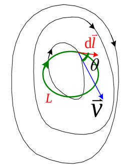
§ 1-5 静电场的环路定理

§ 1.5.1 静电场的环路定理

一、矢量场的环量



$$\oint_L \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\oint_L v\mathrm{d}l\cos\theta=\begin{cases}\oint_L v_l \mathrm{d}l\\ \oint_L v\mathrm{d}l_v\end{cases}$$

矢量 $\vec{A}$沿闭合环路L（环路方向由人为指定）的环量：

$$\Gamma_A \equiv \oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

二、静电场的环量 $\Gamma_E = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$

1. 单个点电荷产生的场的环量为零

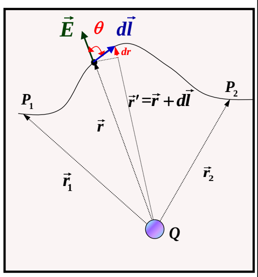
$$\Gamma_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} Edl\cos\theta$$

$$=\int_{P_1}^{P_2} Edr$$

$$=\int_{P_1}^{P_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{\Gamma_{E,\text{环路}}=0}$$



2. 带电体系产生的静电场的环量为零

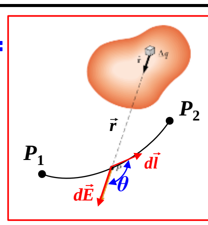
如果场源电荷不是点电荷q，而是一个点电荷系，则：

$$\Gamma_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\right)\cdot d\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}_i\cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{i1}}-\frac{1}{r_{i2}}\right)$$

$$\boxed{\Gamma_{E,\text{环路}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_i}\right)=0}$$

若场源电荷是一个带电体，则：



$$\Gamma_E = \int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2}\left(\iiint_V d\vec{E}\right)\cdot d\vec{l}$$

$$=\iiint_V\left(\int_{P_1}^{P_2} d\vec{E}\cdot d\vec{l}\right)$$

$$=\iiint_V\left(\int_{P_1}^{P_2}\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{l}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V dq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{\Gamma_{E,\text{环路}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V dq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=0}$$

三、静电场的环路定理

环路定理：静电场的环量为零.

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

静电场是无旋场、保守场。

说明：

1、“静电场的环量等于零”源于静电场是有心力场的性质，所有的有心力场，其环量都等于零；

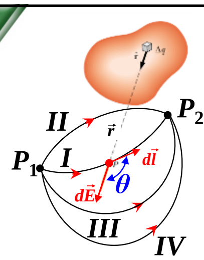
2、“环量等于零”是静电场的一个约束方程，表明静电场的三个分量不是相互独立的，可以用于判断电场是不是静电场。

请判断并给出理由：$\vec{E}=y\vec{i}+2x\vec{j}$ 是不是静电场？

§ 1.5.2 电势与电势差

一、电势差和电势

1. 电势差



前面的推导过程给出：

$$\Gamma_{P_1P_2}=\int_{P_1}^{P_2}\vec E\cdot d\vec l$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V dq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

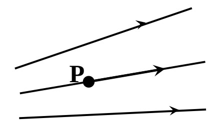
$$\Gamma_{P_1P_2}=\int_{P_1,I}^{P_2}\vec E\cdot d\vec l=\int_{P_1,II}^{P_2}\vec E\cdot d\vec l=\int_{P_1,III}^{P_2}\vec E\cdot d\vec l=\int_{P_1,IV}^{P_2}\vec E\cdot d\vec l=\cdots$$

定义： $U_{P_1P_2}\equiv\int_{P_1}^{P_2}\vec E\cdot d\vec l$ 为点P_1、P_2间的电势差。

2. 电势

点P与无穷远处之间的电势差定义为点P的电势.

$$U_P\equiv\int_P^{\infty}\vec E\cdot d\vec l$$



说明：1)顺着电力线的方向是电势降落的方向；

2)在此定义下，无穷远处电势为0；

3)电势和积分路径无关，是空间点的函数。

$U=U(\vec r)$　电势U是标量场

3. 电势差是两点的电势之差

$$U_{P_1P_2}=\int_{P_1}^{P_2}\vec E\cdot d\vec l=\int_{P_1}^{\infty}\vec E\cdot d\vec l+\int_{\infty}^{P_2}\vec E\cdot d\vec l$$

$$=\int_{P_1}^{\infty}\vec E\cdot d\vec l-\int_{P_2}^{\infty}\vec E\cdot d\vec l=U_{P_1}-U_{P_2}$$

$$\boxed{U_{P_1P_2}=U_{P_1}-U_{P_2}}$$

$$\boxed{U_{P_1P_2}=-(U_{P_2}-U_{P_1})=-\Delta U}$$

电势差是电势增量的负值!

4. 零电势点

1）原则上，零电势点可以任意选择,零电势点的不同会影响空间各点电势的数值大小，但不会影响两点间的电位差

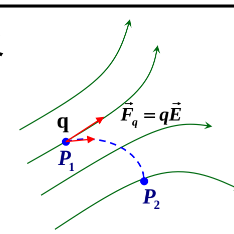
2）选取无穷远处为电势零点会给理论分析带来方便：在无穷远处电场强度的大小趋于零，若$U_\infty=0$，则电场中各点的电势可以方便地确定。

3）若电荷分布在无限大区域时，无穷远处电场强度的大小不一定趋于零，若取$U_\infty=0$，则可能导致电场中各点的电势无法确定。

4）不可以同时指定场中两点作为零电势点。

5. 电势差、电势的物理意义

电荷q从P_1点运动到P_2点，电场力做功：



$$A=\int_{P_1}^{P_2}\vec F_q\cdot d\vec l=\int_{P_1}^{P_2}q\vec E\cdot d\vec l$$

$$=q\int_{P_1}^{P_2}\vec E\cdot d\vec l=qU_{P_1P_2}$$

$$U_{P_1P_2}=\frac{A_{P_1P_2}}{q}$$

电势差是单位正电荷从一点运动到另一点电场力做功的数值大小。

类似地，某点的电势是单位正电荷从该点运动到无穷远处时电场力做功的数值大小。

二、带电体系的电势

1.点电荷的电势

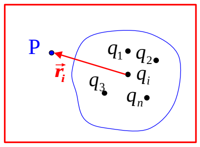
$$\boxed{U_P=\int_P^\infty \vec E\cdot d\vec l=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}\quad \begin{cases} q>0,\ U_P>0 \\ q<0,\ U_P<0 \end{cases}$$

2.点电荷系的电势

$$U_P=\int_P^\infty \vec E\cdot d\vec l=\int_P^\infty\left(\sum_{i=1}^n \vec E_i\right)\cdot d\vec l$$

$$=\sum_{i=1}^n\left(\int_P^\infty \vec E_i\cdot d\vec l\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^n\frac{q_i}{r_i}$$

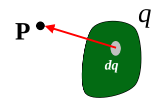
$$=\sum_{i=1}^n U_i$$



3. 连续带电体的电势：

$$dU_P=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{U_P=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

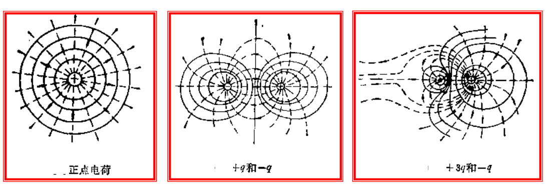


对于线分布、面分布、体分布的带电体，dq分别取： $dq=\lambda dl,\quad dq=\sigma ds,\quad dq=\rho dV$

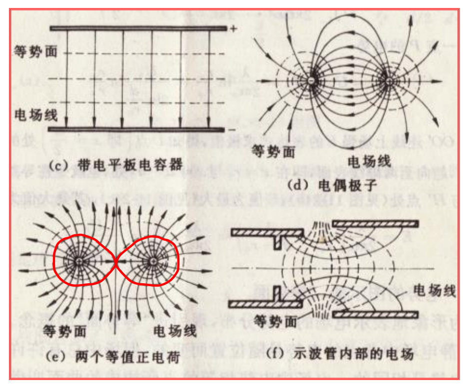
电势的叠加原理：
点电荷系的电场中某点的电势，等于各个点电荷单独存在时在该点所产生电势的**代数和**。

三、 等势面

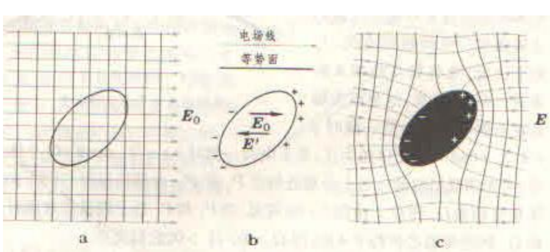
电势是标量场，标量场常用等值面来进行形象的几何描述。电势的等值面称为**等电势面**，或简称**等势面**。在同一等势面上，电势处处相等。



点电荷系统的等势面（实线）和电场线（虚线）



例：**静电平衡导体**表面是等势面，导体是等势体。

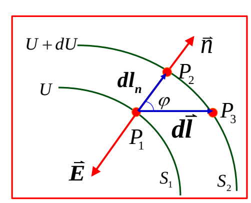


四、场强与电势的微分关系

1. 电势梯度

$\vec l$方向上的方向导数：$\dfrac{dU}{dl}$

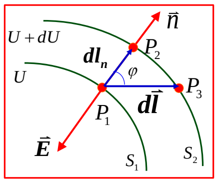
$\vec n$ 垂直于等势面：



$$dl=\frac{dl_n}{\cos\varphi}\qquad \therefore\ \frac{dU}{dl}=\frac{dU}{dl_n}\cos\varphi$$

电势梯度：

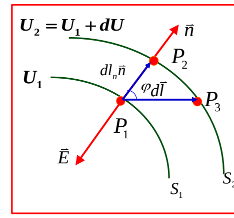
$$\boxed{\mathrm{grad}U \equiv \frac{dU}{dl_n}\vec{n}}$$



电势梯度是一个矢量，方向与该点电势**增加率**最大的方向相同，大小等于沿该方向上的电势**增加率**。

电势梯度是是电场强度的负方向。

2. 场强与电势的微分关系



$$d\vec l = dx\,\vec i + dy\,\vec j + dz\,\vec k$$

$$\vec E = E_x\vec i + E_y\vec j + E_z\vec k$$

$$dU = U_2 - U_1 = -\vec E\cdot d\vec l$$

$$= -(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz)$$

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec E = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec i + \frac{\partial U}{\partial y}\vec j + \frac{\partial U}{\partial z}\vec k\right) \equiv -\nabla U}$$

在不同的坐标系中，梯度的计算公式：

在直角坐标系中： $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat x + \frac{\partial u}{\partial y}\hat y + \frac{\partial u}{\partial z}\hat z$

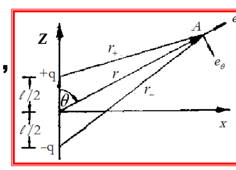
在柱坐标系中： $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\hat r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\hat\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\hat z$

在球坐标系中： $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\hat r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\hat\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\hat\varphi$

五、常见带电体系的电势分布

[例] 求电偶极子的电势及电场的分布。

[解]其电场和电势分布相对 z 轴旋转对称，与角φ无关，而与 r 和 θ有关,有:



$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right),$$

$$r_+ = \left[r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - rl\cos\theta\right]^{1/2} = r\left[1 + \left(\frac{l}{2r}\right)^2 - \frac{l}{r}\cos\theta\right]^{1/2}$$

因为 $l \ll r$， $\therefore r_+ \approx r - \frac{l}{2}\cos\theta$ 同理 $r_- \approx r + \frac{l}{2}\cos\theta.$

故： $U(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r-(l/2)\cos\theta} - \frac{1}{r+(l/2)\cos\theta}\right] \approx \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

由 $\vec{\mathbf p} = ql\hat z$ ，可将上式写成： $U(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}$

球坐标下：

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^3} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3},$$

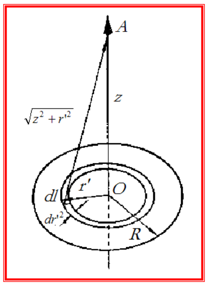
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\sin\theta}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3},$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0.$$

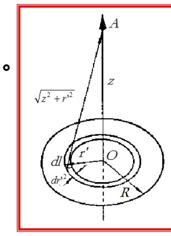
由从球坐标下得到的结果，电偶极子的电场可以写成如下矢量形式：

$$\vec{\mathbf E} = -\frac{\vec{\mathbf p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{\mathbf p}\cdot\vec{\mathbf r})}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\vec{\mathbf r}$$

[例] 求面电荷密度为 σ_e 、半径为R的均匀带电薄圆盘轴线上的电势与电场分布。



[解]如右图所示，圆盘轴线上任一点A与盘心O的距离为$OA = z$。以O为圆心，取半径为r'，宽度为dr' 的圆环，环上取一小段dl：



$$dl = r'd\phi$$

该小段电荷在点A产生的电势为：

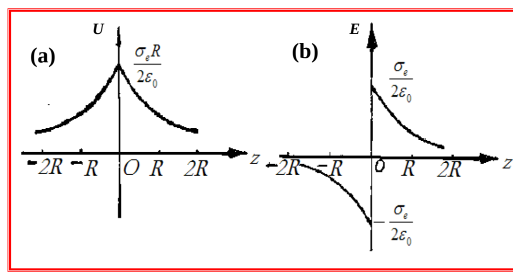
$$dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e dr'dl}{(r'^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e r'dr'd\phi}{(r'^2+z^2)^{1/2}}$$

将上式对 r' 和 φ 积分得轴上的电势分布.

$$U(z) = \frac{\sigma_e}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r'dr'}{(r'^2+z^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2}-|z|)$$

$$E_z = \begin{cases} \dfrac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right], & (z>0) \\ -\dfrac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left[1+\dfrac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right], & (z<0) \end{cases}$$

电势与电场随z变化的曲线，分别见图(a)和(b)。



均匀带电圆盘轴线上的电势和电场强度的分布

【例题】：计算均匀带电球体内外的电势。

【解】：设球面半径R，电量Q

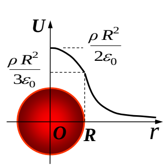
球外（$r > R$）： $E_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

球内（$r \le R$）： $E_2 = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

$$U_2 = \int_r^R \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_r^R \frac{rdr}{R^3} + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\right)$$

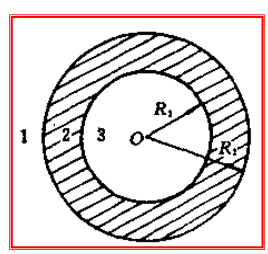
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R^2-r^2}{2R^3}+\frac{1}{R}\right) = \frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$



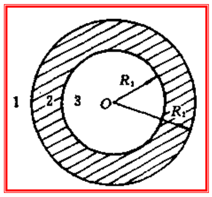
球面电荷U-r线

均匀带电球面内外电势的分布如图 U-r 曲线。

[例] 求电荷密度为 ρ_e 、内外半径分别为R_1和R_2的均匀带电球壳的电场与电势分布。



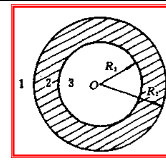
[解] 球壳将空间分隔成1、2、3三个区域。以O为球心，以r为半径作球面为高斯面，在三个区域中分别用高斯定理可求得：



$$E=\begin{cases} =Q/4\pi\varepsilon_0 r^2=\rho_e(R_2^3-R_1^3)/3\varepsilon_0 r^2, & (r\ge R_2) \\ =\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\dfrac{4\pi}{3}(r^3-R_1^3)\rho_e\right]=\dfrac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\left(r-\dfrac{R_1^3}{r^2}\right), & (R_1\le r\le R_2) \\ =0. & (r\le R_1) \end{cases}$$

$$U_1=-\int_\infty^r \vec{E}_1\cdot d\vec{l}=-\frac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0}\int_\infty^r\frac{dr}{r^2}$$

$$=\frac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r},\qquad (r\ge R_2)$$



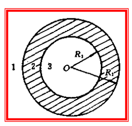
$$U_2=-\int_\infty^{R_2}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}-\int_{R_2}^{r}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}=U_1(R_2)-\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\int_{R_2}^{r}\left(1-\frac{R_1^3}{r^3}\right)rdr$$

$$=\frac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2}-\frac{\rho_e(r^2-R_2^2)}{6\varepsilon_0}-\frac{\rho_e R_1^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$=\frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-\frac{2R_1^3}{r}-r^2\right),\qquad (R_1\le r\le R_2);$$

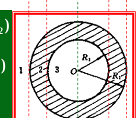
$$U_3=-\int_\infty^{R_2}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}-\int_{R_2}^{R_1}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}-\int_{R_1}^{r}\vec{E}_3\cdot d\vec{l}$$

$$=U_2(R_1)=\frac{\rho_e(R_2^2-R_1^2)}{2\varepsilon_0},\qquad (r\le R_1).$$

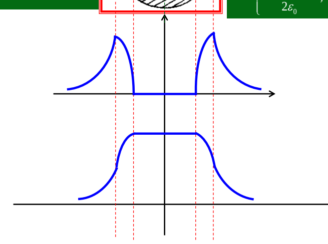


U_3是与 r 无关的恒量，可知球壳内空腔的电势处处相等。

$$E=\begin{cases} \rho_e(R_2^3-R_1^3)/3\varepsilon_0 r^2, & (r\ge R_2) \\ \dfrac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\left(r-\dfrac{R_1^3}{r^2}\right), & (R_1\le r\le R_2) \\ 0. & (r\le R_1) \end{cases}$$



$$U_2=\begin{cases} \dfrac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r}, & (r\ge R_2) \\ \dfrac{\rho_e}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-\dfrac{2R_1^3}{r}-r^2\right), & (R_1\le r\le R_2) \\ \dfrac{\rho_e(R_2^2-R_1^2)}{2\varepsilon_0}, & (r\le R_1) \end{cases}$$



•计算电场、电势的方法：

1. 由叠加原理 $U=\int dU$ 计算。

由 $\vec{E}=-\nabla U$ 计算电场强度。

2. 对于场强具有对称性，先由高斯定理方便求出 $\vec{E}$ ，再由积分关系 $U_a=\int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$ 求得电势

本节作业

1.23（*）
1.24（*）
1.25
1.27
1.29
1.30
1.31

§ 1.5.3 带电粒子在电场中的运动

带电粒子质量为m，静电场E

运动方程： $m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=q\vec{E}(t)$

$$\begin{cases} ma_x = qE_x \\ ma_y = qE_y \\ ma_z = qE_z \end{cases}$$

带电粒子在电场中的运动特点及应用

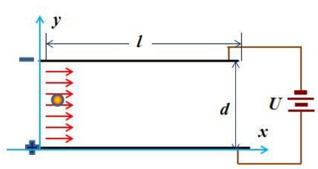
若只有电场力作用，电场是保守场，有势场，运动过程中能量守恒，非相对论情况下：

$$\frac{1}{2}mv^2+qU=\frac{1}{2}mv_0^2+qU_0=\text{常数}$$

$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{2(qU_0-qU)}{m}}=\sqrt{v_0^2+\frac{2q\Delta U}{m}}$$

带电粒子在电场中的运动特点及应用

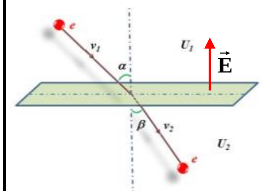
考虑匀强电场，设电场沿y方向,初速度沿x方向。



带电粒子做类平抛运动

带电粒子在电场中的运动特点及应用

等势面上电子的“折射”、“会聚”现象



粒子水平方向不受力，速度不变：

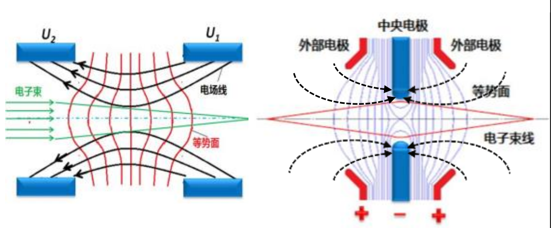
$$v_1\sin\alpha=v_2\sin\beta$$

若$U_1<U_2$, $v_1<v_2$, $\beta<\alpha$, 电子发生“会聚”现象。

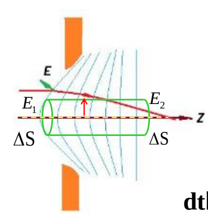
逆着电场线朝向等势面的法线偏转

带电粒子在电场中的运动特点及应用

静电透镜



电子透镜的焦距



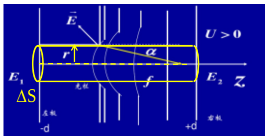
取图示柱坐标系，设垂直于z轴的半径方向电场为E_r，则有

$$F_r=-eE_r$$

dt时间内，电子的动量增量：

$$dp_r=F_r dt=-eE_r\frac{dz}{v_z}$$

$$\Delta p_r = \int_{起点}^{终点} dp_r = -e\int_{-d}^{d}\frac{E_r dz}{v_z}$$



在远离开孔处，电场均匀，电子初速度沿z方向，数值很大：

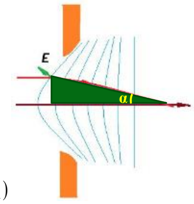
$$\Delta p_r = -e\int_{-d}^{d}\frac{E_r dz}{v_z} = -\frac{e}{v_z}\int_{-d}^{d}E_r dz$$

取图示高斯面，外场满足：

$$2\pi r\int_{-d}^{d}E_r dz = -\pi r^2\left(E_2 - E_1\right)$$

$$\int_{-d}^{d}E_r dz = -\frac{r}{2}\left(E_2 - E_1\right)$$

$$\Delta p_r = \frac{er}{2v_z}\left(E_2 - E_1\right)$$



电子束通过圆孔后偏折角：

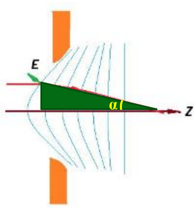
$$\tan\alpha = \frac{v_r}{v_z} = \frac{p_r}{p_z} = \frac{\frac{er}{2v_z}\left(E_2 - E_1\right)}{mv_z} = \frac{er}{2mv_z^2}\left(E_2 - E_1\right)$$

电子透镜的“焦距”f： $\tan\alpha = \frac{r}{f}$

$$f = \frac{r}{\tan\alpha} = \frac{2mv_z^2}{e\left(E_2 - E_1\right)} = \frac{4E_K}{e\left(E_2 - E_1\right)}$$

“焦距”从电子“偏折”处开始算。

薄透镜近似：薄透镜情况下，电子束在圆孔附近开始偏折，焦距从圆孔中心开始算。



只要电子能量相同，离轴不同距离的电子束线可以会聚到轴上一点，实现电子束聚焦。

专题讨论（一）

电势零点选择

【例】： 求均匀长直线电荷电势的分布。

【解】：设电荷线密度为λ，任一点P距线电荷r远，见图。

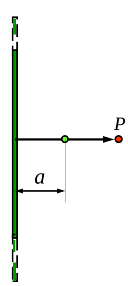
如设$U_\infty=0$

$$U = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r} = ? = \infty（发散）$$

若设$U_0=0$

$$U = \int_r^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^0 \frac{dr}{r} = ? = \infty（发散）$$

怎样选择电势零点？



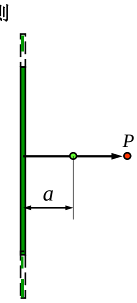
直线电荷的电势

可设其他任意处电势为零，例如令$U_a=0$，则

$$U = \int_r^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}$$

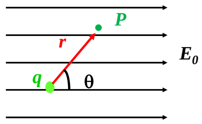
常常取$a=1$，则 $U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}$

当 $r \le 1$， $U \ge 0$
$r > 1$， $U < 0$



直线电荷的电势

在均匀电场E_0中放入一个点电荷q，则空间电势如何？



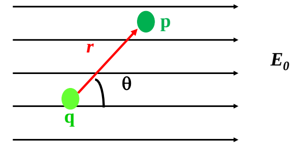
对于均匀电场，不能取无穷远处为零电势，
对于点电荷，不能取电荷本身位置（坐标原点）为零电势

对于任意一点p，
若取原点为零电势，均匀电场单独存在时的电势为：

$$U_1 = -E_0 r\cos\theta$$

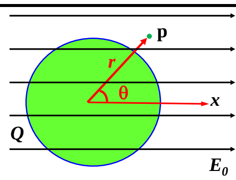
若取无穷远处为零电势，点电荷单独存在时的电势为：

$$U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$U = U_1 + U_2 + U_0 = -E_0 r\cos\theta + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + U_0$$

均匀外场中放入一半径为R，带电量为Q的导体球，球外任意一点的电势为：



$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_0$$

$$U_1 = -E_0 r\cos\theta,\quad \text{原点零电势}$$

$$U_2 = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r \ge R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r \le R \end{cases}$$

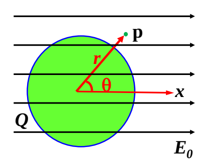
（无穷远零电势）

$$U_3 = \begin{cases} \dfrac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta, & r \ge R \\ E_0 r\cos\theta, & r \le R \end{cases}$$

(无限远和原点均可)

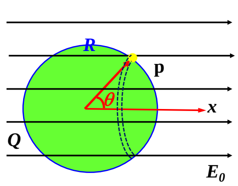
$$U = \begin{cases} -E_0 r\cos\theta + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta + U_0, & r \ge R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + U_0, & r \le R \end{cases}$$

除无限远处外，其它点均可以作为电势零点。当电势零点确定后，U_0就确定，空间各点的电势随之确定。



均匀外场E_0中导体球的感应电荷的电势

内部总电场为0，感应电场 -E_0，感应电荷关于x轴旋转对称分布，设为$\sigma(\theta)$

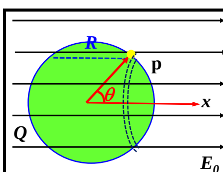


可以证明 $\sigma(\theta)=3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$，导体球在球外的电场分布等价于球心处的电偶极子。

电偶极矩：

$$p = 4\pi R^3\varepsilon_0 E_0$$

$$U_3 = \begin{cases} \dfrac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta, & r \ge R \\ E_0 r\cos\theta, & r \le R \end{cases}$$



假设静电平衡通过迭代过程实现，当刚放入场中，导体球上没有感应电荷分布，球表面只有外电场，电场法向分量：

$$\vec{E}_{n0} = E_0\cos\theta\hat{r}$$

产生感应电荷：

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

感应电荷的电偶极矩：

$$\vec{p}_0 = \int_0^{\pi/2}(2R\cos\theta\hat{x})(\sigma_0\cdot 2\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta)$$
$$= \hat{x}4\pi R^3\varepsilon_0 E_0\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3\varepsilon_0 E_0\hat{x}$$

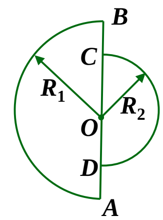
该感应电偶极矩球面上的电场：

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}_0\cdot\hat{r})\hat{r}}{R^3} - \frac{\vec{p}_0}{R^3}\right]$$

专题讨论（二）

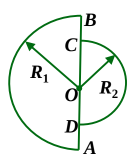
当叠加原理遇上对称性…

【例】半径分别为R_1和R_2的两个同心半球面相对放置，各自均匀带电，电荷面密度分别是σ_1和σ_2。求大半球面的直径AOB上的电势分布。



- 电荷均匀的完整球壳面内部电势处处相等，因而球心处电势：

$$\varphi = k\frac{Q}{r} = k\frac{4\pi r^2\sigma}{r} = 4\pi kr\sigma$$



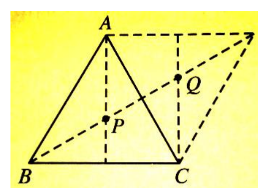
半球面的贡献各占一半，即,半球壳在底面上的电势为 $2\pi kr\sigma$

同理球壳外的电势为： $\varphi = k\frac{Q}{r} = \frac{4\pi kR^2\sigma}{r}$

半球壳的电势为：$\frac{2\pi kR^2\sigma}{r}$

$$\begin{cases} r \le R_2\text{时，} & U = 2\pi k(R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2); \\ r > R_2\text{时，} & U = 2\pi k(R_1\sigma_1 + R_2^2\sigma_2 / r) \end{cases}$$

例 三根等长的绝缘棒连成正三角形，每根棒上均匀分布等量同号电荷，测得图中P、Q两点（均位于相应正三角形的中心）的电势分别为U_P、U_Q，若撤去BC棒，则P、Q两点的电势分别为多少？

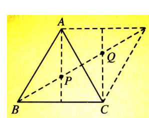


三根棒在P点的电势贡献相等，都为$U_p/3$,

AC在Q点的电势也为$U_p/3$,

AB、BC在Q点的电势贡献相等

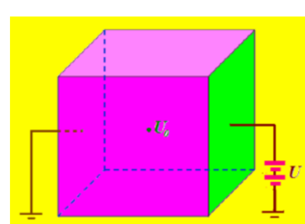
$$\frac{1}{2}(U_Q - \frac{1}{3}U_P) = \frac{1}{2}U_Q - \frac{1}{6}U_P.$$



撤去BC棒后

$$U'_P = \frac{2}{3}U_P,\quad U'_Q = \frac{1}{2}U_Q + \frac{1}{6}U_P$$

[例]一个立方体有5个面接地，而第六个面与其余5个面绝缘，电势为U，则立方体中心的电势是多少？



专题讨论（三）

电力线（电场线）

电力线是描述电场的一组有向曲线：

1)曲线上任意一点的切向是该点电场强度的方向；

2)局域曲线的疏密表示电场的强弱。

3)电力线是非闭合曲线，有始有终：电力线的起点是正电荷或者无穷远、终点是负电荷或者无穷远,但是同一根电力线不能起于无穷远、止于无穷远。

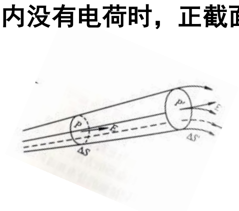
4)沿着电力线的方向，电势降落，垂直于电力线的方向电势相等，电力线与等势面垂直。

电力线管

电力线管：一束电力线围成的管状空间。

1)管壁上的电力线"躺"在侧面上，侧面的电通量为零；

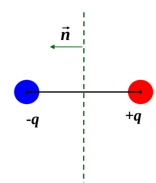
2)管内没有电荷时，正截面上的电通量相等。



$$E_1 \Delta S_1 = E_2 \Delta S_2$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$$

点电荷可以看成是带着一身电力线的刺状球，"刺"的根数和电荷量成正比，Q/ε_0.



旧例：电偶极子中垂面上的电通量。

电通量就是穿过一个面的电力线的根数。

- 空间有许多互不接触的导体，每个导体的带电量都为负。试证：至少有一个导体，其表面上任意一点的面电荷密度处处为负。

证：静电平衡后每个导体都有确定电势值，设电势最高者为H，电势最低者为L，则有$\boxed{\varphi_H \geq \varphi_L}$

若L表面有正电荷，该正电荷发出的电场线不能到达L，也不能到达其他导体，只能指向无穷远，则有

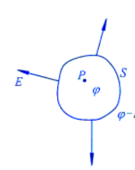
$$\boxed{\varphi_L > \varphi_\infty}$$

H表面必有负电荷，终止于该负电荷的电场线只能来自于无穷远，则有 $\boxed{\varphi_\infty > \varphi_H}$

$$\boxed{\Rightarrow \varphi_L > \varphi_H \quad ，\quad \text{矛盾！}}$$

故L上电荷处处为负。命题得证。

例：电场中没有电荷的区域电势不可能极大或者极小。



反证：设存在一点P，该点没有电荷，但电势φ_P极大。

在该点附近作一等势面S，其电势为$\varphi_P - \varepsilon$。则在S面上各点的电场垂直于S指向外侧，S面上的电通量为正，S面内必有电荷。矛盾。

故P点电势不可能极大。同理，P点电势不可能极小。

有一些互不接触的不带电的导体A、B，…，它们电势都为零，现在使导体A带正电荷。

求证: (1)所有导体的电势都大于零；

(2)其他导体的电势都低于导体A。

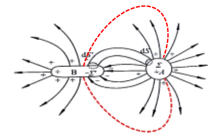
证明：(1)若没有导体被屏蔽，则导体达到静电平衡后表面必然同时出现正电荷、负电荷，电势最低的导体上的正电荷的电力线必终止于无穷远，故电势大于零。若某导体被屏蔽，则该导体的电势等于屏蔽它的导体的电势，也大于零。

(2)由（1）知，所有导体电势大于零.若存在导体电势高于A，设导体H的电势最高(φ_H>0),H上的电力线只能止于其他导体或者无穷远，亦即H上不能有负电荷，只有正电荷，与H不带电矛盾。

导体外的电荷Q_0在导体上感应的电量$Q' < Q_0$

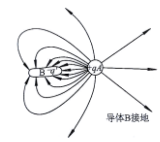
B不接地：

B上同时有正电荷、负电荷，A上的电力线没有全部落到B上。



B接地：

B上只有负电荷，电势为零。



本节作业

1.32

1.33（*）

1.34

1.35

1.36