概率论第二次作业

学号：171860526

姓名：褚有刚

习题二

2.4

由离散型随机变量分布律的性质，得① $\frac{1}{4}+a+b=1$;

由离散型随机变量分布函数的性质，得：

② $c=0$;

③ $d=\frac{1}{4}$;

④ $\frac{1}{4}+a=\frac{3}{4}$;

⑤ $e=\frac{3}{4}+b$;

联立以上的方程，可以得到：$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4},c=0,d=\frac{1}{4},e=1.$

2.5

记随机变量X表示射击3次中的命中次数，p表示命中率，则$P(x=k)=C_3^kp^k(1-p)^{3-k}$, 则

X	0	1	2	3
$P_{甲}$	0.064	0.288	0.432	0.216
$P_{乙}$	0.027	0.189	0.441	0.343

(1) P{两人命中次数相同} = $\sum_{k=0}^{3}P_{甲}(X=k)P_{乙}(X=k)$ = 0.328;

(2) P{甲比乙的命中次数多} =
$P_{甲}(X=1)P_{乙}(X=0)+P_{甲}(X=2)(P_{乙}(X=0)+P_{乙}(X=1))+P_{甲}(X=3)(1-P_{乙}(X=3))=0.243.$

2.6

随机变量X的可能取值为0, 1, ..., n;

汽车遇到红灯的概率$p=\frac{1}{3}$;

则$P(X=k)=(1-p)^kp=(\frac{2}{3})^k(\frac{1}{3}),k=0,1,\dots,n-1,$

$P(X=n)=(1-p)^n=(\frac{2}{3})^n.$

2.7

(1) 从8杯酒中取4杯共有C_8^4中取法，而试验一次成功的情况只有一种，因此$p=\frac{1}{C_8^4}=\frac{1}{70}$;

(2) 假设该人是猜对的，设随机变量X表示独立试验10次中成功的次数，

则该人猜对的概率为
$P(X\geq 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=1-(1-p)^{10}-C_{10}^1p(1-p)^9-C_{10}^2p^2(1-p)^8=\frac{13}{40062}\approx 3.245\times 10^{-4}$
;

该事件为小概率事件，因此可以判定该人是具有区分能力的.

2.10

(1) 由密度函数的性质，

$\int_{-\infty}^{\infty} ae^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} ae^{-x}dx = -2ae^{-x}|_0^{+\infty} = 2a = 1,$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}.$

(2) $\int_0^{2\pi} asin\frac{x}{2}dx = -2acos\frac{x}{2}|_0^{2\pi} = 4a = 1,$

$\Rightarrow a = \frac{1}{4}.$

(3) $\int_0^{a} cosxdx = sinx|_0^{a} = sina = 1,$

$\Rightarrow a = \frac{\pi}{2}.$

(4) $\int_{-1}^{1} \frac{a}{1+x^2}dx = 2aarctanx|_0^{1} = \frac{\pi}{2}a = 1,$

$\Rightarrow a = \frac{2}{\pi}.$

2.11

由连续型随机变量的性质，

$lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0),$

即① $A + B = 0,$

$lim_{x\to +\infty} F(x) = 1,$

即② $A = 1,$

综上， $A = 1, B = -1, P(-1 < X \leq 1) = F(1) - F(-1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$

2.12

(1) 由密度函数的性质，$\int_0^1 Ax^3dx = 1 \Rightarrow A = 4;$

(2) 当$x < 0$时，$F(x) = 0;$

当$0 \leq x < 1$时，$F(x) = \int_0^x 4x^3dx = x^4;$

当$x \geq 1$时， $F(x) = 1.$

(3) 如果$P(X < B) = P(X > B)$，则$F(B) = 1 - F(B),$

即$F(B) = \frac{1}{2} = B^4,$

解得$B = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$

2.13

分布函数$F(x)$为：

当$x < -3$时，$F(x) = 0;$

当$-3 \leq x < 3$时，$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx = \frac{x^3}{54} + \frac{1}{2};$

当$x \geq 3$时，$F(x) = 1;$

如果关于y的方程有实根，则$(x-2)(x+1) \geq 0$，即$x \leq -1$或者$x \geq 2$，

则P\{该方程有实根\} = $P(x \leq -1) + P(x \geq 2) = F(-1) + 1 - F(2) = \frac{5}{6}.$

2.14

由$X \sim N(5,4)$，则$\mu = 5, \sigma = 2$，

(1) $P(X < a) = \Phi(\frac{a-5}{2}) = 0.9$，

查表，得$\frac{a-5}{2} = 1.28,$

则$a = 7.56;$

(2) $P(|X-5| > a) = 1 - P(|X-5| \leq a) = 1 - P(|\frac{X-5}{2}| \leq \frac{a}{2}) = 2 - 2\Phi(\frac{a}{2}) = 0.01,$

则$\Phi(\frac{a}{2}) = 0.995,$

查表$a = 5.15.$

2.15

由$X \sim N(60,9)$得$\mu = 60, \sigma = 3$;

由题意，$P(X \leq x_2) = \Phi(\frac{x_2-60}{3}) = \frac{7}{12}$,

查表，得$\frac{x_2-60}{3} = 0.21$, 则$x_2 = 60.63$;

$P(X \leq x_1) = \Phi(\frac{x_1-60}{3}) = \frac{1}{4}$,

则$\Phi(\frac{60-x_1}{3}) = \frac{3}{4}$，查表得，$\frac{60-x_1}{3} = 0.67$, 则$x_1 = 57.99$.

2.16

$p_1 = P(X \leq \mu - 4) = \Phi(\frac{\mu-4-\mu}{4}) = \Phi(-1)$;

$p_2 = P(Y \geq \mu + 5) = 1 - P(Y < \mu + 5) = 1 - \Phi(\frac{\mu+5-\mu}{5}) = 1 - \Phi(1) = \Phi(-1) = p_1$;

2.17

(1) $P(X \leq 200) = \Phi(\frac{200-220}{25}) = 1 - \Phi(0.8) = 0.2119$;

$P(X \geq 240) = P(X \leq 200) = 0.2119$;

$P(200 < X < 400) = 1 - 0.2119 * 2 = 0.5762$;

设事件A表示电子元件损坏，由题意:

$P(A|X \leq 200) = 0.1, P(A|200 < X < 400) = 0.001, P(A|X \geq 400) = 0.2$;

则$P(A) = 0.2119 \times 0.1 + 0.5762 \times 0.001 + 0.2119 \times 0.2 = 0.0641$.

(2) $P(200 < X < 240|A) = \frac{P(200<X<240)P(A|200<X<240)}{P(A)} = \frac{0.5762 \times 0.001}{0.0641} = 0.009$.

2.18

已知$X \sim N(500, \sigma^2)$,

由$P(X > 612) = 1 - P(X \leq 612) = 1 - \Phi(\frac{612-500}{\sigma}) = 0.055$,

则$\Phi(\frac{112}{\sigma}) = 0.945$, 查表，得$\frac{112}{\sigma} = 1.6$，则$\sigma = 70$;

设及格分数为x, 则$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - \Phi(\frac{x-500}{70}) = 0.85$,

则$\Phi(\frac{500-x}{70}) = 0.85$, 查表，得$\frac{500-x}{70} = 1.04$, 则$x = 427.2$.

取整后，及格分应是427分.