

# MA2 - Nekonečně mnoho sedlových bodů

Tommy Chu

## Zadání

Najděte funkci tří proměnných, která má **(1)** nekonečně mnoho bodů s nulovým gradientem, z nichž ale **(2)** žádný není extrém.

## Řešení

Uvažujme hladkou funkci  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x, y, z) = x^3.$$

Takto definovaná funkce splňuje všechny podmínky v zadání.

**Důkaz:** Gradient  $f$  je nulový v bodech  $S = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ :

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2, 0, 0) \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in S: \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

**(1)** Bodů s nulovým gradientem je nekonečně mnoho:

$$|S| = |\mathbb{R}^2|.$$

**(2)** Funkce nemá extrém v žádném bodě  $S$ . Na okolí každého bodu  $(0, y, z) \in S$  platí, že  $f(x, y, z) = x^3$  je kladné pro  $x > 0$  a záporné pro  $x < 0$ .

Graf této funkce je vykreslen na následujícím *3D contour plot*, kde funkční hodnota je znázorněna barvou. Množinu sedlových bodů  $S$  tvoří rovina  $x = 0$ .  $\square$

