MA2: $\{\sin(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Tommy Chu

Zadání

Dokažte, že množina $\{\sin(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ je hustá v $[-1, 1]$.

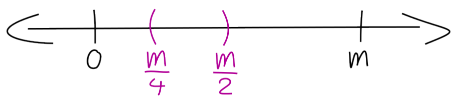
Pomocná tvrzení

Tvrzení 1

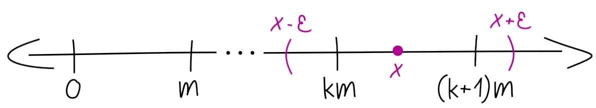
Nechť je M podgrupa $(\mathbb{R}, +)$. Pro M platí právě jedna z následujících vět:

A: Existuje kladné minimum M.
B: M je hustá v $\mathbb{R}$.

Důkaz: $(A \Rightarrow \neg B)$: Pokud má M kladné minimum m, pak průnik intervalu $(\frac{m}{4}, \frac{m}{2})$ s množinou M je prázdný. M tedy není v $\mathbb{R}$ hustá.



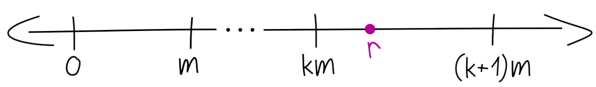
$(\neg A \Rightarrow B)$: Neexistuje-li kladné minimum M, pak pro libovoné $\varepsilon > 0$ existuje $m \in M$ takové, že $0 < m < \varepsilon$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ nutně existuje $k \in \mathbb{Z}$, pro které platí $km \leq x < (k + 1)m$. Po odečtení km obdržíme $0 \leq x - km < m < \varepsilon$, což lze přepsat na $|x - km| < \varepsilon$, tedy pro libovolný interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ existuje $km \in M$, který v něm leží. Množina M je v $\mathbb{R}$ hustá. $\square$



Tvrzení 2

Uvažujme M z předchozího tvrzení. Pokud M není v $\mathbb{R}$ hustá, pak $M = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$, kde m je kladné minimum množiny M.

Důkaz: Existenci kladného minima m zajišťuje Tvrzení 1, $\{km \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq M$ plyne z uzavřenosti vůči sčítání. Pro spor předpokládejme, že existuje prvek $r \in M \setminus \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Pro tento prvek jistě existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $km < r < (k + 1)m$. Po odečtení km obdržíme $0 < r - km < m$, kde $r - km \in M$. To je však ve sporu s tím, že m je kladným minimem M. $\square$



Tvrzení 3

Uvažujme $M = \{a + 2\pi b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. M je hustá v $\mathbb{R}$.

Důkaz: Pro spor předpokládejme, že M není v $\mathbb{R}$ hustá. Pak podle Tvrzení 1 existuje kladné minimum $m = a_m + 2\pi b_m \in M$, kde $a_m, b_m \in \mathbb{Z}$. Dále z Tvrzení 2 vyplývá, že $M = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Z toho plyne

$$\mathbb{Z} = \{a \mid a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{a + 2\pi b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = M = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$1 \in \mathbb{Z} \implies 1 \in M \implies (\exists k \in \mathbb{Z})(1 = km = k(a_m + 2\pi b_m))$$

Z toho však plyne $\pi = \frac{1-ka_m}{2kb_m} \in \mathbb{Q}$, což je ve sporu s tím, že π je iracionální.

Proto je množina $\{a + 2\pi b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ v $\mathbb{R}$ hustá. $\square$

Řešení

Uvažujme libovolné $x \in [-1, 1]$, $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že existuje $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $|x - \sin(n)| < \varepsilon$. Protože $H_{\sin} = [-1, 1]$, existuje $\varphi_x \in \mathbb{R}$ takové, že $x = \sin(\varphi_x)$. Navíc funkce sinus je spojitá, proto platí

$$\lim_{\varphi \to \varphi_x} \sin(\varphi) = \sin(\varphi_x) = x$$

Díky tomu, že je množina $M = \{a + 2\pi b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ v $\mathbb{R}$ hustá, existuje posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků z $M \setminus \{\varphi_x\}$ taková, že

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \varphi_x$$

Odtud z Heineho věty plyne, že pro limitu posloupnosti $(\sin(s_n))_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n \to \infty} \sin(s_n) = x$$

Prvky posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou tvaru $a_n + 2\pi b_n$, kde $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. Funkce sinus má ovšem periodu 2π, tedy lze vypustit $2\pi b_n$:

$$x = \lim_{n \to \infty} \sin(s_n) = \lim_{n \to \infty} \sin(a_n + 2\pi b_n) = \lim_{n \to \infty} \sin(a_n)$$

Z toho vyplývá, že pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $|x - \sin(n)| < \varepsilon$. $\square$