TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

KHOA ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG

BÁO CÁO CUỐI KỲ CHUYÊN ĐỀ 2

Đề tài: Lập kế hoạch phân phối hàng hóa trong hệ thống logistics

Giáo viên hướng dẫn : **Nguyễn Văn Hiếu**

Sinh viên thực hiện:

Họ và Tên	Lớp	MSSV	Đóng Góp
Phan Văn Phước	21KTMT2	106210249	33%
Bùi Nhật Tân	21KTMT2	106210252	33%
Lê Minh Danh	21KTMT2	106210231	33%

Đà nẵng, ngày 15 tháng 12 năm 2025

Mục Lục

1. Giới thiệu

Logistics và phân phối hàng hóa là một bộ phận quan trọng của chuỗi cung ứng hiện đại, có ảnh hưởng trực tiếp đến chi phí vận hành và hiệu quả hoạt động của doanh nghiệp. Cùng với sự phát triển của thương mại điện tử và mạng lưới phân phối đa điểm, việc tổ chức và tối ưu hóa hoạt động vận chuyển ngày càng trở nên phức tạp, đòi hỏi các mô hình và phương pháp hỗ trợ ra quyết định có cơ sở khoa học.

Bài toán vận tải là mô hình nền tảng thường được sử dụng để mô tả hoạt động phân phối hàng hóa từ các nguồn cung đến các điểm tiêu thụ. Tuy nhiên, các mô hình truyền thống thường giả định chi phí vận chuyển tuyến tính theo lưu lượng, trong khi điều kiện vận hành thực tế cho thấy chi phí vận chuyển chịu ảnh hưởng của nhiều yếu tố phi tuyến. Việc xem xét chi phí có tính lồi cho phép mô hình hóa sát hơn các hiện tượng quá tải và suy giảm hiệu quả trong hệ thống logistics, qua đó nâng cao tính thực tiễn của các mô hình tối ưu hóa.

1.1. Bối cảnh và tính cấp thiết của bài toán

Trong thực tế, các hệ thống logistics thường được tổ chức dưới dạng mạng lưới gồm nhiều kho hàng với năng lực cung ứng khác nhau và nhiều điểm giao nhận có nhu cầu không đồng đều. Việc xác định phương án phân phối hợp lý từ các kho đến các điểm giao có vai trò quan trọng trong việc giảm chi phí vận hành và đảm bảo khả năng đáp ứng nhu cầu của hệ thống.

Một đặc điểm quan trọng của các hệ thống phân phối thực tế là chi phí vận chuyển không tăng tuyến tính theo lưu lượng hàng hóa. Khi lưu lượng trên một tuyến vận chuyển tăng lên, các hiện tượng như tắc nghẽn, gia tăng thời gian vận chuyển và phát sinh chi phí vận hành có xu hướng xuất hiện, làm cho chi phí biên tăng dần theo lưu lượng. Do đó, các mô hình vận tải tuyến tính truyền thống có thể đánh giá chưa chính xác chi phí thực tế và dẫn đến các phương án phân phối kém hiệu quả khi áp dụng vào điều kiện vận hành thực.

Việc mở rộng bài toán vận tải theo hướng xét đến chi phí lồi cho phép phản ánh chính xác hơn các đặc điểm của hệ thống logistics hiện đại. Tuy nhiên, điều này cũng làm gia tăng độ phức tạp của bài toán tối ưu, đặc biệt đối với các hệ thống có quy mô lớn. Vì vậy, việc nghiên cứu và giải quyết bài toán phân phối hàng hóa đa kho – đa điểm giao với chi phí lồi là cần thiết nhằm nâng cao khả năng ứng dụng của các mô hình tối ưu trong thực tiễn.

1.2. Mục tiêu

Mục tiêu của bài toán nghiên cứu trong báo cáo này là xây dựng và giải quyết một mô hình tối ưu cho bài toán phân phối hàng hóa đa kho – đa điểm giao trong điều kiện chi phí vận chuyển có tính lồi theo lưu lượng, nhằm xác định phương án phân phối sao cho tổng chi phí vận chuyển của toàn hệ thống là nhỏ nhất.

Bên cạnh mục tiêu tối ưu hóa chi phí, bài toán yêu cầu phải thỏa mãn các ràng buộc cơ bản của hệ thống phân phối, bao gồm giới hạn năng lực cung ứng tại các kho, yêu cầu về nhu cầu tại các điểm giao nhận và tính khả thi của các biến quyết định. Đồng thời, báo cáo tập trung đánh giá hiệu quả của các phương pháp giải khác nhau thông qua các tiêu chí như độ chính xác của nghiệm, thời gian tính toán và khả năng mở rộng khi quy mô hệ thống tăng

Trong phạm vi nghiên cứu, bài toán được xem xét với dữ liệu tĩnh và một loại hàng hóa duy nhất nhằm đảm bảo tính tập trung cho việc phân tích mô hình và phương pháp giải. Cách tiếp cận này có thể làm nền tảng cho các nghiên cứu mở rộng trong tương lai với các điều kiện vận hành phức tạp hơn.

1.3. Mô hình hệ thống và phạm vi nghiên cứu

Hệ thống được xem xét trong báo cáo này là một hệ thống phân phối hàng hóa gồm nhiều kho hàng và nhiều điểm giao nhận, trong đó các kho đóng vai trò là nguồn cung và các điểm giao nhận đại diện cho nhu cầu tiêu thụ. Hoạt động phân phối được mô hình hóa dưới dạng một mạng lưới vận tải, trong đó mỗi tuyến vận chuyển kết nối một kho với một điểm giao nhận và mang một lượng hàng hóa nhất định. Lượng hàng hóa vận chuyển trên mỗi tuyến được xem là biến quyết định của bài toán tối ưu.

Mô hình hệ thống giả định rằng năng lực cung ứng tại mỗi kho là hữu hạn và đã biết trước, trong khi nhu cầu tại các điểm giao nhận được xác định và cần được đáp ứng đầy đủ. Chi phí vận chuyển trên mỗi tuyến phụ thuộc vào lượng hàng hóa được phân phối và được mô hình hóa dưới dạng hàm lồi theo lưu lượng, nhằm phản ánh các hiện tượng quá tải và gia tăng chi phí biên trong điều kiện vận hành thực tế. Các yếu tố như thời gian vận chuyển, loại phương tiện hoặc nhiều loại hàng hóa khác nhau không được xét đến trong mô hình cơ bản, nhằm đảm bảo tính tập trung cho việc phân tích bài toán.

Trong phạm vi nghiên cứu, bài toán được xem xét với dữ liệu tĩnh, nghĩa là các tham số cung, cầu và chi phí không thay đổi theo thời gian. Hệ thống chỉ xét một loại hàng hóa duy nhất và không bao gồm các ràng buộc vận hành phức tạp như giới hạn phương tiện, khung thời gian giao hàng hay yếu tố ngẫu nhiên. Những giả định này cho phép tập trung đánh giá tác động của chi phí lồi đến cấu trúc bài toán và hiệu quả của các phương pháp giải được đề xuất.

Mặc dù phạm vi nghiên cứu được giới hạn như trên, mô hình hệ thống vẫn mang tính tổng quát và có thể được mở rộng trong các nghiên cứu tiếp theo. Các mở rộng tiềm năng bao gồm việc xét đến nhu cầu biến thiên theo thời gian, nhiều loại hàng hóa, hoặc các ràng buộc vận hành bổ sung. Tuy nhiên, trong khuôn khổ báo cáo này, trọng tâm được đặt vào việc xây dựng mô hình vận tải với chi phí lồi và phân tích hiệu quả của các phương pháp giải trong điều kiện đơn giản hóa, làm nền tảng cho các hướng nghiên cứu sâu hơn.

2. Mô tả & Giải quyết bài toán

2.1. Mô hình toán học

Xét một hệ thống phân phối hàng hóa gồm tập các kho hàng và tập các điểm giao nhận. Mỗi kho có năng lực cung ứng hữu hạn, trong khi mỗi điểm giao nhận có một mức nhu cầu xác định cần được đáp ứng. Hoạt động phân phối được thực hiện thông qua các tuyến vận chuyển kết nối trực tiếp từ kho đến điểm giao nhận, trong đó lượng hàng hóa vận chuyển trên mỗi tuyến là biến quyết định của bài toán.

Ký hiệu x_{ij} là lượng hàng hóa được vận chuyển từ kho iđến điểm giao nhận j. Tập các biến x_{ij} biểu diễn phương án phân phối của toàn hệ thống. Mục tiêu của bài toán là xác định các giá trị x_{ij} sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất, đồng thời thỏa mãn các ràng buộc về cung, cầu và tính khả thi.

Chi phí vận chuyển trên mỗi tuyến phụ thuộc vào lượng hàng hóa được phân phối và được mô hình hóa dưới dạng hàm lồi theo lưu lượng. Trong nghiên cứu này, chi phí trên tuyến (i, j) được biểu diễn dưới dạng hàm bậc hai lồi, bao gồm một thành phần tuyến tính và một thành phần bậc hai, nhằm phản ánh hiện tượng chi phí biên tăng dần khi lưu lượng vận chuyển tăng. Hàm mục tiêu của bài toán được biểu diễn như sau:

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i} \sum_{j} \left(c_{ij} x_{ij} + \alpha_{ij} x_{ij}^2 \right),$$

trong đó c_{ij} là hệ số chi phí tuyến tính và $\alpha_{ij} > 0$ là hệ số đặc trưng cho mức độ lồi của chi phí trên tuyến vận chuyển tương ứng.

Bài toán tối ưu được ràng buộc bởi các điều kiện về năng lực cung ứng tại các kho và nhu cầu tại các điểm giao nhận. Cụ thể, tổng lượng hàng hóa xuất từ mỗi kho không được vượt quá năng lực cung ứng của kho đó, trong khi tổng lượng hàng hóa nhận tại mỗi điểm giao nhận phải đáp ứng đúng nhu cầu đã xác định. Các ràng buộc này được biểu diễn lần lượt như sau:

$$\sum_j x_{ij} \leq S_i, \forall i,$$

$$\sum_i x_{ij} = D_j, \forall j,$$

trong đó $S_i$là năng lực cung ứng của kho i và D_j là nhu cầu tại điểm giao nhận j.

Ngoài ra, để đảm bảo tính hiện thực của phương án phân phối, các biến quyết định phải thỏa mãn điều kiện không âm:

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j.$$

Với hàm mục tiêu lồi và các ràng buộc tuyến tính, bài toán phân phối hàng hóa được mô hình hóa dưới dạng một bài toán tối ưu lồi, cụ thể là bài toán quy hoạch bậc hai lồi. Đặc điểm này đảm bảo sự tồn tại của nghiệm tối ưu toàn cục và tạo cơ sở cho việc áp dụng các phương pháp giải hiệu quả.

2.2. Đặc điểm và tính chất của bài toán

Bài toán phân phối hàng hóa được mô hình hóa là một bài toán tối ưu lồi, trong đó hàm mục tiêu là tổng các hàm chi phí lồi theo lưu lượng vận chuyển trên từng tuyến. Tính lồi của hàm mục tiêu đảm bảo sự tồn tại của nghiệm tối ưu toàn cục và loại bỏ khả năng xuất hiện các nghiệm tối ưu cục bộ không mong muốn.

Tập ràng buộc của bài toán bao gồm các ràng buộc tuyến tính về cung, cầu và điều kiện không âm của các biến quyết định. Tập ràng buộc này là một tập lồi, phản ánh không gian các phương án phân phối khả thi của hệ thống. Do đó, bài toán có thể được phân loại là một bài toán quy hoạch bậc hai lồi.

Bên cạnh đó, bài toán có cấu trúc mạng với chi phí tách rời theo từng tuyến vận chuyển, cho phép xem xét bài toán như một trường hợp của bài toán dòng chi phí lồi trên mạng. Đặc điểm này tạo điều kiện thuận lợi cho việc triển khai các phương pháp giải phù hợp trong các hệ thống phân phối có quy mô lớn.

2.3. Phương pháp giải bài toán

Bài toán phân phối hàng hóa với chi phí lồi được mô hình hóa thuộc lớp bài toán quy hoạch bậc hai lồi (*Convex Quadratic Programming – CQP*) với các ràng buộc tuyến tính. Đối với lớp bài toán này, các phương pháp tối ưu dựa trên phương pháp bậc nhất (*First-order methods*) và phương pháp nhân tử Lagrange tăng cường (*Augmented Lagrangian methods*) đặc biệt phù hợp khi kích thước bài toán lớn và cấu trúc ma trận thưa.

Trong nghiên cứu này, bài toán được giải bằng phương pháp dựa trên Bộ giải OSQP (*Operator Splitting Quadratic Program*), sử dụng khung thuật toán Phương pháp nhân tử luân phiên có điều chỉnh (*Alternating Direction Method of Multipliers – ADMM*). Phương pháp này được lựa chọn làm phương pháp chính do phù hợp với cấu trúc lồi và mạng của bài toán.

2.3.1. Biểu diễn bài toán dưới dạng quy hoạch bậc hai chuẩn

Từ mô hình bài toán, các biến quyết định x_{ij}được gom lại thành một vector:

$$x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó n là tổng số tuyến vận chuyển trong hệ thống.

Bài toán được viết lại dưới dạng chuẩn của quy hoạch bậc hai lồi như sau:

$$\min_x \quad \frac{1}{2}x^\top Px + q^\top x \mid \text{s.t. } l \le Ax \le u.$$

Trong đó:

- $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng nửa xác định dương, phản ánh thành phần chi phí lồi,
- $q \in \mathbb{R}^n$là vector hệ số chi phí tuyến tính,
- A là ma trận ràng buộc tuyến tính,

- l, u lần lượt là các cận dưới và cận trên của ràng buộc.

Do chi phí trên mỗi tuyến vận chuyển là hàm lồi tách rời theo lưu lượng, ma trận P có dạng đường chéo, giúp giảm độ phức tạp tính toán. Các ràng buộc cung, cầu và điều kiện không âm được biểu diễn thống nhất thông qua bất đẳng thức hai biên $l \leq Ax \leq u$.

2.3.2. Tách biến và hàm Lagrange tăng cường

Để áp dụng Phương pháp nhân tử luân phiên có điều chỉnh (ADMM), bài toán được tách biến bằng cách giới thiệu biến phụ z:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x,z} & \frac{1}{2} x^\top P x + q^\top x \\ \text{s.t.} & Ax - z = 0, \\ & l \leq z \leq u. \end{array}$$

Hàm Lagrange tăng cường của bài toán được xác định như sau:

$$\mathcal{L}_\rho(x, z, y) = \frac{1}{2} x^\top P x + q^\top x + y^\top (Ax - z) + \frac{\rho}{2} \| Ax - z \|_2^2,$$

trong đó:

- y là biến đối ngẫu,
- $\rho > 0$ là tham số phạt (*penalty parameter*).

2.3.3. Các bước cập nhật trong thuật toán ADMM

Tại vòng lặp thứ $k + 1$, các biến được cập nhật lần lượt như sau.

Bước 1: Cập nhật biến nguyên thủy

Biến x^{k+1} được xác định bằng nghiệm của bài toán:

$$x^{k+1} = \arg \min_x \mathcal{L}_\rho(x, z^k, y^k).$$

Giải bài toán này dẫn đến hệ phương trình tuyến tính:

$$(P + \rho A^\top A) x^{k+1} = -q + \rho A^\top (z^k - y^k).$$

Do $P + \rho A^{\top} A$ là ma trận đối xứng xác định dương, hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Cập nhật biến phụ

Biến z^{k+1} được cập nhật bằng cách giải:

$$z^{k+1} = \arg \min_{l \le z \le u} \frac{\rho}{2} \| Ax^{k+1} - z + y^k \|_2^2.$$

Bài toán trên có nghiệm dạng đóng, tương ứng với phép chiếu trực giao:

$$z^{k+1} = \Pi_{[l,u]}(Ax^{k+1} + y^k),$$

trong đó phép chiếu được xác định theo từng thành phần:

$$\left[\Pi_{[l,u]}(v)\right]_i = \min(\max(v_i, l_i), u_i).$$

Bước 3: Cập nhật biến đối ngẫu

Biến đối ngẫu được cập nhật theo công thức:

$$y^{k+1} = y^k + (Ax^{k+1} - z^{k+1}).$$

2.3.4. Nhận xét về cơ chế hoạt động

Phương pháp dựa trên OSQP (Operator Splitting Quadratic Program) phân rã bài toán tối ưu lồi ban đầu thành một chuỗi các phép toán gồm giải hệ tuyến tính và phép chiếu lên tập hộp. Cơ chế này đặc biệt hiệu quả đối với các bài toán có cấu trúc thưa và chi phí tách rời theo từng biến, như bài toán phân phối hàng hóa với chi phí lồi.

2.4. Phương pháp giải bài toán bằng Interior Point Method (IPM) – Mehrotra Predictor–Corrector

Bài toán phân phối hàng hóa với chi phí lồi sau khi mô hình hóa thuộc lớp quy hoạch bậc hai lồi (Convex Quadratic Programming – CQP) với các ràng buộc tuyến tính. Đối với lớp bài toán này, bên cạnh các phương pháp bậc nhất, nhóm phương pháp nội điểm (Interior Point Methods – IPM) là lựa chọn hiệu quả khi yêu cầu nghiệm có độ chính xác cao, do khả năng hội tụ nhanh theo số vòng lặp và thỏa mãn chặt chẽ các điều kiện tối ưu Karush–Kuhn–Tucker (KKT).

Trong nghiên cứu này, bài toán được giải bằng Interior Point Method theo sơ đồ Mehrotra Predictor–Corrector, khai thác cấu trúc ma trận thưa và chi phí lồi để giải hệ tuyến tính KKT ở mỗi vòng lặp Newton.

2.4.1. Biểu diễn bài toán dưới dạng quy hoạch bậc hai chuẩn

Từ mô hình bài toán, các biến quyết định x_{ij}được gom lại thành một vector:

$$x \in \mathbb{R}^E,$$

trong đó E là tổng số tuyến vận chuyển hợp lệ (tương ứng số dòng trong cost_params.csv).

Bài toán được đưa về dạng chuẩn:

$$\begin{aligned} &\min_x \quad \frac{1}{2} x^T P x + q^T x \\ &\text{s.t. } Ax = b, Gx \le h. \end{aligned}$$

Trong đó:

- $P \succeq 0$ là ma trận đối xứng nửa xác định dương (trong bài toán này Pđường chéo do chi phí tách rời theo từng tuyến),
- q là vector chi phí tuyến tính,
- A biểu diễn ràng buộc cầu (đẳng thức),
- G biểu diễn ràng buộc cung và không âm (bất đẳng thức),
- b, h là các vector biên.

Với bài toán vận tải:

- $Ax = b$: tổng hàng đến mỗi điểm nhận bằng nhu cầu,
- $Gx \le h$: tổng hàng xuất từ mỗi kho không vượt cung, và $x \ge 0$được biểu diễn qua $-Ix \le 0$.

2.4.2. Đưa bất đẳng thức về dạng đẳng thức bằng biến slack

Để áp dụng IPM, các ràng buộc bất đẳng thức được **biểu diễn lại** thông qua biến slack $s \geq 0$:

$$Gx + s = h, s \geq 0.$$

Đồng thời, gán biến đối ngẫu $z \geq 0$ cho ràng buộc này. Khi đó, hệ điều kiện KKT của bài toán có dạng:

- **Điều kiện dừng (stationarity)**:

$$Px + q + A^T y + G^T z = 0,$$

- **Khả thi nguyên thủy (primal feasibility)**:

$$Ax = b, Gx + s = h,$$

- **Khả thi đối ngẫu (dual feasibility)**:

$$z \geq 0,$$

- **Bù trừ (complementarity)**:

$$Sz = 0,$$

với $S = \mathrm{diag}(s)$. Trong IPM, điều kiện bù trừ được thay bằng dạng "hàng rào":

$$Sz \approx \mu \mathbf{1},$$

trong đó $\mu > 0$ giảm dần về 0.

2.4.3. Hệ phương trình Newton (KKT) và bước cập nhật

Tại vòng lặp thứ k, thuật toán tính các residual:

- Residual đối ngẫu:

$$r_{dual} = Px^k + q + A^T y^k + G^T z^k,$$

- Residual nguyên thủy đẳng thức:

$$r_{pri,eq} = Ax^k - b,$$

- Residual nguyên thủy bất đẳng thức:

$$r_{pri,in} = Gx^k + s^k - h,$$

- Tham số hàng rào:

$$\mu = \frac{(s^k)^T z^k}{p},$$

với p là số ràng buộc bất đẳng thức.

Sau đó, phương pháp Newton giải hệ tuyến tính để tìm hướng cập nhật
(dx, dy, ds, dz)từ hệ:

$$\begin{aligned}
&Pdx + A^T dy + G^T dz = -r_{dual},\\
&Adx = -r_{pri,eq},\\
&Gdx + ds = -r_{pri,in},\\
&Zds + Sdz = -r_{cent},
\end{aligned}$$

trong đó $Z = \mathrm{diag}(z)$, và r_{cent}là residual trung tâm (phụ thuộc predictor/corrector).

Trong hiện thực, hệ được khử ds, dz để thu được hệ yên ngựa (saddle-point):

$$\begin{aligned}
&\left(P + G^T \mathrm{diag}\left(\frac{Z}{S}\right) G\right) dx + A^T dy = \text{rhs},\\
&Adx \text{ (kèm regularization)} = -r_{pri,eq}.
\end{aligned}$$

Do bài toán có cấu trúc thưa, hệ KKT được giải bằng phương pháp giải thưa (sparse solve) tại mỗi vòng lặp.

2.4.4. Cơ chế Mehrotra Predictor–Corrector và lựa chọn bước

Thuật toán sử dụng chiến lược Predictor–Corrector nhằm tăng tốc hội tụ:

- Bước dự đoán (affine predictor): giải hệ KKT với $r_{cent} = s \circ z$ để ước lượng hướng đi nhanh về nghiệm.
- Từ nghiệm affine, tính μ_{aff}và tham số:

$$\sigma = \left(\frac{\mu_{aff}}{\mu}\right)^3,$$

giúp điều chỉnh mức bám theo "central path".

- Bước hiệu chỉnh (corrector): giải lại hệ KKT với:

$$r_{cent} = s \circ z + (ds_{aff} \circ dz_{aff}) - \sigma\mu 1,$$

để cân bằng giữa giảm residual và duy trì tính dương của s, z.

Sau khi có hướng cập nhật, bước đi α được chọn theo quy tắc step-to-boundary để đảm bảo:

$$s^{k+1} = s^k + \alpha ds > 0, z^{k+1} = z^k + \alpha dz > 0,$$

và thường lấy $\alpha = \min(\alpha_{pri}, \alpha_{dual})$với hệ số an toàn (fraction-to-boundary).

2.4.5. Tiêu chuẩn dừng và nhận xét về cơ chế hoạt động

Thuật toán dừng khi đồng thời thỏa mãn các điều kiện (dạng thực dụng theo chuẩn vô cùng):

- Sai số đẳng thức nhỏ:

$$\| Ax - b \|_\infty \le \varepsilon_{eq},$$

- Không vi phạm bất đẳng thức:

$$\max(0, Gx - h)_\infty \le \varepsilon_{in},$$

- Sai số đối ngẫu nhỏ:

$$\| Px + q + A^T y + G^T z \|_\infty \le \varepsilon_{dual}.$$

Về cơ chế, IPM giải bài toán bằng cách tiến dần tới nghiệm tối ưu từ bên trong miền khả thi (duy trì $s > 0, z > 0$) và giảm dần μ về 0. Phương pháp này thường đạt nghiệm có độ chính xác cao và thỏa mãn chặt chẽ điều kiện KKT, đổi lại mỗi vòng lặp yêu cầu giải một hệ tuyến tính KKT thưa có kích thước lớn.

2.5. Độ phức tạp tính toán và tốc độ hội tụ thuật toán ADMM

2.5.1. Độ phức tạp tính toán mỗi vòng lặp

Trong thuật toán Phương pháp nhân tử luân phiên có điều chỉnh (Alternating Direction Method of Multipliers – ADMM) được sử dụng trong OSQP (Operator Splitting Quadratic Program), chi phí tính toán tại mỗi vòng lặp bao gồm ba bước chính tương ứng với các công thức cập nhật

Bước cập nhật biến nguyên thủy yêu cầu giải hệ phương trình tuyến tính:

$$(P+\rho A^\top A)x^{k+1} = -q + \rho A^\top (z^k - y^k).$$

Giả sử:

- n là số biến quyết định,
- m là số ràng buộc tuyến tính,
- A là ma trận thưa với $\mathrm{nnz}(A)$ phần tử khác 0,

thì chi phí:

- phân rã ma trận $P + \rho A^\top A$:

$$\mathcal{O}(\mathrm{nnz}(P + \rho A^\top A)^{3/2}),$$

thực hiện một lần duy nhất trước khi lặp,

- giải hệ tuyến tính mỗi vòng lặp:

$$\mathcal{O}(\mathrm{nnz}(P + \rho A^\top A)).$$

Bước cập nhật biến phụ được thực hiện bằng phép chiếu:

$$z^{k+1} = \Pi_{[l,u]}(Ax^{k+1} + y^k),$$

có độ phức tạp:

$$\mathcal{O}(m),$$

do phép chiếu được áp dụng độc lập theo từng thành phần.

Bước cập nhật biến đối ngẫu:

$$y^{k+1} = y^k + (Ax^{k+1} - z^{k+1}),$$

có độ phức tạp:

$$\mathcal{O}(m).$$

Như vậy, chi phí tính toán mỗi vòng lặp của thuật toán ADMM trong OSQP chủ yếu phụ thuộc vào phép giải hệ tuyến tính thưa và các phép toán tuyến tính với ma trận A.

2.5.2. Độ phức tạp tổng thể

Gọi Klà số vòng lặp cần thiết để đạt tiêu chuẩn dừng, độ phức tạp tổng thể của thuật toán có thể xấp xỉ:

$$\mathcal{O}(\mathrm{nnz}(P + \rho A^\top A)^{3/2} + K \cdot \mathrm{nnz}(P + \rho A^\top A)).$$

Do P là ma trận đường chéo và A là ma trận thưa có cấu trúc mạng, số phần tử khác 0 của $P + \rho A^\top A$ tăng gần tuyến tính theo quy mô bài toán, cho phép thuật toán mở rộng hiệu quả khi số kho và số điểm giao nhận tăng.

2.5.3. Tiêu chuẩn hội tụ

Thuật toán ADMM được xem là hội tụ khi đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau:

Sai số nguyên thủy (*Primal residual*):

$$r_{\mathrm{pri}}^k = \| Ax^k - z^k \|_2 \leq \varepsilon_{\mathrm{pri}},$$

Sai số đối ngẫu (*Dual residual*):

$$r_{\mathrm{dual}}^k = \| \rho A^\top (z^k - z^{k-1}) \|_2 \leq \varepsilon_{\mathrm{dual}}.$$

Trong đó các ngưỡng được xác định theo:

$$\varepsilon_{\mathrm{pri}} = \sqrt{m}\, \varepsilon_{\mathrm{abs}} + \varepsilon_{\mathrm{rel}} \max\{\| Ax^k \|_2, \| z^k \|_2\},$$
$$\varepsilon_{\mathrm{dual}} = \sqrt{n}\, \varepsilon_{\mathrm{abs}} + \varepsilon_{\mathrm{rel}} \| \rho A^\top y^k \|_2.$$

2.5.4. Đặc điểm hội tụ của thuật toán

Đối với bài toán quy hoạch bậc hai lồi với tập ràng buộc lồi, thuật toán ADMM đảm bảo hội tụ về nghiệm tối ưu toàn cục. Tuy nhiên, giá trị hàm mục tiêu:

$$f(x^k) = \frac{1}{2}(x^k)^\top P x^k + q^\top x^k$$

không nhất thiết giảm đơn điệu theo số vòng lặp k, do thuật toán tối ưu hóa **hàm** Lagrange tăng cường thay vì hàm mục tiêu gốc. Trong khi đó, các đại lượng r_{pri}và r_{dual} có xu hướng giảm dần và là chỉ báo chính cho quá trình hội tụ.

2.5.5. Ảnh hưởng của tham số phạt

Tham số phạt ρ ảnh hưởng trực tiếp đến tốc độ hội tụ của thuật toán. Giá trị ρ quá nhỏ có thể làm giảm tốc độ giảm của sai số nguyên thủy, trong khi giá trị ρ quá lớn có thể dẫn đến sai số đối ngẫu lớn. Việc lựa chọn ρ phù hợp giúp cân bằng hai loại sai số và cải thiện hiệu quả hội tụ của thuật toán.

2.6. Độ phức tạp tính toán và tốc độ hội tụ thuật toán IPM (Mehrotra PC)

2.6.1. Độ phức tạp tính toán mỗi vòng lặp

Bài toán QP được đưa về dạng chuẩn:

$$\min \quad \frac{1}{2}x^T P x + q^T x$$

s.t. $Ax = b$(đẳng thức – demand)

$Gx \leq h$ (bất đẳng thức – supply + không âm)

Trong IPM, ta đưa bất đẳng thức về dạng có slack $s > 0$:

$$Gx + s = h, s \geq 0$$

và gán biến đối ngẫu $z \geq 0$ cho ràng buộc này.

Mỗi vòng lặp Newton gồm các bước chính:

(1) Tính residual/KKT và tham số trung tâm

- Residual đối ngẫu:

$$r_{dual} = Px + q + A^T y + G^T z$$

- Residual nguyên thủy đẳng thức:

$$r_{pri,eq} = Ax - b$$

- Residual nguyên thủy bất đẳng thức (sau khi thêm slack):

$$r_{pri,in} = Gx + s - h$$

- Tham số hàng rào (barrier):

$$\mu = \frac{s^T z}{p}$$

với $p = m + E$

Chi phí bước này chủ yếu là nhân ma trận thưa:

- Px: do P đường chéo ⇒ $O(nnz(P)) \approx O(E)$
- $Ax, A^T y$: $O(nnz(A))$
- $Gx, G^T z$: $O(nnz(G))$

(2) Giải hệ KKT (Newton system) – bước tốn nhất

Newton theo dạng khối (saddle-point) sau khi khử ds, dz:

$$\left(P + G^T \mathrm{diag}\left(\frac{Z}{S}\right) G\right) dx + A^T dy = -r_{dual} - G^T v$$
$$Adx - \mathrm{REG\_A}\ dy = -r_{pri,eq}$$

Trong đó:

- $w = \frac{z}{s}$ (từng phần tử) và $W = \mathrm{diag}(w)$
- $H = P + G^T W G$

Sau đó giải hệ thưa:

$$K\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rhs_1 \\ rhs_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} H & A^T \\ A & -\text{REG\_A}I \end{bmatrix}$$

Độ phức tạp vòng lặp chủ yếu phụ thuộc vào việc giải hệ tuyến tính thưa (spsolve – sparse direct solve). Gọi:

- E: số biến (số cạnh hợp lệ trong cost_params.csv)
- n: số ràng buộc đẳng thức (số customer)
- p: số bất đẳng thức (supply + nonneg)
- $nnz(\cdot)$: số phần tử khác 0

thì:

Việc lắp ráp các ma trận và thực hiện các phép nhân ma trận–vector trong mỗi vòng lặp có độ phức tạp:

$$O(\text{nnz}(A) + \text{nnz}(G) + \text{nnz}(P)),$$

trong đó nnz(·) là số phần tử khác không của ma trận tương ứng.

Bước tốn chi phí tính toán chủ yếu trong mỗi vòng lặp là giải hệ phương trình tuyến tính KKT thưa. Với phương pháp giải trực tiếp cho hệ thưa (sparse direct solver), chi phí tính toán phụ thuộc vào hiện tượng fill-in trong quá trình phân rã ma trận và thường được ước lượng theo dạng:

- chi phí phân rã: $O(\text{nnz}(K)^{3/2})$(ước lượng kinh nghiệm đối với các bài toán thưa có cấu trúc),
- chi phí thế tiến và thế ngược: $O(\text{nnz}(K))$.

Trong hiện thực thuật toán theo sơ đồ Mehrotra Predictor–Corrector, mỗi vòng lặp Newton yêu cầu hai lần giải hệ KKT thưa: một lần cho bước predictor (affine) và một lần cho bước corrector. Do đó, chi phí giải hệ tuyến tính trong một vòng lặp Newton tương ứng tăng lên và chiếm phần lớn tổng chi phí tính toán của thuật toán.

(3) Cập nhật bước và đảm bảo dương tính (step-to-boundary)

- Tính α sao cho $s + \alpha ds > 0$ và $z + \alpha dz > 0$

- Cập nhật:

$$x \leftarrow x + \alpha dx,\ y \leftarrow y + \alpha dy,\ s \leftarrow s + \alpha ds,\ z \leftarrow z + \alpha dz$$

Bước này chủ yếu là phép toán vector: $O(E + n + p)$.

Kết luận chi phí mỗi vòng lặp: chủ đạo là giải hệ KKT thưa (sparse linear solve), các bước còn lại là nhân ma trận thưa và toán vector.

2.6.2. Độ phức tạp tổng thể

Gọi K là số vòng lặp Newton, tổng chi phí xấp xỉ:

$$O(K \cdot (\text{cost\_solve}(KKT) + nnz(A) + nnz(G)))$$

Với sparse direct solve, có thể mô tả gần đúng:

$$O(K \cdot nnz(K)^{3/2})$$

Do bài toán vận tải có ma trận A, G rất thưa và có cấu trúc mạng (mỗi biến x_{ij} xuất hiện trong đúng 1 phương trình demand và 1 phương trình supply, cộng thêm hàng "-I" cho không âm), nên $nnz(A), nnz(G)$ tăng gần tuyến tính theo E. Tuy nhiên, chi phí giải KKT vẫn phụ thuộc mạnh vào fill-in khi phân rã (đây là lý do IPM "mỗi vòng đắt hơn ADMM", nhưng thường cần ít vòng hơn).

2.6.3. Tiêu chuẩn hội tụ (stopping criteria)

Ta dùng tiêu chuẩn dừng "thực dụng" (practical) dựa trên chuẩn vô cùng (inf-norm) và mức vi phạm bất đẳng thức:

- Sai số đẳng thức (demand):

$$\| r_{pri,eq} \|_\infty = \| Ax - b \|_\infty \le \text{STOP\_EQ}$$

- Vi phạm bất đẳng thức (supply / nonneg):

$$\max(0, (Gx - h))_\infty \le \text{STOP\_IN}$$

- Sai số đối ngẫu:

$$\| r_{dual} \|_\infty \le \text{STOP\_DUAL}$$

Ngoài ra, IPM theo lý thuyết còn theo dõi complementarity:

$$\mu = \frac{s^T z}{p} \to 0$$

2.6.4. Đặc điểm hội tụ của thuật toán

Với QP lồi ($P \succeq 0$) và tập ràng buộc lồi, IPM hội tụ về nghiệm tối ưu toàn cục (nếu bài toán khả thi và điều kiện chuẩn thỏa).

Đặc trưng hội tụ của Mehrotra Predictor–Corrector:

- Không tối ưu trực tiếp $f(x)$ theo kiểu giảm đơn điệu. Mục tiêu chính là đưa nghiệm tiến dần về điều kiện KKT:
  - giảm $\| r_{pri,eq} \|$, $\| r_{pri,in} \|$, $\| r_{dual} \|$
  - đồng thời giảm μ (đẩy $s_i z_i \to 0$)
- Vì dùng Predictor–Corrector:
  - bước affine ước lượng "đi nhanh về biên"
  - sau đó chọn σđể kéo nghiệm về central path ổn định hơn
    ⇒ thường hội tụ nhanh hơn IPM chuẩn (không corrector).

Trong thực nghiệm, IPM thường đạt nghiệm chất lượng cao với số vòng lặp nhỏ , đổi lại mỗi vòng phải giải hệ KKT lớn.

2.6.5. Ảnh hưởng của tham số và ổn định số

Các tham số trong code ảnh hưởng trực tiếp đến tốc độ hội tụ và độ ổn định:

(1) Step-to-boundary ALPHA_FRACTION

- Chọn α sao cho vẫn giữ $s > 0, z > 0$.
- Nếu quá sát 1 có thể gây dao động/sai số số học khi s, z rất nhỏ.
- Nếu nhỏ quá ⇒ bước ngắn ⇒ tăng số vòng lặp.

(2) Regularization REG_H, REG_A

- Thêm vào để tránh hệ KKT bị singular/ill-conditioned (đặc biệt khi μ nhỏ hoặc dữ liệu gây suy biến).
- Tác dụng: tăng độ ổn định giải spsolve.

- Đổi lại: nghiệm có thể bị “lệch rất nhỏ” so với nghiệm lý thuyết, nhưng thường trong ngưỡng chấp nhận cho tính toán số.

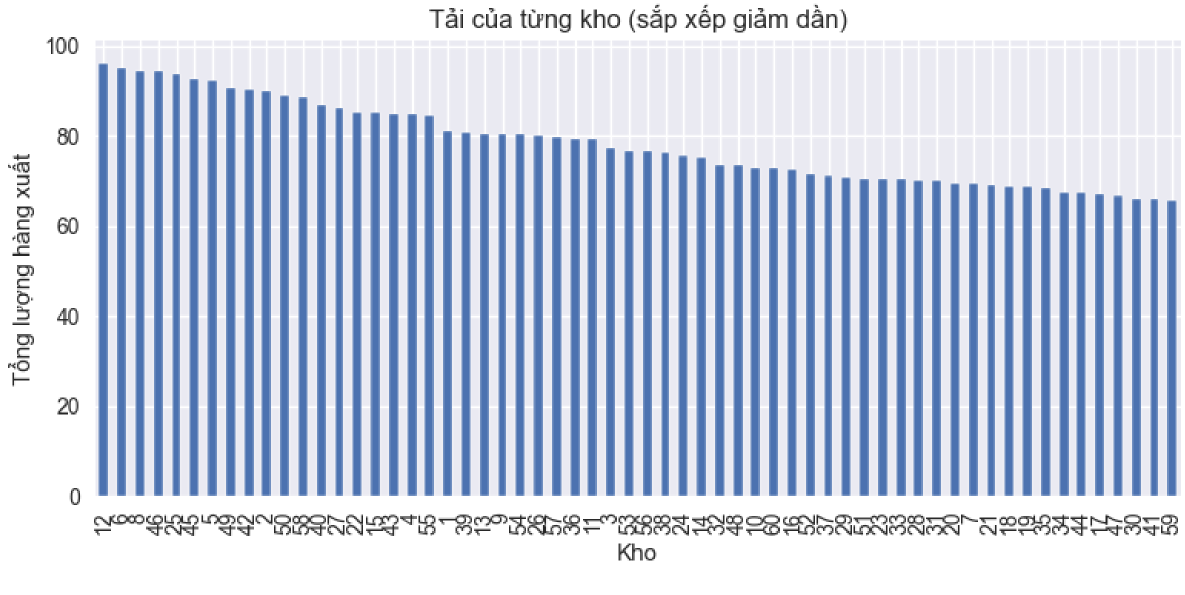
(3) Ngưỡng dừng STOP_EQ, STOP_IN, STOP_DUAL

- Ngưỡng càng chặt ⇒ nghiệm càng đẹp nhưng cần nhiều vòng hơn và dễ gặp vấn đề điều kiện số khi tiến sâu.
- Đặt STOP_DUAL lớn hơn 1 chút so với eq/in (1e-7 vs 1e-9) để thực dụng.

3. Phân tích kết quả

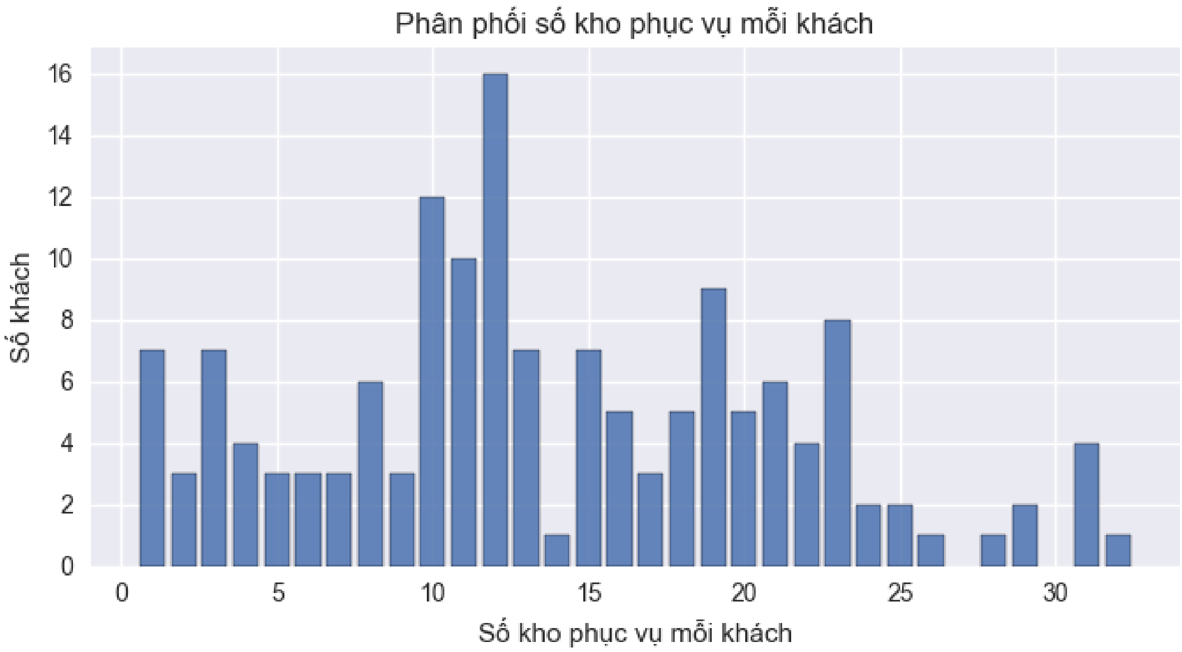
3.1. Mô tả kết quả và trực quan hóa nghiệm

Sau khi giải bài toán phân phối hàng hóa đa kho – đa điểm giao với chi phí lồi bằng phương pháp OSQP, nghiệm thu được thể hiện dưới dạng lưu lượng vận chuyển trên các tuyến giữa kho và điểm giao nhận. Để phục vụ việc quan sát và đánh giá cấu trúc nghiệm, kết quả được tổng hợp và trực quan hóa thông qua nhiều dạng biểu đồ khác nhau, phản ánh cách thức phân bổ hàng hóa trong toàn hệ thống.



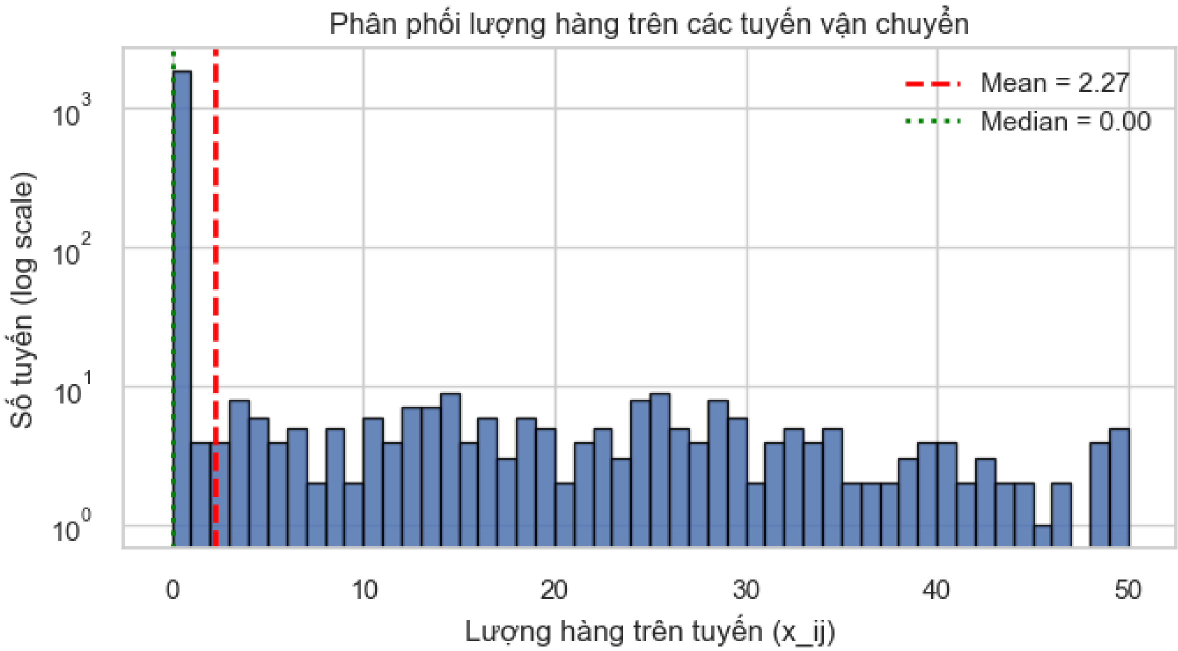
Hình1: Biểu đồ thể hiện cách thức phân bổ hàng hóa trong toàn hệ thống.

Trước hết, tổng lượng hàng xuất từ mỗi kho được tổng hợp và sắp xếp theo thứ tự giảm dần. Biểu đồ này cho phép quan sát mức độ sử dụng của các kho trong phương án phân phối thu được, qua đó cho thấy cách thuật toán phân bổ tải giữa các kho và kiểm tra việc tuân thủ các ràng buộc về năng lực cung ứng. Kết quả cho thấy không xuất hiện hiện tượng một kho bị khai thác vượt trội hoặc không hợp lý so với các kho còn lại, phản ánh tính cân bằng trong nghiệm phân phối.



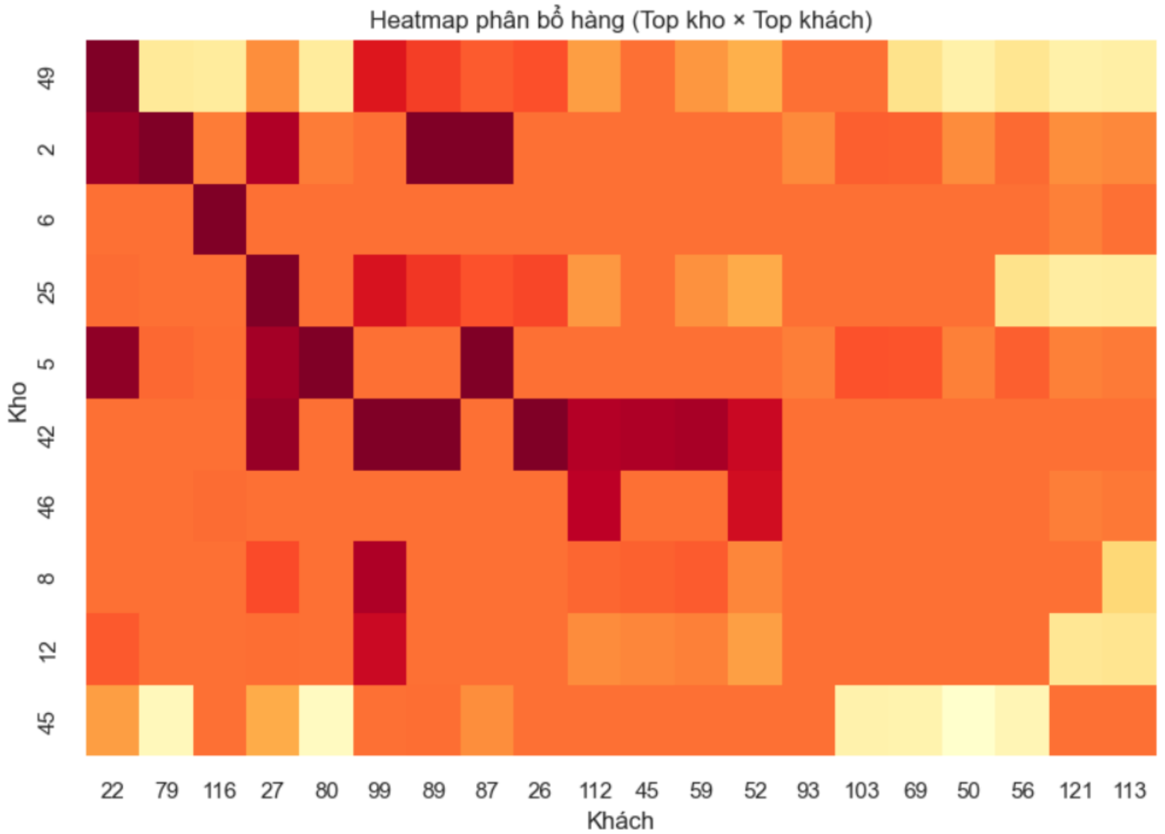
Hình 2: Biểu đồ phân phố số kho phục vụ mỗi khách

Tiếp theo, cấu trúc phục vụ của các điểm giao nhận được thể hiện thông qua phân phối số lượng kho tham gia cung ứng cho mỗi khách hàng. Biểu đồ này phản ánh mức độ phân tán của nguồn cung trong nghiệm thu được, đồng thời cho thấy ảnh hưởng của chi phí lồi trong việc hạn chế việc dồn toàn bộ nhu cầu của một khách hàng vào một kho duy nhất. Cách phân bổ này phù hợp với đặc điểm vận hành thực tế của hệ thống logistics, trong đó việc đa dạng hóa nguồn cung giúp tăng tính ổn định và giảm rủi ro quá tải.



Hình 3: Biểu đồ phân phối lưu lượng trên toàn bộ tuyến

Phân bố lưu lượng trên toàn bộ các tuyến vận chuyển được trực quan hóa thông qua biểu đồ tần suất của các giá trị lưu lượng. Kết quả cho thấy phần lớn các tuyến có lưu lượng bằng không hoặc rất nhỏ, trong khi chỉ một số tuyến được sử dụng với lưu lượng đáng kể. Đặc điểm này phản ánh tính thưa của nghiệm, cho thấy thuật toán ưu tiên sử dụng một tập con các tuyến hiệu quả nhất nhằm giảm tổng chi phí vận chuyển, đồng thời loại bỏ các tuyến kém hiệu quả trong phương án phân phối.



Hình 4: Biểu đồ phân bổ hàng

Để quan sát chi tiết hơn mối quan hệ phân phối giữa các kho và các khách hàng có lưu lượng lớn, một phần nghiệm được biểu diễn dưới dạng bản đồ nhiệt. Biểu đồ này cho phép nhận diện trực quan các cặp kho – khách hàng đóng vai trò chính trong phương án phân phối, đồng thời hỗ trợ kiểm tra sự phân bố hợp lý của lưu lượng trong nghiệm thu được.

Các kết quả trực quan nêu trên cung cấp cái nhìn tổng quát về cấu trúc và đặc điểm của nghiệm phân phối do phương pháp OSQP tạo ra.

3.2. Metrics & thông số đánh giá

Quá trình giải bài toán phân phối hàng hóa với chi phí lồi bằng phương pháp OSQP (Operator Splitting Quadratic Program) được đánh giá thông qua các metrics thu thập trong suốt quá trình lặp của thuật toán ADMM, bao gồm giá trị hàm mục tiêu, sai số nguyên thủy, sai số đối ngẫu, số vòng lặp hội tụ và thời gian tính toán. Các metrics này cho phép đánh giá đồng thời chất lượng nghiệm, mức độ thỏa mãn ràng buộc và hành vi hội tụ của thuật toán.

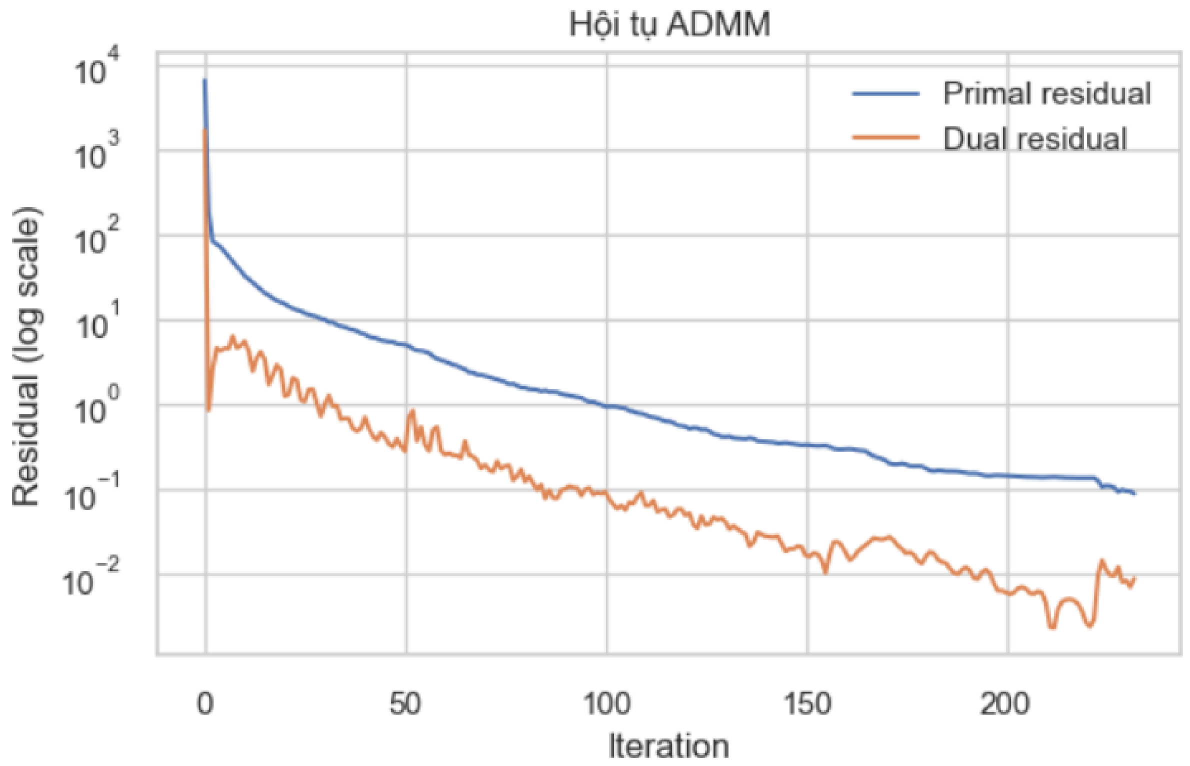
Diễn biến của giá trị hàm mục tiêu theo số vòng lặp cho thấy thuật toán có giai đoạn quá độ rõ rệt ở các vòng lặp đầu. Cụ thể, tại vòng lặp ban đầu, giá trị hàm mục tiêu có độ lớn rất lớn và mang giá trị âm, phản ánh nghiệm khởi tạo chưa nằm trong miền khả thi của bài toán. Khi thuật toán tiến hành cập nhật các biến, giá trị hàm mục tiêu tăng nhanh và chuyển sang miền dương sau khoảng vài trăm vòng lặp, cho thấy nghiệm dần tiến vào miền thỏa mãn ràng buộc. Trong các vòng lặp tiếp theo, giá trị hàm mục tiêu dao động nhẹ nhưng có xu hướng ổn định và hội tụ quanh giá trị xấp xỉ 5.13×10^4 tại thời điểm thuật toán dừng. Hiện tượng dao động nhỏ của hàm mục tiêu là đặc trưng của phương pháp OSQP và không ảnh hưởng đến tính tối ưu của nghiệm cuối. Về mặt hiệu quả tính toán, tổng thời gian tính toán để thuật toán đạt hội tụ là khoảng 17.65 giây

```
iter=     0 | obj=-6237571.004963 | r_pri=6.460e+03 | r_dual=1.679e+03
iter=   100 | obj=51733.921039 | r_pri=3.250e+01 | r_dual=5.549e+00
iter=   200 | obj=39134.989628 | r_pri=1.530e+01 | r_dual=1.253e+00
iter=   300 | obj=43157.935778 | r_pri=9.970e+00 | r_dual=1.008e+00
iter=   400 | obj=44790.222553 | r_pri=6.683e+00 | r_dual=7.080e-01
iter=   500 | obj=46030.656382 | r_pri=5.043e+00 | r_dual=2.811e-01
iter=   600 | obj=49611.264016 | r_pri=3.205e+00 | r_dual=2.568e-01
iter=   700 | obj=50228.853482 | r_pri=2.164e+00 | r_dual=1.957e-01
iter=   800 | obj=50279.979675 | r_pri=1.574e+00 | r_dual=1.240e-01
iter=   900 | obj=50414.281378 | r_pri=1.301e+00 | r_dual=1.013e-01
iter=  1000 | obj=50830.152536 | r_pri=9.445e-01 | r_dual=9.424e-02
iter=  1100 | obj=51073.585935 | r_pri=7.579e-01 | r_dual=6.519e-02
iter=  1200 | obj=51157.017731 | r_pri=5.505e-01 | r_dual=4.965e-02
iter=  1300 | obj=51237.755836 | r_pri=4.175e-01 | r_dual=4.140e-02
iter=  1400 | obj=51162.890652 | r_pri=3.664e-01 | r_dual=2.827e-02
iter=  1500 | obj=51258.387874 | r_pri=3.345e-01 | r_dual=1.680e-02
iter=  1600 | obj=51269.896859 | r_pri=2.982e-01 | r_dual=1.814e-02
iter=  1700 | obj=51346.757262 | r_pri=2.181e-01 | r_dual=2.660e-02
iter=  1800 | obj=51318.305621 | r_pri=1.776e-01 | r_dual=1.638e-02
iter=  1900 | obj=51282.426963 | r_pri=1.557e-01 | r_dual=1.218e-02
iter=  2000 | obj=51325.773595 | r_pri=1.457e-01 | r_dual=6.171e-03
iter=  2100 | obj=51297.295112 | r_pri=1.392e-01 | r_dual=4.606e-03
iter=  2200 | obj=51313.700374 | r_pri=1.371e-01 | r_dual=2.731e-03
iter=  2300 | obj=51314.755066 | r_pri=9.627e-02 | r_dual=8.544e-03
Converged at iter=2320 | obj=51299.994348 | r_pri=8.929e-02 | r_dual=8.958e-03
Solve time (seconds): 17.64931082725525
```

Hình 5: Diễn biến giá trị hàm mục tiêu theo số vòng lặp của thuật toán

Thuật toán đạt điều kiện dừng tại vòng lặp 2320, khi cả sai số nguyên thủy và sai số đối ngẫu đều nhỏ hơn các ngưỡng sai số cho phép. Số vòng lặp hội tụ này phản ánh tốc độ hội tụ trung bình của phương pháp OSQP đối với bài toán phân phối hàng hóa có chi phí lồi và quy mô đang xét.

Song song với sự ổn định của hàm mục tiêu, sai số nguyên thủy và sai số đối ngẫu đều giảm dần theo số vòng lặp. Ở giai đoạn đầu, cả hai sai số đều có giá trị lớn, phản ánh việc nghiệm ban đầu vi phạm đáng kể các ràng buộc và điều kiện tối ưu. Tuy nhiên, trong quá trình lặp, sai số nguyên thủy giảm đều từ bậc 10^3xuống dưới 10^{-1}, cho thấy các ràng buộc cung, cầu và không âm của biến dần được thỏa mãn. Đồng thời, sai số đối ngẫu cũng giảm từ bậc 10^3xuống dưới 10^{-2}, phản ánh sự ổn định của nghiệm trong không gian đối ngẫu và việc thỏa mãn điều kiện tối ưu của bài toán lồi. Sự suy giảm đồng thời của hai loại sai số xác nhận quá trình hội tụ ổn định của thuật toán.



Hình 6: Diễn biến sai số nguyên thủy và sai số đối ngẫu của thuật toán.

Tổng hợp các metrics và kết quả phân tích cho thấy thuật toán ADMM đạt được nghiệm có tính khả thi cao, thỏa mãn đầy đủ các ràng buộc của bài toán và hội tụ ổn định. Giá trị hàm mục tiêu ổn định tại thời điểm hội tụ cùng với sự suy giảm đồng thời của sai số nguyên thủy và sai số đối ngẫu khẳng định độ tin cậy của nghiệm thu được và hiệu quả của phương pháp trong việc giải bài toán phân phối hàng hóa với chi phí lồi.

3.3. Files kết quả lưu trữ

Các tệp kết quả được sinh ra trong quá trình giải bài toán phân phối hàng hóa với chi phí lồi chứa nhiều ký hiệu và đại lượng phản ánh nghiệm tối ưu cũng như quá trình hội tụ của thuật toán. Để đảm bảo tính rõ ràng và thống nhất trong việc phân tích, các ký hiệu xuất hiện trong các tệp kết quả và dữ liệu trung gian được định nghĩa cụ thể như sau.

Các ký hiệu liên quan đến nghiệm phân phối

- i: chỉ số kho hàng (warehouse), với $i = 1,2,\dots,N$.

- j: chỉ số điểm giao nhận/khách hàng (customer), với $j = 1,2, \dots, M$.
- x_{ij}: lượng hàng hóa được vận chuyển từ kho iđến điểm giao nhận j. Đây là biến quyết định chính của bài toán và cũng là nghiệm tối ưu được lưu trong tệp kết quả nghiệm phân phối (solution_custom.csv).
- S_i: năng lực cung ứng (supply) tối đa của kho i. Đại lượng này xuất hiện gián tiếp trong các ràng buộc của bài toán và được sử dụng để kiểm tra tính hợp lý của nghiệm.
- D_j: nhu cầu (demand) của điểm giao nhận j, được sử dụng để đảm bảo mỗi khách hàng được đáp ứng đúng mức yêu cầu.

Các ký hiệu liên quan đến hàm chi phí

- a_{ij}: hệ số chi phí bậc hai (quadratic cost coefficient) trên tuyến vận chuyển từ kho iđến điểm giao nhận j. Hệ số này quyết định mức độ lồi của hàm chi phí và phản ánh hiện tượng chi phí biên tăng khi lưu lượng tăng.
- b_{ij}: hệ số chi phí tuyến tính (linear cost coefficient) trên tuyến $i \to j$.
- $f_{ij}(x_{ij})$: chi phí vận chuyển trên tuyến $i \to j$ứng với lưu lượng x_{ij}, được tổng hợp vào giá trị hàm mục tiêu.
- Objective (obj): giá trị hàm mục tiêu của toàn hệ thống tại một vòng lặp nhất định, phản ánh tổng chi phí vận chuyển ứng với nghiệm hiện tại.

3.4. So sánh thực nghiệm giữa thuật toán ADMM và Interior Point Method (IPM)

Hai phương pháp tối ưu hóa lồi cho bài toán quy hoạch bậc hai, bao gồm ADMM (được hiện thực trong OSQP) và Interior Point Method – Mehrotra Predictor–Corrector, được so sánh dựa trên kết quả thực nghiệm thu được khi áp dụng cho cùng một bộ dữ liệu vận tải và cùng mô hình toán học.

Việc so sánh được thực hiện dựa trên các tiêu chí: giá trị hàm mục tiêu, mức độ thỏa mãn ràng buộc, tốc độ hội tụ, và chi phí tính toán.

3.4.1. Giá trị hàm mục tiêu và tính khả thi của nghiệm

Hai thuật toán đều hội tụ về nghiệm có giá trị hàm mục tiêu cùng bậc độ lớn, cho thấy cả hai phương pháp đều tiếp cận vùng nghiệm tối ưu của bài toán.

- **ADMM** đạt giá trị hàm mục tiêu cuối cùng tại vòng lặp thứ 2320:

$$f_{\text{ADMM}} = 51{,}299.994$$

- **IPM** đạt giá trị hàm mục tiêu tại vòng lặp thứ 31:

$$f_{\text{IPM}} = 51{,}337.381$$

Mặc dù giá trị hàm mục tiêu của hai phương pháp có sai khác nhỏ (khoảng 0.07%). IPM dừng khi sai số ràng buộc đạt mức rất nhỏ (cỡ 10^{-9}), trong khi ADMM dừng tại mức sai số nguyên thủy còn khoảng 10^{-1}. Do đó, hai nghiệm đạt được là nghiệm xấp xỉ ở các mức độ khả thi khác nhau, và sự khác biệt nhỏ về giá trị hàm mục tiêu là phù hợp với bản chất của hai phương pháp.

3.4.2. Mức độ thỏa mãn ràng buộc và điều kiện KKT

Về tính khả thi, IPM đạt mức thỏa mãn ràng buộc cao hơn:

- **IPM**:
  - Sai số demand tối đa: 1.37×10^{-9}
  - Không vi phạm ràng buộc supply
  - Các điều kiện KKT được thỏa mãn với sai số rất nhỏ
- **ADMM**:
  - Sai số nguyên thủy (primal residual): 8.93×10^{-2}
  - Sai số đối ngẫu (dual residual): 8.96×10^{-3}

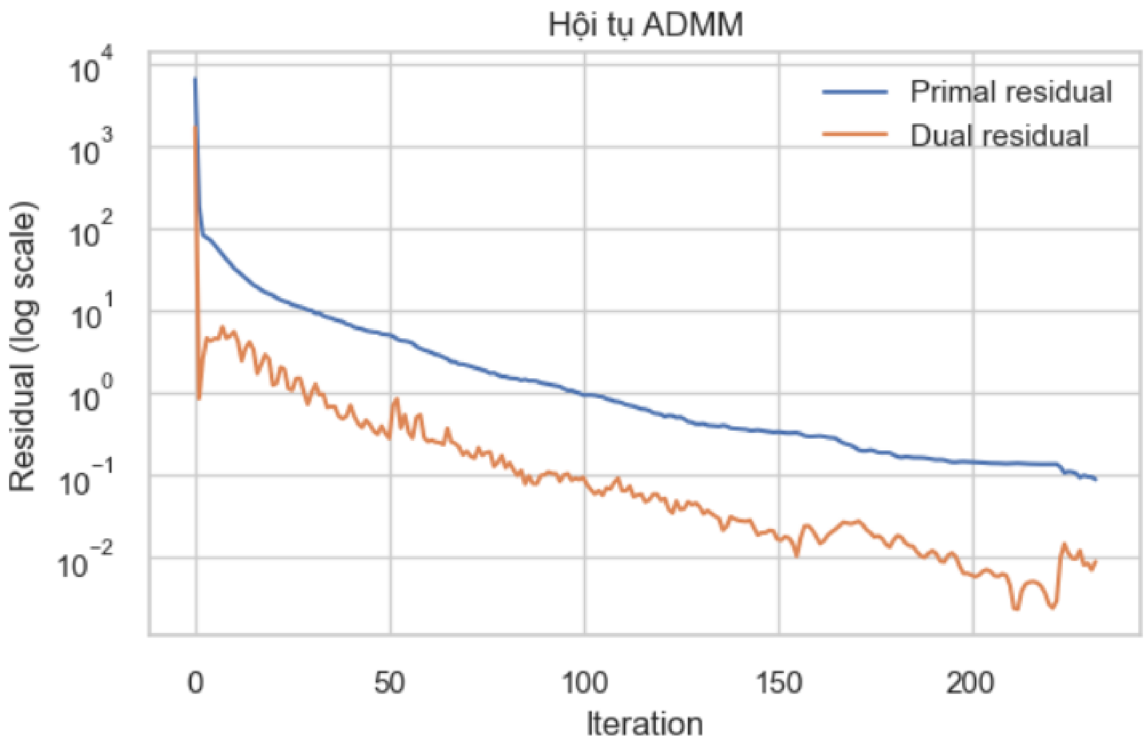
Điều này phản ánh đặc trưng của ADMM là hội tụ tiệm cận về nghiệm tối ưu và thường được dừng ở mức sai số thực dụng, trong khi IPM được thiết kế để tiến gần hơn tới nghiệm thỏa mãn đầy đủ hệ điều kiện KKT.

3.4.3. Tốc độ hội tụ theo số vòng lặp

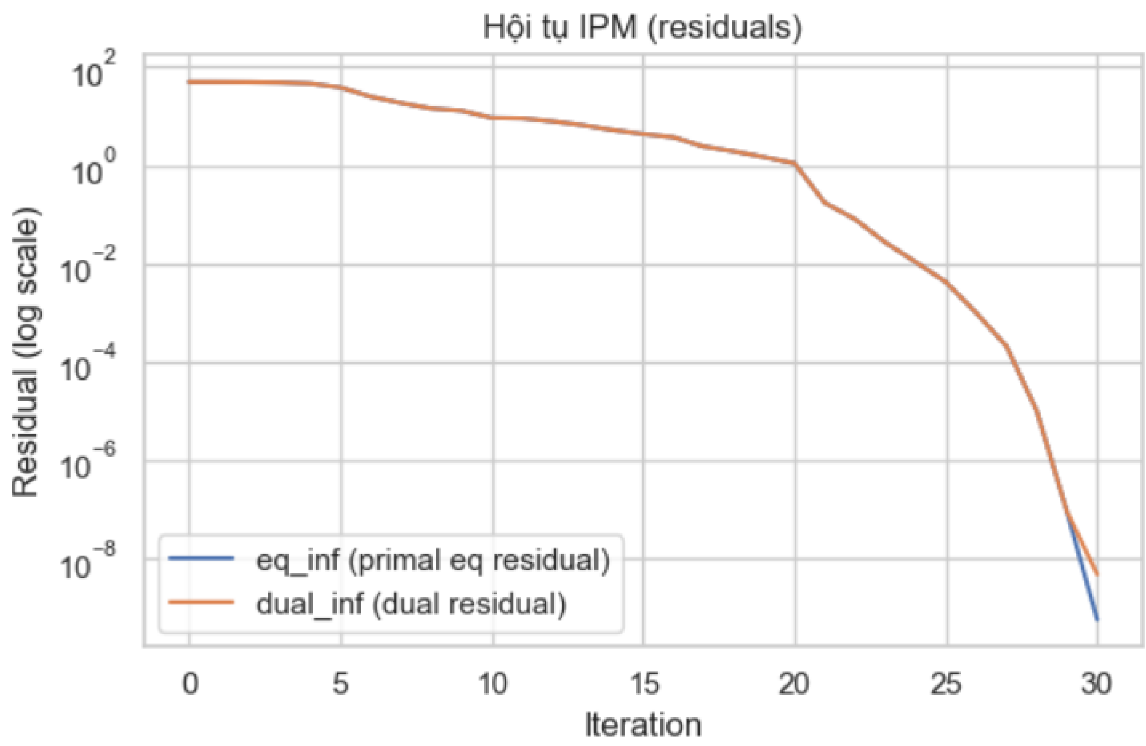
Số vòng lặp cần thiết để hội tụ của hai phương pháp khác biệt rõ rệt:

- **IPM** hội tụ sau 31 vòng lặp Newton.
- **ADMM** yêu cầu 2320 vòng lặp để đạt tiêu chuẩn dừng đã đặt.

Sự khác biệt này xuất phát từ bản chất thuật toán: IPM là phương pháp bậc hai, sử dụng thông tin đạo hàm bậc hai thông qua việc giải hệ KKT, trong khi ADMM là phương pháp bậc nhất, cập nhật nghiệm thông qua các bước phân rã và chiếu lặp.



Hình 7: Đồ thị hội tụ của thuật toán ADMM (sai số nguyên thủy và đối ngẫu)



Hình 8: Đồ thị hội tụ của thuật toán IPM (sai số nguyên thủy và đối ngẫu)

Đồ thị hội tụ cho thấy IPM làm giảm sai số nguyên thủy và đối ngẫu rất nhanh, đạt mức rất nhỏ chỉ sau khoảng 30 vòng lặp, phản ánh khả năng hội tụ nhanh theo số vòng lặp và mức độ thỏa mãn ràng buộc cao. Ngược lại, ADMM giảm sai số một cách ổn định nhưng chậm hơn, với residual giảm dần theo tính chất tiệm cận và đạt mức sai số thực dụng sau vài trăm vòng lặp. Sự khác biệt này phù hợp với bản chất của IPM là phương pháp bậc hai và ADMM là phương pháp bậc nhất, trong đó mỗi phương pháp phù hợp với các yêu cầu khác nhau về độ chính xác và chi phí tính toán.

3.4.4. Chi phí tính toán và thời gian thực thi

Mặc dù số vòng lặp của IPM ít hơn đáng kể, mỗi vòng lặp của IPM đòi hỏi chi phí tính toán cao hơn do phải giải hệ phương trình tuyến tính thưa kích thước lớn.

Kết quả đo thời gian thực nghiệm:

- **IPM**: 31.44 giây
- **ADMM**: 23.94 giây

Như vậy, trong cấu hình dừng được sử dụng, ADMM hoàn thành sớm hơn về thời gian thực, mặc dù cần số vòng lặp lớn hơn. Điều này cho thấy chi phí mỗi vòng lặp của ADMM thấp hơn đáng kể so với IPM.

4. Kết luận và Hướng phát triển

4.1. Kết luận tổng thể

Nghiên cứu này đã xây dựng và giải quyết bài toán phân phối hàng hóa đa kho – đa điểm giao nhận với chi phí vận chuyển có tính lồi theo lưu lượng, qua đó phản ánh sát hơn các đặc điểm vận hành của các hệ thống logistics hiện đại. Việc mô hình hóa chi phí dưới dạng hàm lồi không chỉ đảm bảo tính chặt chẽ về mặt toán học mà còn giúp hạn chế hiện tượng dồn tải quá mức trên một số tuyến vận chuyển, đồng thời khuyến khích sự phân bổ lưu lượng cân bằng và hợp lý trong toàn bộ mạng lưới phân phối.

Trên cơ sở mô hình đã xây dựng, hai phương pháp tối ưu lồi là **ADMM (thông qua bộ giải OSQP)** và **Interior Point Method – Mehrotra Predictor–Corrector** đã được triển khai và đánh giá thông qua thực nghiệm trên cùng bộ dữ liệu. Kết quả cho thấy cả hai thuật toán đều có khả năng giải quyết hiệu quả bài toán và hội tụ về nghiệm tối ưu trong phạm vi sai số cho phép. Các ràng buộc cung, cầu và điều kiện không âm của biến quyết định đều được thỏa mãn ở các mức độ khác nhau tùy theo tiêu chuẩn dừng được lựa chọn.

Phương pháp ADMM thể hiện ưu thế về chi phí tính toán mỗi vòng lặp thấp và khả năng hội tụ ổn định theo hướng tiệm cận, phù hợp với các bài toán có quy mô lớn hoặc yêu cầu nghiệm xấp xỉ trong thời gian ngắn. Trong khi đó, phương pháp IPM cho thấy khả năng hội tụ nhanh theo số vòng lặp và đạt mức độ thỏa mãn ràng buộc rất cao, phản ánh rõ việc đáp ứng đầy đủ các điều kiện tối ưu Karush–Kuhn–Tucker của bài toán. Sự khác biệt về giá trị hàm mục tiêu và thời gian thực thi giữa hai phương pháp chủ yếu xuất phát từ đặc trưng thuật toán và tiêu chuẩn dừng, hơn là từ chất lượng mô hình hay tính đúng đắn của lời giải.

Tổng hợp các kết quả và phân tích, có thể kết luận rằng cả hai cách tiếp cận đều có giá trị trong việc giải quyết bài toán phân phối hàng hóa với chi phí lồi. Phương pháp ADMM phù hợp cho các bài toán thực tế cần tính linh hoạt và khả năng mở rộng, trong khi IPM thích hợp cho các kịch bản yêu cầu độ chính xác cao và nghiệm thỏa mãn chặt chẽ các ràng buộc. Những kết quả đạt được khẳng định tính hiệu quả của mô hình tối ưu lồi được đề xuất, đồng thời cho thấy vai trò bổ trợ của các phương pháp tối ưu khác nhau trong việc giải quyết các bài toán logistics hiện đại.

4.2. Hướng phát triển

Từ mô hình và các kết quả đạt được, các hướng phát triển trong tương lai có thể tập trung vào việc mở rộng phạm vi ứng dụng và nâng cao tính thực tiễn của bài toán phân phối hàng hóa, đồng thời vẫn duy trì cấu trúc tối ưu lồi nhằm đảm bảo khả năng giải hiệu quả và ổn định bằng các phương pháp tối ưu hiện có.

Một hướng phát triển quan trọng là mở rộng bài toán từ dữ liệu tĩnh sang dữ liệu biến thiên theo thời gian. Trong thực tế, nhu cầu của khách hàng và năng lực cung ứng của các kho thường thay đổi theo từng chu kỳ kế hoạch hoặc theo các yếu tố ngẫu nhiên. Do đó, bài toán có thể được mở rộng theo hướng lập kế hoạch phân phối đa giai đoạn, trong đó nghiệm tối ưu của giai đoạn trước được sử dụng làm nghiệm khởi tạo cho giai đoạn tiếp theo. Cách tiếp cận này không chỉ giúp mô hình phản ánh sát hơn hoạt động vận hành thực tế mà còn tận dụng được khả năng khởi tạo nóng của các thuật toán tối ưu lồi, qua đó giảm chi phí tính toán tổng thể.

Bên cạnh đó, mô hình có thể được mở rộng để xét đến nhiều loại hàng hóa hoặc các nhóm hàng có đặc tính chi phí khác nhau. Trong trường hợp này, mỗi loại hàng có thể được xem như một lớp dòng chảy riêng trên cùng một mạng lưới phân phối, với các hàm chi phí lồi đặc trưng. Hướng phát triển này mang tính thực tiễn cao đối với các hệ thống logistics hiện đại và vẫn bảo toàn tính lồi cũng như cấu trúc mạng của bài toán, cho phép tiếp tục áp dụng hiệu quả các phương pháp giải dựa trên ADMM hoặc Interior Point Method.

Về mặt phương pháp giải, một hướng nghiên cứu tiếp theo là cải tiến thuật toán ADMM nhằm nâng cao tốc độ hội tụ và hiệu quả tính toán. Các kỹ thuật như điều chỉnh tham số phạt một cách thích nghi, sử dụng chiến lược khởi tạo nóng, hoặc kết hợp các tiêu chuẩn dừng linh hoạt có thể giúp thuật toán thích ứng tốt hơn với các bài toán có dữ liệu thay đổi nhẹ giữa các lần giải. Những cải tiến này đặc biệt phù hợp với các hệ thống cần giải bài toán phân phối lặp đi lặp lại trong thời gian ngắn.

Cuối cùng, hướng phát triển mang tính ứng dụng là tích hợp mô hình và các thuật toán tối ưu vào hệ thống hỗ trợ ra quyết định trong doanh nghiệp logistics. Khi kết hợp với dữ liệu thực tế thu thập từ các hệ thống quản lý kho, vận tải và đơn hàng, mô hình có thể được sử dụng để đánh giá nhanh nhiều kịch bản phân phối khác nhau, từ đó hỗ trợ nhà quản lý lựa chọn phương án vận hành hiệu quả. Điều này góp phần mở rộng giá trị ứng dụng của nghiên cứu, không chỉ về mặt lý thuyết mà còn trong triển khai thực tế.