

MA2 - Nekonečně mnoho sedlových bodů

Tommy Chu

Zadání

Najděte funkci tří proměnných, která má **(1)** nekonečně mnoho bodů s nulovým gradientem, z nichž ale **(2)** žádný není extrém.

Řešení

Uvažujme hladkou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) = x^3.$$

Takto definovaná funkce splňuje všechny podmínky v zadání.

Důkaz: Gradient f je nulový v bodech $S = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$:

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2, 0, 0) \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in S: \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

(1) Bodů s nulovým gradientem je nekonečně mnoho:

$$|S| = |\mathbb{R}^2|.$$

(2) Funkce nemá extrém v žádném bodě S . Na okolí každého bodu $(0, y, z) \in S$ platí, že $f(x, y, z) = x^3$ je kladné pro $x > 0$ a záporné pro $x < 0$.

Graf této funkce je vykreslen na následujícím *3D contour plot*, kde funkční hodnota je znázorněna barvou. Množinu sedlových bodů S tvoří rovina $x = 0$. \square

