

C2(cont.): Dung lượng kênh

Lý thuyết thông tin

Biên soạn: Phạm Văn Sự

Bộ môn Xử lý tín hiệu và Truyền thông
Khoa Kỹ thuật Điện tử I
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

ver. 22a



Notes

Mục tiêu của bài học

- Trang bị một số khái niệm cơ bản về kênh truyền
- Cách xác định dung lượng của kênh
- Mối quan hệ giữa tốc độ dữ liệu và dung lượng kênh để đảm bảo truyền tin cậy



Notes

Các câu hỏi cần trả lời

- Tốc độ dữ liệu đầu vào kênh được đánh giá thế nào?
- Thế nào là kênh giãn tin? kênh nén tin? kênh thông thường?
- Thế nào là kênh rời rạc không nhớ? Kênh đối xứng? Kênh đồng nhất?
- Lượng tin trung bình truyền qua kênh rời rạc không nhớ?
- Dung lượng của một kênh rời rạc không nhớ xác định bằng công thức nào? Có tính chất gì? Cách xác định cho các bài toán cụ thể?
- Thế nào là một kênh AWGN? Mô hình?
- Lượng tin trung bình truyền qua kênh AWGN?
- Dung lượng của một kênh AWGN được xác định thế nào? Dung lượng một kênh AWGN có bằng thông hữu hạn?
- Định lý mã hóa thứ hai của Shannon?



Notes

C2(cont.): Dung lượng kênh

Nội dung chính

1 Dung lượng kênh rời rạc

- Khả năng phát của nguồn rời rạc
- Kênh rời rạc và một số khái niệm
- Dung lượng kênh rời rạc
- Định lý mã hóa thứ hai của Shannon

2 Dung lượng kênh Gausse nhiễu trắng cộng

- Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN
- Dung lượng của kênh AWGN



Notes

C2(cont.): Dung lượng kênh

Nội dung chính

1 Dung lượng kênh rời rạc

- Khả năng phát của nguồn rời rạc
- Kênh rời rạc và một số khái niệm
- Dung lượng kênh rời rạc
- Định lý mã hóa thứ hai của Shannon

2 Dung lượng kênh Gausse nhiễu trắng cộng

- Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN
- Dung lượng của kênh AWGN



Notes

Tốc độ phát, khả năng phát của nguồn rời rạc

Tốc độ phát, khả năng phát của nguồn rời rạc

Định nghĩa (Tốc độ phát của nguồn rời rạc)

Tốc độ phát của một nguồn rời rạc được định nghĩa $v_n = \frac{1}{T_n}$

- T_n : độ rộng trung bình của mỗi xung phát.
- v_n : số xung phát trong một đơn vị thời gian, v_n : đơn vị [baud]

Định nghĩa (Khả năng phát của nguồn rời rạc)

Một nguồn rời rạc X có tốc độ phát $v_n = \frac{1}{T_n}$, khi đó khả năng phát của nguồn được xác định:

$$H'(X) = v_n H(X) = \frac{H(X)}{T_n}$$

- $H'(X)$: lượng thông tin trung bình do nguồn phát ra trong một đơn vị thời gian, Đơn vị [bit/s]
- $H'(X)_{\max} = v_n \log(N) = \log(N)/T_n$



Notes

Tốc độ phát, khả năng phát của nguồn rời rạc

Độ dư thừa của nguồn

Định nghĩa (Độ dư thừa của nguồn rời rạc)

Với một nguồn rời rạc X , một phép xử lý thông tin đạt được $H(X)$, khi đó độ dư thừa của nguồn được định nghĩa là:

$$D = \frac{H(X)_{\max} - H(X)}{H(X)_{\max}} = 1 - \frac{H(X)}{H(X)_{\max}} = 1 - \mu$$

- $\mu = \frac{H(X)}{H(X)_{\max}}$: là tỷ số nén tin.
- D đặc trưng cho hiệu suất, khả năng chống nhiễu và mật độ của tin
 - ▶ D lớn \Rightarrow hiệu suất thấp, khả năng chống nhiễu cao.



Notes

C2(cont.): Dung lượng kênh

Nội dung chính

1 Dung lượng kênh rời rạc

- Khả năng phát của nguồn rời rạc
- Kênh rời rạc và một số khái niệm
- Dung lượng kênh rời rạc
- Định lý mã hóa thứ hai của Shannon

2 Dung lượng kênh Gausse nhiễu trắng cộng

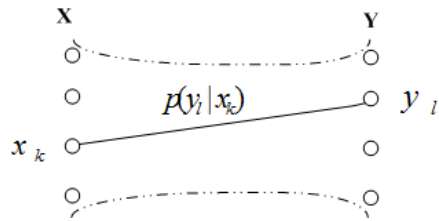
- Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN
- Dung lượng của kênh AWGN



Notes

Kênh rời rạc và một số khái niệm

Đặc trưng của kênh rời rạc



Một kênh rời rạc hoàn toàn có thể đặc trưng bởi 3 tham số:

- Trường tin lối vào X (input), trường tin lối ra Y (output).
- Xác suất chuyển tin lối vào x_k thành tin lối ra y_l : $p(y_l|x_k)$.
- Tốc độ truyền tin của kênh v_k hay thời gian trung bình để truyền một dấu tin

$$T_k = \frac{1}{v_k}.$$



Notes

Kênh rời rạc và một số khái niệm

Đặc trưng của kênh rời rạc - Một số khái niệm

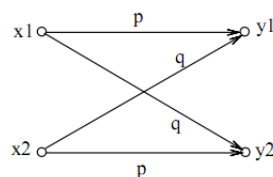
Định nghĩa (Kênh đồng nhất)

Xét một kênh rời rạc có xác suất chuyển $p(y_l|x_k)$.

- Nếu $p(y_l|x_k)$ không phụ thuộc vào thời gian t thì kênh được gọi là kênh đồng nhất; ngược lại gọi là kênh không đồng nhất.

Định nghĩa (Kênh đối xứng)

Xét một kênh rời rạc có xác suất chuyển $p(y_l|x_k)$. Nếu $p(y_l|x_k) = p = \text{const } \forall k, l$, $k \neq l$ và $p(y_l|x_k) = q = \text{const } \forall k = l$ thì kênh được gọi là đối xứng.



Hình: Mô hình kênh nhị phân đối xứng (BSC)



Notes

Kênh rời rạc và một số khái niệm

Đặc trưng của kênh rời rạc - Một số khái niệm (cont.)

Định nghĩa (Kênh không có nhớ)

Nếu $p(y_l|x_k)$ không phụ thuộc vào các tin (kí hiệu) phát/nhận trước đó thì kênh được gọi là kênh không có nhớ (memoryless):

$$p(y_l|x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, y_{l-1}, \dots, y_1) = p(y_l|x_k)$$

- Nếu y_k tương ứng với tin phát $x_k \Rightarrow$

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n|x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n p(y_k|x_k)$$

Biểu diễn kênh:

- Giản đồ chuyển trên đó nhãn các đường chuyển là các $p(y_l|x_k)$
- Các ma trận xác suất chuyển $P = [p_{kl}]$ với $p_{kl} = p(y_l|x_k)$

$$P = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \dots & p(y_M|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \dots & p(y_M|x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1|x_N) & p(y_2|x_N) & \dots & p(y_M|x_N) \end{bmatrix}$$



Notes

Kênh rời rạc và một số khái niệm

Lượng thông tin truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian

Định nghĩa

Một kênh rời rạc có lượng tin truyền qua $I(X; Y)$ với tốc độ truyền tin v_k thì lượng thông tin truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian là:

$$I'(X; Y) = v_k I(X; Y) = \frac{I(X; Y)}{T_k}$$

- $T_k > T_n$: kênh giãn tin
- $T_k = T_n$: kênh thông thường
- $T_k < T_n$: kênh nén tin



Notes

C2(cont.): Dung lượng kênh

Nội dung chính

1 Dung lượng kênh rời rạc

- Khả năng phát của nguồn rời rạc
- Kênh rời rạc và một số khái niệm
- Dung lượng kênh rời rạc
- Định lý mã hóa thứ hai của Shannon

2 Dung lượng kênh Gausse nhiễu trắng cộng

- Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN
- Dung lượng của kênh AWGN



Notes

Dung lượng kênh rời rạc

Định nghĩa (Khả năng thông qua của kênh rời rạc)

Khả năng thông qua của kênh rời rạc là giá trị cực đại của lượng thông tin truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian lấy theo mọi khả năng có thể của phân bố nguồn phát.

$$\begin{aligned} C' &= \max_{p(X)} I'(X; Y) = \max_X I'(X; Y) = v_k \max_X I(X; Y) \quad [\text{bit/s}] \\ &= v_k C \end{aligned}$$

- $C = \max_X I(X; Y)$: khả năng thông qua của kênh đối với mỗi dấu.
 - ▶ C : đơn vị [bít/lần truyền]
 - ▶ C : thường được sử dụng.

Tính chất:

- $C' \geq 0$, $C' = 0$ khi và chỉ khi X và Y hoàn toàn độc lập \Rightarrow kênh bị đứt
- $C' \leq v_k \log(N)$ (N là độ lớn của nguồn X)
- $C' \leq v_k \log(M)$ (M là độ lớn của nguồn Y)



Notes

C2(cont.): Dung lượng kênh

Nội dung chính

1 Dung lượng kênh rời rạc

- Khả năng phát của nguồn rời rạc
- Kênh rời rạc và một số khái niệm
- Dung lượng kênh rời rạc
- Định lý mã hóa thứ hai của Shannon

2 Dung lượng kênh Gausse nhiễu trắng cộng

- Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN
- Dung lượng của kênh AWGN



Notes

Định lý mã hóa thứ hai của Shannon

Định lý mã hóa thứ hai của Shannon

Định lý

Nếu khả năng phát $H'(X)$ của một nguồn rời rạc X nhỏ hơn khả năng thông qua của kênh ($H'(X) \leq C'$) thì tồn tại một phép mã hóa và giải mã sao cho việc truyền tin qua kênh có xác suất lỗi nhỏ tùy ý khi độ dài từ mã đủ lớn. Ngược lại thì không tồn tại một phép mã hóa nào như vậy.

Định lý

Nếu tốc độ dữ liệu cần truyền R truyền qua kênh có dung lượng C' thỏa mãn $R \leq C'$ thì tồn tại một phép mã hóa và giải mã sao cho việc truyền tin qua kênh có xác suất lỗi nhỏ tùy ý khi độ dài từ mã đủ lớn. Ngược lại thì không tồn tại một phép mã hóa nào như vậy.

- Nhận xét: Định lý chỉ ra tính tồn tại, không chỉ ra cách xây dựng



Notes

C2(cont.): Dung lượng kênh

Nội dung chính

1 Dung lượng kênh rời rạc

- Khả năng phát của nguồn rời rạc
- Kênh rời rạc và một số khái niệm
- Dung lượng kênh rời rạc
- Định lý mã hóa thứ hai của Shannon

2 Dung lượng kênh Gausse nhiễu trắng cộng

- Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN
- Dung lượng của kênh AWGN



Notes

C2(cont.): Dung lượng kênh

Nội dung chính

1 Dung lượng kênh rời rạc

- Khả năng phát của nguồn rời rạc
- Kênh rời rạc và một số khái niệm
- Dung lượng kênh rời rạc
- Định lý mã hóa thứ hai của Shannon

2 Dung lượng kênh Gausse nhiễu trắng cộng

- Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN
- Dung lượng của kênh AWGN



Notes

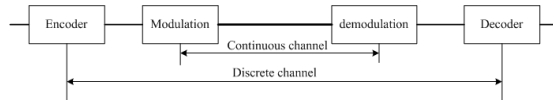
Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN

Đặc trưng của kênh Gausse nhiễu cộng

Tham số đặc trưng của kênh liên tục:

- Trường dấu lỗi vào (input) và trường dấu lỗi ra (output).
- Hàm chuyển, hàm mật độ phân bố xác suất để thu được $y(t)$ khi đã phát $x(t)$: $f(y(t)|x(t))$
- Tốc độ truyền của kênh v_k

Kênh rời rạc chứa kênh liên tục:



Định lý

Khả năng thông qua của kênh liên tục không nhỏ hơn khả năng thông qua của kênh rời rạc chứa nó.

$$C_{\text{liên tục}} \geq C_{\text{rời rạc chứa liên tục}}$$

Notes

Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN

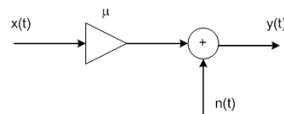
Mô hình của kênh Gausse nhiễu cộng

Định nghĩa (Kênh Gausse)

Kênh Gausse không đổi là một kênh liên tục có tập tin lỗi vào và tập tin lỗi ra liên hệ với nhau theo công thức:

$$y(t) = \mu x(t) + n(t)$$

trong đó: $\mu = \text{const}$; $n(t)$ là nhiễu cộng còn gọi là nhiễu trắng có phân bố chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.



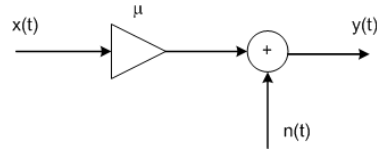
- $x(t) \sim X$, $y(t) \sim Y$, và $n(t) \sim N$: $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$
- $x(t)$ và $n(t)$ độc lập nhau.
- $\rightarrow \sigma_y^2 = \mu^2 \sigma_x^2 + \sigma_n^2$ hay tương đương $P_y = \mu^2 P_x + P_n$



Notes

Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN

Lượng thông tin tương hỗ qua kênh AWGN



- $y(t) = \mu x(t) + n(t)$
- Giả sử: $n(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, $x(t)$ và $y(t)$ cũng có phân bố chuẩn

- $I(X; Y) = h(Y) - h(Y|X)$
- $h(Y) = \log \sqrt{2\pi e P_y}$ trong đó $P_y = \mu^2 P_x + P_n$
- $h(Y|X) = - \int \int f(x, y) \log(f(y|x)) dx dy$
 - ▶ $Pr\{y \in dy|x\} = Pr\{n \in dn\} \rightarrow f(y|x)dy = f(n)dn \rightarrow f(y|x) = f(n) \frac{dn}{dy} = f(n) \frac{1}{\mu} = f(n)$
 - ▶ $\Rightarrow h(Y|X) = \log \sqrt{2\pi e P_n}$
- $\Rightarrow I(X; Y) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_x}{P_n} \right)$



Notes

C2(cont.): Dung lượng kênh

Nội dung chính

- 1 Dung lượng kênh rời rạc
 - Khả năng phát của nguồn rời rạc
 - Kênh rời rạc và một số khái niệm
 - Dung lượng kênh rời rạc
 - Định lý mã hóa thứ hai của Shannon
- 2 Dung lượng kênh Gausse nhiễu trắng cộng
 - Kênh Gausse nhiễu trắng cộng - AWGN
 - Dung lượng của kênh AWGN



Notes

Dung lượng kênh AWGN

Định nghĩa (Dung lượng của kênh liên tục)

Khả năng thông qua của kênh liên tục, còn gọi là dung lượng kênh liên tục, là giá trị cực đại của lượng thông tin truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian lấy theo mọi khả năng có thể của phân bố nguồn phát trong đó kể đến giới hạn công suất phát.

$$C' = v_k \max_{f(x): E\{x^2(t)\} \leq P} I(X; Y) = v_k \max_{X: E\{x^2(t)\} \leq P} I(X; Y)$$
$$C = \max_{f(x): E\{x^2(t)\} \leq P} I(X; Y) = \max_{X: E\{x^2(t)\} \leq P} I(X; Y)$$

- $v_k = \frac{1}{\Delta t}$ với Δt là thời gian rời rạc hóa.

Định lý (Dung lượng của kênh Gausse nhiễu cộng)

Kênh AWGN với giới hạn công suất phát P và công suất nhiễu N có dung lượng:

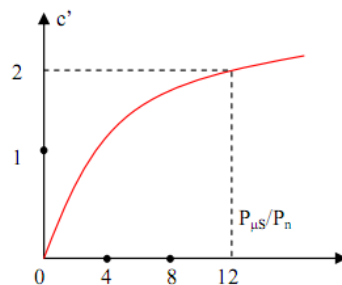
$$C' = \frac{v_k}{2} \log \left(1 + \frac{\mu^2 P}{P_n} \right) \quad C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\mu^2 P}{P_n} \right)$$

Notes

Dung lượng kênh AWGN

Một số nhận xét

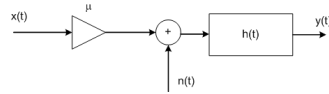
- $\mu^2 P / P_n = S/N$ gọi là tỷ số công suất trung bình của tín hiệu trên tạp âm (SNR)
- $S/N \rightarrow 0 \Rightarrow C' \rightarrow 0$: S/N rất bé thì có thể coi như kênh bị đứt.
- Để tăng C' thì cần tăng S/N , tuy nhiên việc tăng này bị giới hạn do C' rơi vào tình trạng bão hòa.



Notes

Dung lượng kênh AWGN

Kênh có băng thông hạn chế



- $y(t) = (\mu x(t) + n(t)) * h(t)$
- Kênh AWGN với mật độ phổ công suất nhiễu hai phía $N_0/2$ [W/Hz].
- $h(t)$: đáp ứng xung của một mạch lọc thông dải lý tưởng có băng tần W [Hz]. \rightarrow Tốc độ lấy mẫu $\geq \frac{1}{2W}$

Định lý (Dung lượng của kênh AWGN băng tần hữu hạn)

Dung lượng của kênh AWGN với băng tần hữu hạn W và giới hạn công suất phát P_x có nhiễu với mật độ phổ công suất hai phía $N_0/2$ được xác định:

$$C' = W \log \left(1 + \frac{\mu^2 P_x}{N_0 W} \right) [bps]$$

Notes

Dung lượng kênh AWGN

Kênh có băng tần hạn chế - Khảo sát ảnh hưởng của băng tần

- $W \rightarrow 0 \Rightarrow C' \rightarrow 0$
- Nếu $W \uparrow$, thì $C' \uparrow$.
 - ▶ **Chú ý:** $W \uparrow \rightarrow P_n = WN_0 \uparrow \rightarrow SNR \downarrow$
- $W \rightarrow \infty, C \rightarrow C'_\infty = \frac{\mu^2 P_x}{N_0} \log_2 e < \infty$.
 - ▶ Thông tin vũ trụ thường với băng tần rất rộng.
- $0 \leq C' \leq C'_\infty$
 - ▶ **Chú ý:** Tọa âm nhiệt luôn tồn tại.

Định lý (Định lý mã hóa thứ hai của Shannon)

Các nguồn tin rời rạc có thể mã hóa và truyền theo kênh liên tục với xác suất sai bé tùy ý khi giải mã các tín hiệu nhận được nếu khả năng phát của nguồn nhỏ hơn khả năng thông qua của kênh. Ngược lại, không thể thực hiện được phép mã hóa và giải mã với sai số bé tùy ý.

Chú ý: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$

Notes

Kết thúc phần dung lượng kênh



Notes

Notes
