

$n=3$, $l=2$, $m_l=0$

3.4 试给出氢原子中电子在基态时的平均电势。

解: 电子的电势可以写作 $U=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$，

$$<U_{10}>=\int_0^\infty R_{10}^*\left(-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)R_{10}r^2dr=\int_0^\infty\frac{4}{a_0^3}\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)r\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)dr$$

$$=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}$$

3.5 对氢原子中的 2s 和 2p 电子，试分别计算它们进入 $r<10^{-13}$cm（即在原子核内）的概率（近似计算，给出数量级）

解： $P(r)dr=R_{nl}^*R_{nl}r^2dr$

对 2s 电子，$n=2$， $l=0$。

概率：$\mathrm{P}=\int_0^r R_{20}^*R_{20}r^2dr=\int_0^r\left(\frac{1}{2a_0}\right)^3\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)r^2dr$

$$= \frac{1}{8a_0^3}\left\{4\int_0^r r^2 \exp(-\frac{r}{a_0})dr - \frac{4}{a_0}\int_0^r r^3 \exp(-\frac{r}{a_0})dr + \frac{1}{a_0^2}\int_0^r r^4 \exp(-\frac{r}{a_0})dr\right\}$$

令 $x = \frac{r}{a_0}$ $=10^{-13}/5.3\times10^{-9}=1.89\times10^{-5}$ ，是一个很小的量。

可以近似展开 $\exp(\frac{-r}{a_0}) \sim 1-\frac{r}{a_0}$，忽略高次项，

则 $P < 1/8 \times (4/3\, x^3 + \ldots) \sim 1\times10^{-15}$

对 2p 电子，n=2， l=1，

概率： $$\int_0^x R_{21}^* R_{21} r^2 dr = \int_0^x \frac{1}{24a_0^3}(\frac{r}{a_0})^2 \exp(-\frac{r}{a_0}) r^2 dr$$

$$P = \frac{1}{24a_0^3}\left[-\frac{1}{a_0}[r^4 \exp(-\frac{r}{a_0}) - 4\int_0^r r^3 \exp(-\frac{r}{a_0})dr\right]$$

$\sim 1/24 \times (1/5x^5 + \ldots) = 2\times10^{-26}$

3.6 (1) 计算氢原子 l =3 量子态的角动量矢量的大小。

(2) 给出在外磁场中（设磁场方向为 z ）此原子角动量在磁场方向的分量。

解： 角动量矢量的大小: $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = 2\sqrt{3}\hbar$.

角动量在磁场方向的分量: $L_z = m_l\hbar$， $m_l = 0, \pm1, \pm2, \pm3$

3.7 估计跃迁时发射波长为 500 nm 光子的原子激发态的寿命，设电偶极距振幅 d～10^{-8} cm

解： $\lambda_{if} = \frac{16\pi^3\nu^3}{3\varepsilon_0 hc^3}\left|\vec{P}_{if}\right|^2 = 5.8\times10^7$，ν＝$6\times10^{14}$ 1/s

$$\tau = \frac{1}{\lambda_{if}} ＝1.7\times10^{-8}\ \text{s}$$

3.8 氢原子处于 n =3 的能态，假设由 n =3 →n =2 和 n =3 →n =1 跃迁的电偶极矩是相同的，试估算发射谱线的相对强度。

解: 由于跃迁几率 $\lambda_{if} = \frac{16\pi^3\nu^3}{3\varepsilon_0 hc^3}\left|\vec{P}_{if}\right|^2$

$$\frac{\nu_{32}}{\nu_{31}} = \frac{E_{32}}{E_{31}} = \frac{5}{32} \quad 所以 \quad \frac{\lambda_{if32}}{\lambda_{if31}} = \frac{5^3}{32^3}$$

辐射强度: $I \propto \lambda_{if} \cdot N_k \cdot E_{if}$

所以强度比: $\dfrac{I_{32}}{I_{31}} = (\dfrac{5}{32})^4 = 6 \times 10^{-4}$

3.9 试求 T ＝300 K 时处于主量子数 $n = 2$ 状态的氢原子与基态的氢原子的相对数目。

解: 考虑在热平衡时原子的分布可用玻尔兹曼分布: $\dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{\exp(-E_2/kT)}{\exp(-E_1/kT)}$

而且 E_2=-3.4eV, E_1=-13.6eV

$$\frac{N_2}{N_1} = 9.16 \times 10^{-18}$$

若考虑 n =2 和基态的权重因子时，有 $g_2/g_1 = 4$，所以 $N_2/N_1 = 4(9.16\times10^{-18}) = 3.66 \times 10^{-17}$。

3.10 在原子的两个激发态之间跃迁的结果，产生λ =532 nm 的光谱线。原子在这两个激发态的平均寿命为 1.2×10^{-8} s 和 2.0×10^{-8} s ，试根据这条谱线的自然宽度$\Delta\lambda$。

解： 谱线的自然宽度可以认为由相应能态宽度的均方根给出

$\Gamma = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} = 6 \times 10^{-8}\ eV$,

两个激发态能量差: $E = \dfrac{hc}{\lambda} = 2.33eV$，

$\Delta\lambda = \dfrac{hc\Gamma}{E^2} = 1.4 \times 10^{-5}\ nm$。

3.12 氢原子 2p 能级的电偶极辐射的平均寿命是 1.6 ns，试估计一价氦离子的 2p 能级的寿命。

解： 由于 $\lambda_{if} = \dfrac{16\pi^3\nu^3}{3\varepsilon_0 hc}\left|\vec{P}_0\right|^2$

类氢离子能级的能量正比于核电荷数的平方，因此$\nu_{He} = 4\nu_H$.

类氢离子的电子轨道半径与核电荷数成反比, 因此 $r_{He} = 1/2 r_H$，所以氦离子的电偶极距是氢的一半。所以

$$\lambda_{ifHe} = 16\lambda_{ifH}$$

寿命: $\tau_{He} = 1/16\tau_H$

$$\tau_{He} = 0.1ns$$

3.13 在施特恩－格拉赫的所实验里，窄银原子束通过不均匀磁场而射到屏上。已知磁场区长度 a = 10 cm，屏和磁场边缘的距离 b = 20cm，v = 300 m/s。试问当磁场梯度值为多大时，线束窄屏上的裂距为 2mm？

解：银原子受力: $$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

银原子经过 a 段用时: $$t_a = \frac{a}{v} = 0.33\times10^{-3}s$$

$$\upsilon_\perp = t\,(F_z / m)$$

$$\frac{\upsilon_\perp}{\upsilon} = \frac{0.1}{25} = 4\times10^{-3}$$

Ag: A＝108， $$F_z = \upsilon_\perp \times M / t\ ,$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{F_z}{\mu_z} = \frac{4\times10^{-3}\times300\times108\times1.66\times10^{-27}}{t\times0.927\times10^{-23}}$$

$$= 69.7\ T/m$$

3.14 对于 l =1 和 s =1/2，计算 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s}$ 的可能值。

解： l =1, s =1/2, j =3/2 或 1/2

$$\vec{s}\cdot\vec{l} = \frac{j^2 - s^2 - l^2}{2}$$

j = 3/2 时, $$\vec{s}\cdot\vec{l} = \hbar^2$$

j =1/2 时, $$\vec{s}\cdot\vec{l} = -\frac{\hbar^2}{2}$$

3.15 计算氢原子 2p 态时电子轨道运动在原子核处所产生的磁场。

解：$n = 2$，$l = 1$，$r = 4a_0$，$L = \sqrt{2}\hbar$

$$B = \frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2 r^3} L$$

$$= 0.138T$$

3.16 试计算氢原子莱曼线系第一条谱线的精细结构裂距Δλ。

解： 氢原子 n =1 的能级不分裂，n =2 的能级分裂成两个能级.

由于 $$\Delta E_{n,j} = -\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} E_n \left[\frac{3}{4} - \frac{n}{j+1/2}\right]$$

能量裂距: $$\Delta E = \Delta E_{2,1/2} - \Delta E_{2,3/2} = 4.5\times10^{-5}eV$$

$$\Delta\lambda = \frac{hc}{E_{2,1/2\to1}} - \frac{hc}{E_{2,3/2\to1}} = \frac{hc(\Delta E_{2,1/2} - \Delta E_{2,3/2})}{E_{2\to1}{}^2} = 5.4\times10^{-13}m$$

$= 5.4\times10^{-4}$ nm。

其中 $E_{2\to1}$ 是氢原子 n=2 和 n=1 能级的能量差.

3.17 试确定氢原子的朗德因子值的变化范围。

解：
$$g = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}$$

对氢原子, s=1/2，j= l+1/2 或 j = l-1/2

j=l+1/2 时,
$$g = 1 + \frac{1}{2(l+1/2)}$$

当 l = 0 时， j = 1/2， g 有最大值 2；最小值趋近于 1

J = l-1/2 时,
$$g = 1 - \frac{1}{2(l+1/2)}$$

当 l = 1 时， j =1/2，g 有最小值 2/3；最大值趋近于 1
综上所述, 氢原子的 g 因子取值范围是[2/3,1)和(1,2]。即在 2/3 和 2 之间，但 g = 1 除外。

3.18 计算处于 $^2D_{3/2}$ 态原子的朗德因子及实验可测得的磁矩值。

解： $^2D_{3/2}$ 态的量子数为: j =3/2，l =2，s =1/2

$$g = 4/5$$

实验测得的磁矩值： $\mu_{jz} = g_j \cdot m_j \cdot \mu_B$

m_j =1/2 时，$\mu_{jz} = 0.37\times10^{-23} J\cdot T^{-1}$，$m_j$ =3/2 时，$\mu_{jz} = 1.11\times10^{-23} J\cdot T^{-1}$.

3.19 已知 s =1/2，j = 5/2，g = 6/7，试写出原子态，且以符号表示。
解： s =1/2，j = 5/2，g = 6/7, 利用 g 因子的计算公式列方程可以算出 l =3.

原子态是: $^2F_{5/2}$

3.20 试计算氢原子基态时的磁矩。

解：氢原子基态时，$g_j = 2$, j =1/2, $m_j = 1/2$。

$$\mu_{jz} = \mu_B$$

3.21 试求 ^{208}Pb（Z= 82）的μ 原子 2p 能级的精细结构裂距。（已知μ 子的质量 m_μ =207m_e ）
解：这种奇异原子的能量可以表示为:

$$E_n = -\frac{Z^2\alpha^2\mu c^2}{2n^2}$$

精细结构的能量修正为：

$$\Delta E_n = -\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} E_n (\frac{3}{4} - \frac{n}{j+1/2})$$

对于 j =3/2，j =1/2 的两能级的裂距为:

$$\Delta E = -\frac{\alpha^2 Z^2}{2n} E_n = \frac{\alpha^4 Z^4 m_\mu c^2}{4n^3} = 0.42\,\mathrm{MeV}$$

3.22 当 n 和 l 增加时，双重态的裂距迅速减小。试问在氢原子中 2p 双重态的裂距与 3d 双重态的裂距之比值为多大？

解：氢原子 2p 双重态和 3d 双重态的裂距可以表示为:

$$\Delta E = \frac{\alpha^4 mc^2}{2n^3} (\frac{1}{j_1 + 1/2} - \frac{1}{j_2 + 1/2})$$

对 2p 态：n=2，j_1 =1/2，j_2 = 3/2

对 3d 态,：n=3，j_1=3/2，j_2 = 5/2

2p 双重态和 3d 双重态的裂距之比为 162:16 = 10.1

3.23 考虑氢原子基态和 n =2 的激发态：

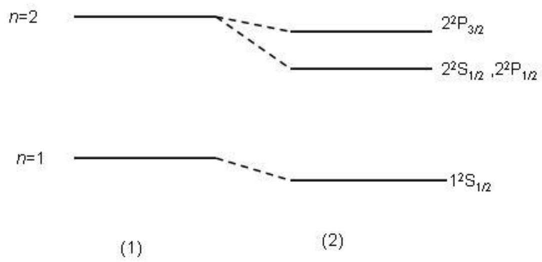
(1) 不考虑精细结构，画出它们的能级图；

(2) 考虑相对论效应后画出新能级且表明其光谱符号（n,l,j）；

(3) 计算相对论修正后引起的能级移动和双层能级的间隔；

(4) 考虑兰姆移位后对能级会有哪些影响？

解：(1)，(2)



(3) 能级移动：n =2 ，

$$\Delta E_n = -\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} E_n (\frac{3}{4} - \frac{n}{j+1/2})$$

n=2, j=3/2: $\Delta E'_{2,1} = -1.13\times10^{-5} eV$

n=2, j=1/2: $\Delta E'_{2,0} = -5.66\times10^{-5} eV$

n=1, j=1/2: $\Delta E'_{1,0} = -1.81\times10^{-4} eV$

双层能级（$^2P_{3/2}$，$^2P_{1/2}$ ）之间的间隔为 4.5×10^{-5} eV；.

(4) 考虑到兰姆移位后, $^2S_{1/2}$ 的能级要比 $2^2P_{1/2}$ 的能级高。

3.24 一束自由电子经过一个 B =5000 Gs 的均匀磁场，试问自旋“平行”和“反平行”于磁场 **B** 的电子的能量相差多少？哪种电子的能量较大？

若用与上述能量差相应的光子照射电子，会引起电子的“自旋反转”引起。此现象称作“电子自旋共振”。试求能引起共振的光子的波长和频率。

解：由磁场和电子相互作用产生的能量:

$$\Delta E = m_j g_j \mu_B B$$

$$= 2.89\times10^{-5}\ \mathrm{eV}$$

平行和反平行的电子能量差:

$$2\Delta E = 5.8\times10^{-5} eV$$

引起共振的光子的频率和波长为:

$$v = \frac{E}{h} = 1.4\times10^{10} Hz$$

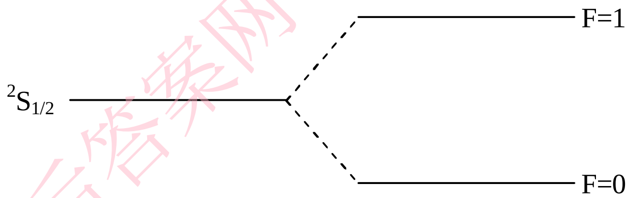
$$\lambda = \frac{hc}{E} = 2.1cm$$

3.25 由于核磁矩的超精细作用使氢原子基态的能级发生劈裂。试给出它的能级图，并表面它的总角动量量子数 F。

解：总角动量 $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$，可能取值为:

$F = (I+J)$，$(I+J-1)$，⋯，$|I-J|$

氢原子的基态 J=1/2，氢原子核自旋 I=1/2，所以 F =1 或 0。



3.26 (1）以一简单模型来估计氢原子基态时电子运动所产生的磁场：设电子作圆轨道运动，轨道半径为 r，运动的速率为 v，试计算它在质子处所产生的磁场 $\boldsymbol{B}_e$。

(2) 质子的磁矩和它的自旋方向谱线，磁矩数值为 μ =2.8μ_N ，$\mu_N = \dfrac{eh}{2M_p}$，M_P是质子的质量。试证明使质子自旋反向所需能量为

$$\Delta E = 2.8\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{h\upsilon}{M_p c^2 r^2}$$

并估算氢原子基态时，此能量的大小。

(3) 如果氢原子基态超精细能级发生“自旋反转”跃迁，试估计其谱线的波长。

解： (1) 电子可以形成一个围绕质子的环形电流，电流中心的磁场:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Ze}{m_e r^3}\cdot\vec{r}\times m_e\vec{v}$$

(2) 质子在磁场中的附加能量:

$$\Delta E = -B\mu_p = \frac{-1.4e^2 h\upsilon}{4\pi\varepsilon_0 M_p c^2 r^2}$$

为使质子磁矩反向，需要补充 $2|\Delta E|$ 的能量，

即 $$E = \frac{2.8e^2 h\upsilon}{4\pi\varepsilon_0 M_p c^2 r^2}$$

当氢原子处于基态时，以玻尔半径代入，这个能量大约为 $2.2\times10^{-6}\ eV$;

(3) 谱线的波长:

$$\lambda = hc / E = 0.56\ m。$$

3.27 假定原子核是一个半径为 R，电荷均匀分布的球，试求由体积效应引起的能量修正。

假定原子核是一个电荷均匀分布的球，球半径为 R，则在 r 处的电势

$$V(r) = \begin{cases} V_0(r) = -\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Ze^2}{R}(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{r^2}{2R^2}), & 0 \le r \le R \end{cases}$$

于是考虑体积效应所引起的能量修正

$$\Delta E = \int_0^\infty \Psi^* [V(r) - V_0(r)]\psi \times 4\pi r^2 dr$$

假设ψ 在原子核范围内是常数，则

$$\Delta E = |\Psi(0)|^2 4\pi \int_0^R [V(r) - V_0(r)] r^2 dr = \frac{2\pi}{5}|\Psi(0)|^2 \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} R^2$$

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{Z^3}{n^3 a_0^3 \pi}, \qquad \Delta E = \frac{2\pi}{5}\frac{Z^3}{a_0^3\pi}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}R^2 。$$