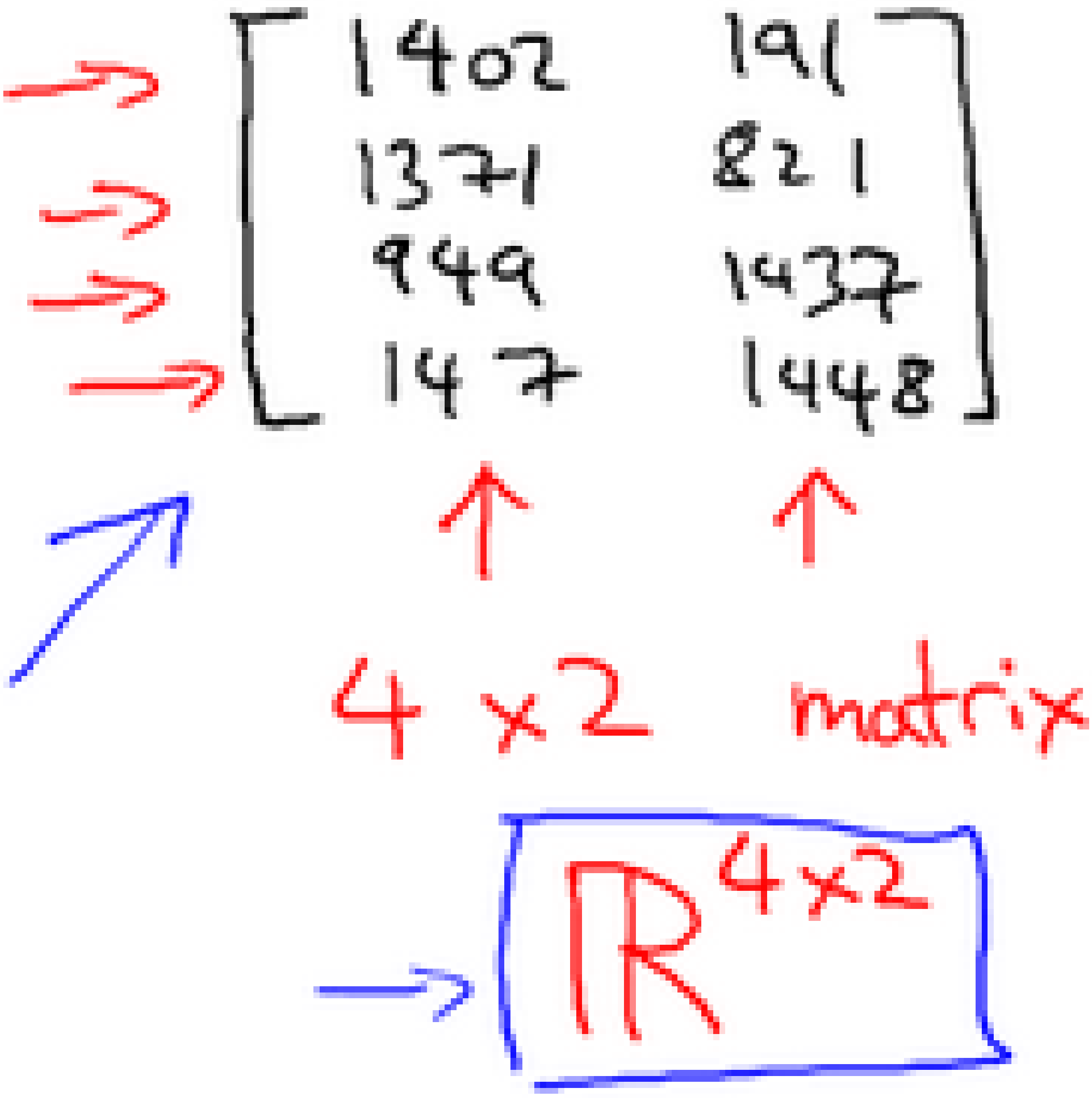
三、线性代数回顾

三、线性代数回顾(Linear Algebra Review)

3.1 矩阵和向量

如图：这个是4×2矩阵，即4行2列，如m为行，n为列，那么$m \times n$即4×2



矩阵的维数即行数×列数

矩阵元素（矩阵项）：$A = \begin{bmatrix} 1402 & 191 \\ 1371 & 821 \\ 949 & 1437 \\ 147 & 1448 \end{bmatrix}$

A_{ij}指第i行，第j列的元素。

向量是一种特殊的矩阵，讲义中的向量一般都是列向量，如：

$$y = \begin{bmatrix} 460 \\ 232 \\ 315 \\ 178 \end{bmatrix}$$

为四维列向量（4×1）。

如下图为1索引向量和0索引向量，左图为1索引向量，右图为0索引向量，一般我们用1索引向量。

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}，y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

3.2 加法和标量乘法

矩阵的加法：行列数相等的可以加。
例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0.5 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 4 & 10 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

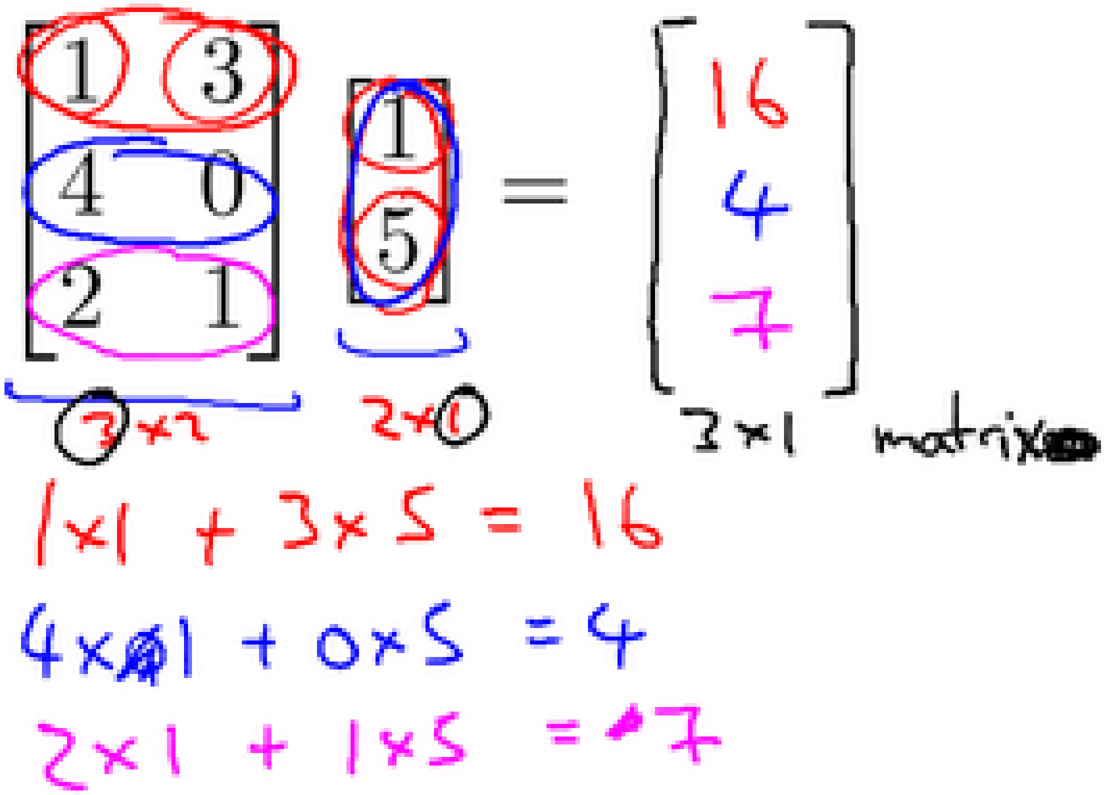
矩阵的乘法：每个元素都要乘

$$3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 15 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times 3$$

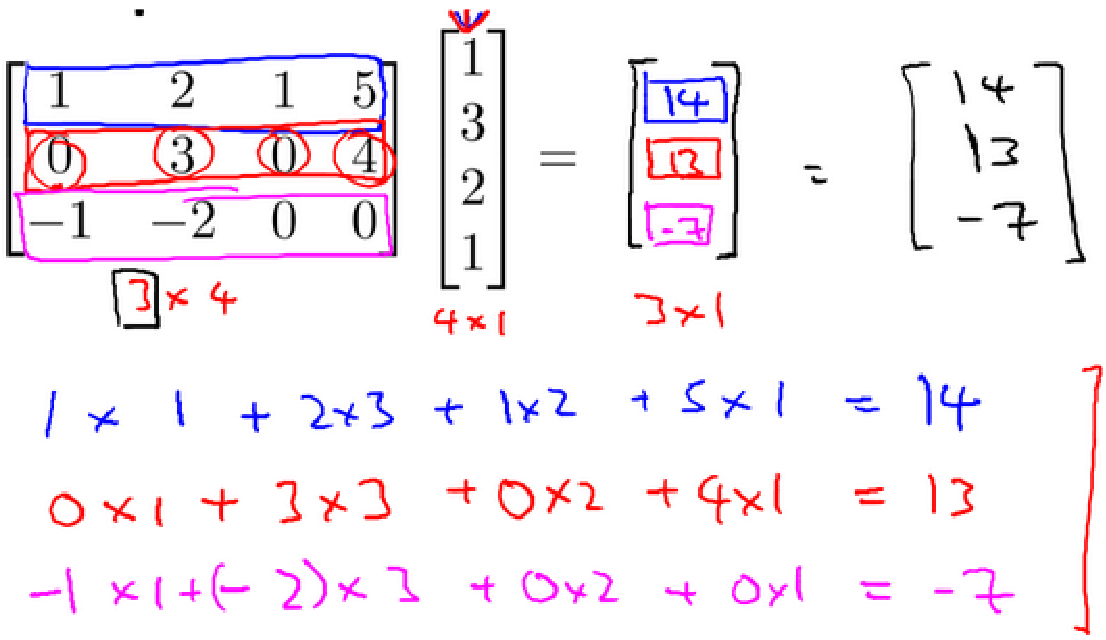
组合算法也类似。

3.3 矩阵向量乘法

矩阵和向量的乘法如图：$m \times n$的矩阵乘以$n \times 1$的向量，得到的是$m \times 1$的向量



算法举例：



3.4 矩阵乘法

矩阵乘法：

$m \times n$矩阵乘以$n \times o$矩阵，变成$m \times o$矩阵。

如果这样说不好理解的话就举一个例子来说明一下，比如说现在有两个矩阵A和B，那么它们的乘积就

可以表示为图中所示的形式。

$$C = A \times B$$

$$\begin{pmatrix} C0 & C1 \\ C2 & C3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A0 & A1 \\ A2 & A3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B0 & B1 \\ B2 & B3 \end{pmatrix}$$

$$C0 = A0 \times B0 + A1 \times B2$$
$$C1 = A0 \times B1 + A1 \times B3$$

$$C2 = A2 \times B0 + A3 \times B2$$
$$C3 = A2 \times B1 + A3 \times B3$$

3.5 矩阵乘法的性质

矩阵乘法的性质：

矩阵的乘法不满足交换律：$A \times B \neq B \times A$

矩阵的乘法满足结合律。即：$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

单位矩阵：在矩阵的乘法中，有一种矩阵起着特殊的作用，如同数的乘法中的1,我们称这种矩阵为单位矩阵．它是个方阵，**一般用 I 或者 E 表示**，本讲义都用 I 代表单位矩阵，从左上角到右下角的对角线（称为主对角线）上的元素均为1以外全都为0。如：

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

对于单位矩阵，有$AI = IA = A$

3.6 逆、转置

矩阵的逆：如矩阵A是一个$m \times m$矩阵（方阵），如果有逆矩阵，则：$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

我们一般在**OCTAVE**或者**MATLAB**中进行计算矩阵的逆矩阵。

矩阵的转置：设A为$m \times n$阶矩阵（即m行n列），第i\$行j 列的元素是a(i,j)，即：A=a(i,j)\$

定义A的转置为这样一个$n \times m$阶矩阵B，满足$B=a(j,i)$，即 $b(i,j)=a(j,i)$（B的第i行第j列元素是A的第j行第i列元素），记$A^T=B$。(有些书记为A'=B）

直观来看，将A的所有元素绕着一条从第1行第1列元素出发的右下方45度的射线作镜面反转，即得到A的转置。

例：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{vmatrix}$$

矩阵的转置基本性质:
$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
$(A \times B)^T = B^T \times A^T$
$\left(A^T\right)^T = A$
$(KA)^T = KA^T$

matlab中矩阵转置：直接打一撇，`x=y'`。