

Metody numeryczne - Zad 2  
Układy równań liniowych  
Alla Krylova 196722

## 1. Wstęp teoretyczny

Projekt ten skupił się na implementacji i analizie trzech metod rozwiązywania układów równań liniowych: dwóch metod iteracyjnych - metody Jacobiego i metody Gaussa-Seidla - oraz jednej metody bezpośredniej, czyli faktoryzacji LU. Projekt koncentruje się na porównaniu efektywności i dokładności tych technik.

Metody rozwiązań:

- **Metoda Jacobiego** jest algorytmem iteracyjnym służącym do rozwiązywania ściśle diagonalnie zdominowanych układów równań liniowych. Każdy element diagonalny jest rozwiązywany oddzielnie, a następnie przybliżone wartości są używane do iteracyjnego przetwarzania aż do osiągnięcia zbieżności.
- **Metoda Gaussa-Seidla** jest kolejną techniką iteracyjną wykorzystywaną do rozwiązywania układów równań liniowych. Metoda ta jest podobna do metody Jacobiego, ale w praktyce często okazuje się być szybsza ze względu na wykorzystanie najnowszych dostępnych przybliżeń w trakcie iteracji. Metoda Gaussa-Seidla może być stosowana do każdej macierzy z niezerowymi elementami na przekątnej, ale gwarancja zbieżności jest możliwa tylko wtedy, gdy macierz jest ściśle diagonalnie dominująca lub symetryczna i dodatnio określona.
- **Faktoryzacja LU** polega na rozłożeniu macierzy na produkt dolnej macierzy trójkątnej (L) i górnej macierzy trójkątnej (U), czasami z dodatkiem macierzy permutacji. Metoda ta jest niezwykle przydatna w wielu zastosowaniach numerycznych, szczególnie tam, gdzie konieczne jest wielokrotne rozwiązywanie układów równań z różnymi wektorami prawych stron, ale z tą samą macierzą współczynników.

Układ równań liniowych przedstawiony w projekcie ma postać:

$$Ax=b$$

gdzie:

1)  $A$  jest zdefiniowana jako macierz pasmowa o rozmiarze  $N \times N$ , gdzie  $N$  jest obliczane na podstawie numeru indeksu studenta. Dla mojego indeksu  $N$  wynosi 922.  $A$  charakteryzuje się pięcioma diagonalami:

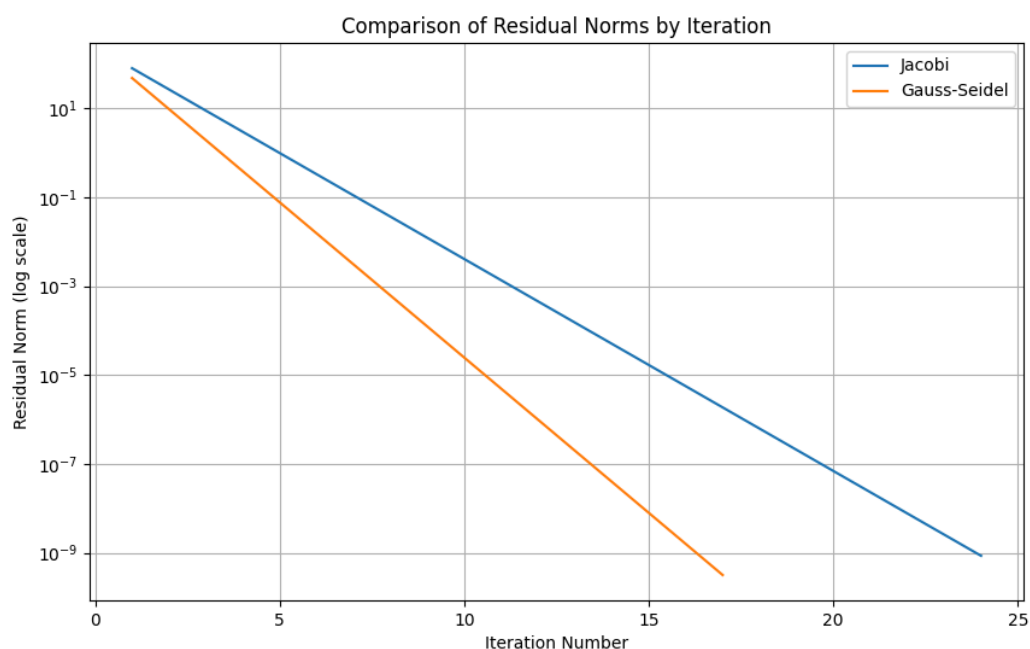
- Główna diagonalą zawiera elementy  $a_1 = 5 + 7 = 12$
- Dwie sąsiednie diagonalne bezpośrednio obok głównej zawierają elementy  $a_2 = -1$
- Dwie skrajne diagonalne, które znajdują się dwa miejsca od głównej, zawierają elementy  $a_3 = -1$

2) Wektor  $b$ , jest wektorem o długości  $N$ , którego  $n$ -ty element ma wartość  $\sin(n * (f + 1))$ , gdzie  $f = 6$ .

3) Rozwiązanie układu równań  $Ax = b$  daje wektor  $x$ , który dostarcza wartości szukanych wielkości fizycznych.

## 2. Metody iteracyjne (Jacobiego i Gaussa-Seidla)

W ramach realizowanego projektu przeprowadzono analizę dwóch metod iteracyjnych - Jacobiego i Gaussa-Seidla - w celu rozwiązania ww. układu równań liniowych.



### 1) Metoda Jacobiego

- Liczba iteracji: 24
- Residuum na końcu:  $8.526921615428109e-10$
- Czas wykonania: 3.283172607421875 sekundy

### 2) Metoda Gaussa-Seidla

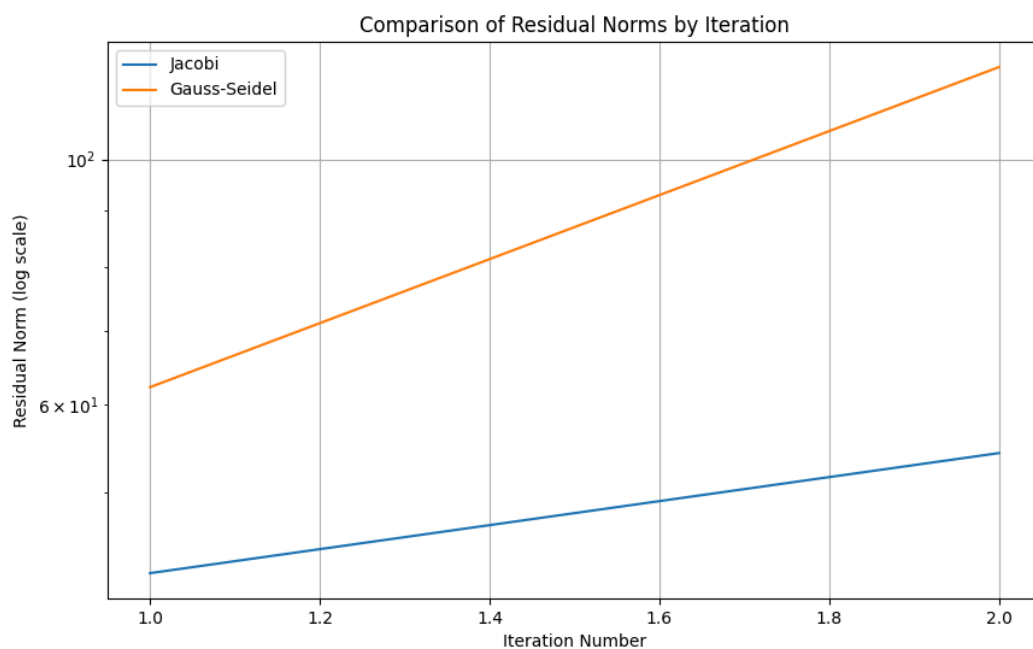
- Liczba iteracji: 17
- Residuum na końcu:  $3.1446046826780536e-10$
- Czas wykonania: 2.140119791030884 sekundy

Wykres przedstawia porównanie norm residuów dla metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa-Seidla w kolejnych iteracjach. Oś Y jest skalą logarytmiczną, co pozwala na lepsze zobrazowanie różnic w szybkości zbieżności obu metod, szczególnie gdy residua maleją do bardzo małych wartości.

Metoda Gaussa-Seidla wykazuje szybszą zbieżność w porównaniu z metodą Jacobiego, co jest widoczne w szybszym spadku residuum. Przez pierwsze kilka iteracji, obie metody zdają się zmniejszać residuum w podobnym tempie, jednak metoda Gaussa-Seidla szybko wyprzedza metodę Jacobiego i osiąga żadaną tolerancję w mniejszej liczbie iteracji.

Na wykresie widać, że metoda Jacobiego wymaga większej ilości iteracji (24) do osiągnięcia podobnego poziomu residuum, co metoda Gaussa-Seidla (17). Dzieje się tak, ponieważ metoda Gaussa-Seidla wykorzystuje najnowsze dostępne przybliżenia w trakcie iteracji, co zazwyczaj przyspiesza zbieżność w porównaniu z metodą Jacobiego, która wymaga pełnego przejścia przez wszystkie zmienne przed aktualizacją wartości. Warto zauważyć, że różnica ta jest znacząca i może mieć wpływ na wybór metody w zastosowaniach, gdzie czas obliczeń jest krytycznym czynnikiem.

Również z wykresu wynika, że końcowe residuum dla obu metod spada poniżej ustalonej tolerancji  $10^{-9}$ , co świadczy o ich efektywności w znalezieniu przybliżonego rozwiązania układu równań liniowych. Wartość residuum dla metody Gaussa-Seidla jest mniejsza, co może wskazywać na wyższą dokładność tej metody w danym przypadku.



Ten wykres natomiast przedstawia porównanie norm residuów dla metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa-Seidla w kolejnych iteracjach dla układu równań, gdzie  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = a_3 = -1$  (liczba niewiadomych  $N$  i wektor  $b$  pozostają bez zmian).

1) Metoda Jacobiego

- Liczba iteracji: 2
- Residuum na końcu: 54.2776438289009
- Czas wykonania: 0.2809305191040039 sekundy

2) Metoda Gaussa-Seidla

- Liczba iteracji: 2
- Residuum na końcu: 121.144167334872
- Czas wykonania: 0.31687450408935547 sekundy

Wykres ten ilustruje dramatycznie różny obraz niż poprzednie wyniki, pokazując sytuację, w której zarówno metoda Jacobiego, jak i Gaussa-Seidla nie zbiegają, lecz zamiast tego divergują.

Normy residuów rosną zamiast maleć, co wskazuje na dywergencję. Jest to sygnał, że metody iteracyjne nie zbiegają do rozwiązania dla podanego układu równań.

Obie metody zatrzymały się już po dwóch iteracjach, co pokazuje, że mechanizm wykrywania dywergencji działa poprawnie, zapobiegając dalszym, nieproduktywnym obliczeniom.

Wysokie wartości residuum na końcu procesu iteracyjnego (54.28 dla Jacobiego i 121.14 dla Gaussa-Seidla) świadczą o znacznym błędzie w przybliżonych rozwiązaniach.

Czas potrzebny do wykrycia dywergencji jest krótki (mniej niż pół sekundy dla obu metod), jednak nie jest to pozytywna cecha, gdyż wynika ona z niemożności znalezienia rozwiązania.

Dywergencja w metodach iteracyjnych może wystąpić z wielu przyczyn. Może to być spowodowane brakiem ścisłej dominacji diagonalnej macierzy  $A$  lub, w przypadku metody Gaussa-Seidla, brakiem symetrii i dodatniej określoności macierzy. Biorąc pod uwagę, że elementy diagonalnej głównej macierzy  $A$  są mniejsze niż suma modułów pozostałych elementów w wierszach, macierz nie jest ściśle diagonalnie dominująca, co jest niezbędnym warunkiem zbieżności dla tych metod.

#### 4. Metoda bezpośredniego rozwiązania: metoda faktoryzacji LU

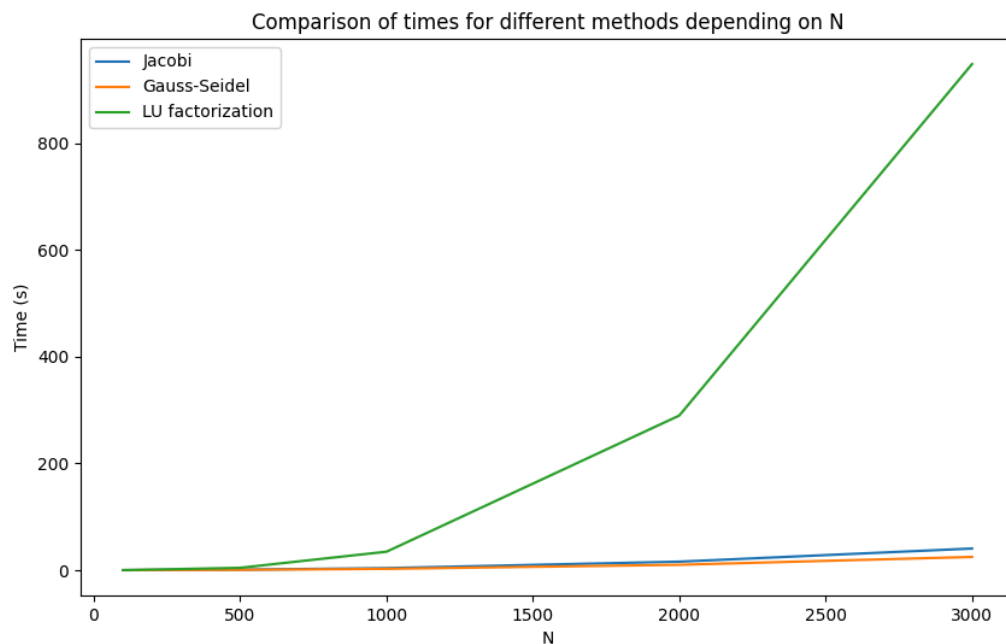
Metoda faktoryzacji LU została zaimplementowana i zastosowana do rozwiązania tego samego układu równań liniowych, który został zbadany w poprzednim punkcie, gdzie zaobserwowano dywergencję w metodach iteracyjnych.

- Residuum na końcu: 3.0807886512163823e-12
- Czas wykonania: 27.533276319503784 sekundy

Norma residuum w przypadku zastosowania metody faktoryzacji LU osiągnęła bardzo niską wartość, co wskazuje na bardzo wysoką dokładność uzyskanego rozwiązania. W porównaniu do metod iteracyjnych, które wykazały dywergencję, metoda LU pokazuje swoją niezawodność w przypadkach, kiedy inne metody zawodzą.

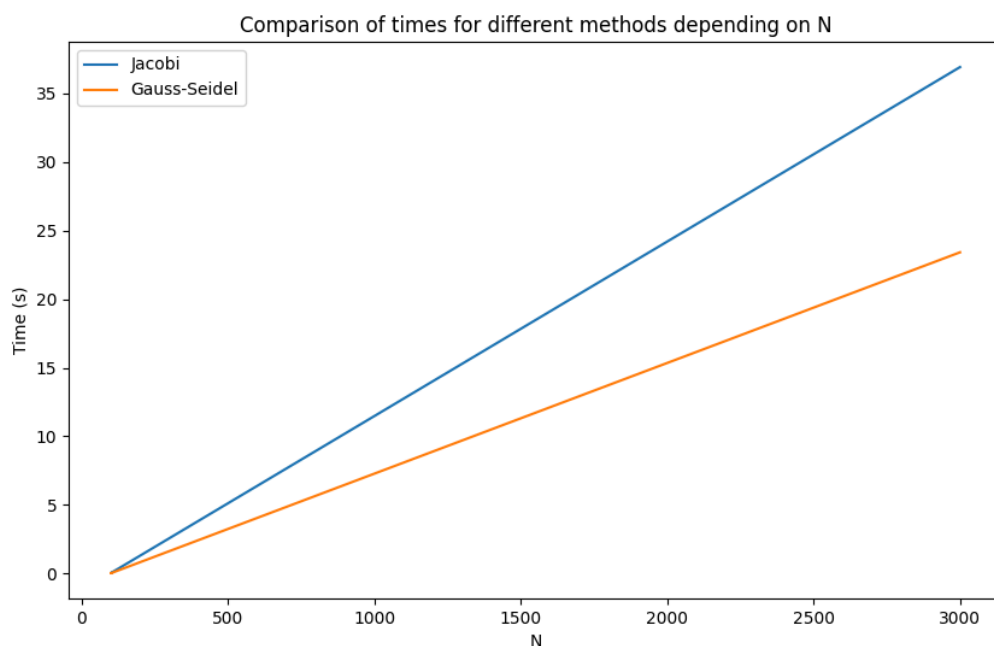
Czas obliczeń wynoszący nieco ponad 27 sekund jest znaczący, lecz jest to akceptowalny kompromis biorąc pod uwagę stabilność i dokładność metody, szczególnie w świetle trudności związanych z rozwiązaniem tego układu za pomocą metod iteracyjnych.

## 5. Analiza badanych metod w zależności od liczby niewiadomych



Wykres przedstawia porównanie czasu potrzebnego na wyznaczenie rozwiązania układów równań liniowych za pomocą trzech różnych metod: Jacobiego, Gaussa-Seidla oraz faktoryzacji LU, w zależności od liczby niewiadomych  $N$ . Na osi poziomej umieszczono liczbę niewiadomych, a na osi pionowej czas potrzebny na obliczenia w sekundach.

Liczba niewiadomych $N$	Czas wyznaczenia rozwiązania (sekundy)		
	Metoda Jacobiego	Metoda Gaussa-Seidla	Faktoryzacja LU
100	0.036938905715942	0.02510190010070800	0.03939819335
500	0.962685823440551	0.6956193447113037	4.58772873878
1000	4.170687913894653	2.9199461936950684	37.9234762191
2000	16.29064226150512	10.340263366699219	296.201050519
3000	36.24616241455078	23.109050989151	961.608734130



Zarówno metoda Jacobiego, jak i metoda Gaussa-Seidla wykazują płaskie profile czasowe, sugerujące, że czas potrzebny na wyznaczenie rozwiązania nie wzrasta znacząco wraz ze wzrostem liczby niewiadomych. Oba algorytmy zachowują podobny poziom wydajności niezależnie od rozmiaru problemu, przynajmniej w badanym zakresie, jednak metoda Gaussa-Seidla jest nieco szybsza.

Metoda faktoryzacji LU wykazuje znaczny wzrost czasu obliczeń wraz ze wzrostem liczby niewiadomych. Jest to zgodne z teoretycznymi oczekiwaniami, jako że złożoność obliczeniowa faktoryzacji LU rośnie mniej więcej kwadratowo z rozmiarem macierzy. Dla  $N=3000$ , czas obliczeń staje się bardzo duży w porównaniu do metod iteracyjnych.

Na małych układach równań ( $N = 100$ ) wszystkie trzy metody mają zbliżony czas wykonania. Jednakże, w miarę wzrostu  $N$ , różnice stają się bardziej zauważalne. Metody iteracyjne są znacznie bardziej skalowalne niż faktoryzacja LU, co sugeruje, że w przypadku dużych układów równań lepiej sprawdzają się metody iteracyjne.

## 6. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych analiz i eksperymentów numerycznych związanych z rozwiązaniem układów równań liniowych metodami Jacobiego, Gaussa-Seidla oraz faktoryzacji LU, można wyciągnąć następujące wnioski:

Metody Jacobiego i Gaussa-Seidla wykazały się zdolnością do skutecznego rozwiązywania układów równań liniowych przy zachowaniu niskiego residuum i stosunkowo krótkim czasie obliczeń. Są one praktyczne w sytuacjach, gdzie szybkość i efektywność są priorytetem, a także w systemach, gdzie dostępne zasoby obliczeniowe są ograniczone.

Analiza wyników wskazuje na krytyczne znaczenie zapewnienia odpowiednich warunków dla zbieżności metod iteracyjnych. W przypadkach, gdy warunki te nie są spełnione (jak w zadaniu C, gdzie wystąpiła dywergencja), metody te mogą zawodzić.

Metoda LU jest niezawodna w sytuacjach, gdzie metody iteracyjne zawodzą z powodu braku dominacji diagonalnej macierzy. Jednak z uwagi na jej większą złożoność obliczeniową, czas wykonania znacznie wzrasta wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, co czyni ją mniej odpowiednią dla bardzo dużych systemów.

W kontekście skalowania problemu do większych rozmiarów ( $N = \{100, 500, 1000, 2000, 3000\}$ ), metody iteracyjne utrzymują lepszą skalowalność w porównaniu z metodą LU, która wykazuje superliniowy wzrost czasu obliczeń.

Wybór odpowiedniej metody rozwiązywania układów równań liniowych powinien być dokonywany po dokładnej analizie charakterystyki macierzy oraz specyfiki problemu. Ważne jest, aby wziąć pod uwagę nie tylko rozmiar macierzy, ale również jej własności, takie jak dominacja diagonalna czy rzadkość.