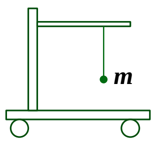
§ 1-4 电场强度

一、场

1. 场的概念

将一质量为m的小球移进一空间区域：



当小球不带电时，小球位于竖直位置；当小球带上电荷进入该空间区域，物体偏移竖直位置，利用平衡条件可以知道其所受的与q相关的外力$\vec{F}_q$的大小和方向。

当外界条件不变时，实验发现 $\vec{F}_q/q$ 是个不变量。记 $\vec{E}=\vec{F}_q/q$，改变带电小球的空间位置 $\vec{r}$，可以得到 $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$ 。

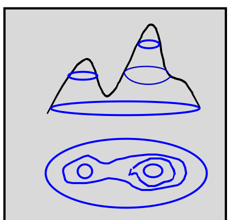
物理量随空间变化的函数称为场，物理量是标量时称为标量场，物理量是矢量时称为矢量场。

矢量 $\vec{E}(\vec{r})$反映空间 $\vec{r}$ 点的物理特性：电荷 q 在该点受到力 $q\vec{E}(\vec{r})$ 的作用。物理意义是单位正电荷在空间某点受到的电力作用（大小和方向），称为电场强度。

2、场的表示方法

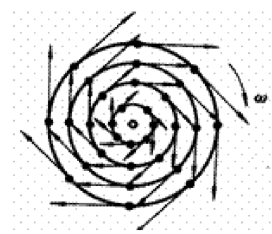
1）函数法：将物理量表示为空间或者“空间+时间”的矢量函数、标量函数。

2）标量场的图示法

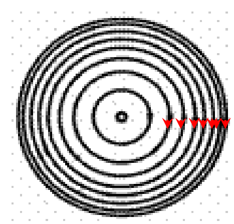


地形等高线

3）矢量场的图示法：



矢量图



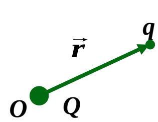
场线图

二、电场

1. 电荷在其周围空间激发产生电场

由库仑定律，q 受到作用力

$$\vec{F}_q(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^3}\vec{r}.$$



由电场强度定义：

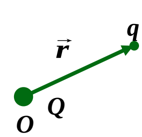
$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}.$$

---

q感受到的电场只决定于电荷Q

Q：场源电荷；

Q：试探电荷（检测电荷）。



说明：为了不影响场分布和尽可能精确反映电场分布要求带电量少、体积小。

2. 电场理论介绍

1)近代物理实验证明，电荷之间的作用是通过场传递的。

电荷 ⟷ 电场 ⟷ 电荷

2)凡是有电荷的地方，周围就存在电场，即电荷在自己的周围产生电场或激发电场。

3)电场以极快的速度运动，但该速度仍然有限,在真空中，它的速度就是真空中的光速c.

$$c = 2.99792458\ (12) \times 10^{8}\, m/s \approx 3 \times 10^{8}\, m/s$$

4)电场对处在场内的其他电荷有力作用，电场对电荷的作用是一种局域作用，即处于某点的电荷只受到该点处电场的作用，与其他地方的电场无关。

5)静止电荷产生的电场称为静电场，静电场对电荷的作用力就是静电力。

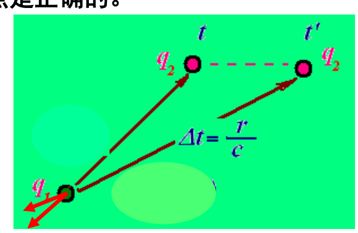
6)电场并不限于静电场，凡对电荷的作用力正比于电荷电量的场都是电场。

3.历史上的近距作用与超距作用之争

历史上电荷之间的作用存在近距作用与超距作用之争。

- 两种观点在处理两个静止电荷之间的相互作用时结果没有区别。
- 电场随时间变化的情况下，例如当场源运动时，两种观点的区别就显示出来了。

q_1静止，q_2从时刻t其位置发生移动，到达新位置的时刻为t'，q_2对q_1作用力的变化要比q_2位置的变化推迟一定时间Δt．实验结果证明场的观点是正确的。



4. 电场的物质性

现在人们知道电场是客观存在的一种物质，只是在形态上与由原子和分子构成的物质不同。

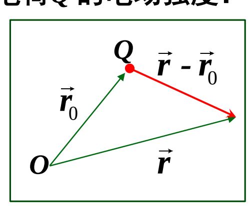
电场有速度、动量，也具有能量，而且和带电体相互作用，交换能量，电场的能量可以转换成其它形式的能量如物体的机械能、电池的化学能等。

5. 电场强度遵循叠加原理：

矢量叠加、线性叠加。

三、带电体系的电场强度

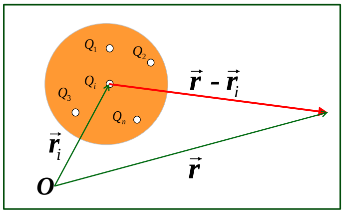
1. 点电荷Q 的电场强度：



电场以点电荷为中心球对称分布。

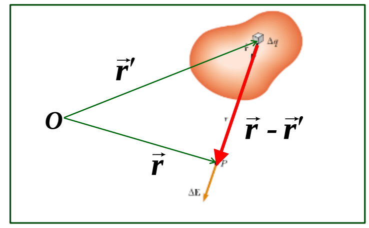
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0).$$

2. *N*个点电荷系：



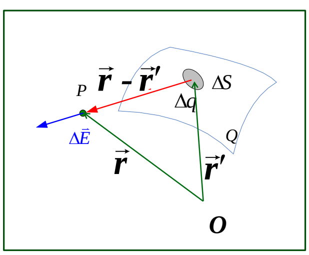
$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{|\vec r - \vec r_i|^3}(\vec r - \vec r_i),$$

3. 体电荷分布：



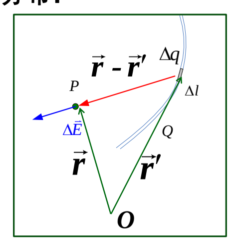
$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho_e(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}(\vec r - \vec r')dV'$$

4. 面电荷分布：



$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma_e(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}(\vec r - \vec r')dS'$$

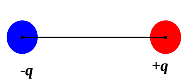
5. 线电荷分布：



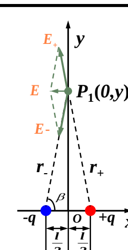
$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda_e(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}(\vec r - \vec r')dl'.$$

四、求解电场举例

例：求电偶极子的电场 。电偶极子即电量相等、符号相反、相隔某一微小距离的两点电荷组成的系统。



建立坐标系如图。



$$\vec E = \vec E_+ + \vec E_-$$

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2}, E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-^2}$$

$$r_+ = r_- = \sqrt{y^2 + l^2/4}$$

$$\begin{cases} E_y = E_{+y} + E_{-y} = 0, \\ E_x = E_{+x} + E_{-x} = 2E_- \cos\beta \end{cases} \qquad \cos\beta = \frac{l/2}{r_-}$$

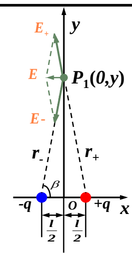
$$E = \frac{E_x l}{(y^2 + l^2/4)^{1/2}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + l^2/4)^{3/2}}.$$

方向沿x负向

$$E=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0(y^2+\frac{l^2}{4})^{3/2}}$$

当 $y>>l$ 时，有

$$r=\sqrt{y^2+\frac{l^2}{4}}\approx y, E_x\approx\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



定义电偶极矩 $\boxed{\vec{p}=q\vec{l}}$ ， $\vec{l}$ 方向由 -q 指向 +q，

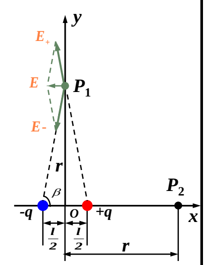
最终得 $\boxed{\vec{E}_{P_1}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}.}$

电偶极子延长线上的某点(到原点O的距离为r)，正负电荷产生的场强为：

$$E_+=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-\frac{l}{2})^2},\quad E_-=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+\frac{l}{2})^2}$$

当 $r>>l$ 时，有

$$\frac{1}{(r\pm\frac{l}{2})^2}=\frac{1}{r^2(1\pm\frac{l}{2r})^2}\approx\frac{1}{r^2}(1\mp\frac{l}{r})$$



$\boxed{\vec{E}_{P_2}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}.}$

电偶极子电场的一般表达式

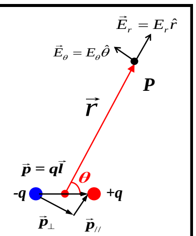
点P(r,θ)，将电偶极矩沿r、θ 方向分解。

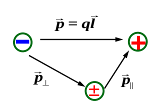
$p_\perp=p\sin\theta,\quad p_{//}=p\cos\theta$

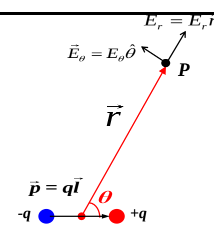
$$\vec{E}_r=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_{//}}{r^3},\quad \vec{E}_\theta=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_\perp}{r^3}$$

$$\vec{p}_{//}=(\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r})\frac{\vec{r}}{r}=\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2},$$

$$\vec{p}_\perp=\vec{p}-\vec{p}_{//}$$





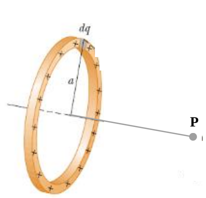


电偶极子的电场：

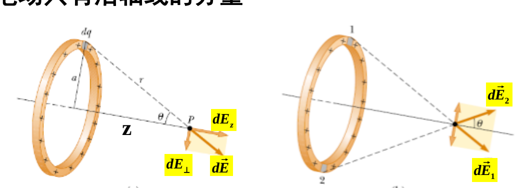
$$\vec{E}(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$$

思考：此处为什么通常用极坐标描述？

[例 带电环的电场] 一半径为a、无限细且均匀带电的圆环，环上线电荷密度为 λ_e 。求过环心垂直于环面的中轴线上的一点P (0, 0, z)的电场强度(如图)。



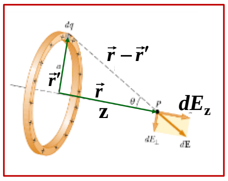
[解] 在圆环上任取一线电荷元$dq=\lambda_e dl$，它在P点产生的电场强度为 $d\vec{E}$ ，由对称性分析可知，电场只有沿轴线的分量



$\vec{E}$只有沿 z 轴的分量，于是

$$dE_z = \frac{\lambda_e dl}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\hat{z}$$

$$= \frac{\lambda_e azd\phi}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}$$



积分求得*P*点的电场强度：

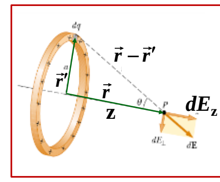
$$E = E_z = \frac{\lambda_e az}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\lambda_e az}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}$$

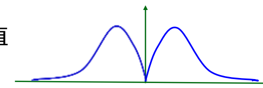
方向沿z轴

$$E = \frac{\lambda_e az}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\lambda_e a(a^2-2z^2)}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

$\Rightarrow z = \frac{a}{\sqrt{2}}$时E有极(大)值



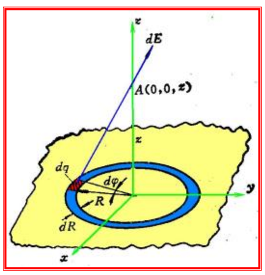


思考题：请分析圆环平面电场的特点，
并试求数学表达式.

[例：平面电荷]

均匀带电的无穷大平板，其面电荷密度为σ_e。求与板距离为 *z* 的一点*A*处的电场强度。

[解] 过A作平板的垂线AO, AO=z , 以O为圆心，将平板分割成无数个圆环．设其中任一圆环的半径为*R*，环宽为*dR*。



无穷大均匀带电平板的电场

由上题的结果，这宽度为dR 的环对A点电场强度的贡献为：

$$dE = dE_z = \frac{\sigma_e RzdR}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$$

其中*R*的变化范围是（0, ∞）。对*R*积分得：

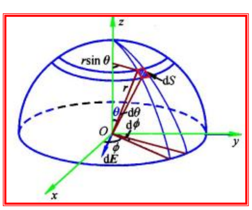
$$E = E_z = \frac{\sigma_e z}{2\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{RdR}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_e z}{4\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{dR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma_e z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}.$$

[例 半球面电荷]

求面电荷密度为σ、半径为r的均匀带电半球面在球心的电场。

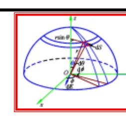
[解] 建立球坐标系，取原点*O*与球心重合，球坐标中的面元dS可以看作是边长为 $rd\theta$ 和 $r\sin\theta\, d\phi$ 的矩形，其面积为 $dS = r^2\sin\theta d\theta d\varphi$



均匀带电半球面在球心处的电场

该面电荷元在*O*点的电场强度大小为:

$$dE = \sigma dS/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$$



dE 的方向由dS 指向球心，由于对称性，dE只有沿z 轴的分量dE_z：

$$dE_z = -dE\cos\theta = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi$$

将上式对θ和ϕ 积分，求得半球在O点处的电场为

$$E = E_z = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

负号表示电场沿Z轴负向。

**具体计算时应采用分量式，步骤如下：

(1) 取微元dq，写出$d\vec{E}$ 表达式，并画出 $d\vec{E}$ 方向。

(2) 取合适的坐标系，写出分量,如：dE_x，dE_y，dE_z

(3) 对称性分析可简化计算，能使我们立即判断电场强度的某些分量为零。

(4)积分求出：$E_x=\int dE_x$，$E_y=\int dE_y$，$E_z=\int dE_z$

(5)$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}$

本节作业：

1.10

1.11

1.12

1.13

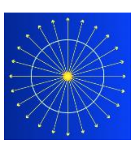
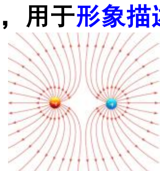
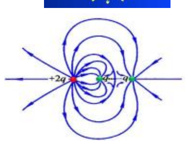
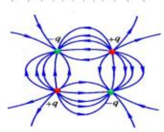
1.14

1.15

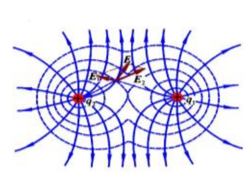
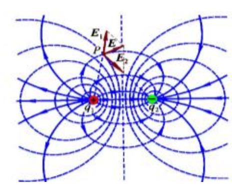
§1-5 高斯定理

一、电场线

■电场线（又称电力线），用于形象描述电场。

■所谓电场线是指电场所在空间中的一组曲线，曲线上每一点的切线方向都与该点的电场强度方向一致。

电场线的数学方程

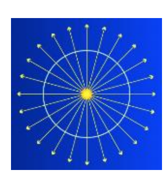
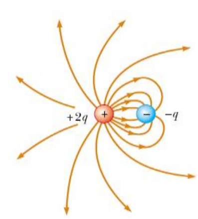
电场线的切向就是电场的方向，故

$$\vec{E}\times d\vec{l}=0$$

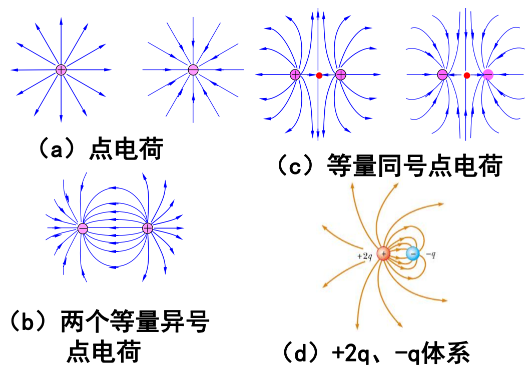
直角坐标系中：

$$\frac{E_x}{dx}=\frac{E_y}{dy}=\frac{E_z}{dz}$$

■电场强度的大小用电场线的疏密表示：在空间中任取一点，过该点取小面元⊿S与该点场强方向垂直。设穿过⊿S的电场线有⊿N根，则⊿N/⊿S叫做该点电场线数密度，即 E = ⊿N/⊿S 。

几种常见的电场线



（a）点电荷

（c）等量同号点电荷

（b）两个等量异号点电荷

（d）+2q、−q体系

电场线的性质

（1）起自**正电荷**或无穷远处，止于**负电荷**或无穷远处；

（2）通常情况下，不会在没有电荷的地方中断和相交；

（3）静电场的电场线**不会构成闭环**；

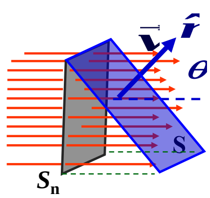
（4）可以有**中性点**，前图（c）中的红点。

二、矢量场的通量

1、平面通量

水流的流速处处相同，单位时间通过与流速垂直的平面S_n的水流量为：

$$\Phi = vS_n$$



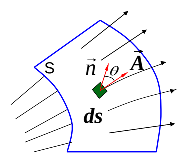
单位时间通过平面S的水流量为：

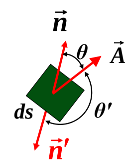
$$\Phi = vS_n = vS\cos\theta = \vec v \cdot \vec S$$

有向面

Φ称为**流速矢量场** $\vec v$ **在S面**上的**通量**。

2. 曲面通量



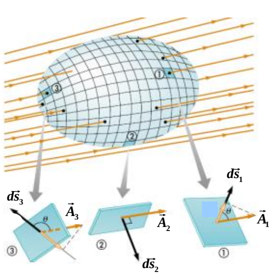


矢量面元的方向是人为规定的

$$d\Phi_A = \vec A \cdot d\vec s = \vec A(\vec r) \cdot d\vec s(\vec r)$$

$$\Phi_A = \iint_S d\Phi_A = \iint_S \vec A \cdot d\vec s$$

3.闭合曲面的通量

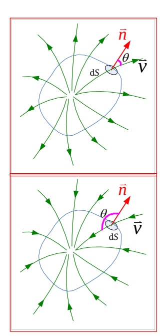


闭合曲面约定取**外法线方向为曲面正方向**。

$$d\Phi_A = \vec A(\vec r) \cdot d\vec s(\vec r)$$

$$\Phi_A = \oiint_S d\Phi_A = \oiint_S \vec A \cdot d\vec s = \oiint_{\partial V} \vec A \cdot d\vec s$$

4. 闭合曲面的通量的意义—源 与 汇

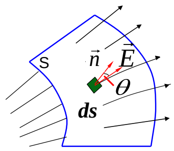


$\oiint_{\partial V} \vec v \cdot d\vec s > 0$ 源

$\oiint_{\partial V} \vec v \cdot d\vec s < 0$ 汇

$\oiint_{\partial V} \vec v \cdot d\vec s = 0$ 无源无汇

二、电场强度通量(电通量)

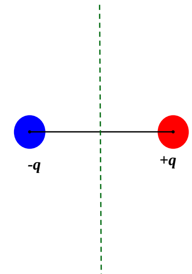


$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cos\theta ds$$

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s}(\vec{r})$$

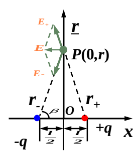
电通量表示是穿过S面的电场线的“根数”。

例：求电偶极子中垂面上的电通量。



如前，中垂面上的电场：

$$E = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2}}$$

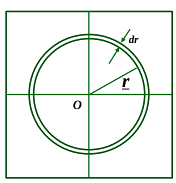


方向垂直于中垂面向左，取该方向为中垂面的正方向。

$$d\Phi_e = Eds = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + l^2/4)^{3/2}} 2\pi r dr$$

$$\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_0^\infty \frac{ql}{2\varepsilon_0}\frac{r}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} dr$$

$$= \frac{ql}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-2}{(r^2 + l^2/4)^{1/2}}\right]_0^\infty = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



1、以点电荷为球心的球面的电通量

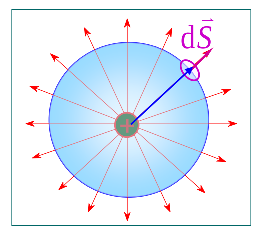
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\Phi_e = \oiint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \oiint_{\partial V} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r} dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oiint_{\partial V} dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\boxed{\Phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

电通量与球半径无关，只决定于闭合曲面包含的电荷，电荷是电场的源

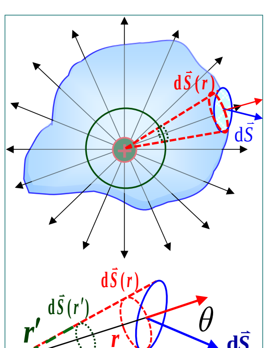
2、点电荷在任意封闭曲面内

$$d\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS\cos\theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS(r)}{r^2}$$

$$\frac{dS(r)}{r^2} = \frac{dS(r')}{r'^2}$$

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint\frac{ds(r')}{r'^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



电通量与包含电荷的闭合曲面形状无关。

3、点电荷在闭合曲面之外

$$d\Phi_1 = \vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1 > 0$$

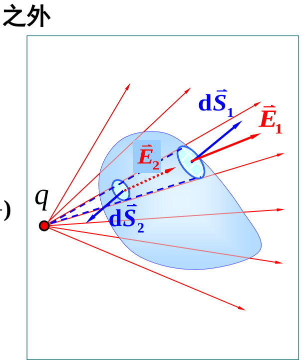
$$d\Phi_2 = \vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2 < 0$$

$$d\Phi_1 + d\Phi_2$$

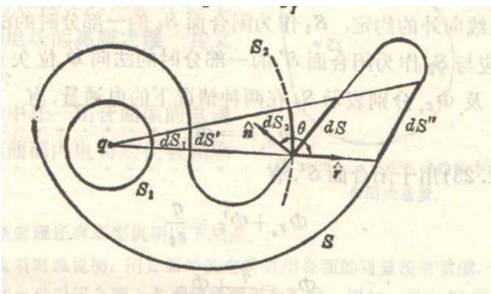
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{dS(r_1)}{r_1^2} - \frac{dS(r_2)}{r_2^2}\right)$$

$$= 0$$

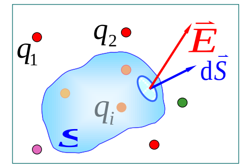
$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$



“奇形怪状”高斯面



4、由多个点电荷产生的电场



$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots$$

$$\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\oiint_S \sum_i \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\sum_{i(内)}\oiint_S \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\sum_{i(外)}\oiint_S \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\because \sum_{i(外)}\oiint_S \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\therefore \Phi_e=\sum_{i(内)}\oiint_S \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i(内)} q_i$$

三、高斯定理—通量定理

真空中静电场的**高斯定理**：通过**任意闭合曲面**（或称**高斯面**）S 的电通量等于该面内全部电荷的代数和除以 ε_0，与面外的电荷无关。

$$\Phi_E=\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)} q$$

对**连续电荷分布**的情况，例如，对体电荷分布的情况，可将高斯定理的普遍形式写成:

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{\mathrm{E}}\cdot d\vec{\mathrm{S}}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e(\vec{\mathrm{r}})dV$$

说明：

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{\mathrm{E}}\cdot d\vec{\mathrm{S}}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e(\vec{\mathrm{r}})dV$$

（1）**静电场有源，电荷是它的源**；

（2）高斯面上的电通量只和面内的电量有关，与面内的电荷分布无关，与面外的电荷电量及其分布无关。

（3）高斯面上的电场由全空间电荷的分布决定。虽然高斯面外电荷对高斯面上的总电通量贡献为零，但是对高斯面上的面元电通量贡献不为零；高斯面内外的电荷分布发生变化时，高斯面上的面元电通量也会发生变化。

四、高斯定理与库仑定律的关系

高斯定理得以成立，是由于**库仑定律是距离平方反比律的结果**。假如**库仑定律**是下面形式：

$$\boldsymbol{F}\propto\frac{1}{r^{2+\Delta}}$$

其中△是任意一小量。　则有

$$\boldsymbol{E}\propto\boldsymbol{F}\propto\frac{1}{r^{2+\Delta}}$$

对于点电荷q，以它为球心，作半径为 r 的球面。取该球面为高斯面，有：

$$\Phi_E=\oiint_S \vec{\mathrm{E}}\cdot d\vec{\mathrm{S}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S\frac{q}{r^{2+\Delta}}dS$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S\frac{\sin\theta d\theta d\phi}{r^{\Delta}}=\frac{q}{\varepsilon_0 r^{\Delta}}$$

如果$\Delta\neq 0$，则**高斯定理不再成立**。

说明：

1）验证高斯定理的正确性是验证库仑定律中距离平方反比律的一种间接方法。可获得非常高的精度。

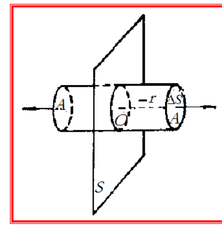
2）高斯定理出自于库仑定律，它对静电场成立。往后我们将会看到，它对随时间变化的电场也成立。

五、应用举例

高斯定理对解决具有一维对称性（即只与一个空间坐标有关）的静电学问题提供了简便的方法。

[例] 求面电荷密度为σ_e的均匀带电的无限大薄平板的电场强度分布。

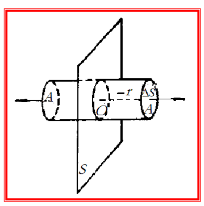
[解] 首先分析该问题是否具有一维对称性:本题待求的电场强度分布是以无限大平板S为镜面对称的。



取图示柱面作为高斯面：其侧面垂直于无穷大平板S，一底面过A平行于面S，另一底面过A的镜像对称点A'且平行于面S。对该柱面运用高斯定理得

$$2\cdot\Delta S\cdot E=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\Delta S\cdot\sigma_e$$

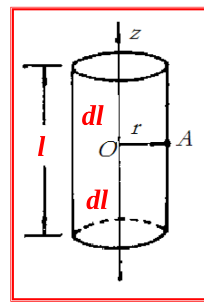
$$E=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}.$$



[例] 求线电荷密度为η_e的均匀带电无限长细棒所产生的电场。

[解] 作右图，取z轴与细棒重合。

首先分析对称性:与细棒距离相等的点，其环境完全一样，与其位置坐标z、φ无关。显而易见，E是以细棒为轴对称的，这也是个一维问题。



于是，我们可取以细棒为轴、长度为l，半径为 r 的圆柱面作为高斯面。由高斯定理可得

$$2\pi r l E=\frac{1}{\varepsilon_0}l\eta_e,\qquad E=\frac{\eta_e}{2\pi r\varepsilon_0},$$

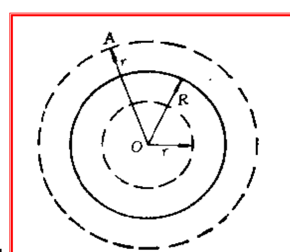
即 $$\vec{E}=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}.$$

对于有限长的带电细棒，问题将不再是一维的，而是二维的。必须根据电场叠加原理通过积分去计算。

[例] 求体电荷密度为ρ_e、半径为R的均匀带电球的电场强度分布。

[解] 首先分析对称性:与球心距离相等的点，其环境相同，与位置坐标θ 、φ无关。

场强的大小只与到球心O的距离r 有关，呈球对称的分布，属于一维问题。



均匀带电球的电场

于是，可取以O为球心，以$OA=r$为半径的球面作为高斯面，如前右下图所示。根据高斯定理可得：

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S}=4\pi r^2 E(\vec{r})=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)} q$$

(1) 高斯面位于带电球外 （$r > R$）。

对这种情况，S内的电量等于带电球的总电量$Q=4\pi R^3\rho_e/3$，代入上式可得：

$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{R^3\rho_e}{3\varepsilon_0 r^2},\qquad (r>R)$$

(2) 高斯面位于带电球内（$r < R$）。对这种情况，S内的电量等于 $4\pi r^3\rho_e/3$，据此求得：

$$E(r)=\frac{1}{4\pi r^2\varepsilon_0}\frac{4\pi r^3\rho_e}{3}=\frac{\rho_e r}{3\varepsilon_0},\qquad (r<R)$$

球内$E(r)$ 随径向距离线性增长，球心处电场为零。对于面电荷密度为 σ_e 的均匀带电球壳的电场，可按此例的步骤进行类似处理。结果为：球内电场为零，球壳外表面附近电场强度的大小为：

$$\sigma_e/\varepsilon_0$$

高斯定理求解电场步骤：

1、首先判断电场的对称性。如果电场有一维对称性则可以用高斯定理求解电场，否则只能用叠加原理求解。

对称性通过电荷分布的对称性分析！

2、作出合适的高斯面。通常欲求解的电场强度的方向和所在处的高斯面垂直，在该块高斯面上的电场强度大小相等。

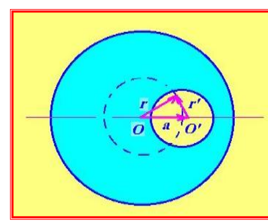
高斯面通常也具有对称性！

3、利用高斯定理数学式化简求解电场。

[例] 如右下图所示的带空腔的均匀带电球，其电荷密度为 ρ_e，球心到空腔中心的距离为a 。求空腔中的电场强度。

[解] 利用叠加原理。

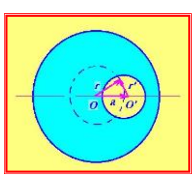
设想在空腔内同时填满$+\rho_e$和 $-\rho_e$ 的电荷，则原电荷分布可视为电荷密度为$+\rho_e$的实心大球和电荷密度为$-\rho_e$ 的 实心小球的叠加。



球形空腔内的电场

由上一例题的结果，可直接写出大球和小球在空腔内部的电场强度表达式：

$$\vec{E}_+=\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\vec{r},\qquad \vec{E}_-=-\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\vec{r}'$$



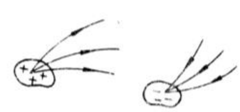
腔内电场为二者叠加，结果为：

$$\vec{E}=\vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

式中 $\vec{a}$ 为O指向O'的矢量。上述结果表明，空腔内为均匀电场。

从高斯定理看电力线的性质

（1）电力线的起点和终点

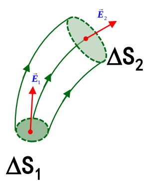


作高斯面将电力线起点（终点）包围起来，则必然有电力线穿出（穿入），即电通量 $\Phi_E>0$（$\Phi_E<0$），根据高斯定理，前者之内必有正电荷，后者之内必有负电荷。换言之，电力线从正电荷发出，终止于负电荷。

（2）电力线的疏密与场强的大小

电力管：一束电力线围城的管状区域。

特征--电力线总是平行于电力管的侧壁。



$$E_2\Delta S_2 - E_1\Delta S_1 = 0$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$$

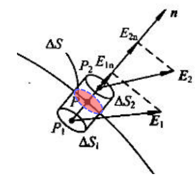
电场强度法向分量在带电面上的突变

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e(\vec{r})dV$$

扁圆柱体，有：

$$(E_{2n} - E_{1n})\Delta S = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\Delta S$$

$$\boxed{E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}}$$



在通过任一带电面时电场强度的法向分量会有一个σ_e/ε_0的突变；这一突变只与面上被通过处的面电荷密度有关，与面的形状无关，也与面外空间的电荷无关。

高斯定理的微分形式

数学高斯公式： $\boxed{\oiint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{E}dV}$

成立条件： $\vec{E}$ 是有限连续函数。

电场的高斯定理： $\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e(\vec{r})dV}$

$$\boxed{\therefore\ \nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e}$$

散度的定义及高斯公式的证明见补充材料。

讨论： $\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e}$ $\boxed{\oiint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e(\vec{r})dV}$

1. 微分形式只适用于体分布电荷，不适用于点电荷、线电荷和面电荷模型。
2. 微分形式给出了空间电荷密度和电场散度之间的对应关系。某场点的电场散度只和该点的电荷密度有关，与其它区域的电荷分布无关。
3. 积分形式高斯定理适用于场中的一个区域，微分形式适用于场中的每一个场点。

本节作业：
1.10
1.17
1.18
1.20
1.21

思考题：

1. 根据电力线可以确定点电荷的受力方向吗？可以确定点电荷的运动轨迹吗？
2. 点电荷q位于立方体中心，问立方体的一个面上的电通量等于多少？若点电荷位于立方体内，但是不位于中心，能确定一个面上的电通量吗？
3. 请总结如何判断一个带电体系的电场的对称性，如何取合适的高斯面。
4. 如果高斯面上的电场处处为零，能据此判断高斯面内电场处处为零？能据此判断高斯面内没有电荷吗？
5. 如果库仑定律中的指数不是2，而是 2+Δ，高斯定理还成立吗？
6. “高斯面上电场强度之和高斯面内的电荷有关，和高斯面外的电荷无关”这个说法对吗？