УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭКОНОМИКЕ

А. А. БЕЛОЛИПЕЦКИЙ, В. А. ГОРЕЛИК

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Допущено
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям направления «Экономика»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2010

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Б435

Высшая математика и ее приложения к экономике

Рецензенты:
акад. РАЕН, д-р физ.-мат. наук, проф. *А. М. Тер-Крикоров* (Московский физико-технический институт (Государственный университет));
д-р физ.-мат. наук, проф. *В. М. Четвериков*
(декан экономико-математического факультета Московского института электроники и математики (технический университет))

Белолипецкий А. А.
Б435 Экономико-математические методы: учебник для студ. высш. учеб. заведений / А. А. Белолипецкий, В. А. Горелик. — М.: Издательский центр «Академия», 2010. — 368 с. — (Университетский учебник. Высшая математика и ее приложения к экономике).

ISBN 978-5-7695-5714-9

В учебнике рассмотрены математические модели принятия решений (менеджмента), составляющие ядро широкого спектра научно-технических и социально-экономических технологий, которые реально используются современным мировым профессиональным сообществом в теоретических исследованиях и практической деятельности. Приведены практические примеры процессов принятия решений в сфере управления производством, теории потребления, финансового менеджмента, договорных отношений и т. д.

Для студентов экономических специальностей высших учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7695-5714-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основная задача экономики — рациональная деятельность, предполагающая оптимальное распределение ограниченных ресурсов в соответствии с поставленной целью. Экономика в целом представляет собой совокупность определенных институтов, каждый из которых решает стоящую перед ним задачу рационального ведения хозяйства. Наиболее распространенными и типичными из таких институтов являются домашние хозяйства (потребители) и фирмы (предприятия). Для потребителя задача рационального выбора состоит в таком распределении общей суммы расходов на потребление между различными видами товаров и услуг, которое максимизирует его функцию полезности. Для предприятия задача рационального выбора состоит в установлении такого уровня выпуска продукции и затрат факторов, который максимизирует его прибыль. Общим инструментом для формулировки и решения этих и многих других задач экономической деятельности служит теория принятия решений.

Принятие решений всегда было и остается наиважнейшим аспектом человеческой деятельности. Существуют различные подходы к принятию решений, основанные на предшествующем опыте, здравом смысле, методе аналогий, интуиции и др. Однако практика управления во всех областях и на всех уровнях требует широкого и эффективного использования математических методов. Создание систем управления невозможно без разработки соответствующей теории принятия решений, отвечающей практическим запросам. С точки зрения математического описания под ***принятием решений*** понимается выбор из некоторого множества U элемента u. При этом определяется правило выбора $u \in U$ и целесообразность выбора.

Математическая теория принятия оптимальных (рациональных, целенаправленных) решений называется ***теорией исследования операций***. Таким образом, задачей теории исследования операций является построение количественных методов анализа процессов принятия решений во всех областях человеческой деятельности.

Исследование операций — это раздел прикладной математики, который занимается построением математических моделей анализа реальных задач и процессов управления и принятия решений (экономических, социальных, технических, военных и др.). Данный раздел включает в себя ряд подразделов, различающихся математическими моделями задач поиска оптимальных решений.

Математическая модель нужна для детального предварительного анализа реального явления.

Математика проводит количественный и качественный анализ модели, помогает предсказать, как поведет себя система в различных условиях и дает рекомендации для принятия «наилучшего» решения.

Перед исследователем операций стоят следующие задачи:

• составление математических моделей задач принятия решений;

• существование оптимальных решений в различных классах задач;

• установление необходимых и достаточных признаков оптимальности в различных классах задач;

• разработка методов численного нахождения оптимальных решений.

Изложение любого предмета начинается с определения или описания используемых в нем основных понятий. В курсе «Исследование операций» первоочередным является термин «операция».

Операцией называется совокупность действий, направленных на достижение некоторой цели, или иначе совокупность целенаправленных действий.

Наличие цели в операции подразумевает существование активных участников, которые преследуют эту цель. Для выделения таких участников в особую группу существует понятие оперирующей стороны.

Оперирующей стороной (ОС) называется совокупность лиц, которые стремятся в данной операции к поставленной цели.

Кроме того, в операции могут присутствовать и другие действующие лица, оказывающие влияние на ход операции, но не преследующие цель оперирующей стороны, в частности, у них могут быть собственные цели. При изучении операции рассмотрение ведется с позиции оперирующей стороны, а основная задача исследования состоит в поиске и сравнении различных путей достижения поставленной цели.

В оперирующей стороне удобно выделить участника, который называется *исследователем операции.* Исследователь операции принадлежит к оперирующей стороне и преследует ту же цель, однако он, как правило, сам не принимает решения по выбору способов действий, а только помогает в этом оперирующей стороне, предлагая научную основу для принятия решений. Принципиальное отличие исследователя операции от оперирующей стороны состоит в том, что в момент проведения исследования, которое зачастую отделено от самой операции весьма большим промежутком времени (как правило, тем бо́льшим, чем сложнее операция и, следовательно, ее изучение), он может не иметь всей информации, которая будет у оперирующей стороны в момент проведения операции. Однако он должен предвидеть возможность поступления такой информации и давать рекомендации с учетом этой информации, т. е. предлагать не фиксированные действия, а правила поведения как функции от ожидающейся информации. Это обстоятельство еще более осложняет задачу исследователя операции. Ответственность за принятие решений и окончательный выбор лежит на оперирующей стороне.

Основным инструментом исследователя операции являются математические модели. Несмотря на их большое разнообразие, существуют важнейшие элементы, которые присутствуют практически во всех моделях. Так, в любой операции для достижения поставленной цели оперирующая сторона должна иметь некоторый запас ресурсов (например, минеральное сырье, техническое оборудование, деньги, рабочую силу, вычислительную технику и т. д.). В математической модели операции соответствующий элемент принято называть *активными средствами* и обозначать вектором $\mathbf{a}$. Действия, направленные на достижение поставленной цели, представляют собой способы использования активных средств. Соответствующий элемент математической модели называют *стратегией* и обычно обозначают переменной x. Переменная x может быть скалярной величиной, вектором или функцией. Стратегии являются факторами, влияющими на ход операции, контролируемыми оперирующей стороной, т. е. выбираемыми ею по своему усмотрению. Кроме них существуют *неконтролируемые факторы*, влияющие на ход операции, которыми оперирующая сторона не распоряжается, например природные условия. Неконтролируемые факторы будем обозначать переменной y. Общее описание модели должно включать также сведения об информированности оперирующей стороны и исследователя операции об обстановке протекания операции, т. е. о значениях неконтролируемых факторов.

Неконтролируемые факторы, исходя из информированности о них исследователя операции, можно подразделить на три группы:

а) фиксированные;

б) случайные;

в) неопределенные.

Фиксированные неконтролируемые факторы — это такие факторы, значения которых точно известны исследователю операции. *Случайные* неконтролируемые факторы представляют собой случайные величины, законы (функции) распределения которых точно известны исследователю операции. *Неопределенные* неконтролируемые факторы являются детерминированными или случайными величинами, относительно которых исследователю операции известна лишь область возможных значений или класс возможных законов распределения.

Необходимо подчеркнуть, что неконтролируемые факторы описываются с позиции исследователя операции, что же касается оперирующей стороны в целом, то у нее в момент проведения операции может появиться дополнительная информация, существенно сужающая или даже исключающая неопределенность. Но так как мы занимаемся вопросами исследования операций, для нас важна именно информированность исследователя, т. е. информация, доступная в момент проведения исследования, хотя возможное содержание информации, поступающей в момент проведения операции, при этом также должно учитываться.

Ход операции можно описать некоторым набором фазовых переменных $\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t)$. Степень соответствия хода операции поставленной цели в математической модели характеризуется *критерием эффективности* W, который представляет собой некоторую функцию, зависящую от фазовых переменных, стратегий и неконтролируемых факторов. В математической модели эквивалентом цели операции является требование максимизации критерия эффективности.

Существует много различных классификаций математических моделей. Согласно одной из основных классификаций модели подразделяют на динамические, в которых явно присутствует переменная времени, и статические, в которых этой переменной нет. В реальности все процессы протекают во времени, поэтому динамические модели, вообще говоря, более точно описывают действительность. Для проведения исследования часто ограничиваются простыми статическими моделями. При этом стратегию и воздействие неконтролируемых факторов представляют в виде единичного акта, фазовые переменные исключают, и критерий эффективности представляют в виде функции только стратегий и неконтролируемых факторов, т. е. $W = F(x, y)$.

Переход от динамической формы модели к статической называется *нормализацией*. Фактически в ходе исследования можно сразу строить статическую модель, минуя динамическую. Несмотря на внешнюю простоту указанного выражения, связь между значениями критерия, стратегии и неконтролируемого фактора может быть весьма сложной. Иногда ее не удается представить в явном виде, тогда она задается с помощью промежуточных соотношений или в виде вычислительного алгоритма.

С учетом изложенного, получаем математический объект

$$\{W, x, y\},$$

где $x \in X$ — множество (пространство) допустимых стратегий, $y \in Y$ — множество значений неконтролируемых факторов. Он называется *статической (нормальной) формой* математической модели операции.

Содержательно всякая задача исследования операций является оптимизационной, т. е. состоит в выборе среди некоторого множества допустимых решений тех решений, которые можно в том или ином смысле квалифицировать как оптимальные. При этом допустимость каждого решения понимается в смысле возможности его фактического осуществления, а оптимальность — в смысле его целесообразности. Допустимость того или иного решения определяется возможностью реализации соответствующих действий при имеющихся ресурсах. Ограниченность ресурсов выражается в виде математических ограничений, чаще всего имеющих вид равенств и неравенств. Оптимальность, целесообразность решения предполагает наличие в каждой задаче исследования операций некоторой системы целей, описываемых *критериями эффективности*, и принципа оптимальности (иногда называемого *критерием оптимальности*).

Теоретически возможны задачи исследования операций с весьма произвольными критериями оптимальности. Однако чаще всего они представляют собой требования максимизации (или минимизации) одной или нескольких числовых функций, значения которых выражают степень осуществления целей при соответствующем допустимом решении. Каждая такая функция называется *критерием эффективности*, или *целевой функцией*. Иногда критерий оптимальности задается не целевой функцией, а отношением предпочтения, когда применительно к парам допустимых решений указывается, какое из решений этой пары предпочтительнее. Такое отношение предпочтения не всегда является однозначным и очевидным.

В целях иллюстрации основных понятий исследования операций и составляющих элементов математических моделей операций рассмотрим пример построения модели для содержательной задачи.

Пример В.1 **(*планирование суточного выпуска продукции*).** Процесс изготовления изделий двух видов состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Известны время эксплуатации станка в сутки, время обработки единицы каждого изделия на каждом станке, стоимость реализации единицы каждого изделия.

Требуется составить для фирмы план суточного выпуска изделий так, чтобы доход от их продажи был максимальным.

При анализе упомянутых важнейших факторов будем исходить только из условия задач. Здесь:

- ОС — руководство фирмы;
- цель — максимизация дохода от реализации выпущенных за сутки изделий двух видов;
- принятие решения для ОС состоит в определении суточных объемов выпуска каждого из двух видов изделий;
- возможности ОС ограничены временны́ми ресурсами эксплуатации станков трех видов.

После выявления важнейших факторов нужно проанализировать все параметры задачи: значение каких параметров известно (задано), какие параметры являются неизвестными величинами; какими из параметров можно управлять (управляемые, или контролируемые), а какими — нет (неуправляемые, или неконтролируемые, параметры).

В данном примере известными являются следующие параметры:

- суточная норма b_j эксплуатации станка j, $j = 1, 2, 3$;
- время a_{ij} обработки единицы изделия вида i ($i = 1, 2$) на станке типа j ($j = 1, 2, 3$);
- стоимость c_i единицы изделия вида i ($i = 1, 2$).

Все эти параметры являются неуправляемыми (неконтролируемыми) факторами, так как они заданы, т. е. это фиксированные неконтролируемые факторы.

Неизвестными, или искомыми, являются следующие параметры:

- объем суточного выпуска изделия вида i ($i = 1, 2$).

Эти два параметра можно считать управляемыми, так как фирма сама определяет их величину (исходя из реальных условий), т. е. стратегией.

Введем систему обозначений неизвестных параметров задачи:

- x_i — объем суточного выпуска изделия вида i ($i = 1, 2$).

Тогда доход D от продажи x_1 и x_2

$$D = c_1 x_1 + c_2 x_2 \,,$$

а время, необходимое для обработки x_1, x_2 единиц изделий на станке j, есть $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2$, $j = 1, 2, 3$.

Теперь первоначальную задачу можно сформулировать математически:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$

$$X : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 \le b_3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Это есть задача математического (линейного) программирования с целевой функцией $c_1x_1 + c_2x_2$ и множеством допустимых решений X, которое описывается неравенствами. Критерий оптимальности здесь полностью задается требованием максимизации целевой функции, что определяет отношение предпочтения.

Следовательно, для построения математической модели конкретной операции рекомендуется выполнить следующую последовательность работ:

- изучение условия задачи;
- определение важнейших факторов;
- выделение известных и неизвестных параметров;
- выявление управляемых и неуправляемых факторов;
- дополнение условия задачи недостающими сведениями;
- введение системы обозначений;
- составление математической модели (математическое выражение целевой (целевых) функции и соотношений и связей между параметрами);
- определение критерия (принципа) оптимальности (в общем случае весьма нетривиальный и ответственный этап) и формулировка задачи.

Основная задача исследования операций состоит в сравнении различных стратегий и выборе наилучшей из них. Возникает вопрос: «На основании каких критериев сравнивать стратегии?». На первый взгляд ответ прост — с помощью критерия эффективности, который собственно для этого и задается. На самом деле для сравнения стратегий критерия эффективности достаточно только в том случае, когда отсутствуют неконтролируемые факторы или имеются лишь фиксированные неконтролируемые факторы. При наличии же случайных или неопределенных неконтролируемых факторов сравнивать стратегии непосредственно с помощью критерия эффективности невозможно, хотя и в этом случае критерий лежит в основе сравнения.

Для того чтобы иметь возможность сравнивать стратегии, удобнее всего иметь численную оценку каждой стратегии. Оценка, ставящая в соответствие каждой стратегии x действительное число, т.е. являющаяся функцией переменной x, называется *оценкой эффективности стратегии*. Если имеется только фиксированный неконтролируемый фактор, т.е. y принимает известное исследователю операции значение y^0, то критерий эффективности $W = F(x, y^0)$ является функцией только x. Введем обозначение $f_0(x) = F(x, y^0)$. Величина $f_0(x)$ может служить оценкой эффективности стратегии. При этом стратегия x_1 лучше стратегии x_2, если $f_0(x_1) > f_0(x_2)$. Естественным образом определяется в этом случае и наилучшая, или оптимальная, стратегия. Это такая стратегия x^0, для которой выполняется соотношение

$$f_0(x^0) \geq f_0(x) \; \forall \, x \in X$$

(при наличии только фиксированных неконтролируемых факторов стратегии-функции не имеют смысла, поэтому пространство стратегий может включать лишь стратегии-константы; такое пространство стратегий принято обозначать через X).

Пусть теперь имеются случайные, или неопределенные, факторы. В этом случае для фиксированной стратегии x^* критерий эффективности $W = F(x^*, y)$ является функцией от y, а не фиксированным числом, и значит не может служить оценкой эффективности. Каждой стратегии уже соответствует не одно, а несколько значений критерия эффективности и результат сравнения стратегий с помощью критерия оказывается неопределенным.

Рассмотрим вопросы построения оценок эффективности, которые, вообще говоря, могут вводиться различным образом. Определение вида оценки эффективности и связанного с ней понятия (принципа, критерия) оптимальности представляет собой элемент постановки задачи и является, в конечном счете, правом оперирующей стороны. Однако существуют наиболее распространенные и обоснованные оценки эффективности, зависящие от вида неконтролируемых факторов. Если имеется случайный неконтролируемый фактор, представляющий собой случайную величину с известным исследователю операции законом распределения, то в качестве оценки эффективности чаще всего используется математическое ожидание критерия эффективности. Пусть неконтролируемый фактор y принимает n значений $y_1, \ldots, y_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$, тогда математическое ожидание определяется по формуле

$$\mathbf{M}_y F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i F(x, y_i)\,. \tag{B.1}$$

Значит, в качестве оценки эффективности стратегии берется функция

$$f_{\text{c}}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F(x, y_i)\,. \tag{B.2}$$

Такая оценка эффективности называется оценкой в среднем, так как значение случайной величины в каждом конкретном случае может существенно отличаться от математического ожидания и только среднее значение реализаций случайной величины при большом числе испытаний приближается к нему. При использовании этой оценки имеется определенный риск получения в каждом конкретном случае меньшего результата, чем тот, на который рассчитывали, и в этом нужно отдавать себе отчет. Только в среднем при многократном проведении данной операции можно с достаточной уверенностью рассчитывать на получение результата, равного оценке в среднем этой стратегии. Таким образом, в рядовой операции, повторяющейся много раз, указанный риск оправдан, но в единичной операции он вряд ли пригоден. Это значит, что статистические данные в единичных (уникальных) ситуациях фактически ничего не дают и неконтролируемые факторы при этом нужно считать неопределенными, но это уже другой случай.

При наличии случайных неконтролируемых факторов могут применяться и стратегии-функции, если у оперирующей стороны ожидается дополнительная информация. Тогда в качестве оценки эффективности также обычно используется математическое ожидание

$$f_{\text{с}}(\tilde{x}) = M_y F(\tilde{x}, y), \tag{B.3}$$

только надо иметь в виду, что при определении математического ожидания, когда производится осреднение по y, необходимо учитывать зависимость $\tilde{x} = x(y)$.

Оценке эффективности в среднем соответствует понятие *оптимальности в среднем*: $\tilde{x}^0$ оптимальна в среднем на пространстве стратегий $\tilde{X}$, если

$$f_{\text{с}}(\tilde{x}^0) \geq f_{\text{с}}(\tilde{x}) \ \ \forall \tilde{x} \in \tilde{X}, \tag{B.4}$$

где $f_c(\tilde{x})$ определяется из (B.3).

В частности, для стратегий-констант x^0 оптимальна в среднем на пространстве стратегий X, если

$$f_{\text{с}}(x^0) \geq f_{\text{с}}(x) \ \ \forall x \in X. \tag{B.5}$$

Перейдем теперь к случаю неопределенных неконтролируемых факторов. Относительно неопределенного неконтролируемого фактора y исследователю операции известна только область его возможных значений Y, поэтому при применении стратегии x он может ожидать, что критерий примет произвольное значение в замкнутом интервале от $A = \min\limits_{y \in Y} F(x, y)$ до $B = \max\limits_{y \in Y} F(x, y)$ (для простоты будем считать, что максимумы и минимумы функций существуют, в противном случае нужно использовать верхние и нижние точные грани, т. е. супремумы и инфимумы, и там, где необходимо, вводить понятия приближенных ε-оптимальных стратегий). Значит оценка эффективности стратегии x по смыслу должна принадлежать отрезку $[A,\ B]$. Но как разумно выбрать на нем единственное число? Можно ли быть уверенным в том, что применение стратегии x в данной ситуации приведет к значению критерия эффективности больше A? Очевидно, нет. Только значение A можно гарантировать. Поэтому разумно взять это значение в качестве оценки эффективности стратегии x, т. е. положить

$$f_{\text{г}}(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)\,. \tag{В.6}$$

Такая оценка называется *гарантированной оценкой эффективности*. Этой оценке соответствует понятие *оптимальной гарантирующей стратегии*, т. е. такой x^0, для которой

$$f_{\text{г}}(x^0) \geq f_{\text{г}}(x) \quad \forall x \in X \tag{В.7}$$

или

$$\min_{y \in Y} F(x^0, y) \geq \min_{y \in Y} F(x, y)\ \forall x \in X. \tag{В.8}$$

Аналогично вводятся понятия гарантированной оценки эффективности и оптимальности в гарантированном смысле для стратегий-функций:

$$f_{\text{г}}(\tilde{x}) = \min_{y \in Y} F(x(y), y)\,,$$

$$f_{\text{г}}(\tilde{x}^0) \geq f_{\text{г}}(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}.$$

Величина

$$F_{\text{г}}(X) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y)$$

называется *максимальным гарантированным результатом* на множестве X (аналогично на $\tilde{X}$). В математике такое выражение принято называть максиминами или при перестановке процедур максимизации и минимизации — минимаксами.

Итак, мы привели только два наиболее распространенных принципа оптимальности. Следует иметь в виду, что в задачах принятия решений в условиях случайности (риска) и неопределенности существует множество принципов оптимальности.

В исследовании операций нет (и, по-видимому, не может быть) единого принципа оптимальности.

Мы познакомились с общей математической моделью операции и основной задачей исследования операций, состоящей в сравнении стратегий и выборе наилучшей из них в том или ином смысле. Эта задача для общей модели является слишком сложной, чтобы для нее можно было получить конкретные результаты. Поэтому в общем случае можно только говорить о принципах сравнения стратегий, связанных с выбором вида оценки эффективности, и соответствующих им понятиях оптимальности. Методы же нахождения оптимальных стратегий, без которых нельзя говорить о практическом использовании теории исследования операций, для общей модели не существуют. Поэтому в исследовании операций выделяют классы задач, представляющие собой частные случаи основной задачи, для которых такие методы могут быть созданы. При этом классификацию проводят по двум признакам: видам неконтролируемых факторов и видам критерия эффективности и пространства стратегий.

Наиболее простую группу задач исследования операций составляют такие задачи, в которых либо нет неконтролируемых факторов, либо имеются только фиксированные неконтролируемые факторы.

Раздел исследования операций, посвященный изучению подобных задач, называется математическим программированием, а сами задачи — *задачами математического программирования.*

Внутренняя классификация в подразделе математического программирования связана уже с видом критерия эффективности и пространства стратегий.

Если критерий эффективности представляет собой линейную функцию от переменных, описывающих стратегии, а пространство стратегий задается системой линейных ограничений, т. е. является многогранным множеством, то получающаяся задача называется *задачей линейного программирования.*

Если, исходя из содержательного смысла задачи, ее решения должны быть целыми числами, то получаем *задачу целочисленного программирования.*

Обычно в целочисленных задачах критерий и остальные ограничения (кроме условия целочисленности) предполагают линейными, поэтому целочисленные задачи можно отнести условно к линейному программированию.

Если критерий эффективности или ограничения, задающие пространство стратегий, являются нелинейными функциями, то имеем *задачу нелинейного программирования.* В частности, если критерий эффективности и пространство стратегий обладают свойствами выпуклости, то получающаяся задача называется *задачей выпуклого программирования.*

Если в задаче математического программирования имеется переменная времени и критерий эффективности выражается не в явном виде как функция от стратегий, а косвенно через уравнения, описывающие развитие процесса протекания операции во времени, то такая *задача* относится к *динамическому программированию.*

Линейное (включая целочисленное программирование), нелинейное (включая выпуклое программирование) и динамическое программирование составляют основные подразделы математического программирования.

При наличии неконтролируемых факторов более сложных видов (случайных и неопределенных) возникают другие классы задач. Если имеются неопределенные неконтролируемые факторы, то при использовании гарантированной оценки эффективности получаются максиминные (минимаксные) задачи. В целом такие задачи представляют собой обобщение задач математического (нелинейного) программирования, поэтому максиминные задачи в общем виде рассматриваются в гл. 1. Однако среди задач с неопределенными неконтролируемыми факторами наиболее интересными являются такие задачи, в которых неопределенность связана с действиями других разумных участников операции, преследующих свои цели. Раздел исследования операций, занимающийся изучением подобных задач, называется теорией игр.

Среди задач исследования операций со случайными, неконтролируемыми, факторами наиболее важны задачи массового обслуживания и задачи управления запасами. Эти задачи характеризуются определенным видом критериев эффективности, пространств стратегий и фигурирующих в них случайных величин, которые отражают их содержательный смысл.

Следует отметить, что практически всегда при принятии управленческих решений о функционировании и развитии объекта необходимо учитывать такую важную характеристику внешней среды как неопределенность. Под *неопределенностью* следует понимать отсутствие, неполноту, недостаточность информации об объекте, процессе, явлении или неуверенность в достоверности информации. Неопределенность обусловливает появление ситуаций, не имеющих однозначного исхода.

Под *ситуацией риска* следует понимать сочетание, совокупность различных обстоятельств и условий, создающих обстановку того или иного вида деятельности, для которой имеется возможность оценить вероятность осуществления того или иного исхода.

Таким образом, если существует возможность количественно определить вероятность того или иного варианта, то это и будет ситуация риска. С точки зрения полноты исходных данных определенность и неопределенность представляют два крайних случая, а риск определяет промежуточную ситуацию, в которой приходится принимать решение.

Степень неинформированности о данных определяет, каким образом задача формализуется и решается.

Основными видами оценки принимаемых решений в условиях риска являются:

- ожидаемое значение результата (математическое ожидание);
- ожидаемое значение результата в сочетании с минимизацией его дисперсии;
- доверительный интервал для получаемого результата;
- наиболее вероятное событие (исход) в будущем.

Математические модели исследуемых явлений или процессов могут включать совокупность (комплекс) частных критериев эффективности функционирования системы. Случай отсутствия единого критерия можно трактовать как принятие решений в условиях неопределенности цели. Выбор оптимального решения по комплексу нескольких критериев является задачей многокритериальной оптимизации.

В заключение отметим, что приведенный в конце книги список литературы можно рекомендовать для более полного овладения данным предметом.

Глава 1

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ СТАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1.1. Основные понятия теории экстремальных задач

При наличии только фиксированных неконтролируемых факторов задача поиска оптимальных решений сводится к экстремальной задаче. Если при этом на выбор стратегии не накладывается ограничений (что на практике встречается редко) или ограничения имеют вид только равенств, то применимы классические методы оптимизации.

Исходными данными при постановке задачи поиска экстремума является множество X и определенная на нем функция $f(x)$. Мы будем рассматривать конечномерные задачи, поэтому x является вектором произвольной размерности n, т. е. $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а множество X — подмножеством евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (возможно совпадающим со всем пространством). Помимо задания X (его называют допустимым множеством) и $f(x)$ (ее называют целевой функцией) необходимо определить, что понимается под решением задачи. Во-первых, речь может идти о нахождении точек максимума (одной или всех), минимума (одной или всех) или тех и других. Во-вторых, необходимо уточнить само понятие максимума (минимума), так как оно может пониматься в глобальном и локальном смысле.

Определение 1.1. Точка $x^* \in X$ называется ***точкой глобального*** (***абсолютного***) ***максимума*** функции $f(x)$ на множестве X, если

$$f(x^*) \geq f(x) \ \forall\, x \in X. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. Точка $x^* \in X$ называется ***точкой локального максимума*** функции $f(x)$ на множестве X, если $\exists\, \varepsilon > 0$, такое, что