

AG1 - Cvičení II

Tommy Chu

Zadání 1

Formulujte nutné (a rozumné) podmínky pro fakt, že jsou dva grafy G, H isomorfní.
Formálně: pro dva grafy G, H definujte formuli $\varphi(G, H)$ tak, aby platilo tvrzení:

$$G \cong H \implies \varphi(G, H)$$

Řešení

Nechť jsou grafy G a H isomorfní a funkce $f: V(G) \rightarrow V(H)$ isomorfismus těchto grafů. Dále necht jsou u, v libovolné vrcholy na G . Pak platí následující formule:

$$\varphi_1(G, H) \stackrel{def}{\iff} |V(G)| = |V(H)|$$

$$\varphi_2(G, H) \stackrel{def}{\iff} |E(G)| = |E(H)|$$

$$\varphi_3(G, H) \stackrel{def}{\iff} \exists(u-v\text{-cesta v } G) \implies \exists(f(u)-f(v)\text{-cesta v } H)$$

$$\varphi_4(G, H) \stackrel{def}{\iff} G \text{ a } H \text{ mají stejný počet souvislých komponent}$$

$$\varphi_5(G, H) \stackrel{def}{\iff} \text{existuje matice sousednosti reprezentující současně } G \text{ a } H$$

Intuice za formulemi: Po odmyslení labelů vrcholů jsou G a H identické grafy.

Zadání 2

Nutné podmínky z minulého zadání formálně dokažte z definice isomorfismu.

Řešení

Dokážu formule φ_1 a φ_3 . **Důkaz formule φ_1 :**

$$\varphi_1(G, H) \stackrel{def}{\iff} |V(G)| = |V(H)|$$

Z předpokladu existuje bijekce $f: V(G) \rightarrow V(H)$, pro kterou nutně platí $|D_f| = |H_f|$ – vlastnost bijektivního zobrazení:

$$|V(G)| = |D_f| = |H_f| = |V(H)|$$

□

Důkaz formule φ_3 :

$$\varphi_3(G, H) \stackrel{def}{\iff} \exists(u-v\text{-cesta v } G) \implies \exists(f(u)-f(v)\text{-cesta v } H)$$

Uvažujme libovolnou $u-v$ -cestu v G :

$$u = g_1, \{g_1, g_2\}, g_2, \dots, g_n = v$$

kde $g_i \in V(G)$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Protože se jedná o cestu, jistě platí $g_i \neq g_j$ pro různé indexy $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Označme $h_i := f(g_i)$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$: Díky isomorfismu a existující g_1-g_n -cestě v G , přímo odvodíme i existenci h_1-h_n -cesty v H :

$$\begin{aligned} & f(g_1), \{f(g_1), f(g_2)\}, f(g_2), \dots, f(g_n) \\ = & h_1, \quad \{h_1, h_2\}, \quad h_2, \quad \dots, h_n \end{aligned}$$

kde lze nahradit $h_1 = f(g_1) = f(u)$ a $h_n = f(g_n) = f(v)$. Skutečně se jedná o $f(u)-f(v)$ -cestu v H : Na H platí $f(g_i) \neq f(g_j)$ pro různé indexy $i, j \in \{1, \dots, n\}$, protože f je injektivní a na stejných indexech platí $g_i \neq g_j$. □

Zadání 3

Ukažte, že následující dvě podmínky jsou ekvivalentní pro číslo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

1. Existuje samodoplňkový graf na n vrcholech.
2. $n \equiv 1 \pmod{4}$ nebo $n \equiv 0 \pmod{4}$

Řešení

1. \implies 2.: Samodoplňkový graf G na n vrcholech má jistě stejný počet hran jako svůj doplněk:

$$G \cong \overline{G} \implies |E(G)| = |E(\overline{G})|$$

Dále víme, že velikost sjednocení hran grafu G a jeho doplnku \overline{G} je $\binom{n}{2}$. Počet hran grafu G je proto polovina z počtu všech možných hran v grafu na n vrcholech $\binom{n}{2}/2$.

$$\begin{aligned} |E(G)| + |E(\overline{G})| &= \binom{n}{2} \implies 2|E(G)| = \binom{n}{2} \\ \implies |E(G)| &= \frac{\binom{n}{2}}{2} = \frac{\frac{n!}{(n-2)!2!}}{2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{4} \end{aligned}$$

Počet hran v grafu musí být celočíselný, proto $\frac{n(n-1)}{4}$ musí být celé číslo. To platí pouze tehdy, když je $n(n-1)$ dělitelné 4:

$$n(n-1) \equiv 0 \pmod{4}$$

Součin dvou po sobě jdoucích kladných čísel (sudé \cdot liché) je dělitelné číslem 4 jen, pokud je jeden z činitelů (n nebo $n-1$) násobkem 4:

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \pmod{4} \quad \vee \quad n-1 \equiv 0 \pmod{4} \\ \iff n \equiv 0 \pmod{4} \quad \vee \quad n \equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

□

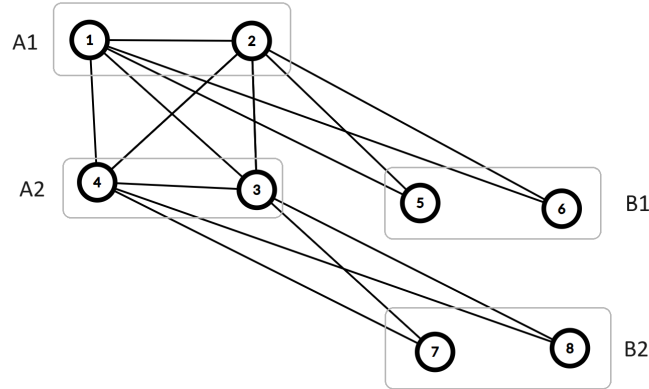
2. \implies 1.:

Pro jednoduchost zpočátku uvažujme pouze $n \equiv 0 \pmod{4}$, respektive $n \in \{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Nechť jsou čtyři neprázdné množiny vrcholů A_1, A_2, B_1, B_2 , $|A_1| = |A_2| = |B_1| = |B_2| = \frac{n}{4}$. Tvrdím, že graf G definován následujícím způsobem je samodoplňkový:

$$\begin{aligned} G = (A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2, & \binom{A_1 \cup A_2}{2} \cup \{\{a_1, b_1\} \mid a_1 \in A_1, b_1 \in B_1\} \\ & \cup \{\{a_2, b_2\} \mid a_2 \in A_2, b_2 \in B_2\}) \end{aligned}$$

Podgraf grafu G indukovaný množinou $A_1 \cup A_2$ je úplný a naopak podgraf indukovaný množinou $B_1 \cup B_2$ je tvořen izolovanými vrcholy. Odmyslíme-li si hrany mezi vrcholy v A_1 a A_2 , grafy indukované množinou vrcholů $A_1 \cup B_1$ a $A_2 \cup B_2$ jsou úplné ‘bipartitní’ grafy. Pro $n = 8$ může G vypadat následovně:



Z jistých pozorování o G lze přímo odvodit vlastnosti o jeho doplňku \overline{G} :

- (1a) mezi všemi vrcholy v $A_1 \cup A_2$ vedou hrany,
 $\xRightarrow{\overline{G}}$ mezi vrcholy v $A_1 \cup A_2$ nevede žádná hrana,
- (1b) mezi vrcholy v $B_1 \cup B_2$ nevede žádná hrana,
 $\xRightarrow{\overline{G}}$ mezi všemi vrcholy v $B_1 \cup B_2$ vedou hrany,
- (2a) ze všech vrcholů v A_1 vede hrana do každého vrcholu v B_1 ,
 $\xRightarrow{\overline{G}}$ z A_1 nevede žádná hrana do B_1 ,
- (2b) ze všech vrcholů v A_2 vede hrana do každého vrcholu v B_2 ,
 $\xRightarrow{\overline{G}}$ z A_2 nevede žádná hrana do B_2 ,
- (3a) z A_1 nevede žádná hrana do B_2 ,
 $\xRightarrow{\overline{G}}$ ze všech vrcholů v A_1 vede hrana do každého vrcholu v B_2 ,
- (3b) z A_2 nevede žádná hrana do B_1 ,
 $\xRightarrow{\overline{G}}$ ze všech vrcholů v A_2 vede hrana do každého vrcholu v B_1 .

Z těchto pozorování lze jednoznačně zkonstruovat doplněk grafu G :

$$\begin{aligned} \overline{G} = (A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2, & \left(\binom{B_1 \cup B_2}{2} \cup \{ \{a_1, b_2\} \mid a_1 \in A_1, b_2 \in B_2 \} \right. \\ & \left. \cup \{ \{a_2, b_1\} \mid a_2 \in A_2, b_1 \in B_1 \} \right) \end{aligned}$$

Jedná se o definici grafu G s prohozenými množinami $A_1 \leftrightarrow B_1$ a $A_2 \leftrightarrow B_2$. Protože jsou vrcholy v rámci jedné množiny i samotné celé množiny A_1, A_2, B_1, B_2 zaměnitelné, jsou grafy G, \overline{G} isomorfní.

Isomorfismus je $f := f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4$:

$$\begin{array}{ll} f_1 : A_1 \rightarrow B_{1\overline{G}} & f_2 : A_2 \rightarrow B_{2\overline{G}} \\ f_3 : B_1 \rightarrow A_{1\overline{G}} & f_4 : B_2 \rightarrow A_{2\overline{G}} \end{array}$$

kde $f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jsou libovolné příslušné bijekce – libovolné díky zmíněné zaměnitelnosti.

Kdybychom měli v každém případě o jeden vrchol u navíc, v grafu G bychom ho spárovaly se všemi vrcholy v $A_1 \cup A_2$ a v doplňku by nám ‘přeskočil’ na množinu $B_1 \cup B_2$, což by zachovalo symetrii se zbytkem doplňku. Definice by se nám mírně změnily tímto způsobem:

$$\begin{aligned} G = (\{u\} \cup A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2, & \binom{A_1 \cup A_2}{2} \cup \{\{a_1, b_1\} \mid a_1 \in A_1, b_1 \in B_1\} \\ & \cup \{\{a_2, b_2\} \mid a_2 \in A_2, b_2 \in B_2\} \\ & \cup \{\{u, a\} \mid a \in A_1 \cup A_2\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{G} = (\{u\} \cup A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2, & \binom{B_1 \cup B_2}{2} \cup \{\{a_1, b_2\} \mid a_1 \in A_1, b_2 \in B_2\} \\ & \cup \{\{a_2, b_1\} \mid a_2 \in A_2, b_1 \in B_1\} \\ & \cup \{\{u, b\} \mid b \in B_1 \cup B_2\}) \end{aligned}$$

a isomorfismus: $f := \{(u, u_{\overline{G}})\} \cup f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4$. Seznam pozorování by se nám rozšířil:

(4a) z vrcholu u vede hrana do každého vrcholu v $A_1 \cup A_2$

$\xRightarrow{\overline{G}}$ mezi vrcholem u a $A_1 \cup A_2$ nevede žádná hrana,

(4b) mezi vrcholem u a $B_1 \cup B_2$ nevede žádná hrana,

$\xRightarrow{\overline{G}}$ z vrcholu u vede hrana do každého vrcholu v $B_1 \cup B_2$.

Analogicky platí již odiskutovaná symetrie a G, \overline{G} jsou isomorfní i pro $n \in \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$. Ukázali jsme, že pokud $n \equiv 1 \pmod{4}$ nebo $n \equiv 0 \pmod{4}$, existuje samodoplňkový graf na n vrcholech. \square