MA2 - Nekonečně mnoho sedlových bodů Tommy Chu

Zadání

Najděte funkci tří proměnných, která má (1) nekonečně mnoho bodů s nulovým gradientem, z nichž ale (2) žádný není extrém.

Řešení

Uvažujme hladkou funkci $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) = x^3.$$

Takto definovaná funkce splňuje všechny podmínky v zadání.

Důkaz: Gradient f je nulový v bodech $S = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}:$

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2, 0, 0) \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in S \colon \nabla f(\mathbf{x}) = \theta.$$

(1) Bodů s nulovým gradientem je nekonečně mnoho:

$$|S| = |\mathbb{R}^2|.$$

(2) Funkce nemá extrém v žádném bodě S. Na okolí každého bodu $(0,y,z) \in S$ platí, že $f(x,y,z) = x^3$ je kladné pro x>0 a záporné pro x<0.

Graf této funkce je vykreslen na následujícím 3D contour plot, kde funkční hodnota je znázorněna barvou. Množinu sedlových bodů S tvoří rovina x=0.

