概率论第三次作业

概率论第三次作业

- 习题二
- 习题三

习题二

2.19

1. 随机变量Y的可能取值为-4, -1, 0, 1, 8

$P(Y=-4)=P(X=-2)=\frac{1}{8}$;

$P(Y=-1)=P(X=-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$;

$P(Y=0)=P(X=0)=\frac{1}{8}$;

$P(Y=1)=P(X=\frac{1}{2})=\frac{1}{6}$;

$P(Y=8)=P(X=4)=\frac{1}{3}$;

2. 随机变量Y的可能取值为$0,\frac{1}{4},4,16$;

$P(Y=0)=P(X=0)=\frac{1}{8}$;

$P(Y=\frac{1}{4})=P(X=-\frac{1}{2})+P(X=\frac{1}{2})=\frac{5}{12}$;

$P(Y=4)=P(X=-2)=\frac{1}{8}$;

$P(Y=16)=P(X=4)=\frac{1}{3}$;

3. 随机变量Y的可能取值为$-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$P(Y=-\frac{\sqrt{2}}{2})=P(X=-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$;

$P(Y=0)=P(X=-2)+P(X=0)+P(X=4)=\frac{7}{12}$;

$P(Y=\frac{\sqrt{2}}{2})=P(X=\frac{1}{2})=\frac{1}{6}$.

2.20

$X\sim U[-1,1]$则:

$p_X(x)=\frac{1}{2},-1\le x\le 1$;

$p_X(x)=0,o.w.$;

当$-1\le X\le 1$时，$0\le Y\le 1$，因此Y的可能取值范围为$[0,1]$，

因此当$y\le 0$或$y\ge 1$时，$p_Y(y)=0$;

当$0<y<1$时，
$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$.

此时$-1 \leq -\sqrt{y}, \sqrt{y} \leq 1$，因此
$p_Y(y) = (F_Y(y))'_y = (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}(p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

综上:

$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, 0 < y < 1$;

$p_y(y) = 0, o.w.$;

2.21

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X+4 \leq y) = P(X \leq \frac{y}{2} - 2) = \int_{-\infty}^{\frac{y}{2}-2} p_x(x)dx$

则$p_Y(y) = (F_Y(y))'_y = (\int_{-\infty}^{\frac{y}{2}-2} p(x)dx)'_y = \frac{1}{2}p(\frac{y}{2} - 2) = \frac{e^{-\frac{(\frac{y}{2}-4)^2}{16}}}{8\sqrt{\pi}}$(渲染存在一点问题，分子上除了e都是e的指数部分)；

2.22

$X \sim U[0, \pi]$, 则:

$p_X(x) = \frac{1}{\pi}, 0 \leq x \leq \pi$;

$p_X(x) = 0, o.w.$;

当$0 \leq X \leq \pi$时$0 \leq Y \leq 1$，因此Y的可能取值范围为$[0,1]$;

因此当$Y \leq 0$或者$Y \geq 1$时，$p_Y(y) = 0$;

当$0 < y < 1$时，$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(sinX \leq y) = P(X \leq arcsiny) = F(arcsiny)$.

由于$0 \leq arcsiny \leq \pi$, 因此
$p_Y(y) = (F_Y(y))'_y = (F(arcsiny))'y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}p_X(arcsiny) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$.

综上:

$p_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, 0 < y < 1$;

$p_Y(y) = 0, o.w.$;

2.24

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(1 - \sqrt[3]{X} \leq y) = P(X \geq (1-y)^3) = \int_{(1-y)^3}^{+\infty} p_X(x)dx$.

因此，$p_Y(y) = (F_Y(y))'_y = (\int_{(1-y)^3}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx)'_y = \frac{3(1-y)^2}{\pi(1+(1-y)^6)}, -\infty \leq y \leq \infty$.

2.25

$p_X(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, 1 \leq x \leq 8$.

$p_X(x) = 0, o.w.$;

计算其分布函数$F(x)$，结果如下:

$F(x) = 0, x \leq 1$,

$F(x) = \sqrt[3]{x} - 1, 1 < x \leq 8$,

$F(x) = 1, x > 8$.

当$1 \leq X \leq 8$时，$0 \leq Y \leq 1$，因此Y的可能取值范围为$[0,1]$，

因此当$y \leq 1$或$y \geq 1$时，$p_Y(y) = 0$;

当$0<y<1$时，此时$1<x<8$，因此$F(x)=\sqrt[3]{x}-1$，则
$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sqrt[3]{X}-1\le y)=P(X\le (y+1)^3)=F_X((y+1)^3)$.

因此$p_Y(y)=(F_Y(y))'_y=(F_X((y+1)^3))'_y=(\sqrt[3]{(y+1)^3}-1)'_y=1$;

综上，$Y\sim U[0,1]$.

2.26

$X\sim E(2)$.

因此$F(x)=1-e^{-2x},x\ge 0$;

$F(x)=0,o.w.$;

当$X\ge 0$时，$0\le Y<1$；

因此当$y<0$或$y\ge 1$时，$p_Y(y)=0$;

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-e^{-2X}\le y)=P(X\le -\frac{\ln(1-y)}{2})=F(-\frac{\ln(1-y)}{2})$

此时$-\frac{\ln(1-y)}{2}\ge 0$，因此$F_Y(y)=1-e^{-2*(-\frac{\ln(1-y)}{2})}=y$.

因此，$p_Y(y)=(F_Y(y))'_y=y'_y=1$，

综上，$Y\sim U[0,1]$.

习题三

3.1

当$0<x<1$且$0<y<1$且$x+y<1$时，

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}p(x,y)dv=\int_0^x du\int_0^y 2dv=2xy$;

当$0<x<1$且$0<y<1$且$x+y\ge 1$时，

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}p(x,y)dv=\int_0^{1-y}du\int_0^y 2dv+\int_{1-y}^{x}du\int_0^{1-u}2dv=-x^2-y^2+2x+2y-1$
;

当$0<x<1$且$y\ge 1$时，

$F(x,y)=\int_0^x du\int_0^{1-u}2dv=2x-x^2$;

当$x\ge 1$且$0<y<1$时，

$F(x,y)=\int_0^y dv\int_0^{1-v}2du=2y-y^2$.

当$x\ge 1$且$y\ge 1$时，

$F(x,y)=1$;

对于其他情况，$F(x,y)=0$.