AG1 - Domácí zábava II

Tommy Chu

Zadání 1

Formulujte nutné (a rozumné) podmínky pro fakt, že jsou dva grafy G, H isomorfní.
Formálně: pro dva grafy G, H definujte formuli $\varphi(G, H)$ tak, aby platilo tvrzení:

$$G \cong H \implies \varphi(G, H)$$

Řešení

Nechť jsou grafy G a H isomorfní a funkce $f\colon V(G) \to V(H)$ isomorfismus těchto grafů. Dále nechť jsou u, v libovolné vrcholy na G. Pak platí následující formule:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(G,H) &\overset{def}{\iff} |V(G)| = |V(H)| \\
\varphi_2(G,H) &\overset{def}{\iff} |E(G)| = |E(H)| \\
\varphi_3(G,H) &\overset{def}{\iff} \exists(u\text{-}v\text{-cesta v } G) \implies \exists(f(u)\text{-}f(v)\text{-cesta v } H) \\
\varphi_4(G,H) &\overset{def}{\iff} G \text{ a } H \text{ mají stejný počet souvislých komponent} \\
\varphi_5(G,H) &\overset{def}{\iff} \text{existuje matice sousednosti reprezentující současně } G \text{ a } H
\end{aligned}$$

Intuice za formulemi: Po odmyslení labelů vrcholů jsou G a H identické grafy.

Zadání 2

Nutné podmínky z minulého zadání formálně dokažte z definice isomofismu.

Řešení

Dokážu formule φ_1 a φ_3. **Důkaz formule φ_1:**

$$\varphi_1(G,H) \overset{def}{\iff} |V(G)| = |V(H)|$$

Z předpokladu existuje bijekce $f\colon V(G) \to V(H)$, pro kterou nutně platí $|D_f| = |H_f|$ – vlastnost bijektivního zobrazení:

$$|V(G)| = |D_f| = |H_f| = |V(H)|$$

$\square$

Důkaz formule φ_3:

$$\varphi_3(G,H) \overset{def}{\iff} \exists(u\text{-}v\text{-cesta v } G) \implies \exists(f(u)\text{-}f(v)\text{-cesta v } H)$$

Uvažujme libovolnou u-v-cestu v G:

$$u = g_1, \{g_1, g_2\}, g_2, \cdots, g_n = v$$

kde $g_i \in V(G)$ pro $i \in \{1, ..., n\}$. Protože se jedná o cestu, jistě platí $g_i \neq g_j$ pro různé indexy $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Označme $h_i \coloneqq f(g_i)$ pro $i \in \{1, ..., n\}$: Díky isomorfismu a existující g_1-g_n-cestě v G, přímo odvodíme i existenci h_1-h_n-cesty v H:

$$\begin{aligned} & f(g_1), \{f(g_1), f(g_2)\}, f(g_2), \cdots, f(g_n) \\ = \quad & h_1, \quad \{h_1, h_2\}, \qquad h_2, \quad \cdots, h_n \end{aligned}$$

kde lze nahradit $h_1 = f(g_1) = f(u)$ a $h_n = f(g_n) = f(v)$. Skutečně se jedná o $f(u)$-$f(v)$-cestu v H: Na H platí $f(g_i) \neq f(g_j)$ pro různé indexy $i, j \in \{1, ..., n\}$, protože f je injektivní a na stejných indexech platí $g_i \neq g_j$. $\square$

Zadání 3

Ukažte, že následující dvě podmínky jsou ekvivalentní pro číslo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

1. Existuje samodoplňkový graf na n vrcholech.
2. $n \equiv 1 \pmod 4$ nebo $n \equiv 0 \pmod 4$

Řešení

1. $\implies$ 2.: Samodoplňkový graf G na n vrcholech má jistě stejný počet hran jako svůj doplněk:

$$G \cong \overline{G} \implies |E(G)| = |E(\overline{G})|$$

Dále víme, že velikost sjednocení hran grafu G a jeho doplňku $\overline{G}$ je $\binom{n}{2}$. Počet hran grafu G je proto polovina z počtu všech možných hran v grafu na n vrcholech $\binom{n}{2}/2$.

$$|E(G)| + |E(\overline{G})| = \binom{n}{2} \implies 2|E(G)| = \binom{n}{2}$$
$$\implies |E(G)| = \frac{\binom{n}{2}}{2} = \frac{\frac{n!}{(n-2)!2!}}{2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

Počet hran v grafu musí být celočíselné, proto $\frac{n(n-1)}{4}$ musí být celé číslo. To platí pouze tehdy, když je $n(n-1)$ dělitelné 4:

$$n(n-1) \equiv 0 \pmod{4})$$

Součin dvou po sobě jdoucích kladných čísel (sudé $\cdot$ liché) je dělitelné číslem 4 jen, pokud je jeden z činitelů (n nebo $n-1$) násobkem 4:

$$\begin{aligned} & n \equiv 0 \pmod 4 \quad \vee \quad n-1 \equiv 0 \pmod 4 \\ \iff & n \equiv 0 \pmod 4 \quad \vee \quad n \equiv 1 \pmod 4 \end{aligned}$$

$\square$

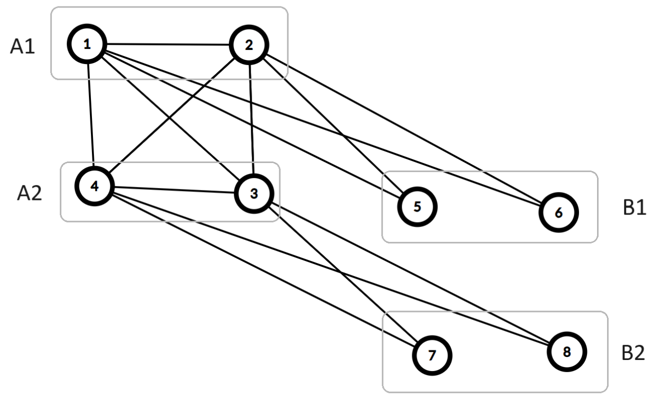
2. $\implies$ 1.:

Pro jednoduchost zpočátku uvažujme pouze $n \equiv 0 \pmod 4$, respektive $n \in \{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Nechť jsou čtyři neprázdné množiny vrcholů A_1, A_2, B_1, B_2, $|A_1| = |A_2| = |B_1| = |B_2| = \frac{n}{4}$. Tvrdím, že graf G definován následujícím způsobem je samodoplňkový:

$$\begin{aligned} G = (A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2, \binom{A_1 \cup A_2}{2} & \cup \{\{a_1, b_1\} \mid a_1 \in A_1, b_1 \in B_1\} \\ & \cup \{\{a_2, b_2\} \mid a_2 \in A_2, b_2 \in B_2\}) \end{aligned}$$

Podgraf grafu G indukovaný množinou $A_1 \cup A_2$ je úplný a naopak podgraf indukovaný množinou $B_1 \cup B_2$ je tvořen izolovanými vrcholy. Odmyslíme-li si hrany mezi vrcholy v A_1 a A_2, grafy indukované množinou vrcholů $A_1 \cup B_1$ a $A_2 \cup B_2$ jsou úplné 'bipartitní' grafy. Pro $n = 8$ může G vypadat následovně:



Z jistých pozorovní o G lze přímo odvodit vlastnosti o jeho doplňku $\overline{G}$:

(1a) mezi všemi vrcholy v $A_1 \cup A_2$ vedou hrany,
$\overset{\overline{G}}{\Longrightarrow}$ mezi vrcholy v $A_1 \cup A_2$ nevede žádná hrana,
(1b) mezi vrcholy v $B_1 \cup B_2$ nevede žádná hrana,
$\overset{\overline{G}}{\Longrightarrow}$ mezi všemi vrcholy v $B_1 \cup B_2$ vedou hrany,
(2a) ze všech vrcholů v A_1 vede hrana do každého vrcholu v B_1,
$\overset{\overline{G}}{\Longrightarrow}$ z A_1 nevede žádná hrana do B_1,
(2b) ze všech vrcholů v A_2 vede hrana do každého vrcholu v B_2,
$\overset{\overline{G}}{\Longrightarrow}$ z A_2 nevede žádná hrana do B_2,
(3a) z A_1 nevede žádná hrana do B_2,
$\overset{\overline{G}}{\Longrightarrow}$ ze všech vrcholů v A_1 vede hrana do každého vrcholu v B_2,
(3b) z A_2 nevede žádná hrana do B_1,
$\overset{\overline{G}}{\Longrightarrow}$ ze všech vrcholů v A_2 vede hrana do každého vrcholu v B_1.

Z těchto pozorování lze jednoznačně zkonstruovat doplněk grafu G:

$$\begin{aligned}\overline{G} = (A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2, \binom{B_1 \cup B_2}{2} &\cup \{\{a_1, b_2\} \mid a_1 \in A_1, b_2 \in B_2\} \\ &\cup \{\{a_2, b_1\} \mid a_2 \in A_2, b_1 \in B_1\})\end{aligned}$$

Jedná se o definici grafu G s prohozenými množinami $A_1 \leftrightarrow B_1$ a $A_2 \leftrightarrow B_2$. Protože jsou vrcholy v rámci jedné množiny i samotné celé množiny A_1, A_2, B_1, B_2 zaměnitelné, jsou grafy $G, \overline{G}$ isomorfní.

Isomorfismus je $f \coloneqq f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4$:

$$f_1 : A_1 \to B_{1_{\overline{G}}} \qquad f_2 : A_2 \to B_{2_{\overline{G}}}$$
$$f_3 : B_1 \to A_{1_{\overline{G}}} \qquad f_4 : B_2 \to A_{2_{\overline{G}}}$$

kde $f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jsou libovolné příslušné bijekce – libovolné díky zmíněné zaměnitelnosti.

Kdybychom měli v každém případě o jeden vrchol u navíc, v grafu G bychom ho spárovaly se všemi vrcholy v $A_1 \cup A_2$ a v doplňku by nám 'přeskočil' na množinu $B_1 \cup B_2$, což by zachovalo symetrii se zbytkem doplňku. Definice by se nám mírně změnily tímto způsobem:

$$\begin{aligned} G = (\{\mathrm{u}\} \cup A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2, \binom{A_1 \cup A_2}{2} &\cup \{\{a_1, b_1\} \mid a_1 \in A_1, b_1 \in B_1\} \\ &\cup \{\{a_2, b_2\} \mid a_2 \in A_2, b_2 \in B_2\} \\ &\cup \{\{u, a\} \mid a \in A_1 \cup A_2\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{G} = (\{\mathrm{u}\} \cup A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2, \binom{B_1 \cup B_2}{2} &\cup \{\{a_1, b_2\} \mid a_1 \in A_1, b_2 \in B_2\} \\ &\cup \{\{a_2, b_1\} \mid a_2 \in A_2, b_1 \in B_1\} \\ &\cup \{\{u, b\} \mid b \in B_1 \cup B_2\}) \end{aligned}$$

a isomofismus: $f \coloneqq \{(u, u_{\overline{G}})\} \cup f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4$. Seznam pozorování by se nám rozšířil:

(4a) z vrcholu u vede hrana do každého vrcholu v $A_1 \cup A_2$

$\overset{\overline{G}}{\Longrightarrow}$ mezi vrcholem u a $A_1 \cup A_2$ nevede žádná hrana,

(4b) mezi vrcholem u a $B_1 \cup B_2$ nevede žádná hrana,

$\overset{\overline{G}}{\Longrightarrow}$ z vrcholu u vede hrana do každého vrcholu v $B_1 \cup B_2$.

Analogicky platí již odiskutovaná symetrie a $G, \overline{G}$ jsou isomorfní i pro $n \in \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$. Ukázali jsme, že pokud $n \equiv 1 \pmod 4$ nebo $n \equiv 0 \pmod 4$, existuje samodoplňkový graf na n vrcholech. $\square$