



# Équations aux dérivées partielles et méthode des éléments finis

Arnaud Coatanhay  
[arnaud.coatanhay@ensta-bretagne.fr](mailto:arnaud.coatanhay@ensta-bretagne.fr)





"Thus the partial differential equation entered theoretical physics as a handmaid,  
but has gradually become mistress."

Albert Einstein



# Table des matières

<b>I. Modélisation des problèmes de l'ingénieur</b>	<b>1</b>
1. Les EDP comme outil de modélisation	3
1.1. Trafic routier . . . . .	3
1.1.1. Expression du bilan local de trafic . . . . .	3
1.1.2. Lien entre densité et flux . . . . .	4
1.2. Thermique . . . . .	5
1.2.1. Quelques définitions sur la chaleur et la température . . . . .	5
1.2.2. Modes de transfert . . . . .	7
1.2.3. Chauffage d'un corps homogène . . . . .	8
1.2.4. Loi de Fourier . . . . .	9
1.2.5. Equation de la conduction . . . . .	9
1.2.6. Conditions aux limites . . . . .	10
1.2.7. Lien avec la diffusion de matière . . . . .	11
1.2.8. Exercices d'application . . . . .	12
1.3. Marchés financiers . . . . .	12
1.3.1. Modélisation . . . . .	12
1.3.2. Lien avec la thermique . . . . .	12
1.4. Corde vibrante . . . . .	13
1.4.1. Équation des ondes . . . . .	13
1.4.2. Conditions aux frontières . . . . .	14
1.5. Électromagnétisme . . . . .	16
1.5.1. Introduction . . . . .	16
1.5.2. Quelques définitions usuelles . . . . .	16
1.5.3. Quelques lois usuelles . . . . .	17
1.5.4. Les équations de MAXWELL . . . . .	19
1.5.5. Résumé sur les équations fondamentales de l'électromagnétisme . . . . .	21
1.5.6. Notion de potentiel vecteur et scalaire . . . . .	22
1.5.7. Équation générale de la propagation . . . . .	22
1.5.8. Conditions aux limites . . . . .	23
1.5.9. Exercices d'application . . . . .	24
1.6. Acoustique des fluides . . . . .	25
1.6.1. Introduction . . . . .	25
1.6.2. Grandeurs fondamentales . . . . .	25
1.6.3. Hypothèses prises sur l'établissement de l'équation du son . . . . .	26
1.6.4. Propriétés générales des milieux acoustiques . . . . .	27
1.6.5. Equation de propagation . . . . .	29
1.6.6. Conditions aux limites . . . . .	33
1.6.7. Exercices d'application . . . . .	35
1.7. Équation de Schrödinger (extrait de wikipédia)	35
1.8. Modélisation des vagues de houle . . . . .	36
1.8.1. Modèle théorique de houle . . . . .	36
1.8.2. Approximation d'Airy . . . . .	37

## Table des matières

1.8.3. Équation de Korteweg et de Vries (KdV) . . . . .	37
1.9. Modélisation épidémiologique . . . . .	37
1.9.1. Modèle SIR simple . . . . .	37
1.9.2. Modèle plus complexe . . . . .	38
<b>2. Notion de symétrie</b>	<b>39</b>
2.1. Principe fondamental de CURIE . . . . .	39
2.1.1. Plan de symétrie pour le champ électrique . . . . .	39
2.1.2. Plan de symétrie pour le champ magnétique . . . . .	39
2.2. Autres symétries . . . . .	40
2.3. Invariance par translation . . . . .	40
2.4. Symétries et conditions aux frontières . . . . .	40
2.4.1. Champ scalaire symétrique . . . . .	40
2.4.2. Champ scalaire antisymétrique . . . . .	41
2.4.3. Champ vectoriel symétrique . . . . .	41
2.4.4. Champ vectoriel antisymétrique . . . . .	41
2.4.5. Intérêt pour les EDP . . . . .	42
<b>3. Analyse dimensionnelle</b>	<b>43</b>
3.1. Quantité physique . . . . .	43
3.1.1. Quantités de base . . . . .	43
3.1.2. Quantités dérivées . . . . .	44
3.2. Le théorème Pi de BUCKINGHAM . . . . .	46
3.2.1. Étape 1 . . . . .	46
3.2.2. Étape 2 . . . . .	47
3.2.3. Étape 3 . . . . .	47
3.2.4. Étape 4 . . . . .	47
3.2.5. Exercices d'application . . . . .	47
<b>II. Équations aux dérivées partielles</b>	<b>49</b>
<b>4. Introduction</b>	<b>51</b>
4.1. Notation indicelle . . . . .	51
4.2. Conditions aux frontières (CF) . . . . .	51
4.3. Conditions initiales (CI) . . . . .	52
<b>5. Classification des EDP</b>	<b>53</b>
5.1. Linéarité et non-linéarité . . . . .	53
5.1.1. Présentation habituelle pour les EDP du premier et second ordre) . . . . .	53
5.1.2. Espace linéaire ou espace affine ? . . . . .	53
5.2. Une classification standard . . . . .	54
5.2.1. EDP à plus de deux variables . . . . .	54
5.2.2. Lien avec les coniques . . . . .	55
5.2.3. Exercices d'application . . . . .	57
<b>6. EDP du premier ordre</b>	<b>59</b>
6.1. Méthode des caractéristiques . . . . .	59
6.1.1. Cas linéaire . . . . .	59
6.1.2. Généralisation au cas quasi-linéaire . . . . .	62
6.1.3. Existence et unicité de la solution . . . . .	62
6.1.4. Ordres supérieurs . . . . .	63

<b>7. Théorie de Sturm Liouville</b>	<b>65</b>
7.1. Quelques définitions préliminaires . . . . .	65
7.2. Problèmes de Sturm-Liouville . . . . .	66
7.2.1. Problème régulier de Sturm-Liouville . . . . .	66
7.2.2. Problème périodique de Sturm-Liouville . . . . .	67
7.3. Une application : les séries de Fourier . . . . .	67
<b>8. Séparation de variables</b>	<b>69</b>
8.1. Approche intuitive . . . . .	69
8.2. La méthode de séparation des variables . . . . .	70
8.2.1. La séparabilité . . . . .	70
8.3. Application de la théorie de Sturm-Liouville . . . . .	71
8.3.1. Extraire une EDO . . . . .	71
8.3.2. Retour à l'EDP . . . . .	72
8.4. CF inhomogène . . . . .	73
8.5. Exemple de géométrie séparable . . . . .	73
8.6. Synthèse . . . . .	74
<b>9. Initiation à la théorie modale</b>	<b>75</b>
9.1. Positionnement du problème . . . . .	75
9.2. Diffusion . . . . .	76
9.2.1. Onde incidente . . . . .	77
9.2.2. Onde diffusée . . . . .	77
9.2.3. Matrice de transition . . . . .	78
9.3. Exercices d'application . . . . .	78
<b>10. Transformations intégrales</b>	<b>79</b>
10.1. Transformée de FOURIER . . . . .	79
10.1.1. Présentation générale . . . . .	79
10.1.2. Transformée inverse . . . . .	80
10.1.3. Propriétés classiques . . . . .	81
10.1.4. Équation de Helmholtz . . . . .	81
10.2. Transformée de Laplace . . . . .	83
10.2.1. Présentation générale . . . . .	83
10.2.2. Propriétés classiques . . . . .	83
10.2.3. Transformée inverse . . . . .	84
10.3. Exercices d'application . . . . .	84
<b>11. Théorie des distributions</b>	<b>85</b>
11.1. Rappels sur la dualité pour des espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	85
11.2. Le cas des espaces de fonctions . . . . .	85
11.2.1. Généralités . . . . .	85
11.2.2. Espaces de Schwartz . . . . .	86
11.2.3. Distributions de Schwartz . . . . .	86
11.2.4. La distribution de Dirac . . . . .	87
11.2.5. Équation de distributions . . . . .	87
11.2.6. Propriétés fondamentales . . . . .	87
<b>12. Notion de fonction de Green</b>	<b>89</b>
12.1. Définition générique . . . . .	89
12.1.1. Décomposition en solutions élémentaires . . . . .	89
12.2. Interprétation physique . . . . .	90
12.2.1. Ambiguïté de la notion de source . . . . .	90

12.2.2. Sources ponctuelles . . . . .	91
12.3. Fonction de Green en champ libre . . . . .	91
<b>13. Systèmes d'EDP</b>	<b>93</b>
<b>14. Calcul variationnel</b>	<b>95</b>
14.1. Exemple illustratif . . . . .	95
14.2. Etude plus générale (version simple) . . . . .	96
14.3. Étude plus générale (version avec notion de variation) . . . . .	97
14.4. Construction de fonctionnelles à partir de l'EDP . . . . .	98
14.5. Calcul variationnel sous contrainte . . . . .	100
14.5.1. optimisation sous contrainte . . . . .	100
14.5.2. Conséquence sur le calcul variationnel . . . . .	101
14.6. Généralités sur le formalisme variationnel . . . . .	102
14.6.1. Des espaces fonctionnels pour le problème variationnel . . . . .	104
14.6.2. Vers les théorèmes de Lax-Milgram . . . . .	107
<b>III. Méthode des éléments finis</b>	<b>109</b>
<b>15. Méthode de Ritz</b>	<b>111</b>
15.1. Principe général . . . . .	111
15.2. Mise en oeuvre . . . . .	111
15.3. Analyse de la méthode . . . . .	112
<b>16. Méthode des éléments finis en dimension 1</b>	<b>113</b>
16.1. Problématique . . . . .	113
16.2. Maillage . . . . .	114
16.2.1. Les éléments . . . . .	114
16.2.2. Les noeuds . . . . .	114
16.2.3. Exemple . . . . .	114
16.3. Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	116
16.3.1. Élément de référence . . . . .	117
16.3.2. Construction des fonctions $\hat{\Psi}_i$ . . . . .	118
16.3.3. Intégration et calcul des coefficients élémentaires . . . . .	120
16.4. Assemblage . . . . .	121
16.4.1. Fonctions de Ritz . . . . .	121
16.4.2. Construction système linéaire globale . . . . .	124
16.4.3. Application des conditions aux frontières et résolution . . . . .	126
<b>17. Méthode des éléments finis en dimension quelconque</b>	<b>129</b>
17.1. Problématique . . . . .	129
17.2. Maillage . . . . .	129
17.2.1. Les éléments . . . . .	130
17.2.2. Les noeuds . . . . .	130
17.3. Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	131
17.3.1. Élément de référence . . . . .	131
17.3.2. Fonctions d'interpolation sur l'élément $K$ . . . . .	137
17.4. Assemblage . . . . .	137
17.5. Application des conditions aux frontières et résolution . . . . .	138

<b>IV. Annexes</b>	<b>139</b>
<b>A. Compléments mathématiques</b>	<b>141</b>
A.1. Rappel sur les opérateurs différentiels . . . . .	142
A.1.1. Définitions en coordonnées cartésiennes . . . . .	142
A.1.2. Repères cylindriques et sphériques . . . . .	143
A.1.3. Propriétés remarquables des opérateurs différentiels . . . . .	145
A.2. Fonctions spéciales . . . . .	147
A.2.1. Les fonctions de BESSEL . . . . .	147
A.2.2. La fonction d'erreur . . . . .	150
<b>B. Énoncés des TD et BE</b>	<b>151</b>
B.1. TD I . . . . .	152
B.2. TD II . . . . .	153
B.3. TD III . . . . .	154
B.4. TD IV . . . . .	155
B.5. TD V . . . . .	157
B.6. TD VI . . . . .	158
B.7. TD VII . . . . .	159
B.8. TD VIII . . . . .	160
B.9. TD IX . . . . .	161
B.10. BE I . . . . .	162
B.10.1. Préambule . . . . .	162
B.10.2. Principe de purification . . . . .	162
B.10.3. Modélisation de la fusion . . . . .	163
B.10.4. Contrôle du processus . . . . .	163
B.11. BE II . . . . .	167
B.11.1. Préambule . . . . .	167
B.11.2. Modélisation du problème . . . . .	168
B.11.3. Problème variationnel . . . . .	168
B.11.4. Maillage . . . . .	169
B.11.5. Problème variationnel élémentaire . . . . .	170
B.11.6. Assemblage . . . . .	170
B.11.7. Finalement . . . . .	170
<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>
<b>Index</b>	<b>173</b>



**Première partie .**

# **Modélisation des problèmes de l'ingénieur**



# 1. Les EDP comme outil de modélisation

Les équations aux dérivées partielles (EDP) constituent un cadre de modélisation extraordinairement riche. L'objectif de ce chapitre est avant tout de convaincre que les EDP interviennent dans des domaines variés. Un objectif tout aussi important est de mettre en évidence le fait que des problématiques différentes présentées sans lien évident peuvent aboutir à des modélisations identiques ou d'un type relativement proche.

## 1.1. Trafic routier

On souhaite donc étudier l'évolution à la fois dans l'espace et dans le temps du trafic routier sur une route à une seule voie (on traite donc un problème unidimensionnel). L'approche suivie ici est celle d'une modélisation continue : c'est-à-dire que le trafic routier ne sera pas représenté par la position individuelle de chacune des voitures. Nous sommes plutôt intéressé par des quantités moyennes comme, en tout premier lieu, ce que l'on nommera la densité de trafic qui correspond au nombre de voitures par unité de longueur de la route. La densité de trafic, à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$ , est notée  $n(x, t)$ .

Par souci de simplicité, cette route sera supposée uniforme, sans intersections, sans feux rouges ou autres embellissements dont on pourrait tenir compte dans une approche plus évoluée.

### 1.1.1. Expression du bilan local de trafic

Pour établir l'équation aux dérivées partielles décrivant la dynamique du trafic, il faut écrire une loi de conservation qui exprime que le changement dans le temps de la densité de trafic sur un tronçon de route est dû à des termes de flux : toute arrivée de voitures dans ce tronçon tend à faire augmenter la densité de trafic alors que tout départ de voitures tend à la faire diminuer. Le flux de trafic, à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$  est noté  $j(x, t)$ .

Le flux n'est pas un concept aussi simple que celui de densité de trafic. Spontanément, on peut l'associer au nombre de voitures qui passent au point d'abscisse  $x$  pendant une unité de temps. Précisons encore une fois que l'on s'intéresse à des valeurs moyennes (dans le temps en ce qui concerne le flux). Imaginons que l'on se place sur un pont qui enjambe une route et que nous comptions le nombre de voitures qui passent sous le pont pendant une certaine durée. Il faut que cette durée soit suffisamment importante de telle sorte que le calcul de la valeur moyenne du nombre de voitures ayant franchi le pont soit significatif. D'un autre côté, il faut que cette durée de comptage soit suffisamment faible devant le temps caractéristique d'évolution du trafic pour pouvoir décrire ses évolutions.

En conclusion, le modèle continu que nous utilisons n'est valable que pour un trafic suffisamment important évoluant suffisamment lentement. Ces conditions permettent de s'intéresser à un comportement collectif et non au comportement individuel de chaque voiture.

Pour un tronçon de route de longueur  $dx$ , le bilan local de trafic, pour une durée  $dt$ , peut s'écrire comme suit :

$$n(x, t + dt) \cdot dx = n(x, t) \cdot dx + j(x, t) \cdot dt - j(x + dx, t) \cdot dt \quad (1.1)$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

En regroupant les termes, en effectuant les développements limités nécessaires en se limitant au premier ordre en  $dx$  ou  $dt$ , on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} \quad (1.2)$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles de nature hyperbolique qui est particulièrement courante en physique (elle intervient dès que l'on a besoin d'écrire un bilan local d'une grandeur extensive conservée).

### 1.1.2. Lien entre densité et flux

Le problème tel qu'il est apparaît à ce stade de la modélisation n'est pas complet. Il faut se donner un modèle liant la densité de trafic  $n(x, t)$  au flux  $j(x, t)$ . On définit la vitesse associée au trafic,  $v$ , en écrivant que le flux est égal au produit  $nv$ . En effet, un simple argument dimensionnel nous montre que si  $v$  s'exprime en mètres par seconde et  $n$  en voitures par mètre, alors  $nv$  s'exprime en voitures par seconde. En toute rigueur, cette vitesse est associée à des conditions de trafic particulières (déterminées par  $n$  et  $j$ ) ; la vitesse individuelle de chaque véhicule peut être différente de cette vitesse moyenne. Par souci de simplicité, on peut considérer néanmoins que la vitesse individuelle de toutes les voitures est la même, égale à la vitesse moyenne  $v$ . En termes de physique ondulatoire, cette vitesse est une vitesse de phase : il suffit de considérer les voitures comme des maxima locaux de densité qui se déplacent.

L'équation aux dérivées partielles qui régit les évolutions spatio-temporelles du trafic s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial nv}{\partial x} \quad (1.3)$$

Il subsiste encore deux inconnues pour une seule équation. Ce n'est pas surprenant : le problème étudié ici est caractérisé par la conservation d'une seule grandeur scalaire (la densité de trafic, c'est-à-dire le nombre de voitures ou encore la matière) et l'on obtient donc une seule équation. En hydrodynamique, par exemple, on doit adjoindre à l'équation de conservation de la matière, l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Il n'est pas question dans cette approche simplifiée d'utiliser une équation analogue à l'équation de conservation de la quantité de mouvement, faute de disposer d'un modèle des interactions qui s'exercent entre voitures. On va plutôt utiliser une hypothèse de fermeture des équations ad hoc mais qui n'est pas complètement dénuée de sens !

Pour ce, fixons quelques valeurs numériques. On peut admettre que si les voitures ne sont pas trop nombreuses sur la route, elles roulent toutes à une vitesse maximale de l'ordre d'une vingtaine de mètres par seconde, soit 80 km/h. On admet ensuite que la densité augmentant, la vitesse décroît. Choisissons même une décroissance monotone :

$$v = v_{max} (1 - n/n_{max}) \quad (1.4)$$

L'expression ci-dessus fait apparaître la densité maximale qui correspond à une vitesse des voitures nulle : c'est l'embouteillage qui se produit lorsque les voitures se touchent les unes les autres. Si  $L$  est la longueur moyenne typique d'une voiture (disons 3 mètres) alors la densité maximale vaut environ 0,33 voiture/mètre. Aux densités intermédiaires, les vitesses sont beaucoup plus variées : sur une route moyennement chargée, le conducteur est libre de choisir (dans une certaine mesure) sa vitesse et peut éventuellement rouler très vite pour dépasser par exemple un véhicule plus lent.

Par souci de simplicité, et dans l'optique d'une étude numérique, il convient de travailler avec des variables sans dimension. Ici, le choix s'impose : la vitesse adimensionnée, toujours notée  $v$ , est égale à la vitesse (dimensionnée) rapportée à la vitesse maximale. De même, la densité adimensionnée, qui s'identifie à un taux d'occupation de la route, est égale à la densité rapportée à la densité maximale. On écrit alors :

$$v = 1 - n \quad (1.5)$$

D'où la relation entre le flux et la densité, que l'on pourrait appeler relation de dispersion :

$$j = n(1 - n) \quad (1.6)$$

Ce modèle porte le nom de modèle de Greenshields et l'équation de conservation du trafic est connue sous le nom d'équation de Whitham-Lighthill-Richards :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (1 - 2n) \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

On obtient une équation aux dérivées partielles (EDP) avec une seule inconnue : le taux d'occupation de la route (ou densité de trafic adimensionnée)  $n(x, t)$ .

## 1.2. Thermique

### 1.2.1. Quelques définitions sur la chaleur et la température

#### Introduction

Dans un premier temps, nous allons définir les notions de chaleur et de température pour lesquelles le langage commun est souvent à l'origine d'une confusion. Lorsqu'au beau milieu de l'été, on dit "quelle chaleur !", il faudrait plutôt dire "quelle température !". L'expression paraîtrait ridicule mais respecterait davantage le sens physique. En effet, la chaleur caractérise l'énergie échangée entre deux milieux, alors que la température caractérise l'état d'un milieu (agitation de l'air en l'occurrence).

A cette première confusion se superpose une seconde confusion liée à nos organes qui sont sensibles au flux de chaleur. Prenons, par exemple, un objet métallique et un objet en bois. A la même température inférieure à celle de notre corps, le premier paraîtra plus froid que le second. La raison en est simple. Le métal transfère mieux la chaleur que le bois. Il absorbe ainsi davantage de chaleur évacuée par nos doigts. D'où cette relative sensation de froid.

Finalement, au lieu de dire "quelle chaleur !" ou "quelle température !", on devrait dire "quel flux de chaleur !". Plus sérieusement, on voit bien que les deux notions de chaleur et de température sont étroitement liées l'une à l'autre.

#### Température $\theta$

Au sens de la statistique de BOLTZMANN, la température est une variable d'état qui caractérise *l'agitation particulaire d'un milieu*. Cette caractéristique est une valeur moyenne et la notion de température concerne essentiellement les ensembles macroscopiques. Étant donné la taille de nos instruments de mesure (immense à l'échelle des particules), nous avons facilement accès à cette valeur moyenne.

Tous les points ayant la même température forment des surfaces isothermes où  $\theta(x, y, z, t) = constante$ .

D'après le Journal Officiel du 23/12/1975, l'unité légale de température est le KELVIN, noté (K). Le KELVIN est la fraction de 1/273.16 de la température thermodynamique du point triple de

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

l'eau. L'unité CELSIUS est identique au KELVIN. L'expression d'une température en CELSIUS n'est que la translation de la température exprimée en Kelvin avec la relation :

$$\theta (\text{ }^{\circ}\text{C}) = \theta (\text{ }^{\circ}\text{K}) - 273.16 \quad (1.8)$$

### Gradient thermique

Lors que la température est une fonction continue et dérivable, il est possible de définir un gradient. Il est normal aux surfaces isothermes et est orienté dans le sens des températures croissantes, voir figure (1.1).

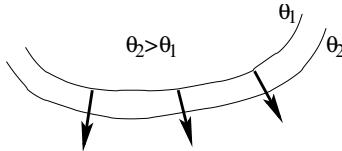


FIGURE 1.1. – Représentation schématique d'un gradient de température.

### Chaleur Q

La chaleur Q est une forme d'énergie au même titre que le travail d'une force. Dans le cas, d'une situation évolutive où interviennent deux corps, on considérera souvent la chaleur Q comme *la quantité d'énergie transférée entre ces deux corps dans un laps de temps donné*. L'unité de la chaleur est le JOULE (J).

### Flux de chaleur $\Phi$

On appelle flux calorifique moyen *le rapport de la chaleur échangée entre deux corps par unité de temps* et sera donc exprimé en  $J \cdot s^{-1}$ , c'est à dire en WATT (W). Le flux calorifique instantané est défini comme la valeur limite du flux calorifique moyen lorsque le temps d'observation tend vers zéro :

$$\Phi = \lim_{t \rightarrow t'} \frac{\Delta Q}{t - t'} = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1.9)$$

### Densité de flux $\varphi$

Au travers d'une surface  $S$ , on définit aussi la densité moyenne de flux  $\varphi_m$  comme étant *le rapport du flux calorifique moyen sur la surface S interceptant ce flux* :

$$\varphi_m = \frac{\Phi}{S} \quad (1.10)$$

Sur le schéma ci-contre, le milieu  $M_1$  échange avec le milieu  $M_2$  de la chaleur au travers d'une surface  $S$ . Théoriquement, et même si la notion de flux est une notion statistique moyenne, on peut définir une quantité locale de flux, caractérisant l'échange local de chaleur, et donc de flux au travers de la surface élémentaire  $dS$ . La densité de flux instantanée s'exprime alors par :

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial S} = \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial S} \quad (1.11)$$

La densité de flux s'exprime en  $W \cdot m^{-2}$ .

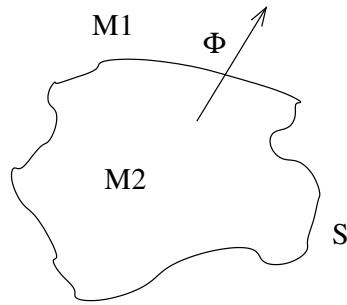


FIGURE 1.2. – Représentation schématique d'un flux de chaleur entre deux milieux.

### Autres unités

Pour ne pas être surpris par les vieilles références, il est utile de donner la correspondance entre le système légal U.S.I. et le système utilisant les kilocalories.

	Kcal	USI
Chaleur Q	1 Kcal = 4.18 KJ	1 KJ = 0.24 Kcal
Flux $\Phi$	1Kcal/h = 1.16 W	1 W = 0.86 Kcal/h
Densité de flux $\varphi$	1 Kcal/hm <sup>2</sup>	1 W/m <sup>2</sup> = 0.86 Kcal/hm <sup>2</sup>

### 1.2.2. Modes de transfert

Il existe trois mécanismes fondamentaux qui régissent les échanges de chaleur entre deux milieux. En pratique, ces trois modes souvent couplés peuvent agir simultanément :

- La conduction
- Le rayonnement
- La convexion

#### Conduction

La conduction correspond à une transmission de chaleur dans la masse d'un milieu. Les zones les plus chaudes cèdent de la chaleur aux zones plus froides par contact et de proche en proche, sans qu'il y ait déplacement des éléments chauds ou froids du milieu.

La conduction peut être illustrée par le schéma ci-dessous :

#### Le rayonnement

Le rayonnement est la transmission de chaleur entre deux corps par l'intermédiaire d'un photon. Un corps émet des photons. Ceux-ci sont transmis au second corps (les lois applicables à cette propagation sont celles de l'électromagnétisme). Du point de vue macroscopique, le phénomène se traduit par un transfert de chaleur au second corps.

Le rayonnement peut être illustré par le schéma ci-dessous :

#### La convection

La convection traduit le fait que l'échange de chaleur s'effectue par le biais d'échange de matière. C'est souvent le cas lors que le corps chauffé est un fluide qui est soumis à des mouvements internes

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

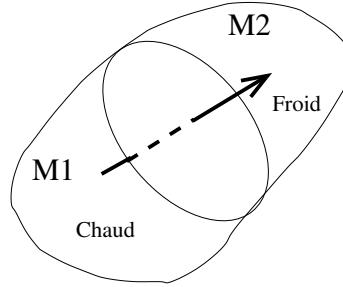


FIGURE 1.3. – Représentation schématique d'un échange de chaleur par conduction.

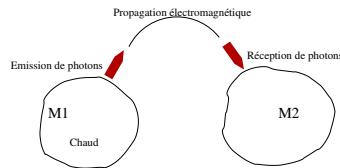


FIGURE 1.4. – Représentation schématique d'un échange de chaleur par rayonnement.

important. Il s'agit donc d'un phénomène d'écoulement des fluides, et, pour résoudre ces problèmes, il faut coupler les équations de conduction aux équations de la mécanique des fluides (sujet non traité dans ce cours).

La convection peut être illustrée par le schéma ci-dessous :

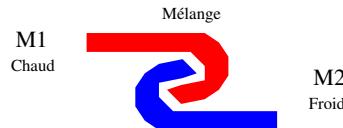


FIGURE 1.5. – Représentation schématique d'un échange de chaleur par convection.

Même si la convection pourra être évoquée notamment lors des conditions aux limites, seule la conduction sera traitée dans ce cours d'initiation.

### 1.2.3. Chauffage d'un corps homogène

La transmission d'une quantité de chaleur  $dQ$  à un corps homogène de masse  $m$  se traduit par une évolution de sa température de  $\theta$  à  $\theta + d\theta$ . En notant,  $c$  la chaleur massique du corps, la loi expérimentale exprimant l'élévation de température  $d\theta$  est :

$$dQ = m \cdot c \cdot d\theta \quad (1.12)$$

En pratique, il faut être vigilant avec la chaleur massique  $c$ , car elle dépend en toute rigueur de la transformation et est susceptible d'évoluer avec le chauffage. En première approximation,  $c$  reste constante avec les liquides et les solides. Dans les gaz, la stabilité de  $c$  n'est assurée que si la transformation s'effectue à pression constante. Cette condition supplémentaire est caractérisée dans la notation de la chaleur massique en apposant un indice  $p$  pour pression constante  $c_p$ .

### 1.2.4. Loi de Fourier

FOURIER a observé que "localement, la densité surfacique de flux est proportionnelle au gradient de température". Cette loi a été découverte expérimentalement et on a pu en déduire la loi phénoménologique suivante :

$$\boldsymbol{\varphi} = -\lambda \nabla \theta = -\lambda \cdot \mathbf{grad} \theta \quad (1.13)$$

La densité prend ici une forme vectorielle indépendante de la surface d'échange que l'on considère. Le flux  $\Phi$ , à travers une surface  $S$  séparant un milieu 1 d'un milieu 2, sera le flux du vecteur densité de flux  $\boldsymbol{\varphi}$  à travers cette surface.

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} dS \quad (1.14)$$

Le gradient est toujours orienté du froid vers le chaud. Le flux de chaleur cédée est lui orienté du chaud vers le froid d'où le signe négatif qui apparaît dans l'équation.

$\lambda$  est le coefficient de conductivité thermique. Plus simplement, il est appelé conductivité et il s'exprime en  $W \cdot m^{-1} K^{-1}$ .

La répartition du vecteur  $\boldsymbol{\varphi}$  forme dans l'espace des lignes de forces orthogonales aux isothermes.

L'équation de FOURIER est ensuite obtenue en établissant le bilan thermique local.

### 1.2.5. Équation de la conduction

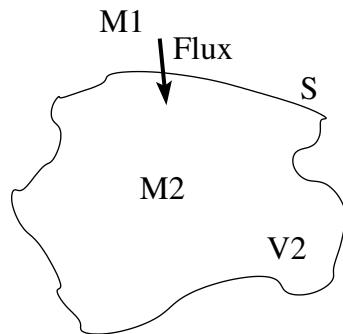


FIGURE 1.6. – Milieu 2 contenu dans une surface fermée  $S$  et entouré par un milieu 1.

Pour établir l'équation de la conduction calorifique, nous considérons une surface fermée  $S$  séparant un milieu 1 (externe) d'un milieu 2 (interne), voir figure (1.6). Comme précédemment, le flux  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  de chaleur du milieu 1 vers le milieu 2 s'écrit :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_S \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} dS \quad (1.15)$$

Dans ce cas,  $\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$  sont les normales rentrantes à la surface  $S$ . En utilisant, les normales sortantes  $\mathbf{n}_{2 \rightarrow 1}$ , on a :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_S -(-\lambda \cdot \nabla \theta) \cdot \mathbf{n}_{2 \rightarrow 1} dS \quad (1.16)$$

En appliquant le théorème d'OSTROGRADSKI, nous obtenons :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iiint_{V_2} \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla \theta) dV \quad (1.17)$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

où  $V_2$  est le volume contenu dans la surface  $S$ .

Par ailleurs, on sait, en considérant l'échauffement du milieu 2, la quantité de chaleur  $\delta Q$  entrant dans le milieu 2 pendant le temps  $dt$  s'exprime par :

$$\delta Q = \iiint_{V_2} \rho \cdot c \cdot \delta\theta \cdot dV \quad (1.18)$$

avec :

$$\Phi = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1.19)$$

On arrive donc à :

$$\Phi = \iiint_{V_2} \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla \theta) dV = \iiint_{V_2} \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} dV \quad (1.20)$$

Cette relation doit rester vraie quel que soit le volume  $V_2$  considéré. Donc, il est possible d'identifier ci-dessus les deux termes sous l'intégrale :

$$\nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla \theta) = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.21)$$

Si de plus une source volumique de chaleur  $q$  (exprimé en  $W \cdot m^{-3}$ ) est produit par unité de volume, on obtient :

$$\nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla \theta) + q = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.22)$$

En supposant  $\lambda$  constant, et en remarquant que  $\nabla \cdot (\nabla \theta) = \Delta \theta$ , on établit l'équation de conduction de FOURIER :

$$\lambda \nabla \cdot (\nabla \theta) + q = \lambda \Delta \theta + q = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.23)$$

Lorsqu'il n'y a pas de source de chaleur  $q$  intrinsèquement produit par le milieu froid, l'équation peut se simplifier en posant :

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad (1.24)$$

où  $a$  est appelée diffusivité, et s'exprime en  $m^2 \cdot s^{-1}$ . Dans ce dernier cas, l'équation générale de FOURIER devient :

$$a \cdot \Delta \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.25)$$

Dans les problèmes qui suivront, nous appliquerons cette équation simplifiée. Attention toutefois à bien vérifier que les hypothèses,  $\lambda = Cte$  et  $q = 0$  sont valides, faute de quoi, il faut remonter à l'équation détaillée.

### 1.2.6. Conditions aux limites

L'équation de propagation que nous venons d'établir, ne permet pas de déterminer complètement la propagation de la chaleur dans un lieu donné. Il est clair que l'évolution de la température dans un objet dépend de la nature de cette objet (matière). L'équation de la conduction caractérise complètement la nature de l'objet pour la propagation de chaleur en son sein. En revanche, il est tout aussi clair que cette évolution de la température dépend de la nature des échanges avec l'extérieur et de la distribution de température à un instant donné. Un objet thermiquement isolé ne se conduira pas comme celui plongé dans un liquide par exemple. il faut donc connaître les conditions aux limites (ou aux frontières). Les conditions initiales étant vues comme des conditions aux frontières dans le domaine temporel.

A priori, on peut imaginer des conditions aux frontières extrêmement variées et pouvant aboutir à des modélisations fort complexes. En pratique, on fait souvent un certain nombre de simplifications classiques et on en déduit des conditions aux limites classiques.

### Température connue

Pour la condition aux frontières , on peut supposer que l'on connaît parfaitement à tout instant la loi de température limite sur la surface  $S$  délimitant un milieu 1 d'un milieu 2. Dans le cas d'un contact thermique parfait entre un milieu à température forcée et constante, et un milieu libre, la température sur la surface de séparation est égale à cette constante :

$$\theta_1(S) = \theta_2(S) = Cte \quad (1.26)$$

### Flux connu

Pour la condition de flux de chaleur, on peut considérer qu'on connaît à tout instant la loi de flux au travers de la surface  $S$ . Par exemple, dans le cas d'une surface parfaitement calorifugée, le flux de chaleur est nul au travers de la surface. Dans ce cas, la surface  $S$  est normale aux isothermes :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (1.27)$$

### Impédance connue

Pour les conditions mixtes, le problème est moins évident, car à tout instant, la densité de flux au travers de la surface est une fonction de la variation de température au travers de  $S$ . Autrement dit, la loi de transfert aux limites s'exprime par une condition de la forme :

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = F(\nabla\theta) \quad (1.28)$$

Dans le cadre de ce cours, on se limitera au cas où la fonction  $F$  s'exprime par un coefficient de proportionnalité entre la différence locale de température au travers de  $S$ , et la densité de flux. Cette condition est applicable à de nombreux problèmes de conduction et de convection, lorsque le contact thermique entre deux milieux n'est pas parfait. Mathématiquement, la loi est alors de la forme :

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = h(\theta_1 - \theta_2) \quad (1.29)$$

Soyez vigilent sur les signes et l'ordre des milieux. Il faut se rappeler que la densité de flux est positive dans le sens plus chaud vers le plus froid, c'est à dire ici  $\theta_1 > \theta_2$ .

Dans cette condition,  $h$  s'appelle le coefficient de transfert superficiel et s'exprime en  $W \cdot m^{-2} K^{-1}$ .

**Une remarque importante : un problème de conduction de la chaleur est complètement déterminé si on connaît son équation de la chaleur et si toutes les conditions aux frontières (temporelles et spatiales) connues.**

### 1.2.7. Lien avec la diffusion de matière

En se basant sur les mêmes hypothèses que Fourier, Fick proposa en 1855 qu'un flux de particules pourrait se diffuser à travers un matériau selon une loi similaire, la "deuxième loi de Fick", de la forme :

$$D_p \cdot \Delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (1.30)$$

où la constante de proportionnalité  $D_p$  est le "coefficient de diffusion de la matière" et  $\rho$  la densité de particules diffusantes par unité de volume (et non la densité de masse!).

### 1.2.8. Exercices d'application

#### Exercice 1.1 Barre homogène

Une barre homogène de longueur  $L$  et de conductivité  $\lambda$  est supposée isolée thermiquement sur sa longueur. Les extrémités de la barre sont plongées dans des fluides aux températures  $\theta_0$  et  $\theta_L$ . L'échange thermique entre les fluides et la barre n'est pas parfait, et la loi aux limites est régie par une condition de type mixte avec des coefficients de proportionnalité  $h_0$  et  $h_L$  connus.

#### Exercice 1.2 Tube creux

La face interne (resp. la face externe) d'un tube creux infiniment long est soumise à une température constante  $\theta_i$  (resp.  $\theta_e$ ). Les rayons internes et externes sont notés  $r_i$  et  $r_e$ .

**Lors des deux exercices précédents, le régime était statique. C'est à dire que la température en chaque point est invariable en temps. Il ne s'agit donc pas à proprement parler d'un phénomène de propagation impliquant une EDP. Les cas où la température dépend aussi du temps seront abordés lors des TDs.**

## 1.3. Marchés financiers

Dans le contexte des marchés financiers, il est courant de manipuler des produits financiers appelés options. Il s'agit de contrats d'assurance d'une durée  $T$  (maturité) émis par un organisme financier et visant à garantir à un client le prix  $K$  (strike) d'un actif  $a$  (actions, matières premières,...) d'une fluctuation aléatoire de sa valeur  $x$  (cours du marché). Lorsqu'il s'agit d'un droit de vente, on parle de put et on parle call dès lors qu'il s'agit de droit d'achat. Suivant les droits de vente du titulaire du contrat, on distingue plusieurs types d'options. La plus simple, l'option européenne, stipule que le droit de vente ne peut s'exercer qu'à la fin du contrat (maturité). Lorsqu'à tout instant  $t < T$ , on peut exercer son droit à vendre au prix  $K$ , on parle d'option américaine. Il existe bien évidemment beaucoup d'autres types de règles. Nous considérons ici le cas d'une option européenne.

On définit la récompense (payoff)  $R(t) = (x(t) - K)^+$  qui traduit le fait que si le cours est supérieur au prix garanti  $K$ , le détenteur de l'actif a intérêt à vendre sans faire jouer son contrat. Dans le cas contraire, le détenteur fera jouer son option et vendra donc au prix  $K$  à maturité. La problématique consiste donc à déterminer, dans un contexte fluctuant, le prix  $p(x, t)$  d'un tel contrat à tout instant  $t$  en fonction de la valeur  $x$  de l'actif sous-jacent à l'option.

### 1.3.1. Modélisation

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes à risque neutre où la fluctuation aléatoire suit un processus stochastique particulier dit brownien, on montre que le prix  $p(x, t)$  est donné par l'équation de diffusion rétrograde :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + r \cdot x \frac{\partial p}{\partial x} - r \cdot p = 0, \quad x \in \mathbb{R}_*^+, \quad 0 < t < T \quad (1.31)$$

où  $\sigma^2$  est la variance de l'actif  $a$  (volatilité) et  $r$  le taux d'intérêt. A l'échéance  $T$  du contrat, le prix est :

$$p(x, T) = (x(T) - K)^+ \quad (1.32)$$

### 1.3.2. Lien avec la thermique

Le lien entre la problématique financière posée par l'évaluation du prix d'un contrat lié à un actif et un processus physique comme la conductivité thermique ou la diffusion de matière peut ne pas apparaître de façon simple. Néanmoins, nous allons montrer l'équation de Black et Scholes peut se ramener, par changement de variable, à l'équation de propagation de la chaleur.

Dans un premier temps, nous allons poser que :

$$\hat{p} = p \cdot e^{r(T-t)}, \quad \hat{x} = x \cdot e^{r(T-t)} \quad (1.33)$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\hat{p}}{\partial t} e^{-r(T-t)} - r \cdot x \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + r \cdot \hat{p} \cdot e^{-r(T-t)} \quad (1.34a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \quad (1.34b)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{x}^2} \cdot e^{r(T-t)} \quad (1.34c)$$

C'est à dire l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot \hat{x}^2 \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad (1.35)$$

avec  $\hat{p}(\hat{x}, T) = (\hat{x} - K)^+$ .

On effectue un nouveau changement de variable en posant

$$\tau = T - t, \quad y = \ln(\hat{x}), \quad f = \hat{p} \quad (1.36)$$

Nous obtenons une nouvelle équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (1.37)$$

avec  $f(y, 0) = (e^x - 1, 0)^+$ . Le lien avec l'équation de la chaleur apparaît alors clairement.

## 1.4. Corde vibrante

Considérons une corde élastique tendue entre deux appuis fixes. Nous noterons  $W$  le déplacement transversal par rapport à l'axe de la corde,  $T_0$  la traction de la corde et  $\rho$  la masse linéique de la corde.

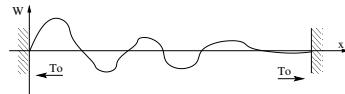


FIGURE 1.7. – Problème de la corde vibrante.

### 1.4.1. Équation des ondes

La corde est soumise à de faibles déplacements verticaux et les déplacements horizontaux sont supposés nul.

Dans le plan vertical, la somme des forces de tension  $F_T$  appliquées à un élément de la corde, voir figure 1.8, est :

$$F_T = T_0 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (1.38)$$

Dans la mesure où les déplacements verticaux sont petits, les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont également faibles. Donc, on a que :

$$\sin \theta \simeq \tan \theta = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (1.39)$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

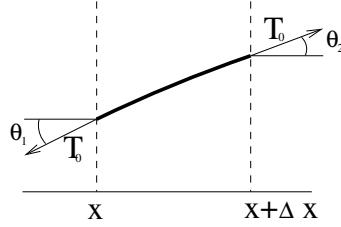


FIGURE 1.8. – Zoom sur une partie de la corde vibrante.

Nous avons donc l'expression approchée de  $F_T$  :

$$F_T \simeq T_0 \left( \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_x \right) \simeq T_0 \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_x \quad (1.40)$$

Dans le cas où l'action de la gravité sur les déplacements par rapport à la position d'équilibre sont négligés, l'équation fondamentale de la dynamique se traduit par l'équation :

$$\rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = T_0 \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (1.41)$$

On montre finalement que l'équation du mouvement, pour des petites perturbations de la corde, peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad (1.42)$$

### 1.4.2. Conditions aux frontières

Si l'équation de la corde vibrante (1.42) précise un peu la forme générale des mouvements de la corde. Cette équation est largement insuffisante pour résoudre un problème donné. Les conditions aux frontières sont souvent beaucoup plus informatives du problème physique.

#### Premier type de conditions aux frontières

On peut considérer que la corde est attachée de façon permanente en un point de chacun des appuis, voir figure 1.9.

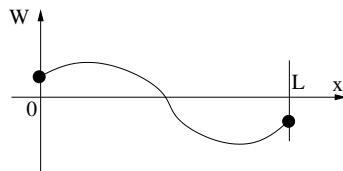


FIGURE 1.9. – La corde vibrante est fixée en  $x = 0$  et en  $x = L$ .

On aura ainsi les conditions les conditions aux frontières :

$$\forall t, \quad W(x = 0, t) = W_0 \quad \text{et} \quad W(x = L, t) = W_L \quad (1.43)$$

On peut également généraliser ce type de conditions aux frontières en considérant que les extrémités de la corde ne sont plus fixées mais que l'on connaît la position des points d'attache en fonction du temps :

$$\forall t, \quad W(x = 0, t) = W_0(t) \quad \text{et} \quad W(x = L, t) = W_L(t) \quad (1.44)$$

### Deuxième type de conditions aux frontières

On peut imaginer que les extrémités de la corde sont reliées à des glisseurs (de masse négligeable) qui se déplace sur les appuis sans frottement, voir figure 1.10.

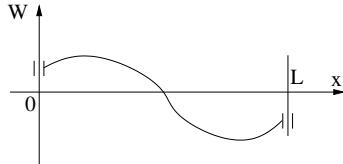


FIGURE 1.10. – La corde vibrante glisse sans frottement en  $x = 0$  et en  $x = L$ .

Les forces verticales aux extrémités seront donc nulles et nous aurons comme condition à chaque frontière :

$$\forall t, \quad T_0 \cdot \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad T_0 \cdot \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (1.45)$$

C'est à dire :

$$\forall t, \quad \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (1.46)$$

Ici, on ne connaît pas la position aux extrémités mais on détermine la valeur d'une dérivée partielle en ces points.

### Troisième type de conditions aux frontières

On peut enfin reprendre le montage précédent mais considérer que les glisseurs sont reliés élastiquement à l'axe horizontal, voir figure 1.11.

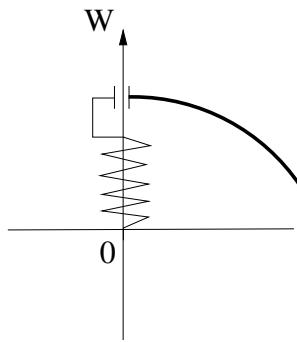


FIGURE 1.11. – La corde vibrante glisse avec une force de rappel en  $x = 0$  et en  $x = L$ .

Les forces verticales aux extrémités seront donc proportionnelles au déplacement et nous aurons comme condition à chaque frontière :

$$\forall t, \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} + k \cdot W(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=L} + k \cdot W(x = L, t) = 0 \quad (1.47)$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

Ici, on ne détermine ni la valeur de la fonction aux extrémités, ni la valeurs d'une des dérivées partielles en ces points. Toutefois, on détermine une proportionnalité entre la fonction et l'une de ses dérivées partielles.

# 1.5. Électromagnétisme

## 1.5.1. Introduction

Qu'il s'agisse de la lumière du soleil, des émissions télé ou radio, de propagation de la chaleur par rayonnement, des radars ou de l'imagerie scanner, les phénomènes électromagnétiques sont extrêmement répandus dans notre vie quotidienne. Leur étude, du moins dans un contexte classique, commence dès les premiers enseignements de la physique, et constitue l'objet de nombreux cours. Dans le cas présent, ce chapitre n'a qu'un rôle de rafraîchissement des connaissances. L'objectif est de rappeler quelques définitions de base, de redonner les 4 équations de MAXWELL établies à partir des postulats classiques et surtout d'aboutir à l'équation de propagation des ondes électromagnétiques.

## 1.5.2. Quelques définitions usuelles

Avant de présenter les lois de l'électromagnétisme, nous introduirons quelques définitions usuelles. Nous nous intéresserons ainsi aux notions de :

- charge
- densité de charges
- densité de courant
- courant

### Charge

Les concentrations de charges électriques fixes sont à l'origine des potentiels électrostatiques. Dans la suite de ce cours, les charges seront notées  $q$ . Elles seront exprimées en C (C). La charge élémentaire d'un électron vaut :

$$q_e = -1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ C} = -e \quad (1.48)$$

### Densité de charge

La densité de charge est le rapport de la charge élémentaire  $\partial q$  présente dans un espace élémentaire  $dE$  ( $dV$ ,  $dS$  ou  $dl$  selon les cas respectifs volumiques, surfaciques ou linéaires) sur ce même espace. Ces densités seront notées  $\rho$  :

$$\rho = \frac{\partial q}{\partial E} \quad (1.49)$$

Selon les cas (V, S ou L), la densité s'exprimera dans le système U.S.I. respectivement en :

• volumique :  $\rho_v = \frac{\partial q_v}{\partial V}$  en  $C \cdot m^{-3}$

• surfacique :  $\rho_s = \frac{\partial q_s}{\partial S}$  en  $C \cdot m^{-2}$

• linéique :  $\rho_l = \frac{\partial q_l}{\partial L}$  en  $C \cdot m^{-1}$

### Densité de courants

La densité de courant est le produit de la densité de charge  $\rho$  par la vitesse moyenne  $\mathbf{V}$  des charges libres. Les densités du courants sont notées  $\mathbf{J}$  où :

$$\mathbf{J} = \rho \cdot \mathbf{V} \quad (1.50)$$

Par exemple, dans le cas d'un semi-conducteur avec une charge volumique d'électrons de concentration  $n$ , et avec une charge volumique de trous de concentration  $p$ , et pour des vitesses opposées respectives d'électrons et de trous  $\mathbf{V}_n$  et  $\mathbf{V}_p$ , la densité de courant vaut :

$$\mathbf{J}_V = e \cdot (n\mathbf{V}_n + p\mathbf{V}_p) \mathbf{u} \quad (1.51)$$

Selon les cas (V, S ou L), la densité de courant s'exprimera dans le système U.S.I. respectivement en :

- volumique :  $\mathbf{J}_V$  en  $A \cdot m^{-2}$
- surfacique :  $\mathbf{J}_S$  en  $A \cdot m^{-1}$
- linéique :  $\mathbf{J}_L$  en  $A$

Dans le cas linéique, la densité de courant n'a pas de sens physique. Il s'agit tout simplement du courant  $I$ , défini ci-après.

### Courant

Dans un espace de dimension N (3 pour V, 2 pour S et 1 pour L), le courant est le flux de la densité de courant au travers d'un sous-espace fermé de dimension N-1. Plus simplement, il s'agit de la charge totale traversant ce sous espace (une surface pour N=3, une courbe plane pour N=2, ou un point par passage à la limite pour N=1) par unité de temps :

$$I = \left[ \frac{\partial q_{Espace\ N}}{\partial t} \right]_{Sous-Espace\ N-1} \quad (1.52)$$

### 1.5.3. Quelques lois usuelles

Trois équations importantes sont couplées aux équations de MAXWELL pour résoudre la majorité des problèmes d'électromagnétisme :

- l'équation de conservation de la charge
- l'équation de LORENTZ
- l'équation de la conductibilité

### Conservation de la charge

Nous établirons cette équation dans un cadre volumique. La transposition à des problèmes surfaciques, ou linéiques est immédiate et est laissée aux soins du lecteur.

Soit donc un volume quelconque fermé  $V$  de surface extérieure  $S$  et de charge totale  $q_V$ . En un point quelconque de la surface, on note  $\mathbf{n}$ , le vecteur unitaire normal à la surface et pointant vers l'extérieur.

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

En intégrant le courant sortant (positif pour toutes les charges positives sortantes, ou pour les charges négatives entrantes et inversement), on obtient le bilan des charges dans le volume  $V$  :

$$I = - \left[ \frac{\partial q}{\partial t} \right]_S = \iint_S \mathbf{J}_v \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.53)$$

Soit :

$$-\frac{\partial \iiint_V \rho_v \cdot dV}{\partial t} = \iint_S \mathbf{J}_v \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.54)$$

En appliquant le théorème d'OSTROGRADSKI sur le terme de gauche, on fait apparaître la divergence de la densité de courant :

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J}_v dV = - \frac{\partial \iiint_V \rho_v \cdot dV}{\partial t} \quad (1.55)$$

Cette formule doit être vérifiée quel que soit le volume d'intégration  $V$  retenu. Donc, la formule sous le signe intégrale doit être localement vérifiée. On obtient ainsi l'équation de conservation de la charge (ou équation de continuité)

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_v = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (1.56)$$

L'équation de conservation de la charge est une équation locale qui relie les valeurs de  $\mathbf{J}_v$  et  $\rho_v$  en un seul point de l'espace temps. On ne peut toutefois pas en déduire que  $\mathbf{J}_v$  en un point ne dépend que de  $\rho_v$  en ce point. C'est  $\nabla \cdot \mathbf{J}_v$  qui possède cette propriété.

### Force de LORENTZ

Toute charge soumise à des champs électromagnétiques, avec  $\mathbf{E}$  pour champ électrique et  $\mathbf{B}$  pour induction magnétique, subit une force dite de LORENTZ.

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) \quad (1.57)$$

où  $\mathbf{V}$  est la vitesse de la charge.

Il faut éviter de décomposer la force de LORENTZ en une première composante électrique et une composante magnétique, et de les considérer indépendamment l'une de l'autre. La force de LORENTZ est indépendante du repère pris pour la calculer. En particulier, en choisissant le repère de la charge, la vitesse de celle-ci est nulle. Le couple  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  observé dépend du repère choisi, et l'expression de la force de LORENTZ doit être utilisée dans sa globalité.

### Conductibilité

Si les champs peuvent interagir sur les charges et leurs courants, le courant (i.e. les déplacements des charges), agit aussi mutuellement sur les champs par la relation :

$$\mathbf{J}_v = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (1.58)$$

où  $\sigma$  est la conductibilité du milieu.

Nota :  $\sigma$  est le produit de la charge volumique mobile  $\rho_{Vm}$  par la mobilité  $\mu_m$  des porteurs.

### 1.5.4. Les équations de MAXWELL

Les équations de MAXWELL sont énoncés à partir de 4 postulats de l'électromagnétisme. Leur justification est apportée par leur cohérence et celle de leurs conséquences avec les résultats expérimentaux.

Les 4 postulats à considérer sont les suivants :

- le théorème de GAUSS de l'électrostatique
- le théorème de GAUSS de la magnétostatique
- l'équation de FARADAY
- le théorème d'AMPÈRE

#### Théorème de GAUSS de l'électrostatique

"Le flux du champ électrique  $\mathbf{E}$  sortant d'une surface fermée  $S$  est proportionnel à la charge  $q_v$  incluse dans le volume de surface  $S$ ".

Soit analytiquement :

$$\varepsilon \cdot \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = q_v = \iiint_V \rho_v dV \quad (1.59)$$

$\varepsilon$  est la permittivité du milieu, et dans le cas du vide  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} F/m$ .

On démontre immédiatement la première équation de MAXWELL en appliquant le théorème d'OSTROGRADSKI :

$$\varepsilon \cdot \iint_S \nabla \cdot \mathbf{E} dS = q_v = \iiint_V \rho_v dV \quad (1.60)$$

Soit localement :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad (1.61)$$

En définissant l'induction électrique  $\mathbf{D}$ , telle que  $\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}$ , on obtient une seconde expression de cette équation :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (1.62)$$

Dans le vide ou en l'absence de charge :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.63)$$

#### Théorème de GAUSS de la magnétostatique

"Le flux du champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  sortant d'une surface fermée  $S$  est nul".

Soit analytiquement :

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = q_v = 0 \quad (1.64)$$

Tout comme dans le cas précédent, il est important de préciser que nous considérons des surfaces  $S$  fermées. De même, en appliquant le théorème d'OSTROGRADSKI, on démontre la seconde équation de MAXWELL :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.65)$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

Appliqué au champ magnétique  $\mathbf{H}$ , tel que  $\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$ , on définit, si  $\mu$  est continue, une seconde expression de cette équation :

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.66)$$

$\mu$  est la perméabilité magnétique du milieu, exprimée en  $H \cdot m^{-1}$ . Dans le cas du vide  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}$ .

### Équation de FARADAY

”La force électromotrice du champ  $\mathbf{E}$  dans une spire fermée  $C$  est opposée à la variation du flux du champ d’induction magnétique  $\mathbf{B}$  à travers la surface  $S$  de contour  $C$ ”.

Soit analytiquement :

$$e_{fem} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{\partial \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS}{\partial t} \quad (1.67)$$

où  $e_{fem}$  est la force électromotrice.

En appliquant le théorème de STOCKES, on démontre immédiatement la troisième équation de MAXWELL :

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{\partial \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS}{\partial t} \quad (1.68)$$

Soit localement :

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.69)$$

Ou encore :

$$\nabla \times \mathbf{D} = -\mu \varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.70)$$

### Théorème d’AMPERE

”La circulation du champ d’induction magnétique  $\mathbf{B}$  dans une spire fermée  $C$  est proportionnelle au flux de la densité de courant  $\mathbf{J}_V$  à travers la surface  $S$  de contour  $C$ ”.

Soit analytiquement :

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu \cdot \iint_S \mathbf{J}_V \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.71)$$

En appliquant le théorème de STOCKES, on démontre de même la quatrième équation de MAXWELL :

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mu \cdot \iint_S \mathbf{J}_V \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.72)$$

Soit localement :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{J}_V \quad (1.73)$$

Toutefois, on a vu dans les rappels mathématiques que la divergence d’un rotationnel est identiquement nulle, soit en supposant  $\mu$  constant :

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0 = \nabla \cdot (\mu \cdot \mathbf{J}_V) \quad (1.74)$$

Ce résultat est incompatible avec l'équation de la conservation de la charge vue précédemment. Pour contourner cette difficulté, MAXWELL a complété l'équation locale de  $\mathbf{B}$  de la façon suivante :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{J}_v + \mu\epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.75)$$

Le postulat initial et l'équation de conservation sont alors simultanément vérifiés :

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0 = \nabla \cdot \left( \mu \cdot \mathbf{J}_v + \mu\epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1.76)$$

car avec :

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_v = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (1.77)$$

On obtient la première équation de MAXWELL, ce qui est cohérent.

Finalement, les deux expressions de la quatrième équation de MAXWELL sont :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{J}_v + \mu\epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.78a)$$

et

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_v + \epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.78b)$$

### 1.5.5. Résumé sur les équations fondamentales de l'électromagnétisme

#### Lois usuelles

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_v = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (1.79a)$$

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) \quad (1.79b)$$

$$\mathbf{J}_v = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (1.79c)$$

#### Les équations de MAXWELL en $E$ et $B$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (1.80a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.80b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.80c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{J}_v + \mu\epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.80d)$$

#### Relation entre $(E, B)$ et $(D, H)$

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E} \quad (1.81a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (1.81b)$$

#### Permittivité et perméabilité

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \quad (1.82a)$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \quad (1.82b)$$

### 1.5.6. Notion de potentiel vecteur et scalaire

Étant donné que  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ , il est possible de démontrer mathématiquement que, en toute généralité, on peut écrire  $\mathbf{B}$  sous la forme d'un rotationnel :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.83)$$

Comme le rotationnel d'un gradient est identiquement nul,  $\mathbf{A}$  est défini à un gradient près.

Par ailleurs, la troisième équation de MAXWELL  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  donne :

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (1.84)$$

Donc  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  est le gradient d'une fonction. C'est à dire :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (1.85)$$

$\mathbf{A}$  sera appelé potentiel vecteur et  $V$  le potentiel scalaire..

$\mathbf{A}$  étant défini à un gradient près, on peut ainsi arbitrairement poser une relation entre  $\mathbf{A}$  et  $V$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (1.86)$$

Imposer cette relation qui s'appelle la jauge de LORENTZ permet de simplifier les expressions lors de l'établissement de l'équation de propagation.

### 1.5.7. Équation générale de la propagation

Avec la quatrième équation de MAXWELL, nous avons :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{J}_v + \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.87)$$

Lorsqu'on couple cette équation avec  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  et  $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$ , on a :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \cdot \mathbf{J}_v - \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial \nabla V}{\partial t} \quad (1.88)$$

En y injectant la jauge de LORENTZ, l'équation devient :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \cdot \mathbf{J}_v - \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \varepsilon \cdot \left[ -\nabla \left( \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{\mu \varepsilon} \right) \right] \quad (1.89)$$

Or d'après les formules générales sur les opérateurs :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (1.90)$$

Les deux dernières équations nous donnent l'équation générale de propagation du potentiel vecteur :

$$\Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \mathbf{J}_v \quad (1.91)$$

De la même manière, on aurait pu montrer l'équation de propagation du potentiel scalaire :

$$\Delta V - \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad (1.92)$$

Les équations établies jusqu'à maintenant s'appliquent indifféremment au cas du vide et au cas de la matière.

Dans le vide, on remplacera  $\varepsilon$  et  $\mu$  par  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ . Il n'y aura ni charge, ni courant  $\rho = 0$  et  $\mathbf{J}_v = 0$ . Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  ainsi que les potentiels  $\mathbf{A}$  et  $V$  auront évidemment été créés dans un milieu matériel où des charges mobiles et donc des courants coexistent.

Notons aussi que les équations décrites jusqu'à présent ne sont valables que pour des milieux isotropes. Dans le cas contraire,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  deviennent des tenseurs, ce qui rend plus complexe la résolution des problèmes de propagation (cas des ferrites ou des plasmas). Dans le cadre de ce cours, nous considérerons uniquement des milieux isotropes.

### 1.5.8. Conditions aux limites

De la même façon que dans le cas de la propagation de la chaleur, l'équation aux dérivées partielles, ici l'équation des ondes, n'est pas suffisante pour déterminer la nature d'une propagation électromagnétique. Cette détermination sera obtenue dès lors que les conditions aux frontières sont connues.

#### Conditions de passage

Soit une surface de discontinuité  $S$ , séparant deux milieux  $M_1$  et  $M_2$  continus mais différents. Les équations de MAXWELL permettent pour un phénomène généré dans un milieu, de calculer les champs électromagnétiques en tout point des 2 milieux. Le principe consiste à développer les équations de MAXWELL dans chaque milieu avec des conditions aux limites sur la surface de discontinuité. En électromagnétisme, les équations de MAXWELL engendrent elles-mêmes les conditions aux limites. Pour obtenir les équations aux limites, nous allons donc transformer successivement les équations de MAXWELL.

En un point  $M$  de la surface  $S$  séparant  $M_1$  et  $M_2$ , les vecteurs  $\mathbf{E}_\perp$  et  $\mathbf{E}_\parallel$  sont réciproquement la composante normale et tangentielle du vecteur  $\mathbf{E}$ . Un indice 1 ou 2 indiquera que le champ est obtenu par passage à la limite dans le milieu  $M_1$  ou  $M_2$ . On utilisera des notations identiques pour les champs  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$ .

Les conditions de passage s'écrivent alors :

- Condition sur  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel}$$

- Condition sur  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B}_{1\perp} = \mathbf{B}_{2\perp}$$

En supposant qu'il n'existe pas de courant de surface ou de charge surfacique :

- Condition sur  $\mathbf{H}$  (hors courant de surface) :

$$\mathbf{H}_{1\parallel} = \mathbf{H}_{2\parallel}$$

- Condition sur  $\mathbf{D}$  (hors charge de surface) :

$$\mathbf{D}_{1\perp} = \mathbf{D}_{2\perp}$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

Il est à noter en particulier que si l'un des milieux est supposé conducteur, la présence de courant de surface  $\mathbf{J}_S$  est quasiment toujours assurée. Il faut à cet égard rappeler que dans un milieu  $M_2$  conducteur parfait, nous avons  $\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0$  et en l'absence de courant volumique  $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$ . Les conditions aux frontières pour le milieu  $M_1$  s'écrivent alors :

- $\mathbf{E}_{1\parallel} = 0$
- $\mathbf{D}_{1\perp} = \rho_S$
- $\mathbf{H}_{1\parallel} = \mathbf{J}_S$
- $\mathbf{B}_{1\perp} = 0$

où  $\rho_S$  est la densité de charge surfacique.

### Condition de SOMMERFELD

Lorsque nous nous plaçons dans un milieu continu et non délimité par une frontière spatiale, deux cas peuvent se produire : soit le phénomène électromagnétique observé à été produit par des sources rejetées à l'infini. C'est le cas, par exemple, lors qu'on fait l'hypothèse d'une onde incidente donnée se propageant dans un milieu. Aucune information a priori n'est en général fournie sur les sources qui ont provoqué cette émission. Soit, au contraire, le phénomène électromagnétique est provoqué par des sources connues internes au milieu étudié. On pourrait aussi imaginer une situation mixte où les phénomènes sont induits par des éléments extérieurs, supposé infiniment loin, et par sources internes.

Lorsque l'on considère des phénomènes provoqués par l'extérieur, les conditions aux frontières seront données par la nature de l'onde incidente (forme du signal à un instant  $t_0$  par exemple). Lorsque l'on considère uniquement des sources internes délimitées dans un volume fini, il est possible d'introduire une condition, dite de SOMMERFELD, qui permet de réduire les solutions mathématiques du problème aux dérivées partielles à une seule solution physiquement acceptable. En effet, s'il n'existe pas de sources à l'infini, les ondes produites auront globalement tendance à s'écartez des sources et de se propager vers l'infini. Cette condition s'appelle aussi la condition d'onde sortante. Mathématiquement, cette hypothèse s'exprime sous la forme suivante :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \right] = 0 \quad (1.93)$$

### 1.5.9. Exercices d'application

#### Exercice 1.3 Champ électrique créé par une charge

Une sphère pleine de rayon  $r_0$  possède une densité volumique de charge  $\rho$ . Calculer le champ électrique  $\mathbf{E}$  engendré par cette charge.

#### Exercice 1.4 Continuité du champ

Une surface  $S$  est l'interface entre un milieu 1 et un milieu 2. Démontrer la continuité de la composante normale à la surface  $S$  de l'induction magnétique.

**Exercice 1.5 Intensité dans un circuit de forme variable**

Un circuit électrique de forme rectangulaire de largeur  $a$  et de longueur  $b$  possède une résistance  $R$ . L'un des cotés du circuit est déplacé à la vitesse  $v$  constante afin d'augmenter la longueur  $b$ . Calculer l'intensité du courant dans le circuit électrique (la résistance du circuit n'est pas modifiée).

**Exercice 1.6 Champ magnétique produit par un fil**

Un conducteur rectiligne est parcouru par une intensité de courant  $I$ . Calculer le champ magnétique produit par ce dispositif.

**Exercice 1.7 Propagation dans un diélectrique parfait**

Dans le plan  $xOy$ , on fixe pour condition aux frontières :

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \cdot \cos \omega t \cdot \mathbf{u}_x$$

Tout l'espace est constitué d'un diélectrique parfait  $\mu$ ,  $\varepsilon$  et  $\sigma = 0$ .

Calculer les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans tout le demi espace  $z > 0$ .

**Exercice 1.8 Réflexion sur un conducteur parfait**

Soit un milieu diélectrique  $M_1$  parfait ( $\sigma = 0$ ) de caractéristique  $\varepsilon_1$  et  $\mu_1$  reposant sur un plan infini parfaitement conducteur ( $xOy$ ). Soit un vecteur incident  $\mathbf{E}_i$  (onde plane) dans le milieu  $M_1$  de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$  porté par ( $xOz$ ) et faisant un angle  $\alpha_i$  avec l'axe  $Oz$ .

Donner le champ réfléchi  $\mathbf{E}_r$ , le courant de surface  $\mathbf{J}_S$  et la densité de charge  $\rho_S$ .

## 1.6. Acoustique des fluides

### 1.6.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux propriétés de la propagation des sons. Il s'agit de phénomène de vibrations élastiques du milieu. La différence entre l'électromagnétisme et l'acoustique réside essentiellement dans le fait que la propagation électromagnétique s'effectue sans support matériel. Nous verrons dans ce chapitre que le formalisme de l'équation dans les deux cas comporte des analogies marquantes.

Dans le même esprit que pour les domaines physiques précédents, nous commencerons par définir les grandeurs caractéristiques en présence, puis nous établirons l'équation de propagation du son. Les conditions aux limites seront alors introduites.

Il est important de souligner dès à présent que l'équation de propagation proposée dans ce cours sera fondée sur des hypothèses simplificatrices.

### 1.6.2. Grandeur fondamentales

On peut caractériser une onde acoustique par un certain nombre de grandeurs fondamentales du milieu matériel qui supporte la vibration. Pour cela, nous choisirons de considérer une particule élémentaire  $M$  du milieu.

#### Élongation vibratoire $\mathbf{U}$

L'élongation vibratoire  $\mathbf{U}$  est l'écart entre la position instantanée de la particule  $M$  et sa position d'équilibre. Dans le cas d'un écoulement, la référence sera prise par rapport au mouvement macroscopique moyen de la particule.

L'unité de cette élongation vibratoire est le mètre ( $m$ ).

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

### Vitesse vibratoire $v$

La vitesse vibratoire, notée  $v$ , est la vitesse de la particule par rapport à sa position moyenne. Dans le cas d'un écoulement, on fera abstraction de la vitesse due au mouvement macroscopique moyen.

$$v = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (1.94)$$

La vitesse vibratoire s'exprime en  $m \cdot s^{-1}$ .

### Pression sonore $p$

La pression sonore est définie comme étant la différence entre la pression instantanée  $P_i$  et la pression hydrostatique  $P_0$  à l'équilibre.

$$p = P_i - P_0 \quad (1.95)$$

La pression sonore s'exprime en  $Pa$ .

### Masse volumique $\rho$

$\rho$  est définie comme étant la masse de support matériel contenue par la quantité de volume. On définit également le volume massique  $\tau$  comme étant l'inverse de  $\rho$ .

$$\rho = \frac{\partial m}{\partial V} \quad (1.96)$$

La masse volumique s'exprime en  $kg \cdot m^{-3}$ .

### Intensité sonore $I$

On définit l'intensité sonore comme le flux moyen d'énergie par unité de temps à travers l'unité de surface d'onde (i.e. suivant la direction de propagation) :

$$I = \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial t} = \frac{dF \cdot dU}{\partial S \partial t} = \frac{P \partial S \cdot v \partial t}{\partial S \partial t} = P \cdot v \quad (1.97)$$

$I$  étant exprimée en  $W \cdot m^{-2}$ , sa valeur en décibel est donnée par :

$$I_{db} = 10 \log_{10} I/I_r \quad (1.98)$$

Avec  $I_r = 10^{-12} W \cdot m^{-2}$  le seuil de perception de l'oreille humaine à  $1KHz$  environ. C'est à dire :

$$I_{db} = 10 \log_{10} I + 120 dB \quad (1.99)$$

$0dB$  correspond au seuil audible et  $120dB$  au seuil de douleur (environ).

### 1.6.3. Hypothèses prises sur l'établissement de l'équation du son

Le problème de la propagation peut s'avérer d'une résolution très complexe si on ne prend pas quelques hypothèses simplificatrices. Nous nous placerons ici dans un cas d'étude idéal qui permettra de traiter la majorité des problèmes courants. Les trois hypothèses retenues ici seront :

- Petits mouvements
- Adiabatisme
- Non viscosité

### Hypothèses de petits mouvements

On considérera que les élongations  $\mathbf{U}$  des particules matérielles étudiées sont suffisamment faibles pour pouvoir considérer ces variations au premier ordre. Cette considération n'est par exemple pas applicable au cas des ondes de choc.

### Hypothèses de l'adiabatisme

On admet qu'il n'y a pas d'échange de chaleur entre les éléments de fluide (revoir les notions présentées dans le chapitre sur la propagation de la chaleur) :

$$dQ = 0 \quad (1.100)$$

### Hypothèses de non viscosité

On considérera que le fluide est parfait, et que de ce fait, il n'existe aucune force de viscosité ou de frottement interne (notamment dues à la vitesse relative de filets de fluide en mouvement les uns par rapport aux autres).

Les deux dernières hypothèses simplifient le problème puisqu'elles excluent les phénomènes d'absorption. Il faut donc s'attendre dans l'équation de propagation qui sera ainsi établie à trouver des solutions se propageant à l'infini dans le cas d'ondes planes.

### 1.6.4. Propriétés générales des milieux acoustiques

Sans revenir de façon approfondie sur la théorie de la thermodynamique, rappelons que pour tout milieu indépendant, la loi de GIBBS montre qu'un état d'équilibre de ce milieu est parfaitement caractérisé par 2 variables d'état seulement. Toutes les autres variables sont alors fonctions des deux premières choisies. Les trois variables fondamentales sont en pratique la pression totale  $P_T$ , la masse volumique  $\rho$  et la température  $T$ . Ces trois variables sont ainsi liées d'après GIBBS par une relation du type :

$$F(P_T, \rho, T) = 0 \quad (1.101)$$

On notera également pour un élément de matière de masse  $m$  (constante), le volume est  $V = \tau \cdot m$ .

Cette relation est appelée équation d'état, ou équation caractéristique du fluide. En dérivant partiellement cette équation, on fait apparaître les coefficients caractéristiques du fluide :

- le coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$
- le coefficient vrai de dilatation à pression constante  $\beta$
- le coefficient vrai d'augmentation de pression à volume constant  $\alpha$

Pour chacun de ces coefficients, les relations suivantes peuvent être établies :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (1.102a)$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_P \quad (1.102b)$$

$$\alpha = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \quad (1.102c)$$

On peut enfin montrer que :

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho = \frac{\beta}{\chi_T} \quad (1.103)$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

### Gaz parfait

Dans le cas d'un gaz parfait, le milieu a une équation d'état qui suit la loi de MARIOTTE :

$$P_i \cdot \tau = r \cdot T \quad \text{avec} \quad r = \frac{R}{M} \quad (1.104)$$

Dans cette équation,  $r$  est une constante caractéristique du gaz,  $R$  est le nombre d'AVOGADRO ( $8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ), et  $M$  est la masse molaire du gaz.

Il vient alors immédiatement que :

$$\chi_T = \frac{1}{P} \quad \beta = \frac{1}{T} \quad \alpha = \frac{1}{r} \quad (1.105)$$

Dans le cas de l'air, notons que  $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

En règle générale, deux cas sont à considérer selon le type de transformations subies par le fluide :

- le cas isotherme
- le cas adiabatique

En pratique, les évolutions réelles d'un gaz sont entre ces deux limites. Le cas isotherme correspond à des fluides à forte conductibilité. Le cas adiabatique correspond à des transformations sans échange de chaleur avec les éléments voisins de la perturbation. Dans le cadre de ce cours de vulgarisation, nous ne retiendrons que le cas adiabatique (qui est le plus fréquent dans le cas des variations rapides de faibles amplitudes).

Rappelons néanmoins la formule qui pourrait être utilisée dans le cas isotherme. La température étant invariante lors du passage de l'onde, nous aurons :

$$P_i \cdot \tau = Cte = r \cdot T_0 \quad (1.106)$$

En notant  $P_0$  et  $\rho_0$  respectivement la pression à l'équilibre et la masse volumique à l'équilibre, il vient immédiatement :

$$\frac{dP}{P_0} = \frac{d\rho}{\rho_0} \quad \text{avec} \quad \frac{P_0}{\rho_0} = rT_0 \quad (1.107)$$

Si nous nous plaçons dans le cadre adiabatique, avec en plus une hypothèse d'isentropisme, il vient alors que le fluide suit la loi de LAPLACE lors du passage de la perturbation :

$$\frac{dP}{P_0} = \gamma \frac{d\rho}{\rho_0} \quad (1.108)$$

car nous avons la relation :

$$P_i \cdot \tau^\gamma = Cte \quad (1.109)$$

Notons que  $\gamma = 5/3$  pour les gaz monoatomiques parfaits, et  $\gamma = 7/5$  pour les gaz diatomiques.

On définit alors le coefficient de compressibilité adiabatique  $\chi_S$  tel que :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S \quad (1.110)$$

l'indice  $S$  signifiant entropie constante.

En éliminant les termes du second ordre, on peut alors montrer très rapidement que :

$$(\rho - \rho_0) = \rho_0 \chi_S P \quad (1.111)$$

Soit enfin :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.112)$$

### Cas d'un fluide

Dans le cas d'un liquide, nous retiendrons une valeur équivalente à  $\chi_S$  pour le coefficient de compressibilité adiabatique. Il sera noté  $\mu$  et se définira par :

$$\mu = -\frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_Q \quad (1.113)$$

l'indice  $Q$  signifiant sans échange de chaleur.

Si au premier aspect, un coefficient de compressibilité peut apparaître surprenant dans le cas liquide, il faut toutefois remarquer que les sons se propagent dans l'eau et qu'il n'y aurait pas de propagation sans pouvoir de compression du milieu.

Dans le cas de l'eau de mer,  $\mu = 4.4 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ . Au premier ordre, on montre rapidement que l'équation ci-dessus donne :

$$\rho_0 \mu P = (\rho - \rho_0) \quad (1.114)$$

Soit en dérivant par rapport au temps pour éliminer les constantes :

$$\rho_0 \cdot \mu \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.115)$$

### 1.6.5. Equation de propagation

Pour établir l'équation de propagation des sons, nous allons coupler 3 types de relations caractéristiques des milieux fluides :

- l'équation fondamentale de la dynamique
- une équation de continuité ou de conservation de la masse
- l'équation d'état du milieu

#### En dimension 1

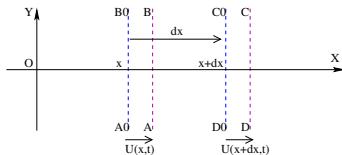


FIGURE 1.12. – La corde vibrante est fixée en  $x = 0$  et en  $x = L$ .

Le second principe de la dynamique nous donne :

$$(\rho S dx) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = S(p_{AB} - p_{CD}) + F_{oc}$$

$F_{oc}$  (forces occasionnelles).

Nous noterons aussi le volume de la nouvelle tranche :

$$V = S(U(x+dx) + (x+dx) - U(x) - x)$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

$$= S(dU + dx) = Sdx \left( 1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

La dilatation relative de la tranche :

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{S(du + dx) - Sdx}{Sdx} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Une dilatation engendre une surpression  $P = p - p_0$  ( $p_0$  étant la pression d'équilibre) :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)$$

Or  $P = \delta p$  et donc :

$$P = -\frac{1}{\chi} \left( \frac{\delta V}{V} \right) = -\frac{1}{\chi} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

Sur le coté  $AB$ , on a :

$$p_{AB} = p_0(x, t) - \frac{1}{\chi} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x,t}$$

Sur le coté  $CD$ , on a :

$$p_{CD} = p_0(x + dx, t) - \frac{1}{\chi} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x+dx,t}$$

Soit une différence de pression :

$$\begin{aligned} p_{CD} - p_{AB} &= p_0(x + dx, t) - p_0(x, t) \\ &\quad - \frac{1}{\chi} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x+dx,t} - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x,t} \right] \end{aligned}$$

C'est à dire

$$p_{CD} - p_{AB} = p_0(x + dx, t) - p_0(x, t) - \frac{1}{\chi} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) dx$$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\begin{aligned} (\rho Sdx) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} &= -S(p_0(x + dx, t) - p_0(x, t)) \\ &\quad - \frac{1}{\chi} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) dx + F_{oc} \end{aligned}$$

En l'absence de mouvement, on a :

$$-S(p_0(x + dx, t) - p_0(x, t)) + F_{oc} = 0$$

Au final :

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}$$

avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}}$ .

On sait que la vitesse vibratoire est  $v = \frac{\partial U}{\partial t}$ , donc :

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$$

De même,  $P = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial U}{\partial x}$  et nous avons :

$$\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2}$$

Pour obtenir une expression du même type en 3 dimensions, les démonstrations doivent suivre une démarche similaire, mais à partir d'un formalisme plus sophistiqué.

### En dimension 3

Considérons un élément de volume  $dx dy dz$  en un point  $M(x, y, z)$  de masse  $d^3 m$  et situé dans un champ de pression  $P$ .

**Équation fondamentale de la dynamique** Intéressons nous à l'équilibre des forces sur l'axe  $Ox$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= d^3 m \frac{d\mathbf{v}_x}{dt} = [P(x) \cdot d^2 S - P(x + dx) \cdot d^2 S] \mathbf{u}_x \\ &= \left[ P(x) \cdot dy dz - \left[ P(x) + \frac{\partial P(x)}{\partial x} dx \right] \cdot dy dz \right] \mathbf{u}_x \\ &= -\frac{\partial P(x)}{\partial x} \cdot dx dy dz \mathbf{u}_x \end{aligned}$$

Or en dérivant  $\mathbf{V}$  d'après les variables d'EULER, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot v_z \end{aligned}$$

En utilisant le formalisme des gradients de vecteurs, nous obtenons :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Grad}(\mathbf{v})$$

D'où en se limitant à la direction suivant  $x$  :

$$\begin{aligned} \rho \cdot dx dy dz \left( \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(v_x) \right) \mathbf{u}_x &= \\ -\frac{\partial P(x)}{\partial x} \cdot dx dy dz \mathbf{u}_x \end{aligned}$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

Le même raisonnement peut être appliqué suivant les deux axes  $Oy$  et  $Oz$ , ce qui donne en intégrant la pesanteur suivant  $Oz$  :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{Grad}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla(P)$$

Par la suite, nous négligerons, d'une part la pesanteur, et d'autre part le terme  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Grad}(\mathbf{v})$  qui est du second ordre lorsqu'on s'intéresse aux petits mouvements.

L'équation de la dynamique nous donne dans ces conditions en assimilant  $\rho$  à  $\rho_0$  au premier ordre :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla(P)$$

**Équation de conservation de la masse** Le principe de conservation de la matière traduit que la quantité de matière qui traverse la surface d'un volume fermé par unité de temps (flux de matière), est égale à la variation de la masse à l'intérieur de ce volume pendant le même temps. Soit :

$$\left( \frac{\partial M}{\partial t} \right) = - \iint_S \rho \frac{(\mathbf{v} \cdot dt) \mathbf{n} dS}{dt} \quad (1.116)$$

Par Ostrogradski, nous avons :

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \iiint \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\tau \quad (1.117)$$

Avec l'hypothèse de petits mouvements, on peut faire sortir  $\rho$  de la divergence en prenant sa valeur moyenne  $\rho_0$  d'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \cdot \nabla \cdot (\mathbf{v}) = 0 \quad (1.118)$$

**Équation d'état** Deux cas seront considérés : celui d'un gaz parfait et celui d'un liquide. Pour un gaz parfait, l'équation d'état établie précédemment donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.119)$$

L'équation conseillée pour les liquides est strictement du même type :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \mu \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.120)$$

### Équation résultante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.121)$$

et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \cdot \nabla \cdot (\mathbf{v}) = 0 \quad (1.122)$$

il vient :

$$\rho_0 \chi_S \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \cdot \nabla \cdot (\mathbf{v}) = 0 \quad (1.123)$$

Puis avec

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla (P) \quad (1.124)$$

il vient :

$$\nabla \cdot (\nabla (P)) = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1.125)$$

Comme  $\Delta = \nabla \cdot (\nabla)$ , nous avons :

$$\Delta P = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1.126)$$

Avec les hypothèses de notre cours, l'équation de l'acoustique pour les fluides peut être immédiatement obtenue en remplaçant  $\chi_S$  par  $\mu$  (ou  $\chi_T$ ). Cette équation peut être établie à l'identique pour la vitesse vibratoire  $\mathbf{V}$  ou la masse volumique  $\rho$ .

Tout comme en électromagnétisme, on introduit une notion de potentiel scalaire  $\Phi$ , appelé potentiel des vitesses tel que :

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi \quad (1.127)$$

Dans ces conditions, la connaissance de  $\Phi$  nous permet  $P$  par intégration. En effet, l'équation de la dynamique donne directement :

$$P = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.128)$$

Rappelons enfin que l'équation de D'ALEMBERT que nous venons de démontrer ne fait pas apparaître l'amortissement provoqué par des phénomènes physiques (absorption, relaxation moléculaire ou diffusion) que nous avons ignorés, ou négligés.

### 1.6.6. Conditions aux limites

A nouveau, l'équation aux dérivées partielles, ici l'équation des ondes, n'est pas suffisante pour déterminer la nature d'une propagation acoustique dans un fluide. On cherchera donc à préciser les conditions aux frontières de notre problème physique.

#### Conditions de passage

Soit une frontière  $S$  séparant deux milieux acoustiques de caractéristiques respectives  $\rho_1$  et  $\chi_1$  pour  $M_1$ , et  $\rho_2$  et  $\chi_2$  pour  $M_2$ .

Le milieu  $M_1$  est le siège d'une onde incidente et d'une onde réfléchie. Le milieu  $M_2$  est quant à lui le siège d'une onde transmise. Les conditions de passage sont immédiates à établir.

Composante vitesse Tout d'abord, les vitesses normales doivent être continues pour que les deux milieux restent joints en  $S$  :

$$\mathbf{v}_{\perp 1} = \mathbf{v}_{\perp 2} \quad (1.129)$$

l'indice  $\perp$  indiquant la composante normale et les indices 1 et 2 les limites à la frontière dans les milieux  $M_1$  et  $M_2$ . Avec le potentiel scalaire en coordonnées cartésiennes, comme  $\mathbf{V} = \nabla \Phi$ , nous avons :

$$\left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) \quad (1.130)$$

où  $Ox$  est la direction normale à la surface  $S$ .

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

**Composante pression** Ensuite, en vertu du principe de l'action et de la réaction, il faut que les forces qui s'exercent de part et d'autre de la frontière soient égales et opposées. Cela implique nécessairement que :

$$P_1 = P_2 \quad (1.131)$$

Comme  $P = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , cette condition de passage s'écrit :

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) \quad (1.132)$$

### Condition de SOMMERFELD

De façon similaire à ce qui a été dit en électromagnétisme, il est possible d'appliquer une condition d'onde sortante ou de SOMMERFELD, voir 1.5.8, lorsque l'onde acoustique à été générée par des sources confinées (internes) dans un volume borné et qu'elle se propage en milieu complètement ouvert.

### Cas particuliers

Parmi la généralité des cas qui peuvent se présenter, certains milieux peuvent donner lieu à des approximations grandement simplificatrices. On citera trois situations particulières : cas mou, rigide et à impédance constante.

**Milieu mou** Cette situation apparaît lorsque le milieu qui délimite le domaine de propagation est particulièrement compressible par rapport au milieu de propagation de l'onde. Ce milieu très compressible, appelé milieu "mou" ("soft" en anglais), est alors approximé au vide et on considère que la pression qui y règne est nulle :

$$p = 0 \quad (1.133)$$

En théorie, aucune onde acoustique ne peut pénétrer dans ce milieu et s'y propager. Il s'agit là bien sûr d'une approximation de la réalité. En pratique, le milieu mou n'est pas absolument vide et une faible partie de l'énergie acoustique peut y pénétrer.

**Milieu rigide** Une situation symétrique peut se produire lorsque le milieu qui délimite le domaine est au contraire très difficilement compressible. Ce milieu sera appelé milieu "rigide" ("rigid" en anglais). La vitesse de vibration dans le milieu est alors considérée comme nulle :

$$\|V\| = 0 \quad (1.134)$$

En appliquant le second principe de la dynamique, et si  $Ox$  est la direction perpendiculaire à la surface  $S$  séparant le milieu de propagation du milieu rigide, nous auront en tout point de la surface :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_S = 0 \quad (1.135)$$

De la même façon que précédemment, aucune onde ne peut se propager dans un tel milieu. Cependant, ce type de milieu constitue un modèle théorique limite. En pratique, une petite partie de l'énergie acoustique peut y pénétrer.

## 1.7. Équation de Schrödinger (extrait de wikipédia)

**Milieu à impédance connu** Un situation intermédiaire peut se produire lorsque l'on suppose qu'il existe une relation de linéarité entre la le module de la vitesse vibratoire et la pression sonore. On suppose alors que :

$$Z = \frac{p}{\|V\|} \quad (1.136)$$

$Z$  est alors appelé l'impédance du milieu.

**Il est important de noter que dans beaucoup de situations ces trois modèles ne peuvent pas s'appliquer.**

### 1.6.7. Exercices d'application

#### Exercice 1.9 Réflexion et transmission sur une interface

Soit une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$  dans un milieu  $M_1$  de célérité  $c_1$ .

L'onde incidente rencontre une surface plane d'un milieu  $M_2$  de célérité  $c_2$ . L'angle d'incidence est noté  $\alpha_i$  par rapport au vecteur normal  $\mathbf{n}$  de la surface  $S$ .

Donner les directions et les amplitudes relatives de l'onde réfléchie et de l'onde transmise. Une application numérique sera faite dans le cas des interfaces :

- Interface air/mer
- Interface mer/air
- Interface mer/fond marin

#### Exercice 1.10 Réflexion sur milieu mou ou rigide

Même question que précédemment lorsque le milieu  $M_2$  est mou ou rigide. Comparaison.

## 1.7. Équation de Schrödinger (extrait de wikipédia)

En 1924, dans sa thèse, Louis de Broglie émet l'hypothèse que, non seulement la lumière, mais en fait toutes les particules peuvent être vues comme des ondes, liées comme le photon à la particule par les deux relations suivantes :

$$E = h\nu \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (1.137)$$

On peut ainsi, pour toute particule d'énergie et de quantité de mouvement donnée, associer une onde de fréquence et de longueur d'onde donnée, appelée fonction d'onde. Cela détermine la célérité de l'onde, et de Broglie montra que ces relations sont compatibles avec la théorie de la relativité restreinte.

Dans la suite, il sera plus intéressant de considérer la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$  (et même, au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ ), qui d'après les postulats ci-dessus, sont liés à la particule classique par :

$$E = \hbar\omega \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (1.138)$$

en ayant posé  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  la constante de Planck réduite, ou constante de Dirac.

Par suite, les particules ne sont ni des ondes, ni des masses ponctuelles — ce sont des objets différents dont la description la plus adaptée est tantôt en termes ondulatoires (diffraction, interférences...) et tantôt en terme particulaires (impulsion, localisation...). Cet aspect déroutant

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

pour beaucoup de scientifiques de l'époque, a cependant été confirmé très tôt par des expériences rigoureuses.

L'une des conséquences les plus frappantes de cette dualité onde-corpuscule est que chaque particule peut interférer avec elle-même, dans une expérience de Young par exemple. Cela n'est pas vrai que pour les seules particules « élémentaires », comme le proton et l'électron, mais également pour des atomes, et même des molécules.

Le physicien autrichien Erwin Schrödinger utilisa ces résultats pour établir une équation régissant l'évolution spatiale et temporelle de la fonction d'onde. Cette équation est un postulat de la mécanique quantique. Toute fonction d'onde  $\Psi$  vérifie, à tout instant et en tout point :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \quad (1.139)$$

c'est-à-dire :

$$H\Psi = E\Psi \quad (1.140)$$

où la quantité  $H$  est appelée opérateur hamiltonien ou plus souvent hamiltonien.

## 1.8. Modélisation des vagues de houle

Les vagues de mer peuvent se modéliser en faisant appel à la mécanique des fluides. Pour simplifier les choses, nous pouvons considérer uniquement les vagues de gravité induite par l'action du vent mais observées lorsque le vent a cessé d'interagir avec la surface de mer. On utilisera alors plus spécifiquement le terme de "houle" pour parler de ce type de vagues.

La hauteur, distance de la crête au creux, d'une vague sera notée  $H$  et  $a = H/2$  son amplitude. Nous poserons également  $L$  la longueur d'onde,  $C$  la vitesse de propagation,  $T$  la période et  $d$  la profondeur, plus précisément la distance entre le fond de la mer supposé plat et le niveau de la surface libre au repos. Le  $H/d$  rapport est appelé la hauteur relative de la houle et  $\gamma = H/L$  la cambrure de la houle. Le niveau de cambrure joue un rôle capital dans les phénomènes de déferlement. Les grandeurs  $u$ ,  $v$  et  $w$  représentent les vitesses dans les directions  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$ . L'altitude correspondra à la variable  $z$  ( $z = 0$  au niveau de la surface libre au repos) et la houle se propagera dans la direction  $\hat{x}$ . Nous admettrons que la pression au contact de l'air est nulle  $p = 0$ .

### 1.8.1. Modèle théorique de houle

Comme nous l'avons dit, la modélisation de la houle est intrinsèquement liée à la mécanique du fluide en mouvement. Pour réduire la complexité de notre modèle, nous admettrons que le mouvement du fluide est irrotationnel : ceci nous autorisera à poser que la vitesse dérive d'un potentiel  $\phi$ , c'est à dire  $\mathbf{V} = (u, v, w) = \nabla\phi$ . Expérimentalement, on constate qu'en dehors des cas de déferlement, cette hypothèse est à peu près respectée. De même, nous admettrons que le fluide est parfait et incompressible pour pouvoir appliquer le théorème de Bernoulli qui découle du principe de conservation de l'énergie mécanique et qui se traduit par la relation suivante :

$$p = -\rho gz + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) - \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho \cdot f(t) \quad (1.141)$$

où  $\rho$  est la densité du fluide et  $f(t)$  une fonction arbitraire dépendant uniquement du temps. Pour la suite nous fixerons  $f(t) = 0$ . La conservation de la masse nous donnera la relation :

$$\Delta\phi = 0 \quad (1.142)$$

En ce qui concerne les conditions aux frontières, le fluide sera supposé glisser parfaitement sur le fond d'où :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.143)$$

En surface  $z = \eta$  (où  $\eta$  représente l'altitude de la surface de mer agitée), nous imposerons la condition de continuité des vitesses (en  $z = \eta$ ) :

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \mathbf{V} \cdot \nabla \eta + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \nabla \phi \cdot + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (1.144)$$

Finalement en dérivant l'équation 1.141 et en lui ajoutant l'équation 1.144 multipliée par  $g$ , nous obtenons l'équation (en  $z = \eta$ ) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \nabla \phi \cdot \nabla \eta - \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \quad (1.145)$$

### 1.8.2. Approximation d'Airy

L'équation 1.145 s'avère être une équation aux dérivées partielles très complexe qu'il est hors de question de chercher à résoudre directement. Si l'on admet que la cambrure et la hauteur relative sont très faibles, le problème peut être vu au premier ordre (dite approximation d'Airy) et on peut se ramener à  $z = 0$  plutôt qu'à  $z = \eta$  par un développement de Taylor. Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (1.146)$$

### 1.8.3. Équation de Korteweg et de Vries (KdV)

Sur la même problématique Diederik Korteweg et Gustav de Vries ont cherché à étudier les vagues pour des faible profondeur. Au prix d'hypothèse de faible linéarité, ils ont montré que les vagues suivaient alors une loi décrite par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{d}} \left( \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) \quad (1.147)$$

où  $\sigma = d^3/3 - T \cdot d / (g \cdot \rho)$ .

## 1.9. Modélisation épidémiologique

La propagation des maladies peuvent aussi se modéliser à l'aide d'EDP ou plutôt un système d'EDP.

### 1.9.1. Modèle SIR simple

Considérons la propagation d'une pathologie au sein d'une population de renards. Les individus (les renards) sont répartis en 3 états différents : il y a des renards sains (S), des renards infectés (I), et des renards morts (R). Pour les plus optimiste, on peut aussi utiliser le modèle qui suit pour étudier une maladie pour laquelle les individus guérissent, et sont alors immunisés : il faut alors les distinguer des individus sains n'ayant jamais contracté la maladie. On peut par exemple supposer qu'ils sont immunisés et donc ne peuvent plus être infectés.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} &= -rIS \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= rIS - aI \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= aI \end{cases} \quad (1.148)$$

## 1. Les EDP comme outil de modélisation

Dans ce modèle, la première équation correspond au phénomène de contamination : lorsque co-habite des individus sains et des individus infectés, un certain nombre d'individus sains sont infectés. Il est par ailleurs naturel de considérer ce terme comme proportionnel au produit  $I S$ , en effet la quantité de microbes dans l'air (donc la probabilité pour un individu sain donné d'être infecté) est proportionnelle à  $I$ . Il nous faut ensuite multiplier cette probabilité par le nombre d'individus sains, c'est-à-dire par  $S$ . Pour ce qui est des variations de  $I$ , le premier terme correspond aux individus contaminés (qui augmentent  $I$ ). Le deuxième terme, en  $- a I$ , correspond aux individus qui meurent.

### 1.9.2. Modèle plus complexe

On peut arriver à de nombreux modèles suivant les hypothèses que l'on fait sur la maladie étudiée. Il sera souvent intéressant de définir plus de catégories de populations : ainsi, pour des modèles de MST, on différenciera les populations suivant leur sexe, ce qui multiplie le nombre de possibilités par 2.

Pour étudier une maladie de type sida, on peut également faire un modèle dans lequel on considère quatre groupes de population : les individus sains  $X$ , les individus infectés  $Y$ , les porteurs sains  $Z$ , c'est-à-dire des individus ayant été infectés et désormais immunisés, et enfin les individus malades  $A$ .  $B$  sera le flux de population nouvelle entrant dans le système.

En effet, du point de vue de l'étude du sida (et uniquement du sida), un individu donné, quel que soit son état, peut mourir d'autre chose que le sida, c'est ce que l'on range dans "mort naturelle". On considère qu'il y a un taux de mortalité fixe, noté  $n$ , ce pour toutes les populations considérées (sains, infectés, malades ou porteurs sains). D'autre part, un individu sain  $X$  peut aussi être contaminé, auquel cas il devient un individu infecté  $Y$ . Un individu infecté peut lui évoluer vers deux stades possibles : malade  $A$  ou porteur sain  $Z$ . Le nombre  $s$  représente la vitesse dévolution de la maladie : plus ce taux est grand, plus les individus infectés évoluent vite vers l'un des stades suivants. Le nombre  $p$ , compris entre 0 et 1, représente la probabilité pour que cette évolution se fasse vers l'état de malade. Bien sûr, si  $p$  diminue, la quantité de porteurs sains, immunisés contre la maladie, augmente. La maladie est alors moins dangereuse globalement. Enfin, un malade peut mourir de sa maladie, ce avec un taux de mortalité  $d$  considéré comme fixe, alors qu'un porteur sain, immunisé, ne peut plus évoluer du point de vue de cette maladie. Toutes ces hypothèses conduisent à poser des équations du système de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial X}{\partial t} & = & B - nX - \lambda_c X \\ \frac{\partial Y}{\partial t} & = & \lambda_c X - (n + s) Y \\ \frac{\partial A}{\partial t} & = & spY - (d + n) A \\ \frac{\partial Z}{\partial t} & = & s(1 - p) Y - nZ \end{array} \right. \quad (1.149)$$

où  $\lambda_c = \beta Y / (X + Y + Z + A)$ .

En effet ce coefficient représente un taux de contamination, qu'il est naturel de relier au rapport  $Y/(X + Y + Z + A)$ , probabilité lors d'une rencontre pour que la personne rencontrée soit infectée, donc contaminante.

Bien sûr, ce n'est qu'un modèle parmi beaucoup d'autres, et pas forcément le plus réaliste... On s'aperçoit toutefois que le système différentiel obtenu devient rapidement assez compliqué dès que l'on fait intervenir plusieurs interactions entre groupes de population.

## 2. Notion de symétrie

Afin de simplifier la nature d'un problème physique générale et un problème de propagation en particulier, il est généralement fait usage, quand cela est possible, de propriétés de symétrie. On parle alors de plan de symétrie, de symétrique cylindrique ou de symétrie sphérique, voir d'antisymétrie. De la même façon et sans que cela soit explicitement relier, on peut aussi faire référence à des notions d'invariance par translation. Il m'a semblé important de clarifier ces notions.

### 2.1. Principe fondamental de CURIE

En physique moderne, l'ensemble des études sur les notions de symétrie et d'invariance constituent un des principaux moteur de la recherche fondamentale. Ces études ont par exemple montrer l'intérêt de la théorie des groupes pour de nombreux domaines de la physique. Même s'il existe des formalismes plus élaborés, ce cours s'appuiera sur le principe de Pierre CURIE, énoncé 1894.

**Principe 2.1 (de CURIE)** Lorsque certaines causes produisent certains effet, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Pour que ce principe reste vrai tout le temps il faut ajouter une restriction : ce principe est vrai lorsque les effets possibles correspondent à une solution unique.

De même, il faut préciser ce que signifie le terme "effet". Il faut en réalité comprendre le terme effet par effet observable. On peut ainsi qualifier de d'effet observable un mouvement (vitesse, accélération), une force, une température etc. En revanche, un champ électrique ou magnétique n'est pas directement observable.

#### 2.1.1. Plan de symétrie pour le champ électrique

Supposons qu'un ensemble de causes (distribution de charge) soit symétrique par rapport à un plan  $P_0$  et génère un champ électrique  $\mathbf{E}$ . Un particule chargée  $q$  située à l'intérieur de ce champ électrique subira une force  $\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}$ . La force  $\mathbf{F}$  est un effet directement observable et devra donc être symétrique par rapport au plan  $P_0$ . Étant donné l'expression de la force, cela implique aussi la symétrie du champ  $\mathbf{E}$ .

#### 2.1.2. Plan de symétrie pour le champ magnétique

Supposons maintenant qu'un ensemble de causes (distribution de courant) soit symétrique par rapport à un plan  $P_0$  et génère un champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Un particule chargée  $q$  se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{v}$  constante parallèle au plan  $P_0$ , est située à l'intérieur de ce champ magnétique. la vitesse  $\mathbf{v}$  sera une cause de la trajectoire de la particule qui est symétrique par rapport au plan  $P_0$ .

L'ensemble des trajectoires de la particule est directement observable et devra donc être symétrique par rapport au plan  $P_0$ . La force  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  sera également symétrique. Pour que cela soit ainsi, il faudra que le champ  $\mathbf{B}$  soit antisymétrique par rapport au plan  $P_0$ . C'est à dire que la norme et la direction du champ  $\mathbf{B}$  sera symétrique mais de sens opposé.

## 2.2. Autres symétries

Nous avons parlé de la symétrie en évoquant une symétrie par rapport à un plan. Il existe d'autres types de symétrie cylindrique, sphérique, etc...

En réalité dire qu'un dispositif présente une symétrie cylindrique. C'est dire que le système est symétrique par rapport à tout plan contenant un axe donné. De même dire qu'un dispositif possède une symétrie sphérique. C'est dire que le système est symétrique par rapport à tout plan contenant un point donné.

Mathématiquement, on revient facilement à la notion d'invariance par rotation en se rappelant que la composition de deux symétries par rapport aux plans  $P_1$  et  $P_2$  est une rotation lorsque les plans  $P_1$  et  $P_2$  ne sont pas parallèles. L'angle de cette rotation est le double de l'angle entre les deux plans et l'axe de rotation est l'intersection des deux plans.

## 2.3. Invariance par translation

D'une façon similaire, la notion d'invariance par translation dans une direction  $\Delta_t$  se ramène au concept de symétrie. En effet, l'invariance par translation dans une direction  $\Delta_t$  signifie que le système est symétrique par rapport à tout plan perpendiculaire à l'axe  $\Delta_t$ .

Mathématiquement, on se ramène à l'invariance par translation en se rappelant que la composition de deux symétries par rapport à deux plans  $P_1$  et  $P_2$  parallèles est une translation. Le vecteur associé à cette translation est perpendiculaire aux plans et sa norme est le double de la distance séparant les plans.

## 2.4. Symétries et conditions aux frontières

Pour un bon nombre d'applications, les symétries constituent un outil très puissant pour traduire une condition aux frontières.

### 2.4.1. Champ scalaire symétrique

Par exemple en dimension 2, on considère un champ scalaire symétrique par rapport à un plan  $Oy$  :

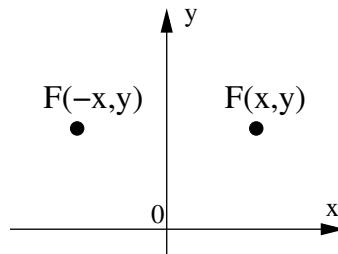


FIGURE 2.1. –

On a alors que  $\forall y, \forall x, F(-x, y) = F(x, y)$ .

Donc en  $x = 0$  et en cas de continuité, on aura :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

### 2.4.2. Champ scalaire antisymétrique

De même, pour un champ scalaire antisymétrique par rapport à  $Oy$  :

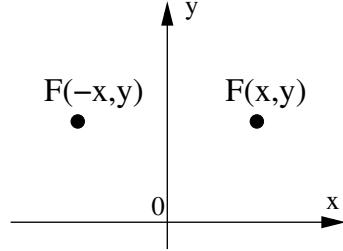


FIGURE 2.2. –

On a  $\forall y, \forall x, F(-x, y) = -F(x, y)$ . Donc en  $x = 0$  et en cas de continuité, on aura :

$$F = 0 \quad (2.2)$$

### 2.4.3. Champ vectoriel symétrique

Pour un champ vectoriel symétrique par rapport à  $Oy$  :

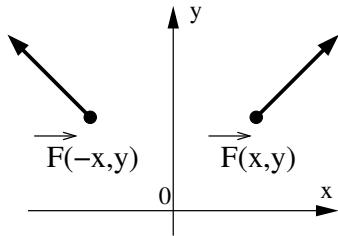


FIGURE 2.3. –

On a  $\forall y, \forall x, F_x(-x, y) = -F_x(x, y)$  et  $F_y(-x, y) = F_y(x, y)$

En  $x = 0$  et en cas de continuité,  $\mathbf{F}$  parallèle à  $Oy$  et  $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \quad F_x = 0$ .

### 2.4.4. Champ vectoriel antisymétrique

Pour un champ vectoriel antisymétrique par rapport à  $Oy$  : On a  $\forall y, \forall x, F_y(-x, y) = -F_y(x, y)$  et  $F_x(-x, y) = F_x(x, y)$

En  $x = 0$  et en cas de continuité,  $\mathbf{F}$  perpendiculaire à  $Oy$  et  $\frac{\partial F_x}{\partial x} = 0 \quad F_y = 0$ .

## 2. Notion de symétrie

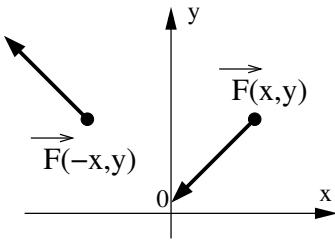


FIGURE 2.4. –

### 2.4.5. Intérêt pour les EDP

Pour un observateur situé dans le demi plan  $x > 0$ , il n'y aucune différence entre considérer un champ scalaire symétrique (resp. antisymétrique) par rapport à l'axe  $Oy$  et considérer un champ scalaire sur le demi plan  $x > 0$  avec une condition  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  en  $x = 0$  (resp.  $F = 0$  en  $x = 0$ ).

Suivant les besoins du calcul ou pour l'optimisation du maillage numérique, on peut se placer indifféremment dans l'un ou l'autre cas.

## 3. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle offre une méthode pour réduire les problèmes physiques complexes en formes plus simples avant même d'obtenir des valeurs quantifiées. BRIDGMAN (1969) explique cela ainsi : "Le principal utilisation de l'analyse dimensionnelle est de déduire par une étude des dimensions des variables du système physique certaines limitations sur la forme de toutes les relations possibles entre ces variables." L'approche dimensionnelle constitue une technique très générale qui ne se restreint pas à l'étude de la propagation ou des équations aux dérivées partielles. Nous verrons tout de même que dans ce contexte, l'analyse dimensionnelle apporte des informations importantes sur le phénomène propagatif.

Quelques unes des idées de base en analyse dimensionnelle étaient déjà apparues dans les travaux de FOURIER dès le premier quart du XIX<sup>ème</sup> siècle, mais le sujet reçut une attention plus méthodologique seulement vers la fin de ce siècle, notamment au travers des travaux de LORD RAYLEIGH, REYNOLDS, MAXWELL, et FROUDE en Angleterre, et CARVALLO, VASHY et un nombre d'autres scientifiques et ingénieurs en France. En 1914, BUCKINGHAM publia l'incontournable "théorème II". Depuis, la littérature sur le sujet s'est largement développée. Les applications incluent aujourd'hui l'aérodynamique, l'hydraulique, la construction navale, la propulsion, le transfert de masse et de chaleur, la combustion, la mécanique des structures, les interactions fluide-structure, l'électromagnétisme, les radiations, l'astrophysique, la sismique, les essais nucléaires, la dynamique des chocs, les réactions chimiques et même l'économie.

### 3.1. Quantité physique

Un objet ou un événement peut être décrit par un certain nombre de propriété comme la longueur, la masse, la couleur, la forme, la vitesse ou le temps. Toutes ces propriétés ne représentent pas forcément une grandeur physique dans la mesure où elles ne se prêtent pas toujours à la comparaison. En particulier, s'agissant de la couleur, il est impossible de comparer le rouge et le bleu. On peut envisager à la rigueur de comparer leur fréquence, mais la couleur correspond à une impression visuelle. De même, la comparaison d'un carré et d'un rond n'a pas de sens. En physique, les grandeurs doivent donc vérifier un certain nombre de propriétés minimales liées à la comparabilité.

#### 3.1.1. Quantités de base

Un système physique donné peut définir un certain nombre de grandeurs de base sur lesquelles il est possible d'appliquer un comparaison. Cela se traduit mathématiquement par une notion d'égalité  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  pour signifier que deux grandeurs peuvent être égales et une notion d'addition  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$  pour signifier la grandeur associée à  $\mathbf{A}$  est équivalente à celle de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  réunis. Ces deux opérations définissent ensemble :

### 3. Analyse dimensionnelle

- Le concept de plus grand plus petit. Si il existe  $\mathbf{B}$  tel que  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ , alors  $\mathbf{C} > \mathbf{A}$ .
- La notion de soustraction. Si  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ , alors  $\mathbf{A} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$ .
- La notion de multiplication d'une quantité physique par un nombre. Si  $\mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , alors  $\mathbf{B} = 3\mathbf{A}$ .
- La notion de division d'une quantité physique par un nombre. Si  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{B} + \mathbf{B}$ , alors  $\mathbf{B} = \mathbf{A}/3$ .

Il est important de noter que des opérations mathématiques autres que celles précédemment citées n'ont pas de sens physique dans la comparaison de grandeurs physiques.

Les notions d'unité et de valeur numérique découlent directement de ces propriétés. Si  $\mathbf{a}$  est l'élément unité choisi pour quantifier les grandeurs de type  $\mathbf{A}$ , le processus de mesure conduit à déterminer la quantité numérique  $A$  telle que :

$$\mathbf{A} = A \cdot \mathbf{a} \quad (3.1)$$

La valeur numérique d'une quantité de base dépend bien sûr du choix de l'unité. Mais, une grandeur physique existe indépendamment de ce choix. La longueur de mon petit doigt est la même qu'elle soit mesurée en centimètres ou en pouces. Une quantité  $\mathbf{A}$  peut être mesurée en fonction de l'unité  $\mathbf{a}$  ou de l'unité  $\mathbf{a}'$ , mais :

$$\mathbf{A} = A \cdot \mathbf{a} = A' \cdot \mathbf{a}' \quad (3.2)$$

Si l'unité  $\mathbf{a}'$  est  $n$  fois plus importante que  $\mathbf{a}$  :

$$\mathbf{a}' = n \cdot \mathbf{a} \quad (3.3)$$

cela implique par conséquent que :

$$A' = n^{-1} A \quad (3.4)$$

Autrement dit, si la taille de l'unité d'une quantité de base varie d'un rapport de  $n$ , la valeur numérique associée à la quantité physique varie d'un facteur  $n^{-1}$ .

On remarquera également que si les quantités d'un même type sont physiquement ajoutées  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ , les valeurs numériques associées vérifieront l'équation  $A + B = C$ , indépendamment de l'unité.

#### 3.1.2. Quantités dérivées

##### Quantités dérivées de première espèce

En décrivant les objets et événements physiques quantitativement, nous nous référons aux valeurs numériques associées aux quantités physiques de base, mais nous introduisons également d'autres grandeurs construites à partir de ces premières valeurs numériques. Par exemple, nous déterminons la distance  $L$  qu'un objet a parcouru en un temps  $t$ , et nous pouvons introduire sa vitesse  $V = L/t$ . Ce type de grandeurs est appelé quantité dérivée de première espèce.

Dans l'exemple de la vitesse, nous avons introduit une division, mais toutes les opérations mathématiques ne sont pas autorisées si on souhaite que la nouvelle grandeur reste une grandeur physique. En 1931, BRIDGMAN postule "le principe du sens absolu des grandeurs relatives". C'est à dire que : un nombre  $Q$ , obtenu en appliquant des opérations mathématiques sur les valeurs numériques associées aux quantités de base, est une grandeur physique si le rapport de cette grandeur calculée dans deux cas différents demeure invariant lorsque la taille des unités de base change.

BRIDGMAN a également montré qu'un monome vérifie ce principe si et seulement si il s'écrit sous la forme :

$$Q = \alpha A^a B^b C^c \dots \quad (3.5)$$

où  $A, B, C$  etc sont des valeurs numériques associées à des quantités de base et où le coefficient  $\alpha$  et les exposants  $a, b, c$  etc sont des nombres réels.

Les quantités de base étant déterminées, par exemple la longueur (notée  $L$ ), la masse (notée  $M$ ) et la durée (notée  $t$ ), on introduit le terme de dimension. En reprenant l'exemple précédent, on dira que la vitesse  $V$  est de la dimension d'une longueur par une durée. On formalisera cela par l'écriture :

$$[V] = L/t \quad (3.6)$$

En définissant la quantité  $Q$  par l'expression :

$$Q = \alpha L_1^{l_1} L_2^{l_2} \dots M_1^{m_1} M_2^{m_2} \dots t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \dots \quad (3.7)$$

où les  $L_i$  sont des valeurs numériques associées à des longueurs, les  $M_i$  sont des valeurs numériques associées à des masses, les  $t_i$  sont des valeurs numériques associées à des durées, le coefficient  $\alpha$  et les indices  $l_i, m_i$  et  $\tau_i$  étant réels. Si les unités de longueur, de masse et de durée varient respectivement des rapports  $n_L, n_M$  et  $n_t$ , la nouvelle valeur  $Q'$  s'exprimera sous la forme :

$$Q' = n^{-1} Q \quad (3.8)$$

avec :

$$n = (n_L)^{\Sigma l_i} \cdot (n_M)^{\Sigma m_i} \cdot (n_t)^{\Sigma \tau_i} \quad (3.9)$$

Nous dirons que  $Q$  est de la dimension :

$$[Q] = (L)^{\Sigma l_i} \cdot (M)^{\Sigma m_i} \cdot (t)^{\Sigma \tau_i} \quad (3.10)$$

Une quantité est dite adimensionnelle ou sans dimension si sa valeur numérique ne varie pas en fonction du système d'unité choisi.

### Équations et quantités dérivées de deuxième espèce

Le principe de BRIGMAN impose un certain nombre de restrictions sur les équations décrivant des lois physiques :

- Les deux membres d'une équation doivent avoir la même dimension.
- Chaque fois qu'une somme de quantité apparaît dans une fonction, chaque termes de la somme doit avoir la même dimension.
- Tous les arguments des fonctions de type exponentiel, logarithmique, trigonométrique ou autres doivent être sans dimension.

Attention, la notion de grandeur adimensionnelle est distinte de la notion de constante. A titre d'exemple, la loi décrivant la chute d'une bille soumise à l'attraction gravitationnelle peut s'écrire :

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.11)$$

Le terme  $g$  pouvant être considéré comme une constante. Si en laboratoire, on effectue une validation expérimentale et que les unité sont le mètre et la seconde, on trouvera la loi :

$$x \simeq 4,81 t^2 \quad (3.12)$$

### 3. Analyse dimensionnelle

Si les mesures sont effectuées en pieds (1 mètre équivaut à 3.28 pieds), nous auront plutôt :

$$x \simeq 16,1 t^2 \quad (3.13)$$

Le terme  $g$  peut donc être une constante mais qui dépend du système d'unité choisi :  $[g] = Lt^{-2}$ .

Par ailleurs, il serait possible de considérer la surface comme étant une quantité de base. Par exemple, on pourrait utiliser un timbre poste comme unité et mesurer n'importe quelle surface à l'aide de cette référence. Toutefois, on sait que la valeur numérique  $A$  associée une surface **A** dépend linéairement d'une intégrale double de mesure de longueur :

$$A = c \iint dx dy \quad (3.14)$$

$c$  est une constante qui dépend de la taille du timbre poste utilisé comme référence. Il est plus intéressant de considérer que la surface est une grandeur dérivée de la longueur et  $[A] = L^2$ . Cela impliquera que  $c$  est une constante égale à 1 et est de nature adimensionnelle.

De même, La force **F** pourrait constituer une quantité physique de base et être mesurée par un système d'unité propre. La théorie de la dynamique, nous donne la relation :

$$F = ma \quad (3.15)$$

où  $F$ ,  $m$ ,  $a$  sont les valeurs numériques respectivement associées à la force, la masse et l'accélération. Ainsi, on peut écrire :

$$[F] = M \cdot L \cdot t^{-2} \quad (3.16)$$

Or une force peut exister indépendamment de tout mouvement et de toute accélération. La dimensionnalité de la force sera donc imposée par une relation physique non implicite. Cette relation pouvant, comme ici, s'appliquer seulement de façon partielle.

Dans les deux cas que nous venons de voir, nous parlerons de quantités dérivées de deuxième espèce.

Le système international considère uniquement les quantités de base suivantes : la longueur  $L$  (en mètre  $m$ ), la durée  $t$  (en seconde  $s$ ), la masse  $M$  (en kilogramme  $kg$ ), la température  $T$  (en kelvin  $K$ ), le courant  $I$  (en ampère  $A$ ), le nombre de particules élémentaires  $n$  (en mole  $mol$ ) et l'intensité lumineuse (en candela  $cd$ ).

## 3.2. Le théorème Pi de BUCKINGHAM

Jusqu'à présent nous avons surtout vu l'analyse dimensionnelle comme un outil pour vérifier la "cohérence" des grandeurs physiques mises en jeu dans un problème donné. Nous allons voir que l'analyse peut aussi fortement contraindre la nature mathématique de la loi physique. En particulier, nous allons décrire le principe du théorème  $\Pi$  de BUCKINGHAM qui s'applique à n'importe quel problème rencontré.

### 3.2.1. Étape 1

Face à un problème physique où on cherche à déterminer l'expression d'une quantité  $Q_0$ , la première et la plus importante des étapes est de déterminer la liste complète des variables indépendantes  $Q_1, \dots, Q_n$  dont dépend la quantité  $Q_0$  :

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \quad (3.17)$$

Il est impératif de constituer une liste complète sans quoi les résultats obtenus par un raisonnement dimensionnel seront probablement erronés.

### 3.2.2. Étape 2

La deuxième étape consiste à exprimer les dimensions de chacune des variables précédemment listée sous une forme :

$$[Q_i] = (L)^{l_i} \cdot (M)^{m_i} \cdot (t)^{\tau_i} \quad (3.18)$$

Puis, nous retirons de la liste des variables  $Q_1, \dots, Q_n$  une sous-liste  $Q_1, \dots, Q_k$  de variable indépendantes capables d'exprimer dimensionnellement toutes les autres variables. C'est à dire que les dimensions de  $Q_0$  et de  $Q_{k+1}, \dots, Q_n$  pourront s'écrire :

$$[Q_i] = [Q_1^{N_{i1}} Q_2^{N_{i2}} \cdots Q_k^{N_{ik}}] \quad (3.19)$$

avec  $i > k$  ou  $i = 0$ .

### 3.2.3. Étape 3

La troisième étape constitue à former des quantités adimensionnelle à par partir de  $n - k$  variables n'appartenant pas à la sous-liste et de la quantité  $Q_0$ . On posera ainsi :

$$\Pi_i = \frac{Q_{k+i}}{Q_1^{N_{(k+i)1}} Q_2^{N_{(k+i)2}} \cdots Q_k^{N_{(k+i)k}}} \quad (3.20)$$

avec  $i = 1, 2, \dots, n - k$ , et :

$$\Pi_0 = \frac{Q_0}{Q_1^{N_{01}} Q_2^{N_{02}} \cdots Q_k^{N_{0k}}} \quad (3.21)$$

### 3.2.4. Étape 4

Un forme équivalente de l'équation (3.17) est :

$$\Pi_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_k; \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (3.22)$$

expression dans laquelle toutes les variables sont sans-dimension sauf les variables  $Q_1, \dots, Q_k$ . En suivant le principe d'homogénéité des équations, nous pouvons écrire en fait que :

$$\Pi_0 = f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (3.23)$$

Ceci constitue le théorème II de BUCKINGHAM (1914).

**Théorème 3.1 (Pi-BUCKINGHAM)** Quand une relation complète entre quantités physiques dimensionnelles peut s'exprimer sous des formes adimensionnelles, le nombre de quantités indépendantes peut être réduit de  $n$  à  $n - k$ , où  $k$  est le nombre maximum de variable dimensionnellement indépendantes.

### 3.2.5. Exercices d'application

#### Exercice 3.1 Barre homogène

Etudier dans le cas général la propagation de la chaleur dans une barre homogène de longueur  $L$  et de conductivité  $\lambda$  supposée isolée thermiquement sur sa longueur. A l'instant  $t_0$ , la barre est à la température  $\theta_0$ . A l'extrémité  $x = L$ , la température est maintenue constante  $\theta(t, L) = \theta_0 \quad \forall t$ , et à l'extrémité  $x = 0$ , la température suit la loi  $\theta(t, 0) = \theta_0 \cdot f(t/T)$ , où  $T$  est une échelle caractéristique de temps.

#### Exercice 3.2 Massif semi-infini

Un massif est défini sur le demi espace  $x \geq 0$ . A l'instant  $t_0$ , le massif est à la température  $\theta_0$ . A l'extérieur  $x < 0$  et pour tout  $t$ , la température est de  $\theta_e$  constant. On que pour  $t > t_0$ , on a un contact thermique parfait entre l'extérieur et le massif. Donner l'expression générale de la température dans le massif.



**Deuxième partie .**

**Équations aux dérivées partielles**



# 4. Introduction

Nous avons vu que dans le cadre des modélisations présentées précédemment, les EDP jouaient un rôle prépondérant. Par exemple, la conduction thermique se traduit dans bien des cas par l'équation de conduction de la chaleur :

$$a \cdot \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

De même, dans le cas de la corde vibrante, de l'électromagnétisme ou de l'acoustique, le problème physique se résume souvent à l'application de l'équation des ondes :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2)$$

où  $u$  est une grandeur scalaire (comme en acoustique) ou vectorielle (comme en électromagnétisme).

Dans la suite, nous étudierons ces EDP en s'affranchissant le plus possible du contexte auquel elles se rattachent.

## 4.1. Notation indicelle

Pour faciliter l'écriture des EDP, nous poserons que les dérivées partielles peuvent s'écrire sous la forme indicelle. Ainsi, la dérivée partielle de  $u$  par rapport à la variable  $x$ , généralement notée  $\frac{\partial u}{\partial x}$  en physique, sera notée  $u_x$ .

Dans ces conditions, l'équation de conduction de la chaleur se notera :

$$a \cdot \Delta u - u_t = 0 \quad (4.3)$$

et celle de la propagation des ondes :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad (4.4)$$

tout en sachant que  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ .

## 4.2. Conditions aux frontières (CF)

Nous avons vu que pour déterminer un phénomène physique, il fallait imposer, en plus de l'équation aux dérivées partielles, des conditions aux frontières (CF). Très souvent, ces conditions peuvent s'exprimer sous une des formes standards qui permettent traduire un problème physique particulier en un problème mathématique répertorié. En posant  $\Gamma$  la frontière du domaine d'espace, certaines conditions de modèles peuvent se mettre sous l'une des trois formes génériques suivantes :

- **Condition de Dirichlet**

La grandeur  $u$  considérée est supposée connue et fixée :

$$u = g \quad \text{en tout point de } \Gamma$$

où  $g$  est une fonction explicitement connue.

#### 4. Introduction

- **Condition de Neumann**

La dérivée spatiale de  $u$  dans une direction donnée est fixée :

$$u_{\mathbf{n}} = g \quad \text{en tout point de } \Gamma$$

où  $u_{\mathbf{n}}$  est la dérivation partielle dans la direction normale à la frontière  $\Gamma$ .

- **Condition mixte dite de Robin**

Cette condition dite de Robin (ou de Fourier ou de Newton suivant les références) est qualifiée de mixte car elle combine linéairement la fonction  $u$  comme dans Dirichlet et sa dérivée comme dans Neumann :

$$u_{\mathbf{n}} + h(u - g) = 0 \quad \text{en tout point de } \Gamma$$

où  $h$  est une constante.

Pour la suite de ce cours, nous cherchons systématiquement, dans la mesure du possible, à traduire les conditions aux frontières imposées par nos problèmes physique sous la forme de ces trois types de conditions.

### 4.3. Conditions initiales (CI)

Dans la majorité des cas en physique les conditions initiales (CI) imposées dans un problème donné concerne la grandeur  $u$  que l'on cherche à modéliser, ainsi que sa "vitesse". C'est à dire sa dérivée partielle par rapport au temps  $u_t$ .

Les conditions initiales (CI) pourront donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} u(t=0) = f \\ u_t(t=0) = g \end{cases} \quad (4.5)$$

Il est à noter qu'une condition initiale n'est rien d'autre qu'une condition aux frontières particulières dans la mesure où le temps n'est qu'une dimension particulière du domaine.

# 5. Classification des EDP

Une premier critère de classification pour une EDP est de donner son ordre, c'est à dire l'ordre maximal de dérivation apparaissant les dérivations partielles de l'équation. Dans bien des cas, l'ordre des EDP ne dépasse pas quelques unités.

## 5.1. Linéarité et non-linéarité

Une grande partie des phénomènes abordés dans la partie 1 s'inscrivent dans le cadre de la physique classique linéaire. La linéarité semble donc être aussi l'un des critères les plus évidents pour classifier une EDP.

### 5.1.1. Présentation habituelle pour les EDP du premier et second ordre)

Pour un système de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , une EDP linéaire du premier ordre dont l'inconnue est la fonction  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est souvent présentée sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{x_i} = h(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.1)$$

où  $p_i$  et  $h$  sont des fonctions de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , et  $u_{x_i}$  la dérivé partielle de la fonction  $u$  par rapport à la variable  $x_i$ .

De même, au deuxième ordre, les équations font intervenir des dérivés partielles d'ordre 2,  $u_{x_i x_j}$ . L'expression générale s'écrit couramment sous la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n q_{i,j}(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{x_i x_j} \\ & + \sum_{i=1}^n p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{x_i} = h(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (5.2)$$

où  $q_{i,j}$  sont également des fonctions de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Il est à noter que, dans beaucoup des cas de modélisation physique rencontrés ultérieurement, la nature des milieux est homogène et indépendante du temps. Les fonctions  $q_{i,j}$  et  $p_i$  seront alors le plus souvent réduites à des fonctions constantes.

### 5.1.2. Espace linéaire ou espace affine ?

En réalité, la présentation précédente est trompeuse. Prenons par exemple,  $u_1(x, y)$  et  $u_2(x, y)$  solutions de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y) \quad (5.3)$$

alors la fonction  $u_l(x, y) = \lambda_1 \cdot u_1(x, y) + \lambda_2 \cdot u_2(x, y)$  sera alors solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\lambda_1 + \lambda_2) h(x, y) \quad (5.4)$$

## 5. Classification des EDP

On ne peut donc pas réellement parler de linéarité stricto sensu.

En revanche, si  $u_0(x, y)$  est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y) \quad (5.5)$$

et si  $u_1(x, y)$  et  $u_2(x, y)$  solutions de l'équation homogène :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5.6)$$

alors la fonction  $u_l(x, y) = \lambda_1 \cdot u_1(x, y) + \lambda_2 \cdot u_2(x, y)$  sera aussi solution de l'équation homogène. Par ailleurs, la fonction  $u_{l0}(x, y) = \lambda_1 \cdot u_1(x, y) + \lambda_2 \cdot u_2(x, y) + u_0(x, y)$  sera elle solution de l'équation avec second membre. Finalement, il apparaît que nous sommes dans le cadre d'un espace de solution affine plutôt que linéaire.

De la même façon, lorsque nous considérons une EDP accompagnée de conditions aux frontières dites linéaires mais non homogènes, l'espace des fonctions solutions est également un espace affine.

**Ces remarques prennent toute leur importance dans les chapitres suivants (notamment dans la méthode de la séparation de variables).**

En pratique, dès que cela est possible, on met en évidence des solutions particulières simples et par changement de variables, on se ramène à des conditions aux frontières et à un second membre homogène.

## 5.2. Une classification standard

Les EDP linéaires d'ordre 2 à deux variables  $(x_1, x_2)$  et à coefficients réels peuvent s'écrire sous la forme :

$$A(x_1, x_2)u_{x_1 x_1} + 2B(x_1, x_2)u_{x_1 x_2} + C(x_1, x_2)u_{x_2 x_2} + D(x_1, x_2)u_{x_1} + F(x_1, x_2)u_{x_2} + G(x_1, x_2) = 0 \quad (5.7)$$

Il existe une classification standard qui détermine trois catégories. En effet l'EDP est dite :

- Hyperbolique si  $B^2 - AC > 0$
- Elliptique si  $B^2 - AC < 0$
- Parabolique si  $B^2 - AC = 0$

Ces catégories sont en général extrêmement pertinent dans la mesure où ces catégories traduisent souvent des comportements fondamentalement différents des solutions associées à chaque type d'EDP.

**Remarque : si  $A, B$  et  $C$  ne sont pas des fonctions constantes, l'EDP peut changer de nature selon le domaine d'étude.**

### 5.2.1. EDP à plus de deux variables

Actuellement, il n'existe pas de classification systématique pertinente de toutes les EDP lorsque le nombre de variable est supérieur à 2. Par exemple :

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} - u_{tt} = 0 \quad (5.8)$$

est une EDP non classifiée.

En revanche, il existe en dimensions supérieures des EDP particulières qu'il est possible de classifier et qui se comportent d'une manière similaire aux EDP à deux variables. Ainsi, si l'EDP est de la forme :

$$A(x, y, z, t) [u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}] + C(x, y, z, t) u_{tt} + D(x, y, z, t) u_t = 0 \quad (5.9)$$

et  $C(x, y, z, t)$  ou  $D(x, y, z, t)$  non nulle, alors l'EDP sera dite :

- Hyperbolique si  $-AC > 0$
- Elliptique si  $-AC < 0$
- Parabolique si  $AC = 0$

### 5.2.2. Lien avec les coniques

Si l'utilisation des termes hyperbolique, elliptique et parabolique font clairement aux coniques, il ne faudrait pas croire que cela ait un quelconque lien avec la forme géométrique des solutions des EDP.

#### Rappels sur les coniques

Les coniques sont les courbes solution de l'équation algébrique du second degré

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$

Lorsque l'on cherche à étudier le comportement asymptotique des coniques (branches infinies) on peut ne retenir que les termes de plus haut degré

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2 = 0$$

En notant  $m = y/x$ , on a

$$c \cdot m^2 + 2b \cdot m + a = 0$$

- Si  $\Delta > 0$  : Nous avons deux directions asymptotiques réelles et distinctes. Nous sommes en présence d'une hyperbole.
- Si  $\Delta < 0$  : Les deux directions asymptotiques sont complexes. Nous sommes en présence d'une ellipse.
- Si  $\Delta = 0$  : Les deux directions asymptotiques sont réelles, mais confondues. Nous sommes en présence d'une parabole.

En remarque : Pour une hyperbole telle que  $m_1$  et  $m_2$  soient les deux directions réelles, on peut avoir l'identité

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y = c(y - m_1 \cdot x + n_1) \cdot (y - m_2 \cdot x + n_2)$$

en posant

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c} \\ n_1 + n_2 &= \frac{e}{c} \\ n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1 &= -\frac{d}{c} \end{aligned}$$

## 5. Classification des EDP

### Changement de variables

$$\begin{cases} x = \alpha \cdot X + \gamma \cdot Y \\ y = \beta \cdot X + \delta \cdot Y \end{cases}$$

sachant que  $\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \neq 0$ .

### Première forme canonique.

$$A \cdot X^2 + 2B \cdot XY + C \cdot Y^2 + F = 0$$

Avec

$$\begin{cases} A = a \cdot \alpha^2 + 2b \cdot \alpha\beta + c \cdot \beta^2 \\ B = a \cdot \alpha\gamma + b \cdot (\alpha\delta + \gamma\beta) + c \cdot \beta\delta \\ C = a \cdot \gamma^2 + 2b \cdot \gamma\delta + c \cdot \delta^2 \end{cases}$$

et

$$F = (d \cdot \alpha + e \cdot \beta) \cdot X + (d \cdot \gamma + e \cdot \delta) \cdot Y + f$$

On notera que  $B^2 - AC = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \cdot (b^2 - ac)$ .

En conservant un repère orthonormal, on peut écrire

$$\alpha = \cos \theta \quad \gamma = \sin \theta$$

$$\beta = -\sin \theta \quad \delta = \cos \theta$$

On peut trouver  $\theta$  tel que  $B = 0$ . L'équation de la conique se mettra alors sous la forme

$$A \cdot X^2 + C \cdot Y^2 + F = 0$$

$$-AC = (b^2 - ac)$$

### Deuxième forme canonique

En résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{A}{\alpha^2} = a + 2b \cdot p_1 + c \cdot p_1^2 = 0 \\ \frac{B}{\alpha\gamma} = a + b \cdot (p_1 + p_2) + c \cdot p_1 p_2 \neq 0 \\ \frac{C}{\gamma^2} = a + 2b \cdot p_2 + c \cdot p_2^2 = 0 \end{cases}$$

où  $p_1 = \frac{\beta}{\alpha}$  et  $p_2 = \frac{\delta}{\gamma}$ . On obtient la deuxième forme canonique

$$B \cdot XY + F = 0$$

**Attention !!!** Cette forme canonique est uniquement possible pour les hyperboles.

### Analogie avec les EDP linéaires d'ordre 2

Soit une EDP du type :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [\dots] = 0$$

Tout comme les coniques, il est possible de se ramener à une forme canonique par changement de variable.

**Le changement de variable**

$$X = X(x, y) \quad Y = Y(x, y)$$

On note

$$\alpha = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \delta = \frac{\partial Y}{\partial y}$$

Nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial X} + \gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial X} + \delta \cdot \frac{\partial u}{\partial Y} \end{cases}$$

L'EDP devient :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + [\dots] = 0$$

avec

$$\begin{cases} A = a \cdot \alpha^2 + 2b \cdot \alpha\beta + c \cdot \beta^2 \\ B = a \cdot \alpha\gamma + b \cdot (\alpha\delta + \gamma\beta) + c \cdot \beta\delta \\ C = a \cdot \gamma^2 + 2b \cdot \gamma\delta + c \cdot \delta^2 \end{cases}$$

La classification des EDP (hyperbolique, parabolique et elliptique) n'est donc qu'une analogie avec les changements de variable des coniques.

**Première forme canonique**

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + [\dots] = 0$$

**Deuxième forme canonique**

$$2B \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + [\dots] = 0$$

pour les EDP hyperboliques.

**5.2.3. Exercices d'application****Exercice 5.1 Classification des EDP classiques**

Faites la classification académique de l'équation de propagation de la chaleur, de l'équation des ondes et de l'équation de Schrödinger.

**Exercice 5.2 EDP d'Euler-Tricomi**

Dans le cadre de la mécanique des fluides, l'étude des écoulements permanents dans lesquels se réalise le passage entre le régime sub- et supersonique, conduit à établir l'équation différentielle dite d'Euler-Tricomi (cf. Physique théorique : Mécanique des fluides (Tome 6), L. Landau et E. Lifchitz) :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{5.10}$$

en sachant que  $\eta = (2\alpha_*)^{1/3} (v - c) / c$  où  $\alpha_*$  est un terme positif,  $v$  la vitesse d'écoulement du fluide et  $c$  la vitesse de propagation du son dans le fluide. Préciser en fonction de nombre de Mach  $v/c$ , la nature de l'équation d'EULER-TRICOMI.



# 6. EDP du premier ordre

Une approche très classique pour traiter les équations linéaires du premier ordre est d'appliquer la méthode des caractéristiques.

## 6.1. Méthode des caractéristiques

La méthode dite des "caractéristiques" a été développée au milieu du dix-neuvième siècle par Hamilton dans le cadre de la propagation des rayons lumineux.

La méthode des caractéristiques peut s'appliquer à des espaces de dimension quelconque. Toutefois pour ne pas surcharger les écritures et faciliter la compréhension de la méthode, nous nous limiterons à la présentation de la méthode dans le cas d'un espace à deux dimensions.

### 6.1.1. Cas linéaire

Dans un espace à deux dimensions, la forme générale d'une EDP linéaire du premier ordre peut s'écrire :

$$A(x, y) u_x + B(x, y) u_y = C(x, y) u + D(x, y) \quad (6.1)$$

Soit  $u$  est solution de cette EDP. Il est alors de représenter graphiquement cette solution dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  par une surface en posant  $z = u(x, y)$ . Les points de cette surface sont définis par l'équation  $u(x, y) - z = 0 = \text{constante}$ . Comme la surface représente un isoniveau pour la fonction  $u(x, y) - z$ , le gradient de cette fonction nous donnera l'expression d'un vecteur normal en chacun des points de la courbe. C'est ainsi que les vecteurs  $\mathbf{V}_\perp$  de la forme  $(u_x, u_y, -1) = \nabla(u(x, y) - z)$  constituent un champ de vecteurs normaux à la surface, voir figure 6.1.

Notons maintenant  $\mathbf{V}_\parallel$  les vecteurs de la forme  $(A(x, y), B(x, y), C(x, y) \cdot u(x, y) + D(x, y))$ . Si l'on fait le produit scalaire du vecteur  $\mathbf{V}_\perp$  avec le vecteur  $\mathbf{V}_\parallel$ , on retrouve l'équation (6.1) et on a  $\mathbf{V}_\perp \cdot \mathbf{V}_\parallel = 0$ . Le vecteur  $\mathbf{V}_\parallel$  est donc perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{V}_\perp$ . Par conséquent, en chaque point de la surface, le vecteur  $\mathbf{V}_\parallel$  appartient à l'espace vectoriel tangent à la surface, voir figure 6.2.

Donc les vecteurs  $\mathbf{V}_\parallel$  constituent un champ de vecteurs tangents à la surface, voir figure 6.3.

Si les vecteurs  $\mathbf{V}_\parallel$  constitue un champ de vecteur tangent continûment dérivable (cela est facile à vérifier en étudiant les fonctions  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$  et  $D(x, y)$ ), alors on peut démontrer que ce champ de vecteur s'interprète comme les vecteurs dérivés en chacun des points de la surface d'une famille de courbes paramétrées que l'on nommera **courbes intégrales** ou **courbes caractéristiques**, voir la démonstration dans [Tay96] et voir la figure 6.4 pour une illustration graphique.

6. EDP du premier ordre

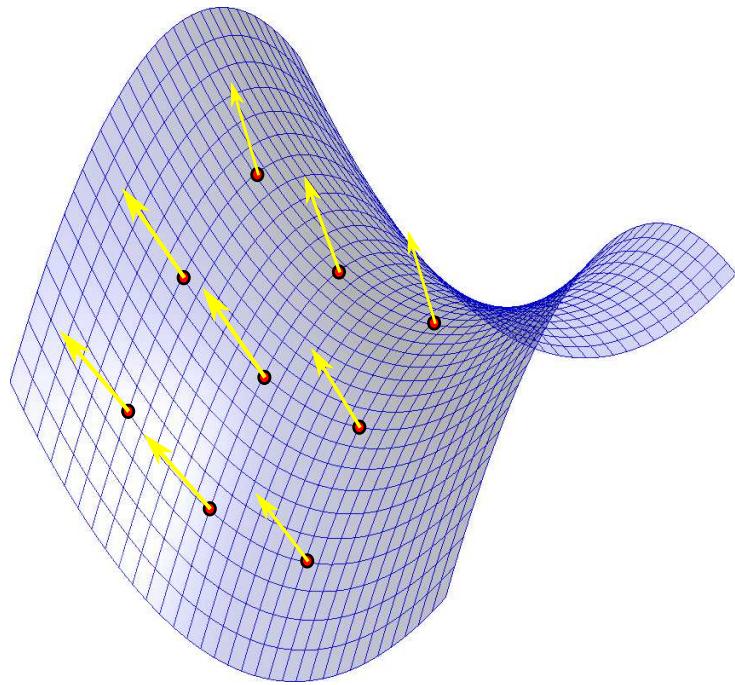


FIGURE 6.1. – Schéma représentant le champ de vecteurs normaux à la surface solution de l'EDP.

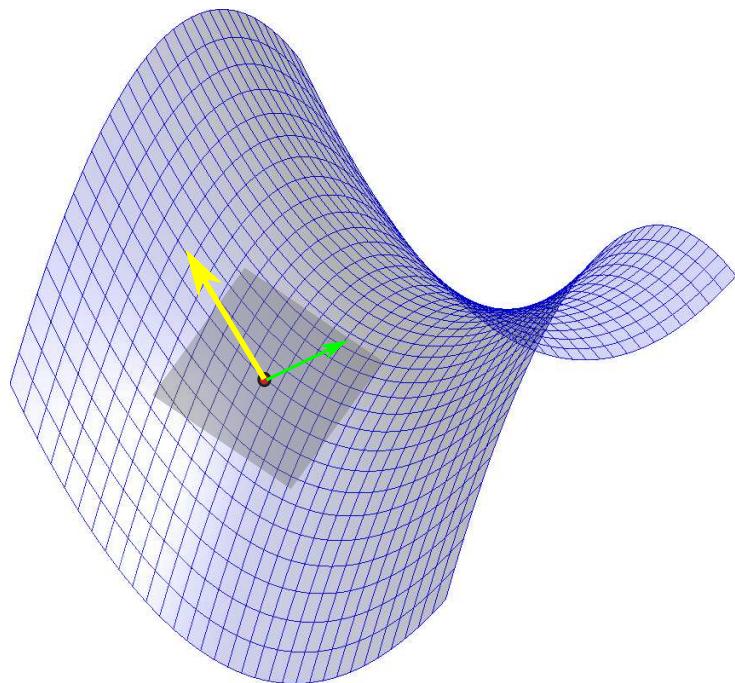


FIGURE 6.2. – Schéma représentant le vecteur tangent  $\mathbf{V}_\parallel$  en un point de la surface.

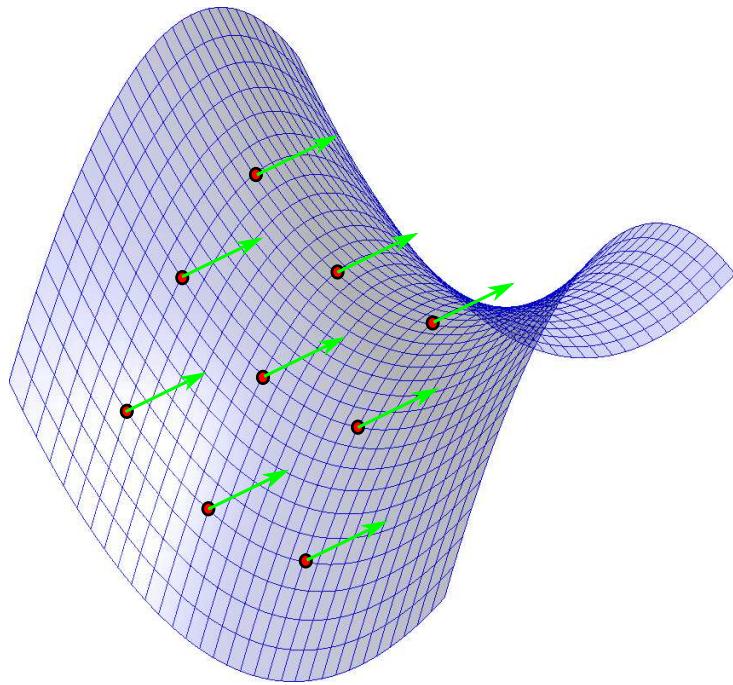


FIGURE 6.3. – Schéma représentant le champ de vecteurs tangent à la surface solution de l'EDP.

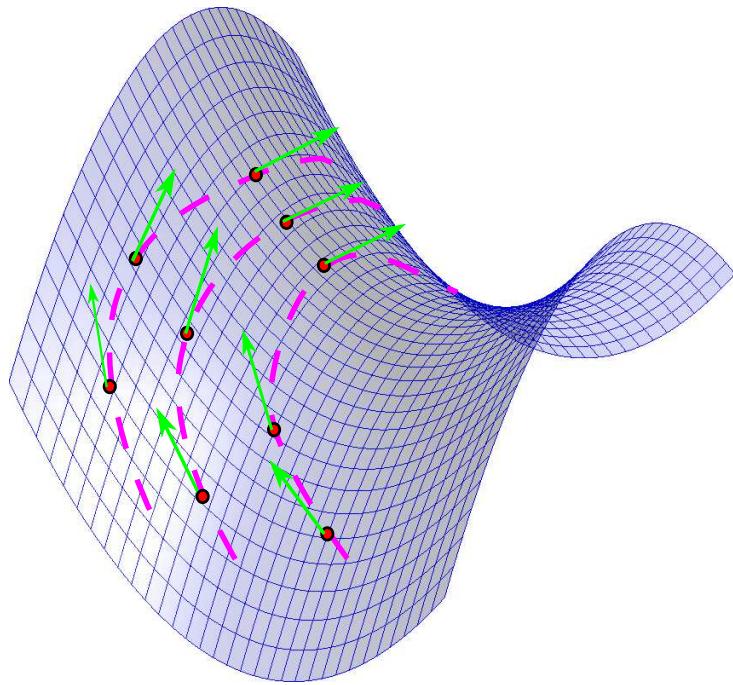


FIGURE 6.4. – Schéma représentant les courbes intégrales du champ de vecteurs tangents  $\mathbf{V}_-$ .

## 6. EDP du premier ordre

Concrètement, pour résoudre notre problème, nous allons écrire qu'en tout point de la courbe le vecteur tangent  $\mathbf{V}_\perp$  est le vecteur dérivé d'une courbe paramétrée par rapport à une variable notée  $s$ . Un point de cette courbe paramétrée s'écrira  $(x(s), y(s), z(s))$ . Comme la courbe appartient à la surface, nous avons  $z(s) = u(x(s), y(s)) = u(s)$ . Dire que  $\mathbf{V}_\perp$  est le vecteur dérivé de la courbe paramétrée se traduit par le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= A(x(s), y(s)) \\ \frac{dy}{ds} &= B(x(s), y(s)) \\ \frac{du}{ds} &= C(x(s), y(s)) \cdot u(s) + D(x(s), y(s))\end{aligned}\tag{6.2}$$

Finalement, nous avons transformé notre EDP en un système d'EDO à trois équations.

**Remarque 6.1** Il est important de souligner que la surface est un espace de dimension deux qui ne peut pas être paramétrisé par le seul paramètre  $s$ . Il faut donc introduire un second paramètre noté  $p$ . Lors de la résolution des EDO précédentes, les “constantes” d'intégration ne dépendront effectivement pas de  $s$  mais seront en réalité des fonctions de  $p$ .

Donc en supposant que nous soyons en mesure de résoudre les 3 EDO, nous obtenons une famille de courbes solution déterminées à un paramètre  $p$ . Nous obtenons une expression générique des courbes intégrales (ou courbes caractéristiques) :  $(x(s, p), y(s, p), u(s, p))$ .

La détermination des fonctions de  $p$  dépendra des conditions aux frontières du problème physique, qui permettront de ne retenir qu'une seule courbe intégrale solution du problème physique. Par exemple, on peut imposer des conditions initiales (condition de Dirichlet) en  $s = 0$  :

$$\begin{aligned}x(0, p) &= x_0 \\ y(0, p) &= y_0 \\ u(0, p) &= z_0\end{aligned}\tag{6.3}$$

### 6.1.2. Généralisation au cas quasi-linéaire

Même si ce cours porte uniquement sur les EDP linéaires, la mise en œuvre de la méthode des caractéristiques peut facilement s'adapter au cas quasi-linéaire. C'est à dire de la forme :

$$A(x, y, u) u_x + B(x, y, u) u_y = C(x, y, u)\tag{6.4}$$

Le système d'EDO s'écrira alors :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= A(x(s), y(s), u(s)) \\ \frac{dy}{ds} &= B(x(s), y(s), u(s)) \\ \frac{du}{ds} &= C(x, y, u(s))\end{aligned}\tag{6.5}$$

La résolution du problème est alors identique au cas précédent.

### 6.1.3. Existence et unicité de la solution

Considérons une EDP quasi-linéaire sur laquelle on imposerait les conditions initiales :

$$\begin{aligned}x(0, p) &= x_0(p) \\ y(0, p) &= y_0(p) \\ u(0, p) &= u_0(p)\end{aligned}\tag{6.6}$$

On notera  $\Gamma(p)$  la courbe initiale des points  $(x_0(p), y_0(p), u_0(p))$ .

**Définition 6.1 (Condition de transversalité)** On dit que l'équation et la courbe initiale vérifie la condition de transversalité si la courbe caractéristique, au point initial, et la courbe  $\Gamma(p)$  ne s'intersecte pas tangentiellement. C'est à dire :

$$x_s(0, p)y_p(p) - y_s(0, p)x_p(p) \neq 0 \quad (6.7)$$

**Théorème 6.1** On admettra que les coefficients de l'EDP quasi-linéaire sont réguliers (localement lipschitziens) par rapport à leurs différentes variables dans un voisinage de la courbe initiale. On admettra également que la condition de transversalité est vérifiée en tout point d'un intervalle  $I$  de la courbe initiale. Alors le problème admet une et une seule solution sur l'intervalle  $I$ .

#### 6.1.4. Ordres supérieurs

La méthode des caractéristiques peut également être adaptée aux EDP d'ordre supérieur. On appellera partie principale d'une EDP la partie de l'équation où l'on ne retient que les dérivées d'ordre maximal. Par exemple pour une EDP linéaire d'ordre 2 à deux variables  $(x_1, x_2)$  de la forme :

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2)u_{x_1 x_1} + 2B(x_1, x_2)u_{x_1 x_2} + C(x_1, x_2)u_{x_2 x_2} \\ + D(x_1, x_2)u_{x_1} + F(x_1, x_2)u_{x_2} + G(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

la partie principale sera l'équation :

$$A(x_1, x_2)u_{x_1 x_1} + 2B(x_1, x_2)u_{x_1 x_2} + C(x_1, x_2)u_{x_2 x_2} = 0 \quad (6.9)$$

Un vecteur  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  est dit caractéristique si ses composantes, en remplaçant les dérivées partielles, vérifient l'équation issue de la partie principale. Par exemple, en dimension 2, un vecteur  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  sera caractéristique pour une EDP linéaire d'ordre 2 si et seulement si ses composantes vérifient l'équation :

$$A(x_1, x_2)\xi_1^2 + 2B(x_1, x_2)\xi_1\xi_2 + C(x_1, x_2)\xi_2^2 = 0 \quad (6.10)$$

On parlera alors de courbes caractéristiques en dimension 2 (ou de surfaces caractéristiques en dimension supérieure) si le vecteur caractéristique  $\xi$  est normal à cette courbe (ou cette surface).



# 7. Théorie de Sturm Liouville

La théorie de Sturm Liouville s'applique avant aux équations différentielles ordinaires (EDO) et ne devrait a priori pas faire partie de ce cours. Nous verrons dans le chapitre suivant que cette théorie s'avère néanmoins très utile pour les EDP.

## 7.1. Quelques définitions préliminaires

La notion de base dans un espace vectoriel de dimension finie est une notion qui ne pose en général pas de problème pour un étudiant ayant suivi les premières années d'un cycle de formation scientifique dans l'enseignement supérieur. Dans le cadre des EDO et des EDP, il est fréquent de considérer des espaces fonctionnelles correspondant à des espaces vectoriels de dimension infinie. La notion de base doit alors être précisée.

**Définition 7.1** Un espace vectoriel  $\mathcal{E}$  est dit **préhilbertien** s'il est muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Cet espace est dit **hilbertien** s'il est en plus un espace de Banach, c'est à dire complet.

On notera par la suite  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel hilbertien quelconque. Par ailleurs, dans la mesure où cela ne soulève pas d'ambiguïté particulière, on notera  $\|\cdot\|$  la norme qui découle du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Définition 7.2** Soit  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments linéairement indépendants de  $\mathcal{E}$ . (on parle aussi de système de  $\mathcal{E}$ ).

- Le système  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **orthogonal** si et seulement si pour tout couple d'entiers  $(n, p)$  disctincts  $\langle \phi_n, \phi_p \rangle = 0$ .
- Le système  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **orthonormal** si et seulement si il est orthogonal et si, pour tout entier  $n$ ,  $\|\phi_n\| = 1$ .

**Définition 7.3** Soit  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système orthogonal de  $\mathcal{E}$ . On dit que  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un **système total** de  $\mathcal{E}$  si pour tout élément de  $f \in \mathcal{E}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$$

où  $f_n$  est la projection de  $f$  sur le sous espace vectoriel  $\mathcal{E}_n$  généré par les éléments  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ . Si de plus, le système est orthonormal, on dit que  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **base hilbertienne** de  $\mathcal{E}$ .

On rappellera que la projection  $f_n$  de  $f$  sur  $\mathcal{E}_n$  est simplement la combinaison linéaire :

$$f_n = \sum_{i=1}^n c_i(f) \cdot \phi_i \tag{7.1}$$

où les coefficients  $c_i(f)$  sont donnés par :

$$c_i(f) = \frac{\langle f, \phi_i \rangle}{\|\phi_i\|} \tag{7.2}$$

## 7. Théorie de Sturm Liouville

**Théorème 7.1** Soit  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système orthogonal total de  $\mathcal{E}$ . Alors, pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{E}$ , on a :

### Égalité de Parseval

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)^2 \cdot \|\phi_n\|^2 = \|f\|^2$$

Si de plus,  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne,

### Égalité de Bessel

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)^2 = \|f\|^2$$

Enfin, pour tout système total  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{E}$ , la série  $\sum_{i=1}^n c_n(f) \cdot \phi_n$  converge en moyenne quadratique vers  $f$ , c'est à dire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n c_i(f) \cdot \phi_i - f \right\| = 0$$

On dit que  $\sum_{i=1}^n c_i(f) \cdot \phi_i$  est une approximation de  $f$  au sens des moindres carrés.

Enfin, dans le contexte d'un espace  $\mathcal{E}$  de dimension infinie, il est clair que l'intérêt d'utiliser des matrices est considérablement limité. Néanmoins, pour un opérateur linéaire (par exemple un opérateur de dérivation  $A : f \rightarrow 5f + 3f' + 14f'''$ ), on peut néanmoins conserver un certaines notions classiques en algèbre matricielle comme les valeurs et vecteur propre.

**Définition 7.4** Soit  $A$  un opérateur différentiel linéaire défini sur un sous-espace vectoriel hilbertien  $\mathcal{E}$ . S'il existe une fonction  $f \in \mathcal{E}$  non nulle et un complexe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $A(f) = \lambda f$ , on dit que  $f$  est un **vecteur propre** (une **fonction propre** pour un espace de fonction) de  $A$  et  $\lambda$  une **valeur propre** de  $A$ .

Cette définition est parfaitement équivalentes à celle que l'on connaît pour les espaces vectoriels de dimension finie.

## 7.2. Problèmes de Sturm-Liouville

Les problèmes de Sturm-Liouville concernent une EDO sur un intervalle borné pour laquelle on impose des conditions aux frontières particulières.

### 7.2.1. Problème régulier de Sturm-Liouville

Soient sur un intervalle  $[a, b]$  trois fonctions continues  $P$ ,  $Q$  et  $S$  vérifiant  $P > 0$ ,  $S > 0$  et  $P$  de classe  $C^1$ . Soit l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $f$  :

$$\frac{d}{dx} [P(x) f'] + Q(x) \cdot f + \lambda S(x) \cdot f = 0 \quad (7.3)$$

Soient enfin les conditions aux frontières suivantes :

$$\begin{cases} a_0 \cdot f(a) + a_1 \cdot f'(a) = 0 & |a_0| + |a_1| > 0 \\ b_0 \cdot f(b) + b_1 \cdot f'(b) = 0 & |b_0| + |b_1| > 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

La recherche des nombres  $\lambda$  et des fonctions  $f$  non identiquement nulles solution de l'équation différentielle et vérifiant les conditions aux limites s'appelle un "problème régulier de Sturm-Liouville".

Un résultat important concernant cette théorie est le suivant :

**Théorème 7.2** Dans le cadre du problème de Sturm-Liouville :

- Il existe une famille dénombrable de valeurs propres réelles simples  $\lambda_n$  et de fonctions propres  $f_n$  associées. On peut ordonner les valeurs propres tel que  $|\lambda_0| < |\lambda_1| < \dots < |\lambda_n| < \dots$ , et on aura de plus que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = +\infty$ .
- Les fonctions propres  $f_n$  forment une suite de fonctions orthogonales au sens du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b S(x) \cdot f(x) \cdot g(x) \, dx$$

Par ailleurs si  $f \in \mathcal{H}$  où  $\mathcal{H} = \{f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) \mid f \text{ bornée sur } [a, b]\}$  alors il existe une série  $\sum a_n \cdot f_n$  convergeant vers  $f$  au sens de la norme associée au produit scalaire donné ici.

Autrement dit les fonctions propres  $f_n$  associées au paramètres  $\lambda_n$  constituent un système orthogonal total pour l'espace des fonctions  $C^2$  bornées sur  $[a, b]$ , ce qui correspond à nombreux contextes justifiables par des arguments physiques. De plus, on peut facilement normaliser ce système en considérant la suite des fonctions  $\tilde{f}_n = f_n / \|f_n\|$  et l'on obtiendra alors une base hilbertienne.

### 7.2.2. Problème périodique de Sturm-Liouville

Le problème de Sturm-Liouville existe aussi sous une forme périodique. Un problème régulier de Sturm-Liouville devient un problème périodique de Sturm-Liouville, si on impose que  $P(a) = P(b)$ ,  $Q(a) = Q(b)$ ,  $S(a) = S(b)$  et si les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases} \quad (7.5)$$

**Théorème 7.3** Le théorème (7.2) reste vrai à la condition préciser que  $\lambda_0$  est une valeur propre simple mais que les autres peuvent être doubles (c'est à dire associée à deux fonctions propres). La fonction  $f$  est alors clairement une fonction périodique.

## 7.3. Une application : les séries de Fourier

Les séries de Fourier peuvent effectivement être considérées comme une application particulière du problème de Sturm-Liouville

Soit l'EDO suivante sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  :

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (7.6)$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} f(0) = f(2\pi) \\ f'(0) = f'(2\pi) \end{cases} \quad (7.7)$$

Cette EDO rentre parfaitement dans le champ d'application du problème Sturm-Liouville périodique avec  $P(x) = 1$ ,  $Q(x) = 0$ ,  $S(x) = 1$ ,  $a = 0$  et  $b = 2\pi$ . Le produit scalaire correspondant au théorème 7.3 est :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx \quad (7.8)$$

## 7. Théorie de Sturm Liouville

ce qui correspond dans ce cas au produit scalaire classique des fonctions sur un intervalle.

Le théorème 7.3, nous affirme que les solutions de ce problème constitue un système orthogonal total. Effectivement, nous savons que les fonctions  $f_n = 1, \cos(1 \cdot x), \sin(1 \cdot x), \dots, \cos(n \cdot x), \sin(n \cdot x)$  sont bien les fonctions propres du problème associées aux valeurs propres  $\lambda_n = 0, 1, 2, \dots, n$ . On notera que ces valeurs propres sont doubles ( $\cos(n \cdot x)$  et  $\sin(n \cdot x)$ ) sauf la première  $o$  qui a pour fonction propre la fonction constante.

Nous savons d'après la théorie des série de Fourier que toute fonction  $f C^2$  sur  $[0, 2\pi]$  peut s'écrire sous la forme :

$$f = a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x) \quad (7.9)$$

avec

$$a_n = \langle f, \cos(n \cdot x) \rangle / \|\cos(n \cdot x)\|^2 \quad \text{et} \quad b_n = \langle f, \sin(n \cdot x) \rangle / \|\sin(n \cdot x)\|^2 \quad (7.10)$$

Ceci correspond tout à fait à l'expression du coefficient  $c_n(f)$  donnée à l'équation 7.2. De même, on peut appliquer les égalité de Parseval pour retrouver un résultat classique dans la théorie des série de Fourier. **Il est important de souligner le fait que la fonction  $f$  n'a pas besoin d'être une solution de notre EDO.** Au final, nous pouvons retrouver la quasi totalité des résultats sur les série de Fourier par application du théorème de Sturm-Liouville. Le théorème de Sturm-Liouville peut donc être vu comme une généralisation des séries de Fourier.

**A partir des problèmes de Sturm-Liouville régulier et périodique, nous pouvons construire une infinité de séries ayant des propriétés ressemblant fortement à celles des séries de Fourier.**

# 8. Séparation de variables

## 8.1. Approche intuitive

Les EDP linéaires que nous avons traitées peuvent s'écrire dans les cas homogènes sous la forme :

$$\mathcal{L}u = 0 \quad (8.1)$$

où  $\mathcal{L}$  un opérateur différentiel linéaire général qui vaut  $\Delta - 1/c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  dans le cas de l'équation des ondes et  $a\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$  dans le cas de la propagation de la chaleur par conduction. Le terme  $u$  indiquant une grandeur scalaire (température, pression sonore,...) ou vectorielle (champ électrique, champ magnétique,...). L'opérateur  $\mathcal{L}$  peut s'écrire à partir des dérivées partielles des variables  $x, y, z$  et  $t$ . Enfin, l'équation de propagation s'accompagne de conditions aux limites déterminées partiellement ou complètement par le problème physique. Comment trouver la solution  $u$  vérifiant à la fois l'équation de propagation et les conditions aux limites ?

Une idée possible est de chercher des solutions particulières en appliquant une technique de séparation des variables. C'est à dire, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$u(x, y, z, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (8.2)$$

produit de quatre fonctions  $X, Y, Z$  et  $T$  ne dépendant respectivement que de la variable  $x, y, z$  ou  $t$ . Cette technique de séparation de variables peut bien évidemment s'appliquer à d'autres systèmes de coordonnées. Par exemple, en coordonnées cylindriques, on peut chercher des solutions particulières sous la forme :

$$u(r, \theta, z, t) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (8.3)$$

ou  $R$  et  $\Theta$  sont des fonctions ne dépendant respectivement que de  $r$  et de  $\theta$ .

Appliquons, par exemple, cette technique à l'équation de propagation de la chaleur à une 1 dimension spatiale  $x$  :

$$a \cdot u_{xx} = u_t \quad (8.4)$$

En supposant que  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , nous obtenons :

$$a \cdot X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T'(t) \quad (8.5)$$

On admettra également que  $X(x) \neq 0$  et  $T(t) \neq 0$ , d'où :

$$a \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (8.6)$$

**Le membre de gauche de cette égalité est une fonction qui ne dépend que de la variable  $x$ , tandis que le membre de droite est une fonction qui ne dépend que de la variable  $t$ . Pour que cette égalité soit vérifiée quelque soit  $x$  et quelque soit  $t$ , il faut que les deux membres soient des fonctions constantes.** Cette remarque constitue l'un des pivots de la technique de séparation de variables.

## 8. Séparation de variables

Cette remarque permet en effet de décomposer l'équation aux dérivées partielles en un système de deux équations différentielles ordinaires :

$$a \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (8.7a)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad (8.7b)$$

$\lambda$  étant un paramètre a priori quelconque. Soit  $X_\lambda$  et  $T_\lambda$  les solutions générales de ces deux équations différentielles ordinaires. En posant  $u_\lambda = X_\lambda \cdot T_\lambda$ , on obtient une solution particulière de l'EDP homogène qui dépend d'un paramètre  $\lambda$ .

Le plus souvent, le choix du paramètre  $\lambda$  est restreint. Par exemple des conditions aux frontières peuvent interdire certaines valeurs de  $\lambda$ . On peut ainsi poser  $I_\lambda$  la famille des valeurs possibles pour ce paramètre.

On suppose que les EDP et les conditions aux frontières sont linéaires. Dans ce cas, si  $u_{\lambda_1}$  et  $u_{\lambda_2}$  sont deux solutions particulières obtenues pour les valeurs du paramètre  $\lambda = \lambda_1$  et  $\lambda = \lambda_2$ . La combinaison linéaire  $c \cdot u_{\lambda_1} + d \cdot u_{\lambda_2}$ , avec  $c, d \in \mathbb{R}$  ou  $c, d \in \mathbb{C}$  suivant le cas, est également une solution de l'EDP. On peut donc espérer que la solution générale du problème puisse s'écrire sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{\lambda_i \in I_\lambda} c_i u_{\lambda_i}(x, t) \quad (8.8)$$

Apparemment le problème semble finalement résolu, si nous arrivons à déterminer les solutions particulières  $X_{\lambda_i}$  et  $T_{\lambda_i}$ . C'est à dire, si nous savons résoudre toutes les équations différentielles ordinaires de notre système en fonction du paramètres  $\lambda$ .

Cette présentation assez intuitive du problème soulève plusieurs questions :

- **L'expression (8.8) décrit-elle toutes les solutions possibles ?**
- **Quelle est la nature de la famille  $I_\lambda$  finie, dénombrable voir continue ?** Si  $I_\lambda$  est continue, le signe  $\sum$  traduit en réalité une sommation intégrale.

## 8.2. La méthode de séparation des variables

La méthode séparation des variables s'appuie de façon fondamentale sur la linéarité. Il faut donc avant toute chose s'assurer que nous sommes bien dans ce contexte. Suite aux remarques faites dans la partie 5.1, nous admettrons dans un premier temps que l'EDP et les conditions aux frontières sont linéaires et homogènes.

### 8.2.1. La séparabilité

**Définition 8.1** Une EDP homogène à deux variables ( $x$  et  $t$ ) est dite séparable si en posant  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$  on trouve une famille de solutions de l'EDP  $u(x, t, \lambda)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda$  et si toute solution de l'EDP s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = \int_{I_\lambda} a(\lambda) u(x, y, \lambda) dy$$

où  $I_\lambda$  est l'espace des valeurs possibles pour  $\lambda$  (par exemple  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

**Définition 8.2** Un système de coordonées est dit séparable si une EDP exprimée dans ce système aboutit à une EDP séparable.

### 8.3. Application de la théorie de Sturm-Liouville

Il ne faudrait pas croire que toutes les EDP linéaires sont séparables. Par exemple, les coordonnées toroïdales ne sont pas séparables pour l'équation de Helmholtz homogène  $(\Delta + k^2) \cdot u = 0$ .

Le problème de la séparabilité d'une EDP est loin d'être une chose simple. Dans la littérature, on peut trouver des classes de famille d'EDP linéaires dont on sait qu'elles sont séparables. Par exemple, dans l'article [CL93], on trouve que les familles d'EDP suivantes sont séparables :

$$\begin{aligned} cxF_{xx} + cF_x &= ax^M F_{xtt} - arx^{M-1} F_{tt} + bx^M F_{xt} - brx^{M-1} F_t \\ bxF_{xxt} + cxF_{xx} + bF_{xt} + cF_x &= ax^M F_{xtt} - arx^{M-1} F \\ axF_{xxtt} + aF_{xtt} + cxF_x &= bx^M F_{xt} - brx^{M-1} F_t \\ axF_{xxtt} + aF_{xtt} + bxF_{xxt} + bF_{xt} &= cx^M F_x - crx^{M-1} F \\ bxF_{xxt} + bF_{xt} &= ax^M F_{xtt} - arx^{M-1} F_{tt} + cx^M F_x - crx^{M-1} F \\ axF_{xxtt} + aF_{xtt} &= bx^M F_{xt} + cx^M F_x - brx^{M-1} F_t - crx^{M-1} F \end{aligned}$$

Pour simplifier les choses, **on peut admettre la séparabilité des EDP linéaires les plus classiques dans les systèmes de coordonnées les plus courants (cartésien, cylindrique ou sphérique)**. Toutefois, il conviendra de rester extrêmement prudent dès que l'on sort de situation classiquement connues (par exemple lors qu'on utilise des coordonnées curvilignes).

## 8.3. Application de la théorie de Sturm-Liouville

Pour montrer l'intérêt de la théorie de Sturm-Liouville vis à vis de la séparation de variable, revenons à notre exemple de problème de diffusion de la chaleur traité dans la partie 8.1. On impose en plus que le problème est borné et qu'il peut se restreindre spatialement à l'intervalle  $x \in [a, b]$ . On impose également des conditions aux frontières homogènes du type :

$$\begin{cases} a_0 \cdot u(a, t) + a_1 \cdot u_x(a, t) = 0 & |a_0| + |a_1| > 0 \\ b_0 \cdot u(b, t) + b_1 \cdot u_x(b, t) = 0 & |b_0| + |b_1| > 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

### 8.3.1. Extraire une EDO

Nous allons maintenant considérer le problème d'EDO suivant

$$a \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (8.10a)$$

avec les conditions

$$\begin{cases} a_0 \cdot f(a) + a_1 \cdot f'(a) = 0 & |a_0| + |a_1| > 0 \\ b_0 \cdot f(b) + b_1 \cdot f'(b) = 0 & |b_0| + |b_1| > 0 \end{cases} \quad (8.10b)$$

Il est clair que cela correspond à un problème de Sturm-Liouville régulier. Les fonctions  $P = 1$ ,  $Q = 0$  et  $S = 1$  sont ici des fonctions constantes. Il est important de noter que l'EDO est extraite du système 8.4 des 2 EDO obtenues par le processus de séparation de variable. Par application du théorème de Sturm-Liouville, on obtient un système orthogonal total constitué des fonctions propres  $X_n$  associées aux valeurs propres  $\lambda_n$ .

## 8. Séparation de variables

### 8.3.2. Retour à l'EDP

Soit  $u(x, t)$  la solution générale de l'EDP que nous recherchons. À  $t = t_0$  fixé, la fonction  $u(x, t_0)$  est une fonction de la variable  $x$  et par des arguments physique ou mathématique, on peut justifier que la fonction  $u_{t_0} : x \rightarrow u(x, t_0)$  est une fonction  $C^2$  sur  $[a, b]$ . Nous sommes donc en droit de décomposer  $u_{t_0}$  sur la base des  $X_n$  :

$$u_{t_0}(x) = u(x, t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n_{t_0}} \cdot X_n(x) \quad (8.11)$$

On remarquera que nous n'avons pas besoin de supposer que la fonction  $u_{t_0}$  vérifie l'EDO du problème de Sturm-Liouville, ce qui n'est pas a priori assuré.

En faisant varier  $t_0$ , on a que :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) \cdot X_n(x) \quad (8.12)$$

La fonction  $u(x, t)$  vérifie l'équation de propagation (8.4). Donc par linéarité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) \cdot a \cdot X_n''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n(t) \cdot X_n(x) \quad (8.13)$$

Or  $\forall n, a \cdot X_n'' = \lambda_n \cdot X_n$ , d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) \cdot \lambda_n \cdot X_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n(t) \cdot X_n(x) \quad (8.14)$$

Comme  $X_n$  est une base de fonctions propres, on peut identifier les composantes et ainsi  $\forall n$  :

$$c_n(t) \cdot \lambda_n = c'_n(t) \quad (8.15)$$

Nous retrouvons ainsi la seconde EDO du système 8.4 des 2 EDO obtenues par le processus de séparation de variable. Nous avions noté  $T_n$  les solutions de cette équation différentielle, donc  $\forall n, c_n(t) = c_n \cdot T_n(t)$ . Finalement, nous pouvons affirmer que la solution générale peut se mettre sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{\lambda_n \in I_\lambda} c_n u_{\lambda_n}(x, t) \quad (8.16)$$

où  $I_\lambda$  est une famille dénombrable.

Si au lieu de faire apparaître un problème régulier on a un problème périodique de Sturm-Liouville, une démonstration équivalente peut être faite. Il faut simplement tenir compte du fait qu'il y a deux fonctions propres  $X_{n1}$  et  $X_{n2}$  pour chaque valeur propre  $\lambda_n$ , avec  $n > 0$ . La solution générale peut se mettre alors sous la forme :

$$u(x, t) = c_0 u_{\lambda_0}(x, t) + \sum_{n>0} c_{i1} u_{\lambda_n 1}(x, t) + c_{i2} F_{\lambda_n 2}(x, t) \quad (8.17)$$

où  $u_{\lambda_i 1} = T_n \cdot X_{n1}$  et  $u_{\lambda_i 2} = T_n \cdot X_{n2}$ .

**Remarque :** Nous n'avons pas eu besoin de supposer que la fonction  $u_{t_0}$  vérifie l'EDO issue de la séparation de variables. On pourrait alors se demander s'il n'est pas possible de décomposer la fonction  $u_{t_0}$  sur une base de fonctions quelconques de l'intervalle  $[a, b]$ . Cela est en effet parfaitement possible. Considérons un système orthogonal total de fonctions  $\tilde{X}_n$  sur l'intervalle  $[a, b]$  (par exemple

un système obtenu à partir d'un problème de Sturm-Liouville qui n'a rien à voir avec l'EDP). On pourrait écrire :

$$u_{t_0}(x) = u(x, t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{c}_{n t_0} \cdot \tilde{X}_n(x) \quad (8.18)$$

En faisant varier  $t_0$ , on pourrait aussi écrire :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{c}_n(t) \cdot \tilde{X}_n(x) \quad (8.19)$$

De la même façon, la fonction  $u(x, t)$  vérifie toujours l'équation de propagation (8.4). Donc par linéarité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{c}_n(t) \cdot a \cdot \tilde{X}_n''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{c}'_n(t) \cdot \tilde{X}_n(x) \quad (8.20)$$

En revanche, on ne pourra pas aller plus loin car on ne pourra rien dire de particulier sur les dérivées des fonctions  $\tilde{X}_n$ . Dans ce cas,  $\tilde{c}_n \neq \tilde{T}_n$  et on aura aucun moyen de calculer simplement les fonctions  $\tilde{c}_n$ . On converge en réalité vers  $u(x, t)$  par une série de fonctions qui ne vérifient pas l'EDP. Cette démarche est donc loin d'être recommandée a priori.

## 8.4. CF inhomogène

Nous avons donc une réponse complète dès lors que nous pouvons mettre en oeuvre les théorèmes de Sturm-Liouville. Nous venons de voir que cela était possible si l'EDP et les CF étaient homogène.

Dès lors que les CF ne sont plus homogène :

$$\begin{cases} \alpha_1 u_x(a, t) + \beta_1(a, t) = g_1(t) \\ \alpha_2 u_x(b, t) + \beta_2(b, t) = g_2(t) \end{cases} \quad (8.21)$$

le problème change de nature.

La résolution de ce problème peut passer par un changement de fonction  $u$  ou par l'utilisation du principe de Duhamel, comme par exemple dans le cas du problème de la barre isolée dont une extrémité est soumise à une température variable dans le temps (cf TDB.2).

## 8.5. Exemple de géométrie séparable

Choisissons de décrire un problème de propagation ondulatoire en utilisant un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le phénomène observé  $F(r, \theta, z)$  vérifie l'équation :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad (8.22)$$

En appliquant une technique de séparation de variables  $F(r, \theta, z, t) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \cdot T(t)$ , on obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{1}{r \cdot R(r)} \frac{d}{dr} (r \cdot R'(r)) = \lambda_1 \quad (8.23a)$$

$$\frac{1}{r^2 \cdot \Theta(\theta)} \Theta''(\theta) = \lambda_2 \quad (8.23b)$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda_3 \quad (8.23c)$$

## 8. Séparation de variables

$$-\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda_4 \quad (8.23d)$$

avec  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ .

On peut remarquer que la fonction  $\Theta(\theta)$  est nécessairement une fonction  $2\pi$  périodique. En effet, une rotation de  $2\pi$  de l'angle  $\theta$  dans le repère cylindrique ne modifie pas le problème physique. Donc, en toute généralité, l'équation différentielle concernant  $\Theta(\theta)$  est nécessairement un problème périodique de Sturm-Liouville.

## 8.6. Synthèse

En conclusion, résoudre un problème physique par une approche de séparation de variable ne doit pas se réduire à poser une écriture de la forme  $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$ . Toute approche de résolution d'un problème par une technique de séparation de variable doit s'appliquer en toute connaissance des théories qui encadrent cette approche :

- On doit vérifier la linéarité et l'homogénéité du problème posé EDP et CF.
- On doit tout d'abord vérifier que nous travaillons dans un système de coordonnées séparables. On notera que si les systèmes de coordonnées les plus courants (cartésiens, cylindriques ou sphériques) sont des géométries séparables, tous les systèmes de coordonnées ne le sont pas.
- On doit ensuite vérifier si, pour l'une ou plusieurs variables, nous sommes dans les conditions d'application du théorème de Sturm-Liouville.
- Dans les cas où aucune théorie ne peut certifier le succès d'une approche par séparation de variable, la démarche peut échouer. La "solution" que l'on obtient peut ne pas être solution du problème (il faut alors vérifier *a posteriori*). Pour une classe de problème donnée, on peut ne pas obtenir toutes les solutions possibles.

# 9. Initiation à la théorie modale

Pour traiter les EDP, nous avons vu l'application de méthodes mathématiques, principalement dans le cadre de l'analyse (transformées, séparation de variables,...) voir de la géométrie (symétrie), mais ces problèmes peuvent aussi prendre une dimension algébrique. C'est le point de vue que nous alors aborder en considérant la théorie modale.

Ce chapitre constitue, en réalité, une simple introduction qui aura pour objectif de montrer l'intérêt du formalisme modal. Pour cela, nous choisirons de nous restreindre à un exemple ne nécessitant pas une écriture trop lourde. Plus précisément, nous considérerons la diffusion d'ondes monochromatiques par des objets en dimension 2. Pour éviter une onde vectorielle (électromagnétisme) qui compliquerait l'écriture, nous choisirons également de travailler avec une onde scalaire (acoustique). Finalement, l'EDP décrivant le processus de propagation sera l'équation de HELMHOLTZ.

## 9.1. Positionnement du problème

Nous allons considérer un objet cylindrique (pas forcément de section circulaire) infiniment long qui est excité par une onde plane incidente perpendiculaire à l'axe du cylindre. Le problème physique est indépendant de tout déplacement suivant l'axe du cylindre et peut donc se ramener à sa vue en coupe et réaliser l'étude en dimension 2, voir la figure (9.1). On choisira pour centre du repère cartésien  $(x, y)$  et polaire  $(r, \theta)$  un point  $C$  intérieur au cylindre.

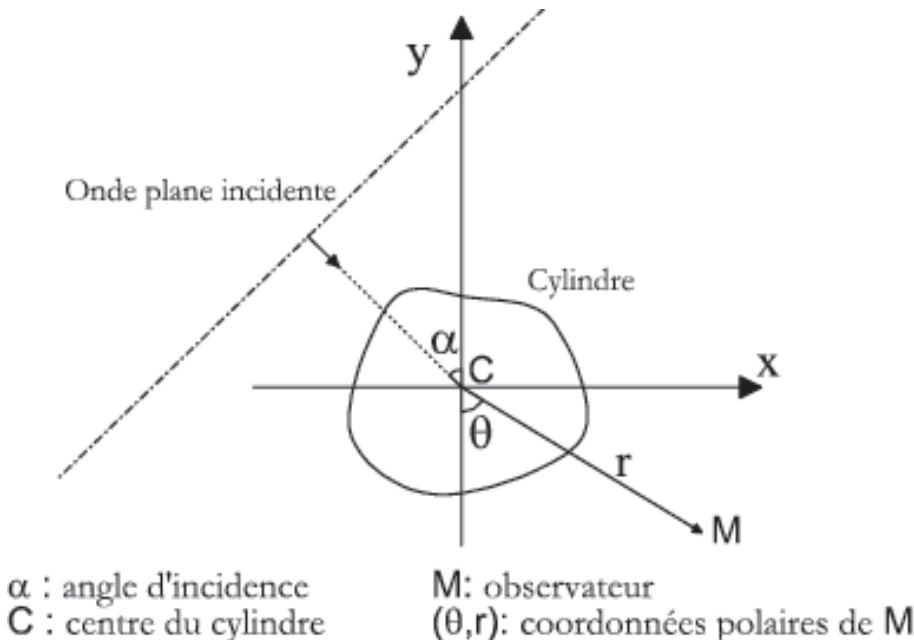


FIGURE 9.1. – Vue en coupe du problème de diffusion.

## 9. Initiation à la théorie modale

On se place dans le cadre monochromatique, le cas général s'en déduisant par transformée de FOURIER. L'onde de pression acoustique  $p$  vérifiera donc l'équation de HELMHOLTZ homogène :

$$(\Delta + k^2) \cdot p = 0 \quad (9.1)$$

car il n'y a aucune source interne acoustique au domaine d'étude, l'onde étant supposée générée par des sources rejetées à l'infini.

En coordonnées cylindriques, cela donne :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0 \quad (9.2)$$

et tenant compte de l'invariance par rapport à  $z$  :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + k^2 p = 0 \quad (9.3)$$

Nous avons vu que les coordonnées cylindriques étaient un système de coordonnées séparable. Donc, nous pouvons appliquer un procédé de séparation de variable en toute généralité. On cherchera les bases fonctionnelles des solutions en posant :

$$p(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \quad (9.4)$$

La fonction  $\Theta$  est clairement une fonction  $2\pi$  périodique et donc :

$$\Theta_n = a_n \cdot \cos n\theta + b_n \cdot \sin n\theta \quad (9.5)$$

ou alors :

$$\Theta_n = a_n \cdot e^{in\theta} + b_n \cdot e^{-in\theta} \quad (9.6)$$

De même, en se référant aux propriétés des fonctions de BESSEL, nous avons que :

$$R_n = c_n \cdot J_n(kr) + d_n \cdot Y_n(kr) \quad (9.7)$$

ou alors :

$$R_n = c_n \cdot H_n^{(1)}(kr) + d_n \cdot H_n^{(2)}(kr) \quad (9.8)$$

Il apparaît donc qu'une base de solution générale  $p$  est donnée par les fonctions :

$$J_n(kr) e^{in\theta} \quad Y_n(kr) e^{in\theta} \quad z \in \mathbb{Z} \quad (9.9)$$

De même :

$$H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \quad H_n^{(2)}(kr) e^{in\theta} \quad z \in \mathbb{Z} \quad (9.10)$$

constitue une autre base des solutions possibles.

## 9.2. Diffusion

L'onde plane incidente  $p_{inc}$  va induire une "réaction" de la part du cylindre et provoquer une onde diffusée  $p_{dif}$ . Nous allons exprimer ces deux ondes dans un formalisme modal.

### 9.2.1. Onde incidente

Cette onde incidente a été engendrée par des sources éloignées du cylindre. Donc, il n'y a aucune raison pour que cette onde ne soit pas définie au point  $c(0, 0)$ . Or, nous savons que la fonction  $Y_n$  n'est pas définie en zéro. Donc en toute généralité cette onde doit s'écrire sous la forme :

$$p_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n J_n(kr) e^{in\theta} \quad (9.11)$$

Si on pose que  $\mathbf{a}$  est le vecteur dont les coordonnées sont  $a_n$  et  $\psi^{(j)}$  le vecteur dont les coordonnées sont  $\psi_n^{(j)} = J_n(kr) e^{in\theta}$ , l'équation (9.11) peut s'écrire :

$$p_{inc} = \langle \mathbf{a}, \psi^{(j)} \rangle \quad (9.12)$$

où  $\langle , \rangle$  est le produit scalaire canonique.

Dans le cas présent, l'onde plane est supposée normalisée et s'écrit d'une façon classique :

$$p_{inc} = e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{x}} \quad (9.13)$$

où  $\mathbf{k}_{inc}$  est le vecteur d'onde et  $\mathbf{x}$  la position de l'observateur. Nous nous plaçons dans la convention où  $e^{-i\omega t}$  est omis. En choisissant pour angle d'incidence  $\alpha$ , nous avons que :

$$\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{x} = kr \cos(\theta - \alpha) \quad (9.14)$$

D'où

$$p_{inc} = e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} \quad (9.15)$$

En effectuant un développement en série de FOURIER de la fonction  $x \rightarrow e^{ikr \cos x}$ , on peut démontrer que :

$$p_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\alpha} J_n(kr) e^{in\theta} \quad (9.16)$$

C'est dire  $a_n = i^n e^{-in\alpha}$ .

### 9.2.2. Onde diffusée

L'onde diffusée a été provoqué par l'onde incidente. Mais, si on considère cette onde diffusée indépendamment de l'onde incidente qui l'a générée, on peut admettre que l'onde diffusée a été produite par des sources virtuelles à l'intérieur du cylindre. Donc, l'onde diffusée doit vérifier la condition de SOMMERFELD.

D'une manière générale, en choisissant les fonctions  $H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}$  et  $H_n^{(2)}(kr) e^{in\theta}$  pour fonctions de base, l'onde diffusée peut s'écrire :

$$p_{dif} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} + d_n \cdot H_n^{(2)}(kr) e^{in\theta} \quad (9.17)$$

Or pour  $kr$  grand, nous avons vu les relations asymptotiques

$$H_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (kr)^{-1/2} e^{i(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2})} + O(|kr|^{-3/2}) \quad (9.18a)$$

$$H_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (kr)^{-1/2} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2})} + O(|kr|^{-3/2}) \quad (9.18b)$$

## 9. Initiation à la théorie modale

Il est alors clair que la fonction de HANKEL de premier espèce tend vers l'expression d'une onde plane se propageant dans la direction du vecteur  $\mathbf{r}$  et dans la direction  $-\mathbf{r}$  pour la fonction de HANKEL de deuxième espèce. Physiquement, les éléments  $H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}$  correspondent aux ondes cylindriques émergentes et  $H_n^{(2)}(kr) e^{in\theta}$  aux ondes convergentes.

L'onde diffusée devant vérifier la condition de SOMMERFELD, elle est de la forme :

$$p_{dif} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \cdot H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \quad (9.19)$$

Si on pose que  $\mathbf{b}$  est le vecteur dont les coordonnées sont  $b_n$  et  $\psi$  le vecteur dont les coordonnées sont  $\psi_n = H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}$ , l'équation (9.19) peut s'écrire :

$$p_{dif} = \langle \mathbf{b}, \psi \rangle \quad (9.20)$$

### 9.2.3. Matrice de transition

Les phénomènes physiques que nous avons étudié se sont toujours placés dans le cadre de la physique linéaire. L'onde diffusée doit donc dépendre linéairement de l'onde incidente. On est donc en droit de définir une matrice  $\mathbf{T}$  reliant les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  puisqu'ils définissent l'onde incidente et diffusée :

$$\mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} \quad (9.21)$$

La matrice  $\mathbf{T}$  est appelée matrice de transition. Cette matrice est caractéristique de la nature du cylindre.

Nous pouvons donc finalement écrire :

$$p_{dif} = \langle \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}, \psi \rangle \quad (9.22)$$

## 9.3. Exercices d'application

### Exercice 9.1 Cylindre mou

Donner la matrice de transition d'un cylindre mou de section circulaire de rayon  $r_0$ .

### Exercice 9.2 Cylindre rigide

Donner la matrice de transition d'un cylindre rigide de section circulaire de rayon  $r_0$ .

# 10. Transformations intégrales

Précédemment, nous avons vu quelques techniques permettant de traiter directement un problème d'EDP. Nous allons maintenant voir qu'il est parfois judicieux de transformer le problème pour l'exprimer dans un espace dual (par exemple l'espace de Fourier).

Dans ce cours, seules les transformées de FOURIER et de Laplace seront abordées, parce qu'elles sont les plus couramment appliquées. Toutefois, il existe de nombreux autres types de transformations intégrales (transformée de HANKEL, transformée de MELLIN, ...).

## 10.1. Transformée de FOURIER

La transformée de FOURIER est sans nul doute la transformée intégrale la plus répandue et celle qui possède le sens physique le plus évident. Cette présentation de la transformée de FOURIER est à mettre en parallèle avec les différents cours de traitement du signal pour lesquels cette transformée constitue un outil privilégié.

### 10.1.1. Présentation générale

Soit  $g$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On définit la transformée de Fourier de  $g$  par :

$$\tilde{g}(f) = \mathbf{TF}(g(t)) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2j\pi f t} dt \quad (10.1)$$

D'un point de vue physique, la transformée de Fourier permet de passer d'un domaine temporel (variable de départ) à un domaine fréquentiel ou spectral (variable d'arrivée, domaine dual) : décomposition spectrale.

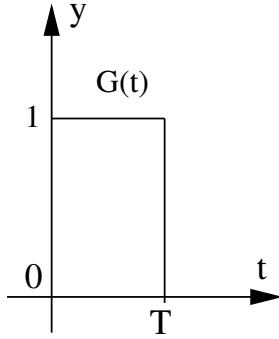
On notera que même si  $g$  est une fonction réelle, une transformée de FOURIER sera une fonction à valeur dans  $\mathbb{C}$ . Le module et la phase de  $\tilde{g}$  représentera respectivement l'amplitude et la phase de la composante spectrale.

Si  $g$  est une fonction monochromatique,  $e^{j2\pi f_0 t}$ , sa transformée de FOURIER sera nulle  $\forall f \neq f_0$  et présentera un "pic" au point  $f = f_0$ . Ce "pic" appelé Dirac ne peut être défini mathématiquement qu'en utilisant la théorie des distributions. Ces notions ne feront pas partie de cette présentation succincte.

Exemple sur une fonction porte :

$$G(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10.2)$$

## 10. Transformations intégrales



Par définition, nous avons :

$$\tilde{G}(f) = \mathbf{TF}(G(t)) = \int_0^T e^{-2j\pi f t} dt \quad (10.3)$$

C'est à dire :

$$\tilde{G}(f) = \left[ \frac{e^{-2j\pi f t}}{-2j\pi f} \right]_0^T = \frac{e^{-2j\pi f T} - 1}{-2j\pi f} \quad (10.4)$$

Et finalement :

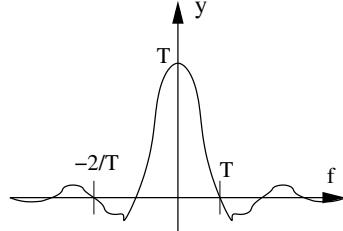
$$\tilde{G}(f) = T e^{-j\pi f T} \cdot \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j\pi f} = T e^{-j\pi f T} \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \quad (10.5)$$

Nous avons alors que la phase de la transformée de Fourier de  $G$  est

$$-\pi f T$$

et l'amplitude de la transformée vaut :

$$T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \sin_c(\pi f T)$$



### 10.1.2. Transformée inverse

La transformée de Fourier inverse se définit par :

$$g(t) = \mathbf{TF}^{-1}(\tilde{g}(f)) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(f) e^{2j\pi f t} df \quad (10.6)$$

Cette transformée de Fourier inverse permet de passer du domaine fréquentiel au domaine temporel.

On fera preuve d'attention quant au signe sur l'exponentielle, qui est négatif dans le sens direct, et positif dans le sens inverse.

### 10.1.3. Propriétés classiques

Linéarité :

$$\mathbf{TF}(a \cdot G_1(t) + b \cdot G_2(t)) = a\tilde{G}_1(f) + b\tilde{G}_2(f) \quad (10.7)$$

$$a \cdot G_1(t) + b \cdot G_2(t) = \mathbf{TF}^{-1}(a\tilde{G}_1(f) + b\tilde{G}_2(f)) \quad (10.8)$$

Translation :

$$G(t) e^{2i\pi f_0 t} = \mathbf{TF}^{-1}(\tilde{G}(f - f_0)) \quad (10.9)$$

$$\mathbf{TF}(G(t - t_0)) = \tilde{G}(f) e^{-2i\pi f t_0} \quad (10.10)$$

Dérivée par rapport à une autre variable :

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{TF}(G(t)) = \mathbf{TF}(G_x(t)) \quad (10.11)$$

Dérivée dans le domaine temporel :

$$\mathbf{TF}(G_t(t)) = 2i\pi f \cdot \mathbf{TF}(G(t)) \quad (10.12)$$

Similitude :

$$\mathbf{TF}\left(G\left(\frac{t}{a}\right)\right) = |a| \tilde{G}(af) \quad (10.13)$$

Fonction invariante :

$$\mathbf{TF}\left(e^{-\pi t^2}\right) = e^{-\pi f^2} \quad (10.14)$$

#### Produit de convolution

Si  $G_1$  et  $G_2$  sont deux fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$ , on peut définir un produit de convolution, noté  $*$ , qui donnera une troisième fonction :

$$G_1(t) * G_2(t) = \int_{\mathbb{R}} G_1(\tau) G_2(t - \tau) d\tau \quad (10.15)$$

Ce produit de convolution présente un grand intérêt pour les transformées de Fourier. En effet, nous avons :

$$\mathbf{TF}(G_1(t) * G_2(t)) = \tilde{G}_1(f) \cdot \tilde{G}_2(f) \quad (10.16)$$

$$\mathbf{TF}(G_1(t) \cdot G_2(t)) = \tilde{G}_1(f) * \tilde{G}_2(f) \quad (10.17)$$

### 10.1.4. Équation de Helmholtz

Pour un problème de propagation ondulatoire, la transformation de FOURIER revêt un caractère particulier. En effet, d'une manière générale, l'équation des ondes homogène s'écrit :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad (10.18)$$

On posera  $\mathbf{x}$  comme étant le vecteur position de l'observateur.

## 10. Transformations intégrales

Quelque soit la forme de  $u$ , une transformation de Fourier par rapport à la variable temporelle peut être envisagée :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \quad (10.19)$$

Si on injecte les représentations de Fourier dans l'équation (10.18), on constate que la transformée de Fourier  $\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega)$  satisfait l'équation d'Helmholtz homogène :

$$(\Delta + k^2) \tilde{u}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (10.20)$$

pour toute valeur de pulsation  $\omega$ . Le terme  $k = \frac{\omega}{c}$  est le nombre d'onde associé à la fréquence  $\omega$ .

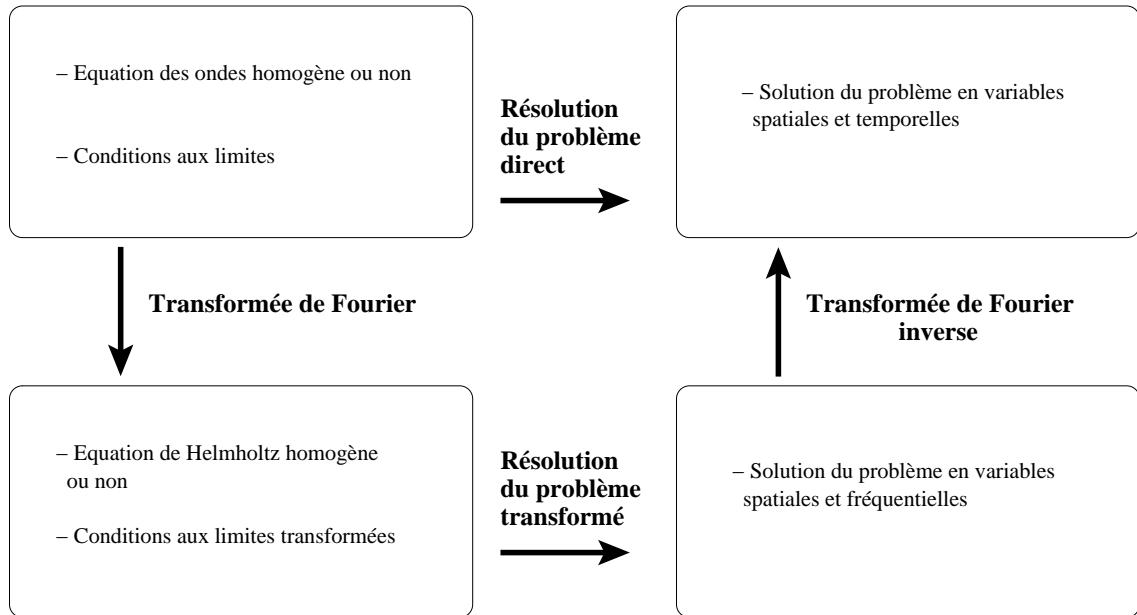


FIGURE 10.1. – Présentation du lien entre le problème hyperbolique (équation des ondes) et elliptique (équation de helmholtz).

Connaissant la solution du problème pour chaque valeur de  $\omega$ , la détermination de la solution temporelle peut facilement être obtenue en appliquant une transformation de Fourier inverse. Dans ces conditions, on peut toujours supposer a priori que le problème physique est à fréquence fixe  $\omega$ . Le terme  $\omega$  ne devenant qu'un paramètre du problème. on parlera alors d'ondes monochromatiques.

$$(\Delta + k^2) \tilde{u}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (10.21)$$

On pourra même le plus souvent omettre la notation explicite du paramètre  $\omega$  et du signe  $\sim$ . On considérera alors l'équation de Helmholtz sous la forme :

$$(\Delta + k^2) u(\mathbf{x}) = 0 \quad (10.22)$$

D'un point de vue formel, la transformée de Fourier permet de passer d'une équation aux dérivées partielles hyperboliques (équation des ondes) à une équation elliptique (équation de Helmholtz). La présentation schématique de la figure (10.1) résume le mécanisme global d'utilisation de la transformée de Fourier pour la résolution d'un problème physique particulier.

## 10.2. Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est également très utilisée, notamment en automatique. Nous verrons d'ailleurs le lien entre ces deux transformées.

### 10.2.1. Présentation générale

Si  $g(t)$  désigne une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle  $t$ , définie sur le domaine  $t \in ]0, +\infty[$  et nulle pour  $t < 0$ , on appelle transformée de Laplace de  $g(t)$  la fonction :

$$\tilde{g}(p) = \mathbf{TL}(g(t)) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-pt} dt \quad (10.23)$$

où  $p$  est complexe.

Pour que la transformée de Laplace soit définie, il faut vérifier certaines conditions d'existence :

- la fonction  $g(t)$  doit être continue par morceau
- $\exists \alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$  et

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha |g(t)| = 0$$

- la fonction  $g(t)$  doit être d'ordre exponentiel. C'est à dire  $\exists M, \gamma$  tel que :

$$|g(t)| < M \cdot e^{\gamma t} \quad \forall t > T$$

Certaines fonctions  $g(t)$  ne possèdent pas de transformée de Laplace, par exemple  $g(t) = \frac{1}{t}$  qui ne respecte pas la deuxième condition d'existence ou  $g(t) = e^{t^2}$  qui ne respecte pas la troisième condition. Inversement, toutes les fonctions  $\tilde{g}(p)$  ne sont pas des transformées de Laplace. On montre que, si  $\tilde{g}(p)$  est une transformée de Laplace, alors :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \tilde{g}(p) = 0$$

### 10.2.2. Propriétés classiques

La transformée de Laplace possède beaucoup de propriétés en commun avec la transformation de FOURIER.

Linéarité :

$$\mathbf{TL}(a \cdot G_1(t) + b \cdot G_2(t)) = a \tilde{G}_1(p) + b \tilde{G}_2(p) \quad (10.24)$$

$$a \cdot G_1(t) + b \cdot G_2(t) = \mathbf{TL}^{-1}(a \tilde{G}_1(p) + b \tilde{G}_2(p)) \quad (10.25)$$

Translation :

$$G(t) e^{p_0 t} = \mathbf{TL}^{-1}(\tilde{G}(p - p_0)) \quad (10.26)$$

$$\mathbf{TL}(G(t - t_0)) = \tilde{G}(p) e^{-pt_0} \quad (10.27)$$

Dérivée par rapport à une autre variable :

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{TL}(G(t)) = \mathbf{TL}(G_x(t)) \quad (10.28)$$

## 10. Transformations intégrales

Dérivée dans le domaine temporel :

$$\mathbf{TL}(G_t(t)) = p \cdot \mathbf{TL}(G(t)) - G(0^+) \quad (10.29)$$

Similitude :

$$\mathbf{TL}\left(G\left(\frac{t}{a}\right)\right) = a\tilde{G}(ap) \quad a > 0 \quad (10.30)$$

### Produit de convolution

De même, nous avons :

$$\mathbf{TL}(G_1(t) * G_2(t)) = \tilde{G}_1(p) \cdot \tilde{G}_2(p) \quad (10.31)$$

$$\mathbf{TL}(G_1(t) \cdot G_2(t)) = \tilde{G}_1(p) * \tilde{G}_2(p) \quad (10.32)$$

### Relation entre les deux transformées

Au vu des définitions de la transformée de FOURIER, notée  $\tilde{G}^{\mathbf{TF}}(f)$ , et de la transformée de Laplace, notée  $\tilde{G}^{\mathbf{TL}}(p)$ , on peut remarquer que :

$$\tilde{G}^{\mathbf{TL}}(2i\pi f) = \tilde{G}^{\mathbf{TF}}(f) \quad (10.33)$$

### 10.2.3. Transformée inverse

De la même façon que pour la transformée de FOURIER, il existe une expression analytique de la transformée de Laplace inverse.

$$g(t) = \mathbf{TL}^{-1}(\tilde{g}(f)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \tilde{g}(p) e^{pt} dp \quad (10.34)$$

avec  $r \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$ . Cette expression est aussi appelée formule de MELLIN-FOURIER.

Cette transformée inverse fait appel à l'intégration sur des contours du plan complexe. Or la théorie de l'intégration sur le domaine complexe dépasse largement le cadre de ce cours. Nous éviterons donc le plus possible l'utilisation directe de cette expression. Le processus d'inversion se fera plutôt en utilisant des tables de transformations déjà répertoriées.

## 10.3. Exercices d'application

### Exercice 10.1 Mur infini

Considérons un mur infini où règne à l'intant  $t = 0$  une répartition de température non-uniforme. Exprimer l'évolution temporelle de la température au sein de ce mur.

### Exercice 10.2 Onde monochromatique

Donner l'expression générale d'une onde plane, cylindrique et sphérique monochromatique.

# 11. Théorie des distributions

## 11.1. Rappels sur la dualité pour des espaces vectoriels de dimension finie

Soit  $\mathcal{E}$  un espace hilbertien de dimension  $n$ . Soit  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  une base de  $\mathcal{E}$ .

**Définition 11.1** Une **forme linéaire**  $\varphi$  est une application linéaire de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{R}$ .

En considérant les propriétés de linéarité des formes linéaires, on retrouve facilement que l'ensemble des formes linéaires de  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ , appelé espace vectoriel dual et noté  $\mathcal{E}^*$ .

Soit  $\varphi_{\mathbf{e}} : \mathbf{v} \rightarrow \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle$  avec  $\mathbf{e}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}$  est clairement une forme linéaire en appliquant les propriétés classiques du produit scalaire :

- i)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$
- ii)  $\langle \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2, v \rangle = \alpha \langle u_1, v \rangle + \beta \langle u_2, v \rangle$
- iii)  $\langle u, u \rangle > 0$  si  $u \neq 0$
- iv)  $\langle u, v \rangle = 0$  si  $u = 0$

On vérifiera que l'ensemble des formes linéaires  $\varphi_i : \mathbf{v} \rightarrow \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle$  sont linéairement indépendantes et constituent une base de  $\mathcal{E}^*$ .

Au final,  $\forall f \in \mathcal{E}^*, \exists \mathbf{e} \in \mathcal{E}$  telle que  $f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle$ . On pourra même noter  $f = \langle \mathbf{e}, \cdot \rangle$ . Dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, il est donc facile de réaliser le lien entre l'espace vectoriel et son dual.

## 11.2. Le cas des espaces de fonctions

Dans le cas des espaces vectoriels de fonctions, nous sommes très souvent dans le cas d'espaces vectoriels de dimension infinie. La notion d'espace dual devient plus délicate.

### 11.2.1. Généralités

Pour les espaces de fonctions, nous utiliserons, sauf mention contraire, le produit scalaire canonique :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv^* d\Omega \quad \text{avec} \quad \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (11.1)$$

et dans le cas vectoriel :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega \quad (11.2)$$

On définira également le **produit pondéré** par une fonction  $\omega$  :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv^* w d\Omega \quad (11.3)$$

### 11.2.2. Espaces de Schwartz

**Définition 11.2** L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}$  est constitué des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  indéfiniment dérivables et telles que pour tout entier  $n$  et  $p$  la fonction  $x^p \cdot f(n)$  soit bornée, ce qui s'écrit :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty \text{ et } \forall n, \forall p, \max_{x \in \mathbb{R}} |x|^n \left| \frac{d^p f}{dx^p} \right| < +\infty \right\}$$

**Définition 11.3** L'espace de Schwartz  $\mathcal{D}$  est un sous espace de  $\mathcal{S}$ . Il s'agit de l'ensemble des fonctions à support compact appartenant à  $\mathcal{S}$ .

**Exemple 11.1** Une fonction classique appartenant à  $\mathcal{D}$  est la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

Ainsi, même si  $\mathcal{D}$  contient peu d'éléments, il n'est pas vide. Nous avons de plus une propriété de convergence très forte issue de la définition même de  $\mathcal{D}$ .

**Proposition 11.1** Soit une suite  $(f_n)$  de fonctions de  $\mathcal{D}$ , elle converge lorsque  $n$  tend vers l'infini vers une fonction  $f$  de  $\mathcal{D}$  si :

- les supports des fonctions  $f_n$  sont contenus dans un même ensemble borné
- lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  et chaque dérivée de  $f_n$  converge uniformément vers la dérivée correspondante de  $f$ .

### 11.2.3. Distributions de Schwartz

**Définition 11.4** Une **fonctionnelle** est une fonction qui part d'un espace de fonctions vers  $\mathbb{R}$ .

**Définition 11.5** Les **distributions de Schwartz** sont les fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{D}$ .

**Remarque 11.1** Les fonctionnelles linéaires ne sont ni plus ni moins que les formes linéaires associées à un espace de fonctions. Les distributions de Schwartz ne sont donc que l'ensemble des formes linéaires continues de  $\mathcal{D}^*$ . Nous verrons que cet ensemble est bien plus riche que l'espace des fonctions classiques.

**Une question :** A quoi ressemblent les distributions de Schwartz ?

Soit  $f \in \mathcal{D}$ , alors la fonctionnelle :

$$\langle f, . \rangle : g \rightarrow \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \cdot g \, dx$$

est clairement une distribution de par la linéarité de l'intégrale. De même si  $f$  est une fonction intégrable sur tout compact (fermé, borné), alors  $\langle f, . \rangle$  est aussi une distribution de Schwartz. Finalement, il est très simple de construire des distributions. Il suffit de trouver des fonctions  $f$  telle que le produit scalaire  $\langle f, g \rangle$  est défini pour tout  $g \in \mathcal{D}$ . Cette façon de construire des distributions est tellement naturelle qu'il est courant de confondre la distribution  $\langle f, . \rangle$  avec la fonction  $f$ . En utilisant cet abus de langage on peut par exemple écrire la définition suivante :

**Définition 11.6** Une **distribution régulière**  $f$  est définie pour toute fonction localement intégrable (au sens de Lebesgue) par :

$$\langle f, \cdot \rangle : g \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \cdot g \, dx$$

Nous avons vu qu'il était aisément de construire des distributions sous la forme d'un produit scalaire de fonction localement intégrable, mais existe-t-il des distributions singulières, c'est à dire qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme de distribution régulière ?

**Définition 11.7** Une **distribution tempérée**  $f$  est une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{S}$ .

#### 11.2.4. La distribution de Dirac

**Définition 11.8** La distribution de Dirac au point  $a$  est la fonctionnelle qui à  $g \in \mathcal{D}$  associe la valeur  $g(a)$ .

On note la distribution de Dirac  $\langle \delta_a, \cdot \rangle$  ou par abus de langage directement  $\delta_a$ . On pourra même se permettre d'écrire :

$$\langle \delta_a, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_a \cdot g \, dx \quad (11.4)$$

Mais, il est bien clair que  $\delta_a$  n'est pas une fonction et que la distribution de Dirac est une distribution singulière.

On peut relier la distribution de Dirac avec la mesure de Dirac (voir les chapitres concernés dans le cours de probabilité donné en 1ère année) en rappelant que :

$$\langle \delta_a, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_a \cdot g \, dx = \int_{\mathbb{R}} g \, d\delta_a x \quad (11.5)$$

Au final, les distributions constituent un espace bien plus vaste qu'un simple espace de fonction. D'une certaine façon, on généralise le concept de fonction.

#### 11.2.5. Équation de distributions

Dans le cas de fonctions classiques, la notion d'équation et d'égalité semble assez évidente. Par exemple, si  $f$  et  $g$  sont des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f = g$  signifie que  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Si maintenant  $f$  et  $g$  sont des distributions de Dirac, écrire  $f = g$  signifie en réalité :  $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}$ . Lorsque l'on rencontre des équations de distributions, l'ensemble  $\mathcal{D}$  est ainsi vu comme un ensemble de fonctions test.

Dans le chapitre 12, nous verrons que bien souvent en physique les équations ne sont pas des équations de fonctions mais des équations de distributions.

#### 11.2.6. Propriétés fondamentales

##### Combinaison linéaire

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux complexes et  $T_1$  et  $T_2$  deux distributions, alors la combinaison linéaire  $\lambda_1 \cdot T_1 + \lambda_2 \cdot T_2$  est définie par :

$$\langle \lambda_1 \cdot T_1 + \lambda_2 \cdot T_2, \varphi \rangle = \lambda_1 \langle T_1, \varphi \rangle + \lambda_2 \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (11.6)$$

## 11. Théorie des distributions

### Dérivation

La dérivée d'une distribution  $T$  est la distribution  $T'$  définie par

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad (11.7)$$

Cette identité est en réalité un résultat provenant directement d'une intégration par parties.

### Translation

Si  $f$  est une fonction localement intégrable, la fonction translatée  $\tau_a f$  est définie par  $\tau_a f(x) = f(x-a)$ , et nous avons par changement de variable :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-a) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x+a) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (11.8)$$

i.e.

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (11.9)$$

Ainsi, la translatée  $\tau_a T$  de la distribution  $T$  quelconque est définie par :

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (11.10)$$

# 12. Notion de fonction de Green

Au cours du chapitre précédent, nous avons présenté la notion de distribution. Ici, nous considérons une application importante de la théorie des distribution aux EDP.

## 12.1. Définition générique

Par définition, une fonction de Green, pour une EDP donnée, est une solution de l'équation :

$$\mathcal{L}u = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (12.1)$$

Il faut préciser que cette équation doit être vérifiée uniquement sur le domaine d'étude  $\Omega$ .

**Remarque 12.1** La présence du signe  $-$  devant le Dirac est purement conventionnelle. D'autre ouvrages choisissent un signe positif.

**Remarque 12.2** si  $G$  est une fonction de Green et que  $f_0$  vérifie l'équation homogène :

$$\mathcal{L}u = 0 \quad (12.2)$$

sur le domaine  $D$ , la fonction  $G + k \cdot f_0$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) est aussi une fonction de Green. A priori, il y a donc une infinité de fonctions de Green pour une EDP donnée.

**La “fonction” de Green est elle réellement une fonction ?** Effectivement, l'équation (12.1) correspond à une égalité au sens des distribution, c'est à dire :

$$\langle \mathcal{L}u, \varphi \rangle = \langle -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \varphi \rangle = -\varphi(\mathbf{x}_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (12.3)$$

Rien ne garantit qu'une “fonction” de Green ne soit pas autre chose qu'une fonction (une distribution au même titre que le Dirac par exemple). En pratique, on constatera souvent que les fonctions de Dirac sont bel et bien des fonctions. Aussi, on se permet abusivement de les appeler génériquement “fonctions de Green”.

**Remarque 12.3** Une fonction de Green noté  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  dépend à la fois de la variable  $\mathbf{x}$  et de la variable  $\mathbf{x}_0$ , alors que pour un second membre donné, une solution  $u(\mathbf{x})$  de l'EDP ne dépendra que de la variable  $\mathbf{x}$ .

**Unicité de la fonction de Green** Pour assurer l'unicité de la solution, on ajoute des conditions au frontières. On parlera alors de ”la” fonction de Green du problème.

### 12.1.1. Décomposition en solutions élémentaires

Soit un problème d'EDP linéaire (en particulier avec des conditions aux frontières homogènes) avec un second membre égal à une fonction quelconque  $-s(\mathbf{x})$ . C'est à dire :

$$\mathcal{L}u = -s(\mathbf{x}) \quad (12.4)$$

## 12. Notion de fonction de Green

Supposons maintenant que la fonction  $s(\mathbf{x})$  puisse se décomposer en somme discrète ou continue de Diracs :

$$s(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}_0) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \quad (12.5)$$

Dans le cas discret, le signe intégral sera simplement remplacé par un signe somme.

Soit  $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  la fonction du problème. Posons :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}_0) \cdot G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \quad (12.6)$$

Alors en admettant la permutation de l'opérateur différentiel linéaire  $\mathcal{L}$  avec le signe intégral, nous avons :

$$\mathcal{L}f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}_0) \cdot \mathcal{L}G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 = - \int_{\Omega} s(\mathbf{x}_0) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 = -s(\mathbf{x}) \quad (12.7)$$

Par ailleurs, comme les conditions aux frontières sont également linéaires, la fonction  $f(\mathbf{x})$  est bien la solution de notre problème avec un second membre égal  $-s(\mathbf{x})$ .

Au final, si on est en mesure de décomposer le terme source en une somme de Diracs pondérés sur tout le domaine d'étude, la fonction de Green peut s'interpréter comme une famille de solution élémentaires du problème.

## 12.2. Interprétation physique

En physique, on peut comme nous l'avons déjà vu dans la partie de modélisation physique (voir par exemple 1.5.8), considérer des sources (acoustique, électromagnétique, chaleur,...) extérieures au domaine d'étude. La prise en compte de l'action de ces sources se fera au travers des conditions aux frontières. Lorsque que les sources se situent à l'intérieur du domaine d'étude, la prise en compte de l'action de ces sources se fera par la présence d'un second membre dans l'EDP. Une convention courante en physique est de considérer les termes sources avec un signe  $-$  (source positive de courant, couple moteur, arrivée de fluide,...) et les termes "puits" avec un signe  $+$  (source négatif de courant, couple résistif, fuite de fluide,...), d'où la convention adoptée dans la définition de la fonction de Green. Néanmoins, il est clair que cela n'est qu'une convention et que la problématique des signes n'est que très superficielle.

### 12.2.1. Ambiguité de la notion de source

On peut dès à présent remarquer que le fait de traduire physiquement le second membre comme une source admet en réalité un certain caractère arbitraire. Afin d'expliquer cette remarque, on prendra l'exemple de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu (perméabilité magnétique  $\mu_0$ ) où la permittivité électrique  $\varepsilon$  varie légèrement autour d'une valeur moyenne  $\varepsilon_m$  en fonction de la position de l'observateur :

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \delta\varepsilon \quad (12.8)$$

avec  $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_m$ .

Pour une propagation ondulatoire, l'EDP de propagation est l'équation des ondes :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad (12.9)$$

$$\Delta u - \mu_0 \varepsilon u_{tt} = 0 \quad (12.10)$$

$$\Delta u - \mu_0 (\varepsilon_m + \delta\varepsilon) u_{tt} = 0 \quad (12.11)$$

A priori, l'EDP est homogène et ne semble pas faire apparaître de source électromagnétique. Toutefois, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\Delta u - \mu_0 \varepsilon_m u_{tt} = \mu_0 \Delta \varepsilon u_{tt} \quad (12.12)$$

Le problème physique peut alors s'interpréter autrement. On peut considérer que l'onde se propage dans un milieu homogène de permittivité constante  $\varepsilon_m$  et que les perturbations sont dues à des sources électromagnétiques fictives définies par le second membre  $\mu_0 \Delta \varepsilon u_{tt}$ . On pourra alors traiter le problème en utilisant les techniques mathématiques des EDP inhomogènes.

### 12.2.2. Sources ponctuelles

L'intérêt de la notion mathématique de fonction de Green pour le physicien est que la notion de Dirac peut s'interpréter comme une source ponctuelle élémentaire. Par exemple, si l'on cherche à modéliser le potentiel électrostatique  $V$  généré par une charge élémentaire unitaire située au point  $\mathbf{x}_0$ , on posera l'EDP :

$$\nabla \cdot \nabla V = \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (12.13)$$

Dans le cas présent, la fonction de Green du problème  $1/\varepsilon \cdot G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  s'interprétera comme étant le potentiel électrostatique généré par une source ponctuelle unitaire située au point  $\mathbf{x}_0$ .

Tout l'intérêt en physique de la notion de fonction de Green est que l'on peut souvent décomposer une source en une distribution pondérée continue ou discrète de sources ponctuelles unitaires. C'est à dire des Diracs.

Si le problème physique est linéaire, la solution avec une source donnée pourra se retrouver en intégrant les solutions élémentaires obtenu pour chaque source élémentaire.

## 12.3. Fonction de Green en champ libre

La fonction de Green du problème dépend bien évidemment de l'EDP, mais elle dépend également des conditions aux frontières. Changer ces dernières implique de modifier parfois de façon considérable l'expression de la fonction de Green.

Quoiqu'il en soit, il existe souvent pour un problème de physique donné des conditions aux frontières que l'on peut qualifier de canoniques dans un espace complètement ouvert. Par exemple, en électrostatique, on donne souvent l'expression du potentiel généré par une charge ponctuelle dans espace complètement ouvert avec pour condition au frontière  $\lim V(\mathbf{x} \rightarrow \infty) = 0$ .

Ou encore, on peut considérer l'expression d'une onde monochromatique en  $e^{-i\omega t}$  générée par une source électromagnétique ponctuelle unitaire dans un espace complètement ouvert. On utilisera pour cette modélisation l'équation de Helmholtz (avec un Dirac au second membre) et les condition de Sommerfeld à l'infini. Dans ce dernier cas, la fonction de Green aura pour expression :

### En dimension 1

$$G_0 = \frac{e^{ik|x|}}{2ik} \quad (12.14)$$

### En dimension 2

$$G_0 = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \quad (12.15)$$

**En dimension 3**

$$G_0 = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (12.16)$$

La fonction de Green obtenue pour un domaine d'étude complètement ouvert (champ libre) avec des conditions aux frontières canoniques sera souvent appelée abusivement "La fonction de Green de l'EDP". Il reste que s'il le domaine n'est plus complètement ouvert et/ou si les conditions aux frontières changent, la fonction de Green du problème sera différente de la fonction de Green du problème canonique en champ ouvert.

Néanmoins, dans bien des cas, il est possible par des raisonnements physiques simples de retrouver la fonction de Green du problème en utilisant des combinaisons de fonctions de Green obtenues dans le cas canonique ouvert. C'est en particulier, le cas de l'approche dite "méthode des images".

## **13. Systèmes d'EDP**



# 14. Calcul variationnel

## 14.1. Exemple illustratif

Supposons que l'on pose un objet quelconque sur une structure en pente décroissante (voir figure 14.1). Nous admettrons que la structure est parfaitement glissante et que l'on peut négliger les forces de frottement. Quelle doit être la forme de la structure pour que l'objet glissant, initialement au repos, mette le moins de temps possible pour terminer sa course ? La courbe qui minimise ce temps de parcours s'appelle la brachistochrone.

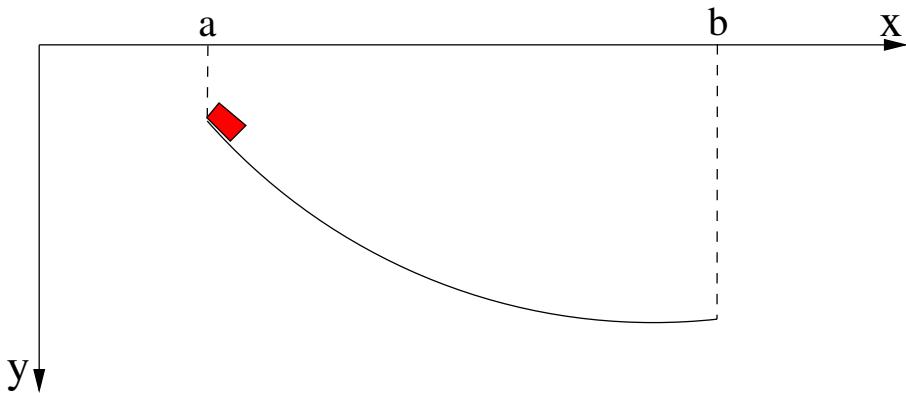


FIGURE 14.1. – Problème du calcul de la brachistochrone.

En notant  $T$  le temps de parcours du point initial  $(a, y(a))$  au point final  $(b, y(b))$ , nous avons que :

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{ds} ds = \int_0^L \frac{ds}{v} \quad (14.1)$$

où  $L$  est la longueur de la courbe parcourue et  $v$  la vitesse le long de la courbe. Le système étant conservatif, nous pouvons écrire la conservation de l'énergie mécanique sachant que l'objet était initialement immobile :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(-y(x)) = -mgy(a) = 0 \quad (14.2)$$

et donc :

$$v = \sqrt{2gy} \quad (14.3)$$

Le temps de parcours  $T$  s'écrit donc :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^L \frac{ds}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \quad (14.4)$$

Le problème de la détermination de la brachistochrone se traduit donc par la détermination de la courbe  $y(x)$  telle que les extrémités soient fixées et qui minimise l'intégrale  $J[y]$  lorsque la conservation

de l'énergie mécanique sachant :

$$J[y] = \int_a^b F(y, y') dx \quad (14.5)$$

en posant  $F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$ .

L'objet mathématique  $J[y]$  qui à une fonction associe une intégrale, c'est à dire une valeur dans  $\mathbb{R}$  sera désignée sous le terme de fonctionnelle.

## 14.2. Etude plus générale (version simple)

D'une manière plus générale, nous allons considérer le problème de la détermination de la fonction  $\bar{y}(x)$  qui minimise la fonctionnelle  $J[y]$  :

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (14.6)$$

lorsque les extrémités sont fixées :

$$y(a) = A \quad (14.7a)$$

$$y(b) = B \quad (14.7b)$$

Pour exprimer ce problème sous une forme plus facile à manipuler, nous allons considérer une courbe  $\eta(x)$  telle que  $\eta(a) = 0$  et  $\eta(b) = 0$ .  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ , la courbe  $\bar{y}(x) + \varepsilon\eta(x)$  vérifie les conditions aux deux extrémités.

De même, si  $\bar{y}(x)$  minimise la fonctionnelle  $J[y]$ , la fonction  $\Phi : \varepsilon \rightarrow J[\bar{y} + \varepsilon\eta]$  doit admettre un minimum, au moins localement, en  $\varepsilon = 0$  et ceci quelque soit la fonction  $\eta(x)$  s'annulant aux extrémités.

Une condition nécessaire devient donc :

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (14.8)$$

pour toute fonction  $\eta(x)$  s'annulant aux extrémités.

Or, nous avons que :

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} J[\bar{y} + \varepsilon\eta] \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (14.9)$$

En admettant que l'on puisse dériver sous le signe intégral, nous obtenons :

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx = 0 \quad (14.10)$$

En utilisant une intégration par partie pour le deuxième terme de la somme, nous obtenons :

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \right\} \eta(x) dx = 0 \quad (14.11)$$

Cette égalité doit être vérifiée pour toute fonction  $\eta(x)$  s'annulant aux extrémités. Nous aurons alors la relation suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right] = 0 \quad (14.12)$$

### 14.3. Étude plus générale (version avec notion de variation)

vraie presque partout. Cette équation s'appelle l'équation d'Euler-Lagrange.

Dans le cas présent, nous avons donc montré qu'un problème de minimisation (ou de maximisation) fonctionnel pouvait se traduire, en terme d'implication, sous la forme d'une équation différentielle (EDO). Nous verrons que, plus généralement, l'équation d'Euler-Lagrange donne lieu à une EDP.

## **14.3. Étude plus générale (version avec notion de variation)**

On part du même problème général que précédemment exprimé sous la forme d'une minimisation (ou une maximisation) d'une fonctionnelle :

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (14.13)$$

avec  $y(a) = A$  et  $y(b) = B$ .

Pour trouver la solution  $y(x)$  qui est solution de ce problème, on imagine une "variation" autour cette solution  $y \rightarrow y + \delta y$  avec  $\delta y(a) = 0$  et  $\delta y(b) = 0$ .

La variation de la fonction  $F$  peut être reliée à la variation  $\delta y$  par la relation :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \quad (14.14)$$

Ceci correspond à :

$$\delta F = dF \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \delta y \\ \delta y' \end{pmatrix} \quad (14.15)$$

où  $dF$  est la différentielle de  $F$ .

Quelques propriétés :

- i)  $\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2$
- ii)  $\delta(F_1 \cdot F_2) = \delta F_1 \cdot F_2 + F_1 \cdot \delta F_2$
- iii)  $\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{F_2 \cdot \delta F_1 - F_1 \cdot \delta F_2}{F_2^2}$
- iv)  $\delta(F_1)^n = n(F_1)^{n-1} \delta F_1$
- v)  $\frac{d}{dx}(\delta y) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$
- vi)  $\delta \int_a^b y(x) dx = \int_a^b \delta y(x) dx$

La condition nécessaire d'extremum (minimum ou maximum) est :

$$\delta I = 0 \quad (14.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(y + \delta y) - I(y) \\ &= \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') dx \\ &= \int_a^b [F_y(x, y, y') \cdot \delta y + F_{y'}(x, y, y') \cdot \delta y'] + [\text{ordre supérieur en } \delta y \text{ et } \delta y'] dx \\ &= \delta I + O(\delta y^2) \end{aligned} \quad (14.17)$$

## 14. Calcul variationnel

$$\delta I = \int_a^b [F_y(x, y, y') \cdot \delta y + F_{y'}(x, y, y') \cdot \delta y'] dx \quad (14.18)$$

Or en appliquant une intégration par parties, nous obtenons :

$$\int_a^b F_{y'}(x, y, y') \cdot \delta y' dx = [F_{y'}(x, y, y') \cdot \delta y]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} (F_{y'}(x, y, y')) \cdot \delta y dx \quad (14.19)$$

Donc :

$$\delta I = \int_a^b \left[ F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} (F_{y'}(x, y, y')) \right] \cdot \delta y dx \quad \forall \delta y \quad (14.20)$$

On en déduit l'équation d'Euler-Lagrange :

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} (F_{y'}(x, y, y')) = 0 \quad (14.21)$$

Ce raisonnement peut facilement être repris pour deux variables ou plus. En considérant par exemple  $u(x, y)$ , on peut définir la fonctionnelle :

$$I(u) = \int_S F(x, y, u, u_x, u_y) dS \quad (14.22)$$

On imposera la condition  $\delta I = 0$  et on obtiendra l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0 \quad (14.23)$$

On peut également considérer une fonctionnelle impliquant 2 fonctions. Par exemple  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$ , peuvent définir la fonctionnelle :

$$I(u, v) = \int_S F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) dS \quad (14.24)$$

Nous obtenons alors un système à deux équations :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0 \quad (14.25a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial v_y} \right) = 0 \quad (14.25b)$$

On peut enfin considérer une fonctionnelle impliquant des ordres plus élevés :

$$I = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (14.26)$$

L'équation d'Euler-Lagrange sera alors de la forme :

$$F_y - \frac{d}{dx} (F_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2} (F_{y''}) - \frac{d^3}{dx^3} (F_{y'''}) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (F_{y^{(n)}}) = 0 \quad (14.27)$$

### 14.4. Construction de fonctionnelles à partir de l'EDP

Dans la partie précédente, nous sommes partis d'une fonctionnelle pour aboutir à une EDP. Il serait plus intéressant de partir d'une EDP  $L\Phi = g$  (donnée par la modélisation physique) pour arriver à une fonctionnelle. Cela est souvent possible en considérant 4 étapes :

#### 14.4. Construction de fonctionnelles à partir de l'EDP

EDP avec cond. frontières homogènes	Fonctionnelle
$(\Delta + k^2) \Phi = g$	$I(\Phi) = \frac{1}{2} \int_V [ \nabla \Phi ^2 - k^2 \Phi^2 + 2g\Phi] dV$
$(\Delta + k^2) \Phi = 0$	$I(\Phi) = \frac{1}{2} \int_V [ \nabla \Phi ^2 - k^2 \Phi^2] dV$
$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0$	$I(\Phi) = \frac{1}{2} \int_T \int_V [ \nabla \Phi ^2 - \frac{1}{c^2} \Phi_t^2] dV dt$
$\Delta \Phi = g$	$I(\Phi) = \frac{1}{2} \int_V [ \nabla \Phi ^2 + 2g\Phi] dV$
$\Delta \Phi = 0$	$I(\Phi) = \frac{1}{2} \int_V [ \nabla \Phi ^2] dV$

TABLE 14.1. – Fonctionnelles correspondant à leur EDP.

1. Multiplier  $L\Phi = g$  par  $\delta\Phi$  et intégrer sur le domaine d'étude
2. Appliquer le théorème de la divergence ou une intégration par parties
3. Exprimer les conditions aux frontières
4. Sortir  $\delta$  de l'intégrale

À titre d'illustration, on peut prendre le cas de l'EDP  $\Delta\Phi = -f(x, y)$ . On obtient par la première étape :

$$\begin{aligned} \delta I &= \iint_{\Omega} [-\Delta\Phi - f(x, y)] \cdot \delta\Phi dx dy = 0 \\ &= - \iint_{\Omega} \Delta\Phi \cdot \delta\Phi dx dy - \iint_{\Omega} f \cdot \delta\Phi dx dy = 0 \\ &= - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \cdot \delta\Phi dx dy - \iint_{\Omega} f \cdot \delta\Phi dx dy = 0 \end{aligned} \quad (14.28)$$

Or :

$$\begin{aligned} - \iint \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \delta\Phi dx dy &= - \int \left( \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \delta\Phi \right] - \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \delta\Phi}{\partial x} dx \right) dy \\ &= \frac{\delta}{2} \left( \iint \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy \right) - \int \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta\Phi \right] dy \end{aligned} \quad (14.29)$$

Au final, nous obtenons :

$$\delta I = \frac{\delta}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 2f \cdot \Phi \right] dx dy - \int \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta\Phi \right] dy - \int \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta\Phi \right] dx \quad (14.30)$$

En appliquant des conditions de Dirichlet ou de Neumann homogènes à la frontière, cette équation devient :

$$\delta I = \frac{\delta}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 2f \cdot \Phi \right] dx dy \quad (14.31)$$

C'est à dire :

$$I = \frac{1}{2} \iint [\Phi_x^2 + \Phi_y^2 - 2f \cdot \Phi] dx dy \quad (14.32)$$

La table 14.1 nous donne par ailleurs quelques fonctionnelles associées à des EDP courantes avec condition de Neuman ou Dirichlet homogènes.

## 14.5. Calcul variationnel sous contrainte

### 14.5.1. optimisation sous contrainte

Les problèmes que nous avons traités jusqu'à présent n'imposaient pas de restriction particulière sur l'espace dans lequel nous avons cherché à minimiser notre fonctionnelle. Il peut s'avérer que pour des contraintes physiques tout l'espace ne soit pas accessible. On parle alors d'optimisation sous contrainte.

Pour illustrer cela, considérons une fonction  $F(x, y)$  que nous cherchons à optimiser en imposant une contrainte sur  $x$  et  $y$  du type  $G(x, y) = \text{cte}$ . Sur la figure (14.2), le minimum de la fonction  $F(x, y)$  apparaît au milieu de l'image. On parle alors du minimum libre. La contrainte est représentée par la courbe verte et le point noir sur cette courbe représente le minimum le long de la courbe verte (contrainte  $G(x, y) = \text{cte}$ ). Il est clair que le minimum de le long de la courbe ne correspond pas au minimum libre de  $F(x, y)$ . Nous avons donc que  $\nabla F(x, y)$  sera non nul au point noir. Quel sera alors la condition nécessaire qui nous permettra de trouver la position du point noir ?

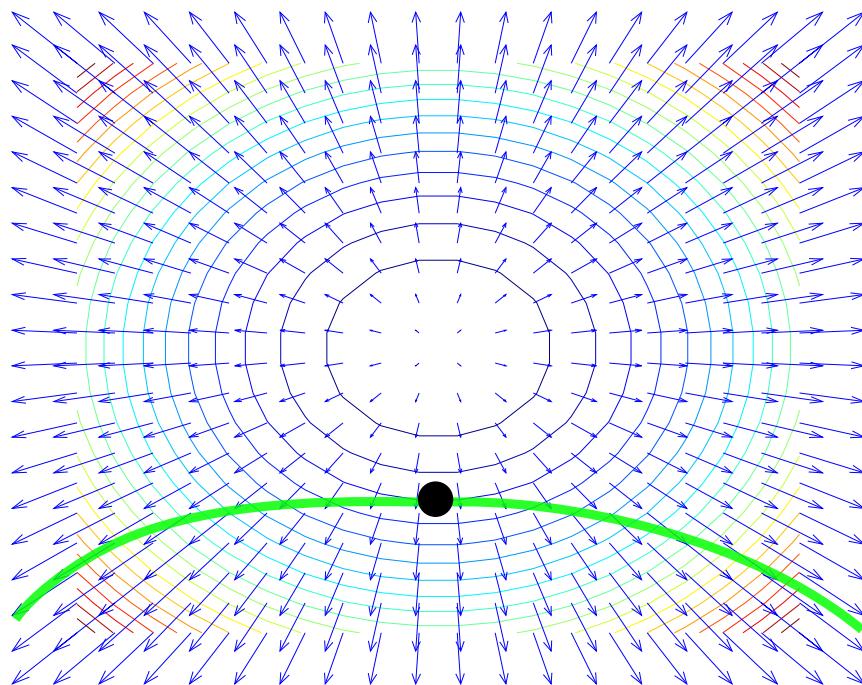


FIGURE 14.2. – Optimisation sous contrainte.

La réponse est qu'il faut imposer que la projection du gradient  $\nabla F(x, y)$  sur la courbe verte soit nulle, c'est que le gradient soit perpendiculaire à la tangente  $t$  de la courbe  $\nabla F \cdot t = 0$ . Cela revient à imposer que le gradient soit colinéaire à la normale  $vecn$  de la courbe verte, c'est à dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\nabla F = \lambda \cdot n$ . Le scalaire  $\lambda$  porte alors le nom de **multiplicateur de Lagrange**.

Dans le cas particulier où la contrainte s'exprime sous la forme  $G(x, y) = \text{cte}$ , il est à noter que  $\nabla G$  est une normale à la courbe verte et donc notre condition devient  $\nabla F = \lambda \cdot \nabla G$ .

Dans tous les cas, il est doit être clair que la condition nécessaire d'optimalité est liée au champ de

vecteur correspondant au gradient de  $F(x, y)$  et non au point correspondant au minimum libre de la fonction  $F(x, y)$ . Par exemple, sur la figure (14.3), nous voyons que le minimum sous contrainte (point noir) ne correspond en aucun cas au point le plus proche du minimum libre.

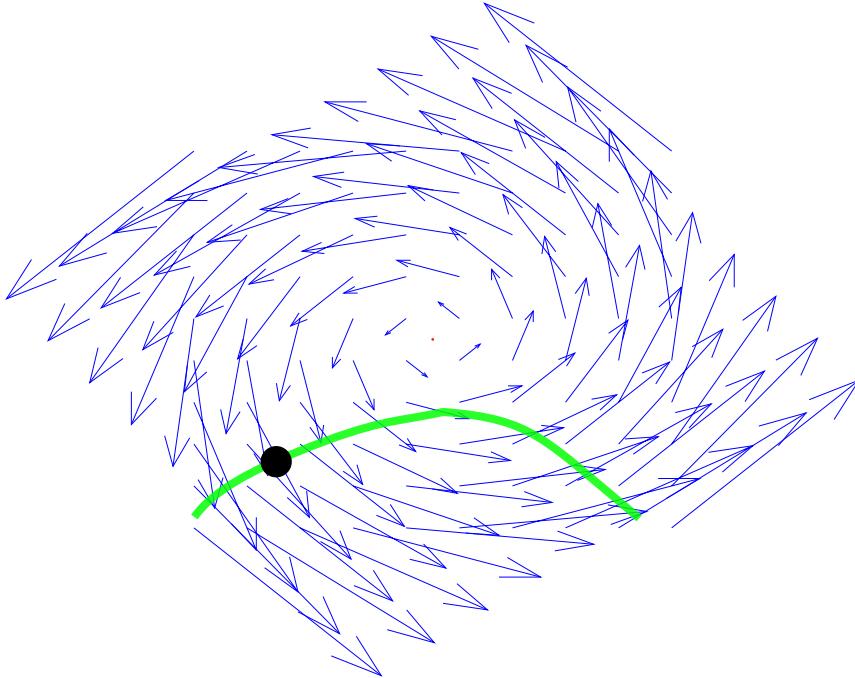


FIGURE 14.3. – Optimisation sous contrainte avec un gradient tourbillonnaire.

#### 14.5.2. Conséquence sur le calcul variationnel

Précédemment, notre problème était la minimisation (ou une maximisation) d'une fonctionnelle :

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (14.33)$$

Pour trouver une solution, nous avons posé la condition nécessaire de variation nulle :

$$\delta I = 0 \quad (14.34)$$

Dans le cas où il y une contrainte du type  $K(y, y') = cte$ , cette condition nécessaire devient :

$$\delta I = \lambda \cdot \delta K \quad (14.35)$$

et nous devons introduire un multiplicateur de Lagrange qui deviendra alors un paramètre du problème.

Cas particulier, si la fonctionnelle  $K$  est de la forme :

$$K = \int_a^b G(x, y, y') dx \quad (14.36)$$

Notre condition nécessaire devient :

$$\delta(I - \lambda \cdot K) = \delta I_{\text{contrainte}} = 0 \quad (14.37)$$

## 14. Calcul variationnel

avec :

$$I_{\text{contrainte}} = \int_a^b F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y') dx \quad (14.38)$$

Le problème variationnel sous contrainte peut donc se transformer un problème variationnel libre en remplaçant la fonctionnelle  $I$  par une nouvelle fonctionnelle  $I_{\text{contrainte}}$  qui introduit directement un paramètre  $\lambda$ . À partir de là, nous pouvons directement utiliser la théorie vue précédemment et en particulier retrouver l'équation d'Euler-Lagrange qui dépendra alors d'un paramètre  $\lambda$ .

### 14.6. Généralités sur le formalisme variationnel

Pour illustrer notre problématique, considérons le problème simple suivant :

$$-u'' = f(x) \quad (14.39)$$

avec les conditions :

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (14.40)$$

Par des techniques de changement de variables, par des transformations intégrales ou par des méthodes de séparation de variables (dans le cas d'une EDP) il est possible de chercher une solution analytique du problème d'EDO ou d'EDP avec conditions aux frontières. Par des approches numériques (par exemple par une méthode de différences finies), il est également possible d'obtenir une approximation de la solution du problème. Dans tous ces cas, on cherche à traiter le problème sans modification de sa nature. On parle alors du problème direct et la solution analytique ou approchée que l'on obtient sera appelée la **solution forte** du problème.

Une autre approche consiste, comme nous l'avons vu, à transformer notre problème direct en un problème variationnel. Dans notre exemple nous pouvons multiplier notre EDO par une fonction test  $\omega$  et intégrer sur  $]0, 1[$  :

$$\int_0^1 -u''(x) \cdot \omega(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot \omega(x) dx \quad (14.41)$$

Par une intégration par partie, nous obtenons :

$$\int_0^1 u'(x) \cdot \omega'(x) dx - (u'(1) \cdot \omega(1) - u'(0) \cdot \omega(0)) = \int_0^1 f(x) \cdot \omega(x) dx \quad (14.42)$$

Il est intéressant d'imposer que  $\omega(0) = \omega(1) = 0$  et nous obtenons alors :

$$\int_0^1 u'(x) \cdot \omega'(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot \omega(x) dx \quad (14.43)$$

Le problème variationnel revient à trouver la fonction  $u$  qui vérifie cette équation pour un ensemble de fonctions test  $\omega$ .

**Remarque 14.1** • On constate que dans ce nouveau problème, la dérivée seconde sur la fonction  $u$  n'apparaît plus et que seules des dérivations simples sont présentes. La solution du problème variationnel est donc a priori moins régulière que la solution forte. On parle alors de **solution faible**

- Le problème variationnel ainsi posé s'apparente à la problématique d'une équation au sens des distributions (voir chapitre 11). Les fonctions tests étaient alors les espaces fonctionnels de Schwartz  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{D}$ .

- Le problème variationnel présenté ici n'est pas forcément lié à un problème de minimisation de fonctionnelle comme ce que nous avons déjà vu. Le formalisme variationnel prend donc un sens plus général que précédemment.

Il est clair que la solution forte est une solution faible, mais l'inverse est elle vraie ? S'il y a unicité de la solution du problème variationnel, alors nous aurons bien l'équivalence. Dans le cas contraire, le problème direct et le problème variationnel ne peuvent être considérés comme équivalents.

Appliquons une intégration par partie inverse :

$$\int_0^1 -u''(x) \cdot \omega(x) dx - (u'(1) \cdot \omega(1) - u'(0) \cdot \omega(0)) = \int_0^1 f(x) \cdot \omega(x) dx \quad (14.44)$$

C'est à dire :

$$\int_0^1 (-u''(x) - f(x)) \cdot \omega(x) dx = 0 \quad (14.45)$$

Il faut donc choisir l'ensemble des fonctions test  $\omega$  s'annulant en 0 et en 1 telles que l'équation précédente soit équivalente à l'équation de la solution forte :

$$-u''(x) - f(x) = 0 \quad (14.46)$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, nous pouvons poser  $\phi(x) = x(x-1)$  et choisir  $\omega(x) = \phi(x) \cdot (-u''(x) - f(x))$ . Par construction, nous avons que  $\omega(0) = \omega(1) = 0$  et nous obtenons :

$$\int_0^1 (-u''(x) - f(x))^2 \cdot \phi(x) dx = 0 \quad (14.47)$$

Comme l'intégrant est positif cela revient à :

$$(-u''(x) - f(x))^2 \cdot \phi(x) = 0 \quad \text{presque partout} \quad (14.48)$$

Sur  $]0, 1[$ , comme  $\phi(x)$  est strictement positive, nous avons :

$$-u''(x) - f(x) = 0 \quad (14.49)$$

Il est donc possible montrer que la solution faible est équivalente à la solution forte. Mais, il est clair que cela dépend de l'ensemble des fonctions test  $\omega$  que l'on considère.

Dans la suite du cours, nous allons essayer de répondre à un certain nombre de questions :

1. Comment définir l'ensemble des fonctions test  $\omega$  à considérer pour un problème d'EDP donné ?
2. Y a-t-il unicité de la solution du problème variationnel ? Cela se traduisant par la question : Sous quelles conditions la formulation variationnelle est-elle équivalente à la formulation directe ?
3. Sous quelles conditions la formulation variationnelle correspond-elle à un problème de minimisation ?
4. Comment traduire le formalisme variationnel en un algorithme numérique capable d'approcher la solution forte analytique ?
5. Comment évaluer la vitesse de convergence de cette approche numérique ?

### 14.6.1. Des espaces fonctionnels pour le problème variationnel

Nous avons déjà évoqué les espaces de Schwartz vus pour les distributions. Mais les espaces  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{D}$  ne correspondent pas vraiment à notre problématique. Sur un ensemble  $\Omega$ , les fonctions continues  $C^0(\Omega)$  sont aussi un espace de fonctions. Néanmoins, dans notre problématique il faut assurer l'existence des intégrales et de plus l'espace  $C^0(\Omega)$  n'est pas un espace complet pour les normes habituelles.

**Définition 14.1** L'espace fonctionnel  $L^2(\Omega)$  des fonctions de carré intégrable est défini par :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2(x) d\Omega < +\infty \right\}$$

L'espace  $L^2(\Omega)$  est muni d'un produit scalaire naturel :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) d\Omega \quad (14.50)$$

et donc d'une norme :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{\Omega} f^2(x) d\Omega} \quad (14.51)$$

Par la suite, on notera cette norme  $\|f\|_{0,\Omega}$  pour des raisons de cohérence avec les définitions introduites ultérieurement.

Muni de ce produit scalaire, l'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace complet. Il s'agit d'un espace hilbertien (cf définition 7.1). A priori, il s'agit donc d'un espace fonctionnel tout à fait intéressant pour traiter les problèmes variationnels. Et pourtant, il est en général insuffisant.

En effet, considérons sur un ensemble  $\Omega = [0, 1]$  deux fonctions  $f$  et  $g$  appartenant à  $L^2(\Omega)$ . Posons que  $f(x) = g(x)$  sur  $]0, 1[$ ,  $f(0) = f(1) = 0$  et  $g(0) = g(1) = 1$ . Par définition de l'intégrale, nous avons que  $\|f - g\|_{0,\Omega}$ , c'est à dire que  $f = g$  au sens de  $L^2(\Omega)$ .

Dans l'espace  $L^2(\Omega)$ , la notion de condition aux frontières n'a pas beaucoup de sens et en tous cas elle n'est pas liée à la valeur de la fonction sur l'intérieur de  $\Omega$ . Cela est gênant dans notre problématique où les solutions des EDP doivent vérifier des conditions aux frontières qui sont elles parfaitement contraignantes.

#### Les espaces de Sobolev d'ordre 1

Sauf mention particulière, nous allons maintenant considérer que l'espace  $\Omega$  est un espace ouvert.

**Définition 14.2** L'espace des **fonctions de Sobolev d'ordre 1** en dimension  $n$  noté  $H^1(\Omega)$  est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

Cet espace est muni du produit scalaire suivant :

$$\langle u, \omega \rangle_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left( u \cdot \omega + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} (u \cdot \omega + \nabla u \cdot \nabla \omega) d\Omega \quad (14.52)$$

et donc de la norme :

$$\|u\|_{1,\Omega} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{1,\Omega}} = \sqrt{\int_{\Omega} (u^2 + \nabla u \cdot \nabla u) d\Omega} \quad (14.53)$$

On notera que :

$$\|u\|_{0,\omega} \leq \|u\|_{1,\omega} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u}{x_i} \right\|_{0,\omega} \leq \|u\|_{1,\omega} \quad (14.54)$$

Venant de définir un nouvel espace vectoriel, nous sommes en droit de nous poser la question de savoir si ce nouvel espace modifie la problématique aux frontières. Pour s'en convaincre, nous allons considérer en dimension 1 un exemple : Soit  $\Omega = ]a, b[$  et  $\omega \in H^1(\Omega)$ .

Nous avons que :

$$\left( \omega(x) \frac{x-a}{b-a} \right)' = \omega'(x) \frac{x-a}{b-a} + \omega(x) \frac{1}{b-a} \quad (14.55)$$

En intégrant sur  $\Omega = ]a, b[$ , nous avons

$$\int_{\Omega} \left( \omega(x) \frac{x-a}{b-a} \right)' dx = \omega(b) = \int_{\Omega} \omega'(x) \frac{x-a}{b-a} dx + \int_{\Omega} \omega(x) \frac{1}{b-a} dx \quad (14.56)$$

Finalement, connaître la valeur de la fonction  $\omega$  et de sa dérivée sur  $\Omega = ]a, b[$  revient à imposer une valeur en  $b$  (on peut tenir un raisonnement similaire en  $a$ ). La notion de valeur aux frontières (ce qui correspond à les conditions de type Dirichlet) prend donc tout son sens bien que l'on travaille uniquement sur l'intérieur de  $\Omega$ .

**Définition 14.3** La restriction au bord de  $\Gamma$  d'une fonction  $\omega \in H^1(\Omega)$  est appelée **trace au bord** de  $\omega$  et est notée  $\omega|_{\Gamma}$  ou  $\gamma_0(\omega)$ .

**Théorème 14.1** L'ensemble des traces au bord des fonctions de  $H^1(\Omega)$  forme un sous espace de  $L^2(\Gamma)$  noté  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

$$\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma)$$

**Remarque 14.2** L'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$  étant ainsi défini, on a que :

$$\forall g \in H^{1/2}(\Gamma), \exists \omega_g \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma_0(\omega_g) = \omega|_{\Gamma} = g$$

La fonction  $\omega_g$  est alors appelée le **relèvement** de la condition aux frontières.

**Théorème 14.2** Si  $\omega \in H^1(\Omega)$ ,  $\exists C \in \mathbb{R}^+$  tel que :

$$\|\gamma_0(\omega)\|_{0,\Gamma} \leq C \cdot \|\omega\|_{1,\Omega}$$

On retrouve dans ce théorème la norme de  $L^2$  sur le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ .

**Définition 14.4**

$$H_0^1(\Omega) = \{ \omega \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(\omega) = 0 \}$$

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{ \omega \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(\omega) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \subsetneq \Gamma \}$$

**Théorème 14.3**

$$|u|_{1,\Omega} = \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$  et sur  $H_{\Gamma_0}^1$ .

**Remarque 14.3** Il est important de souligner que  $|u|_{1,\Omega} \neq \|u\|_{1,\Omega}$  et que  $|u|_{1,\Omega}$  n'est pas une norme sur  $H^1(\Omega)$ .

**Théorème 14.4** Les normes  $|u|_{1,\Omega}$  et  $\|u\|_{1,\Omega}$  sont équivalentes pour  $H_0^1(\Omega)$  et pour  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$

### Les espaces de Sobolev d'ordre 2

**Définition 14.5** L'espace de Sobolev d'ordre 2 en dimension  $n$  noté  $H^2(\Omega)$  est défini par :

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

Cet espace est muni du produit scalaire suivant :

$$\langle u, \omega \rangle_{2,\Omega} = \int_{\Omega} \left( u \cdot \omega + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} \right) d\Omega \quad (14.57)$$

et donc de la norme :

$$\|u\|_{2,\Omega} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{2,\Omega}} = \sqrt{\int_{\Omega} \left( u^2 + (\nabla u)^2 + \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right) d\Omega} \quad (14.58)$$

**Remarque 14.4**  $H^2(\Omega)$  est clairement un sous espace de  $H^1(\Omega)$  et les fonctions de  $H^2(\Omega)$  sont plus régulières que celles de  $H^1(\Omega)$ .

**Définition 14.6** Si  $\omega \in H^2(\Omega)$ , alors  $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}}$  sur  $\Gamma$  est appelée la **trace normale au bord** notée  $\gamma_1(\omega)$ .

$$\gamma_1(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \omega \cdot \mathbf{n}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire à  $\Gamma$ .

**Théorème 14.5** • L'ensemble des traces au bord de  $H^2(\Omega)$  forme un sous espace de  $L^2(\Gamma)$  noté  $H^{3/2}(\Gamma)$ .

$$\gamma_0(H^2(\Omega)) = H^{3/2}(\Gamma) \subsetneq H^{1/2}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma)$$

• L'ensemble des traces normales au bord de  $H^2(\Omega)$  est égal à  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

$$\gamma_1(H^2(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma)$$

**Théorème 14.6** Si  $g \in H^{3/2}(\Gamma)$  et  $h \in H^{1/2}(\Gamma)$ , alors il existe une fonction de relèvement  $\omega_{gh} \in H^2(\Omega)$  telle que :

$$\gamma_0(\omega_{gh}) = g \quad \text{et} \quad \gamma_1(\omega_{gh}) = h$$

De plus, on a la continuité :

$$\|\gamma_0(\omega)\|_{0,\Omega} + \|\gamma_1(\omega)\|_{0,\Omega} = \|g\|_{0,\Omega} + \|h\|_{0,\Omega} \leq C \|\omega\|_{2,\Omega}$$

**Définition 14.7**

$$H_0^2(\Omega) = \{\omega \in H^2(\Omega) \mid \gamma_0(\omega) = \gamma_1(\omega) = 0\}$$

$$H_{\Gamma_0, \Gamma_1}^2(\Omega) = \{\omega \in H^2(\Omega) \mid \gamma_0(\omega) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \subsetneq \Gamma \text{ et } \gamma_1(\omega) = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \subsetneq \Gamma\}$$

**Théorème 14.7**

$$|u|_{2,\Omega} = \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\Delta u)^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

est une norme sur  $H_0^2(\Omega)$ .

**Remarque 14.5**  $|u|_{2,\Omega}$  n'est pas une norme de  $H^2(\Omega)$ .

Nous avons défini les espaces de Sobolev d'ordre 1 et 2, ainsi que des espaces correspondant à des variantes de ceux-ci. Nous pouvons facilement généraliser et définir sans problème les espaces de Sobolev d'ordre  $m$   $H^m(\Omega)$  et leurs différentes variantes. Ces différentes définitions sont plus ou moins adaptées aux problématiques d'EDP rencontrées.

### Les espaces de Sobolev et les approximations numériques

Nous verrons que les méthodes numériques que nous chercherons à mettre en place lors des prochains chapitres nécessitent la décomposition du domaine  $\Omega$  en sous-domaines  $\Omega_i$ . Dans ce contexte, le théorème suivant s'avère fondamental.

**Théorème 14.8** Soit  $\Omega$  un domaine composé de sous domaines  $\Omega_i$  et  $u(x)$  une fonction telle que sa restriction à chaque  $\Omega_i$  est un polynôme de degré  $n$ . On suppose que les polynômes en question appartiennent à  $H^1(\Omega)$ .

- Si la fonction  $u(x)$  est continue aux frontières des  $\Omega_i$ , alors  $u(x) \in H^1(\Omega)$ .
- Si  $u(x)$  est différentiable et si ses dérivées sont continues aux frontières des  $\Omega_i$ , alors  $u(x) \in H^2(\Omega)$ .

#### 14.6.2. Vers les théorèmes de Lax-Milgram

**Définition 14.8** Une forme linéaire  $l$  sur un espace  $\mathcal{E}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$  est dite **continue** si :

$$\exists C \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |l(\omega)| \leq C \|\omega\|_{\mathcal{E}} \quad \forall \omega \in \mathcal{E}$$

**Exemple 14.1** Posons  $\mathcal{E} = L^2(\Omega)$ . Alors :

$$l_f : \omega \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \cdot \omega(x) d\Omega$$

est une forme linéaire continue. En effet, en appliquant l'inégalité de Cauchy, nous avons :

$$|l_f(\omega)| = \left| \int_{\Omega} f(x) \cdot \omega(x) d\Omega \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \cdot \|\omega\|_{0,\Omega}$$

Dans ce cas  $C = \|f\|_{0,\Omega}$ .

**Définition 14.9** Une **forme bilinéaire**  $a$  sur un espace  $\mathcal{E}$  est une application :

$$a : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$$

linéaire par rapport à chacune de ses composantes.

**Définition 14.10** Une forme bilinéaire  $a$  sur un espace  $\mathcal{E}$  est dite **continue** si :

$$\exists C \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |a(u, \omega)| \leq C \|u\|_{\mathcal{E}} \cdot \|\omega\|_{\mathcal{E}} \quad \forall u, \omega \in \mathcal{E}$$

**Définition 14.11** Une forme bilinéaire  $a$  sur un espace  $\mathcal{E}$  est dite **symétrique** si :

$$a(u, \omega) = a(\omega, u)$$

**Exemple 14.2** Posons  $\mathcal{E} = L^2(\Omega)$ . Alors

$$a(u, \omega) = \int_{\Omega} u \cdot \omega \, d\Omega$$

est une forme bilinéaire continue symétrique. L'inégalité de Cauchy nous donne en effet :

$$|a(u, \omega)| \leq \|u\|_{0,\Omega} \cdot \|\omega\|_{0,\Omega}$$

Dans ce cas  $C = 1$ .

**Exemple 14.3** Posons  $\mathcal{E} = H^1(\Omega)$ . Alors

$$a(u, \omega) = \int_{\Omega} u \cdot \omega + \nabla u \cdot \nabla \omega \, d\Omega$$

est une forme bilinéaire continue symétrique. L'inégalité de Cauchy nous donne :

$$|a(u, \omega)| \leq \|u\|_{0,\Omega} \cdot \|\omega\|_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \cdot \left\| \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \leq (n+1) \|u\|_{1,\Omega} \cdot \|\omega\|_{1,\Omega}$$

Dans ce cas  $C = n+1$ .

**Définition 14.12** Une forme bilinéaire est dite **coercive** (ou elliptique) si  $\exists \alpha > 0$  tel que :

$$a(\omega, \omega) \geq \alpha \|\omega\|_{\mathcal{E}}^2$$

**Théorème 14.9 (Lax-Milgram I)** Soit  $\mathcal{E}$  un espace de Hilbert,  $l$  une forme linéaire continue de  $\mathcal{E}$  et  $a$  une forme bilinéaire continue de  $\mathcal{E}$ .

Si  $a$  est coercive, alors il existe une unique solution  $u$  du problème variationnel suivant : Trouver  $u \in \mathcal{E}$  telle que  $a(u, \omega) = l(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{E}$ .

Il est évident que ce premier théorème de Lax-Milgram nous servira à démontrer l'équivalence problème direct et variationnel dans la mesure où nous pouvons vérifier les conditions d'application.

**Théorème 14.10 (Lax-Milgram II)** En plus des conditions du premier théorème, on suppose  $a$  symétrique. Le problème variationnel du premier théorème est équivalent au problème de minimisation suivant. Trouver  $u$  telle que :

$$J(u) = \inf_{\omega \in \mathcal{E}} J(\omega) = \inf_{\omega \in \mathcal{E}} \frac{1}{2} a(\omega, \omega) - l(\omega)$$

Ce second théorème de Lax-Milgram nous permettra de montrer qu'un problème variationnel correspond à un problème de minimisation de fonctionnelle.

**Remarque 14.6** Les théorèmes de Lax-Milgram s'appliquent sur un espace hilbertien quelconque. Bien entendu, dans notre contexte, l'espace  $\mathcal{E}$  pourra être l'un des espaces de Sobolev choisi en fonction du problème d'EDP considéré.

**Troisième partie .**

## **Méthode des éléments finis**



# 15. Méthode de Ritz

## 15.1. Principe général

Dans la partie II, nous avons vu qu'un problème posé sous la forme d'une EDP et de conditions aux frontières pouvait se traduire par un problème variationnel. L'équivalence de ces deux problèmes pouvait être assurée par le premier théorème de Lax-Milgram 14.9. Il est à noter que, dans bien des cas, la forme bilinéaire correspondante pourra être considérée comme symétrique, et grâce au second théorème de Lax-Milgram 14.10, nous pourrons alors faire le lien avec un problème de minimisation de fonctionnelle.

A partir de maintenant, nous allons supposer que le problème variationnel à traiter est de trouver  $u \in \mathcal{E}$  telle que :

$$a(u, \omega) = l(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{E} \quad (15.1)$$

et que les hypothèses du théorème 14.9 sont vérifiées.

L'objet de ce chapitre est, à partir de ce problème variationnel, de construire une approximation numérique de la solution  $u$ . Pour cela, la méthode de Ritz consiste à se donner des familles de fonctions appelées fonctions d'interpolation de Ritz ou plus simplement fonctions de Ritz et à décrire la solution approchée du problème comme étant une combinaison linéaire de ces fonctions. La méthode se traduit alors par la résolution d'un système linéaire et permet de se ramener à un problème aux dimensions finies.

## 15.2. Mise en oeuvre

Pour simplifier la présentation, nous allons admettre que le problème physique impose des conditions homogènes aux frontières. Considérons alors  $N$  fonctions  $\phi_j \in \mathcal{E}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , appelées fonctions d'interpolation de Ritz, vérifiant les conditions homogènes.

Nous allons chercher une approximation  $u^N(x)$  de  $u(x)$  telle que :

$$u(x) \simeq u^N(x) = \sum_{j=1}^N u_j \cdot \phi_j(x) \quad (15.2)$$

Le problème devient alors un problème de dimension  $N$ . On notera  $\mathcal{E}^N$  l'espace vectoriel engendré par les fonctions de Ritz  $\phi_j$ . Il est clair que  $\mathcal{E}^N$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{E}$ .

Ceci étant posé, le problème ainsi approché s'écrit :

- Trouver  $u^N$  tel que :

$$a(u^N, \omega^N) = l(\omega^N) \quad \forall \omega^N \in \mathcal{E}^N \quad (15.3)$$

Cela se traduit par :

$$a\left(\sum_{j=1}^N u_j \cdot \phi_j, \omega^N\right) = l(\omega^N) \quad \forall \omega^N \in \mathcal{E}^N \quad (15.4)$$

## 15. Méthode de Ritz

Par linéarité, nous pouvons écrire :

$$\sum_{j=1}^N u_j \cdot a(\phi_j, \omega^N) = l(\omega^N) \quad \forall \omega^N \in \mathcal{E}^N \quad (15.5)$$

Il est également possible de décomposer linéairement les fonctions  $\omega^N$  sur une autre famille de fonctions de Ritz  $\bar{\phi}_i$  appartenant à  $\mathcal{E}^N$ . La linéarité de cette nouvelle décomposition permet alors de réécrire le problème :

$$\sum_{j=1}^N u_j \cdot a(\phi_j, \bar{\phi}_i) = l(\bar{\phi}_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (15.6)$$

Nous obtenons alors un système linéaire de la forme :

$$A \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (15.7a)$$

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1, \bar{\phi}_1) & \cdots & a(\phi_N, \bar{\phi}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\phi_1, \bar{\phi}_N) & \cdots & a(\phi_N, \bar{\phi}_N) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\bar{\phi}_1) \\ \vdots \\ l(\bar{\phi}_N) \end{pmatrix} \quad (15.7b)$$

**Remarque 15.1** Les fonctions  $\phi_j$  et  $\bar{\phi}_i$  doivent être choisies d'une part pour la matrice  $A$  soit inversible et d'autre part pour que l'espace  $\mathcal{E}^N$  converge vers l'espace  $\mathcal{E}$ .

**Remarque 15.2** • Un choix assez naturel est de choisir la même famille de fonctions  $\phi_j$  et  $\bar{\phi}_i$ . On parle alors de la **méthode de Rayleigh-Ritz**.

- Lorsque les familles  $\phi_j$  et  $\bar{\phi}_i$  seront différentes, on parlera de la **méthode de Petrov-Galerkin**.

### 15.3. Analyse de la méthode

La méthode de Ritz nous donne un moyen efficace de déterminer une approximation numérique de la solution  $u$ . Néanmoins, cette approche présente également un certain nombre de points critiques :

- Un point délicat concerne le choix des fonctions de Ritz. Elles doivent être linéairement indépendantes et être suffisamment riches pour que  $\mathcal{E}^N$  converge vers l'espace  $\mathcal{E}$ . Enfin, elles doivent vérifier les conditions aux frontières ce qui en dimension supérieure à 1 n'est pas forcément chose aisée (frontières complexes).
- Pour des fonctions  $\phi_j$  et  $\bar{\phi}_i$  non standards, les calculs des coefficients  $a_{ij}$  et  $f_i$  peuvent ne pas être réalisables analytiquement et nécessiter une intégration numérique, ce qui est très pénalisant en terme de coût de calculs.
- Dans le cas général, la signification physique des coefficients  $u_j$  n'est pas évidente.

# 16. Méthode des éléments finis en dimension 1

**Important :** Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la méthode de Ritz en toute généralité. Avant de présenter la méthode des éléments finis (FEM), il est essentiel de souligner que la FEM est une méthode de Ritz particulière. La FEM est en effet une méthode qui permet de construire les fonctions de Ritz les plus adaptées possible à une implémentation informatique. Pour simplifier, la FEM peut être vue comme une approche cherchant à rationaliser la méthode de Ritz pour aboutir à un algorithme efficace.

## 16.1. Problématique

Afin d'illustrer la méthode, nous allons chercher à résoudre le problème générique suivant (constitué d'une EDO et de deux conditions aux frontières) :

$$\begin{cases} p(x) \cdot u(x) - \frac{d}{dx} (q(x) \cdot \frac{du}{dx}) = r(x) \\ u(0) = c \\ q(L) \cdot \frac{du}{dx}(L) = d \end{cases} \quad (16.1)$$

avec  $p(x) \geq 0$ ,  $q_1 \leq q(x) \leq q_2$  sur  $]0, L[$ .

En multipliant par  $\omega$  et en intégrant par parties, nous obtenons le problème variationnel suivant :

$$\int_0^L p(x) \cdot u(x) \cdot \omega(x) + q(x) \cdot u'(x) \cdot \omega'(x) dx - [q(x) \cdot u'(x) \cdot \omega(x)]_0^L = \int_0^L r(x) \cdot \omega(x) dx \quad (16.2)$$

L'espace de travail est en première approche  $H^1(]0, L[)$ . On peut néanmoins voir qu'en  $x = 0$ , apparaît une condition essentielle, que, en posant la fonction de relèvement  $u_g$  telle que  $u_g \in H^1(]0, L[)$  et  $u_g(0) = c$ , on peut poser  $u = u_0 + u_g$ . La fonction  $u_0$  a donc une condition homogène en  $x = 0$  et le problème variationnel sur la fonction  $u_0$  devient alors :

$$a(u_0, \omega) = l(\omega) - a(u_g, \omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{E} \quad (16.3)$$

avec  $\mathcal{E} = \{\omega \in H^1(]0, L[) \mid \omega(0) = 0\} = H_{\{0\}}^1(]0, L[)$  et en posant :

$$a(u, \omega) = \int_0^L p(x) \cdot u(x) \cdot \omega(x) + q(x) \cdot u'(x) \cdot \omega'(x) dx \quad (16.4)$$

$$l(\omega) = d \cdot \omega(L) + \int_0^L r(x) \cdot \omega(x) dx \quad (16.5)$$

La méthode de Ritz consiste à poser :

$$u(x) = u_0(x) + u_g(x) = \sum_{j=1}^n u_{0j} \phi_j(x) \quad (16.6)$$

Notre problématique sera de construire le système linéaire global :

$$A \cdot \mathbf{u}_O = \mathbf{F} \quad (16.7)$$

où :

$$a_{ij} = a(\phi_j(x), \phi_i(x)) \quad \text{et} \quad f_i = l(\phi_i(x)) - a(u_g(x), \phi_i(x)) \quad (16.8)$$

Le problème variationnel étant clairement posé, nous allons maintenant voir la mise en œuvre de la FEM.

## 16.2. Maillage

La méthode des éléments finis comme le laisse deviner son nom implique une décomposition du domaine  $\Omega$  en sous domaines  $\Omega_k$  que nous appellerons des **éléments**.

### 16.2.1. Les éléments

Dans le cadre de notre problématique, nous allons décomposer le domaine  $]0, L[$  en  $n_{el}$  éléments, voir figure 16.1.

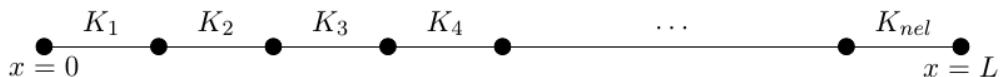


FIGURE 16.1. – Maillage en dimension 1.

### 16.2.2. Les nœuds

En dimension 1, chaque élément  $K$  se définit par 2 **nœuds géométriques** (deux extrémités du segment)  $n_g^K = 2$ . On notera  $K = [x_1^K, x_2^K]$  un élément générique et  $h^K$  sa taille qui en dimension 1, est tout simplement sa longueur  $h^K = x_2^K - x_1^K$  (avec  $x_1^K < x_2^K$ ).

Nous verrons que pour des ordres supérieur à 1 que les nœuds géométriques ne suffisent pas. Il faut alors ajouter des **nœuds de calcul** ou **nœuds d'interpolation** supplémentaires, voir figure 16.2. On comptera donc au total  $n_t^K$  nœuds pour chaque élément. On notera également que les nœuds géométriques seront comptés en premier chaque éléments.

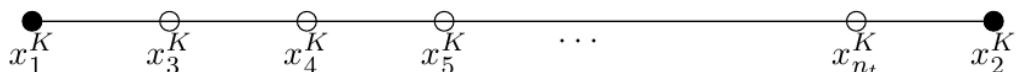
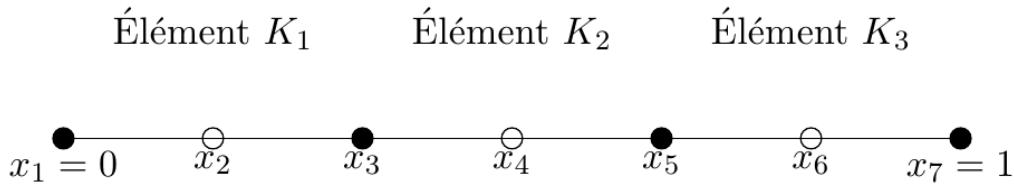


FIGURE 16.2. – Nœuds géométriques et nœuds de calcul en dimension 1 pour l'élément  $K$ .

### 16.2.3. Exemple

Par exemple, dans notre problématique, nous pouvons considérer un maillage de 3 éléments (avec  $L = 1$ ) pour lequel chaque élément possède 2 nœuds géométriques et 1 nœud de calcul (milieu de l'élément), voir figure 16.3.

Ceci étant posé, une chose importante est d'enregistrer ce maillage sous une forme adaptée à l'informatique. Pour cela, nous allons considérer un premier tableau (Tab. coord. 16.1) contenant les coordonnées de tous les nœuds.

FIGURE 16.3. – Maillage :  $n_{el} = 3$ ,  $n_g^K = 2$  et  $n_t^K = 3$ .

Tab. coord.		
$x$	$y$	$z$
0.0	0.0	0.0
0.1667	0.0	0.0
0.3333	0.0	0.0
0.5	0.0	0.0
0.6667	0.0	0.0
0.8333	0.0	0.0
1.0	0.0	0.0

TABLE 16.1. – Tableau des coordonnées.

**Remarque 16.1** L'ordre dans lequel les coordonnées sont enregistrés dans le tableau des coordonnées n'a aucune importance.

Pour décrire les noeuds associés à chaque éléments, nous allons créer un tableau dit de connectivité (Tab. connec. 16.2).

Il est important de souligner que nous pouvons ordonner les noeuds selon un ordre arbitraire. En particulier, il est intéressant de mettre les noeuds associés à des conditions essentielles (dans notre cas le noeud 1) à la fin. Pour cela, nous réordonnons les noeuds dans un tableau numérotation (Tab. Numer. 16.3). Enfin, nous pouvons associer à chaque élément les numéros des noeuds associés dans un tableau d'adressage (Tab. Adress. 16.4).

Tab. Connec.			
Élément	Nœuds géométriques		Autres noeuds
	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3
1	1	3	2
2	3	5	4
3	5	7	6

TABLE 16.2. – Tableau de connectivité.

Tab. Numer.	
Noeud	num
1	7
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6

TABLE 16.3. – Tableau de numérotation.

Tab. Adress.			
Élément	Num. 1	Num. 2	Num. 3
1	7	2	1
2	2	4	3
3	4	6	5

TABLE 16.4. – Tableau d'adressage.

### 16.3. Formulation variationnelle élémentaire

Il n'est pas possible de ramener le problème variationnel 16.1 sur un seul élément  $K$ . Le calcul variationnel sur un élément  $K$  doit être vu uniquement comme un intermédiaire de calcul.

Si l'on réalise l'intégration du problème variationnel (16.2) sur l'élément  $K = [x_1^K, x_2^K]$ , nous obtenons :

$$\int_{x_1^K}^{x_2^K} p(x) \cdot u(x) \cdot \omega(x) + q(x) \cdot u'(x) \cdot \omega'(x) dx = \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x) \cdot \omega(x) dx + s_{12}^K \cdot \omega(x_2^K) + s_{11}^K \cdot \omega(x_1^K) \quad (16.9)$$

où nous introduisons les **variables secondaires**  $s_{11}^K$  et  $s_{12}^K$  définies par :

$$s_{11}^K = -q(x_1^K) \cdot u'(x_1^K) \quad \text{et} \quad s_{12}^K = q(x_2^K) \cdot u'(x_2^K) \quad (16.10)$$

En considérant le changement  $u = u_0 + u_g$ , nous pouvons retrouver un problème variationnel élémentaire pour la fonction  $u_0$  :

$$\begin{aligned} \int_{x_1^K}^{x_2^K} p(x) \cdot u_0(x) \cdot \omega(x) + q(x) \cdot u'_0(x) \cdot \omega'(x) dx = \\ \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x) \cdot \omega(x) dx + s_{12}^K \cdot \omega(x_2^K) + s_{11}^K \cdot \omega(x_1^K) \\ - \int_{x_1^K}^{x_2^K} p(x) \cdot u_g(x) \cdot \omega(x) + q(x) \cdot u'_g(x) \cdot \omega'(x) dx \end{aligned} \quad (16.11)$$

Comme dans le problème variationnel global (16.2), l'idée est d'appliquer une méthode de Ritz avec un base de fonction  $\Psi_j^K$  dites **fonctions d'interpolation** sur ce problème variationnel élémentaire.

on posera  $u_{|K} \simeq u_0^K + u_g^K$  avec :

$$u_0^K = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{0j}^K \cdot \Psi_j^K(x) \quad \text{et} \quad u_g^K = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \cdot \Psi_j^K(x) \quad (16.12)$$

où  $n_d^K$  est le degré de liberté associé à l'élément  $K$  qui en général correspond au nombre de noeud  $n_t^K$ . En suivant la méthode de Ritz sur un problème variationnel élémentaire, nous obtenons, un système linéaire élémentaire :

$$A^K \cdot \mathbf{u}_0^K = \mathbf{F}^K + \mathbf{S}^K \quad (16.13)$$

avec :

$$a_{ij}^K = \int_{x_1^K}^{x_2^K} p(x) \cdot \Psi_j^K(x) \cdot \Psi_i^K(x) + q(x) \cdot \Psi_j'^K(x) \cdot \Psi_i'^K(x) dx \quad (16.14a)$$

$$f_i^K = \int_{x_1^K}^{x_2^K} r(x) \cdot \Psi_i^K(x) dx - \int_{x_1^K}^{x_2^K} p(x) \cdot u_g(x) \cdot \Psi_i^K(x) + q(x) \cdot u_g'(x) \cdot \Psi_i'^K(x) dx \quad (16.14b)$$

$$s_i^K = s_{12}^K \cdot \Psi_i^K(x_2^K) + s_{11}^K \cdot \Psi_i^K(x_1^K) \quad (16.14c)$$

La matrice élémentaire  $A^K$  (de coefficients  $a_{ij}^K$ ) est souvent appelée **matrice de rigidité** faisant ainsi référence aux premières applications de la méthode des éléments finis dans le domaine des structures. Le vecteur  $\mathbf{u}_0^K$  (de coefficients  $u_{0j}^K$ ) est appelé **vecteur des degrés de liberté élémentaires**. Le vecteur  $\mathbf{F}^K + \mathbf{S}^K$  est appelé **vecteur des sollicitations élémentaires**.

### 16.3.1. Élément de référence

Dans le problème variationnel élémentaire, nous avons considéré une base de fonction  $\Psi_i^K$  pour chaque élément  $K$ . Afin de rationaliser la construction de ces fonctions  $\Psi_i^K$ , nous allons définir un **élément de référence**  $\hat{K} = [-1, 1]$ . Cet élément ne correspond nullement à l'un des éléments du maillage, néanmoins par les transformations géométriques suivantes nous pouvons ramener n'importe quel élément du maillage à cet élément de référence :

$$\begin{aligned} T^K : \quad \hat{K} &\longrightarrow K \\ [-1, 1] &\longrightarrow [x_1^K, x_2^K] \\ \xi &\longmapsto x = \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \end{aligned} \quad (16.15)$$

avec  $dx = h^K / 2d\xi$ . Les transformations  $T^K$  sont clairement inversibles :

$$\begin{aligned} (T^K)^{-1} : \quad K &\longrightarrow \hat{K} \\ [x_1^K, x_2^K] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \xi = \frac{2x - (x_1^K + x_2^K)}{h^K} \end{aligned} \quad (16.16)$$

avec  $d\xi = 2/h^K dx$ .

L'élément de référence  $\hat{K}$  étant donné, nous pouvons définir une base de fonction générique  $\hat{\Psi}_i(\xi)$  sur  $\hat{K}$ . En utilisant les transformations géométriques  $T^K$ , nous pouvons construire à partir des fonction  $\hat{\Psi}_i(\xi)$  une base de fonction  $\Psi_i^K(x)$  sur chaque élément  $K$  en posant :

$$\Psi_i^K(x) = \Psi_i^K(T^K(\xi)) = \hat{\Psi}_i(\xi) \quad (16.17)$$

ou encore :

$$\hat{\Psi}_i(\xi) = \hat{\Psi}_i((T^K)^{-1}(x)) = \Psi_i^K(x) \quad (16.18)$$

## 16. Méthode des éléments finis en dimension 1

Nous avons les relations différentielles suivantes :

$$\frac{d\Psi_i^K}{dx} = \frac{2}{h^K} \frac{d\hat{\Psi}_i}{d\xi} \quad (16.19a)$$

$$\frac{d^2\Psi_i^K}{dx^2} = \frac{4}{(h^K)^2} \frac{d^2\hat{\Psi}_i}{d\xi^2} \quad (16.19b)$$

On en déduit que :

$$u_g^K(x) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \cdot \hat{\Psi}_j(\xi) \quad \text{et} \quad \frac{du_g^K}{dx} = \frac{2}{h^K} \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \cdot \frac{d\hat{\Psi}_j(\xi)}{d\xi} \quad (16.20)$$

Par changement de variable les coefficients  $a_{ij}^K$ ,  $f_i^K$  et  $s_i^K$  données par les équations (16.14) s'écriront :

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \cdot \hat{\Psi}_j(\xi) \cdot \hat{\Psi}_i(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{2}{h^K} \int_{-1}^1 q \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \cdot \frac{d\hat{\Psi}_j(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\hat{\Psi}_i(\xi)}{d\xi} d\xi \\ f_i^K &= \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 r \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \cdot \hat{\Psi}_i(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{h^K}{2} \int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \cdot \hat{\Psi}_j(\xi) \right) \cdot \hat{\Psi}_i(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{2}{h^K} \int_{-1}^1 q \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \cdot \frac{d\hat{\Psi}_j(\xi)}{d\xi} \right) \cdot \frac{d\hat{\Psi}_i(\xi)}{d\xi} d\xi \\ s_i^K &= s_{11}^K \cdot \hat{\Psi}_i(-1) + s_{12}^K \cdot \hat{\Psi}_i(1) \end{aligned} \quad (16.21)$$

### 16.3.2. Construction des fonctions $\hat{\Psi}_i$

On peut a priori choisir beaucoup de fonctions différentes pour les  $\hat{\Psi}_i$ . Un choix pertinent consiste à choisir pour ces fonctions des polynômes de Lagrange tels que si on note  $\xi_i$  les noeuds de l'élément de référence  $\hat{K}$  :

$$\hat{\Psi}_j(\xi_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (16.22)$$

Dans ces conditions, on notera les deux polynômes de Lagrange non nuls aux extrémités  $-1$  et  $1$  sont ceux liés aux noeuds géométriques de l'élément et donc le vecteur  $S^K$  sera de la forme :

$$S^K = \begin{pmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.23)$$

### Approximation linéaire

Pour une approximation linéaire, nous considérons des polynômes de Lagrange d'ordre 1. Nous avons alors uniquement besoin des deux noeuds géométriques qui définissent ainsi deux fonctions d'interpolations linéaires  $\hat{\Psi}_1(\xi)$  et  $\hat{\Psi}_2(\xi)$ , voir figure 16.4.

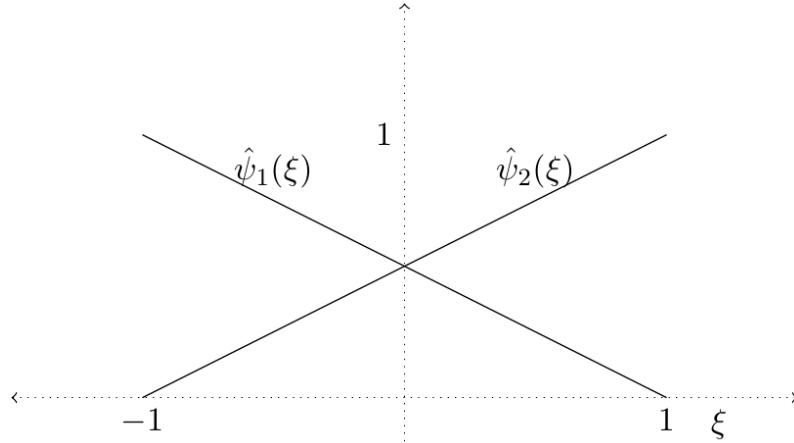


FIGURE 16.4. – Fonctions d'interpolation linéaires sur  $\hat{K}$ .

Ces fonctions d'interpolations sont données par :

$$\hat{\Psi}_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad (16.24a)$$

$$\hat{\Psi}_2(\xi) = \frac{\xi+1}{2} \quad (16.24b)$$

Nous aurons aussi :

$$\frac{d\hat{\Psi}_1(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{2} \quad (16.25a)$$

$$\frac{d\hat{\Psi}_2(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} \quad (16.25b)$$

C'est à dire :

$$\frac{d\Psi_1^K(x)}{dx} = -\frac{1}{h^K} \quad (16.26a)$$

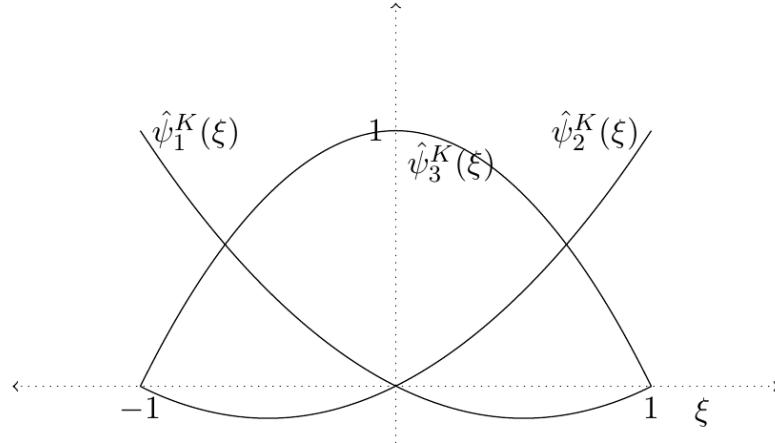
$$\frac{d\Psi_2^K(x)}{dx} = \frac{1}{h^K} \quad (16.26b)$$

### Approximation quadratique

Pour une approximation quadratique, nous considérons des polynômes de Lagrange d'ordre 2. Nous aurons alors besoin d'un noeud de calcul supplémentaire (3 noeuds) que l'on pourra choisir en  $\xi = 0$  ce qui permettra de définir 3 fonctions d'interpolations  $\hat{\Psi}_1(\xi)$ ,  $\hat{\Psi}_2(\xi)$  et  $\hat{\Psi}_3(\xi)$ , voir figure 16.5. Ces fonctions d'interpolations sont données par :

$$\hat{\Psi}_1(\xi) = \frac{\xi(1-\xi)}{2} \quad (16.27a)$$

$$\hat{\Psi}_2(\xi) = \frac{\xi(\xi+1)}{2} \quad (16.27b)$$


 FIGURE 16.5. – Fonctions d’interpolation quadratiques sur  $\hat{K}$ .

$$\hat{\Psi}_3(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (16.27c)$$

Nous aurons aussi :

$$\frac{d\hat{\Psi}_1(\xi)}{d\xi} = \frac{2\xi - 1}{2} \quad (16.28a)$$

$$\frac{d\hat{\Psi}_2(\xi)}{d\xi} = \frac{2\xi + 1}{2} \quad (16.28b)$$

$$\frac{d\hat{\Psi}_3(\xi)}{d\xi} = -2\xi \quad (16.28c)$$

C'est à dire :

$$\frac{d\Psi_1^K(x)}{dx} = \frac{2\xi - 1}{h^K} \quad (16.29a)$$

$$\frac{d\Psi_2^K(x)}{dx} = \frac{2\xi + 1}{h^K} \quad (16.29b)$$

$$\frac{d\Psi_3^K(x)}{dx} = -\frac{4\xi}{h^K} \quad (16.29c)$$

### 16.3.3. Intégration et calcul des coefficients élémentaires

Après avoir construit les fonctions d’interpolation, il reste à expliciter les coefficients  $a_{ij}^K$ ,  $f_i^K$  et  $s_i^K$ . Dans les cas où les fonctions  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $r(x)$  ne sont pas trop complexes, il est possible de trouver une expression analytique de ces coefficients. Dans le cas contraire, les intégrales doivent être calculées numériquement. Un cas particulier très utile en pratique est celui où les fonctions sont constantes sur chaque élément :  $p|_K(x) = p^K$ ,  $q|_K(x) = q^K$  et  $r|_K(x) = r^K$ .

#### Approximation linéaire et fonctions constantes

Dans le cas linéaire et si les fonctions  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $r(x)$  sont constantes sur les éléments, nous aurons :

$$A^K = \frac{h^K p^K}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{q^K}{h^K} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (16.30a)$$

et

$$\mathbf{F}^K + \mathbf{S}^K = \frac{h^K r^K}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \end{pmatrix} \quad (16.30b)$$

### Approximation quadratique et fonctions constantes

Dans le cas quadratique et si les fonctions  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $r(x)$  sont constantes sur les éléments, nous aurons :

$$A^K = \frac{h^K p^K}{30} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix} + \frac{q^K}{3h^K} \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{pmatrix} \quad (16.31a)$$

et

$$\mathbf{F}^K + \mathbf{S}^K = \frac{h^K r^K}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.31b)$$

## 16.4. Assemblage

Le traitement du problème variationnel élémentaire ne doit pas nous faire oublier que le problème à considérer est le problème variationnel global. Il faut donc retrouver la méthode de Ritz sur ce problème variationnel global.

### 16.4.1. Fonctions de Ritz

A partir des fonctions d'interpolations  $\Psi_i^K$  sur chaque éléments  $K$ , nous devons reconstruire des fonctions de Ritz sur tous l'espace  $[0, L]$ . Sur chaque élément, les fonctions d'interpolation sont polynomiales et appartiennent  $H^1(K)$ . Si nous voulons que les fonction de Ritz appartiennent à  $H^1([0, L])$ , en vertu du théorème 14.8, il suffit de combiner des fonctions d'interpolation élémentaires et d'assurer la continuité aux frontières.

Une façon d'arriver à cela est de considérer chaque noeud de l'espace total et de lire dans le tableau d'adressage 16.4 quels sont les éléments contenant ce noeud d'une part et d'autre part pour chaque élément contenant ce noeud de combiner la fonction d'interpolation non nulle associée à ce noeud.

#### Exemple et approximation linéaire

En reprenant notre exemple de maillage en trois éléments, nous pouvons construire, dans le cadre de l'approximation linéaire, 4 fonctions de Ritz  $\Phi_i$ , schématisées à la figure 16.6. On remarquera que dans ce cas seuls les noeuds géométriques interviennent.

#### Exemple et approximation quadratique

En reprenant le même exemple de maillage en trois éléments, nous pouvons construire, dans le cadre de l'approximation quadratique, 4 fonctions de Ritz  $\Phi_i$ , schématisées à la figure 16.7. On remarquera que dans ce cas, il faut introduire un noeud de calcul autre que géométrique.

**Remarque 16.2** Nous pouvons noter que s'agissant du cas linéaire comme du cas quadratique, la fonction de Ritz  $\Phi_1(x)$  n'appartient pas à l'espace fonctionnel de travail  $\mathcal{E} = H_{\{0\}}^1([0, L])$  donné pour le problème variationnel associé à la fonction  $u_0(x)$  (voir 16.3). En effet, elle ne s'annule pas en  $x = 0$ . Nous verrons que la fonction  $\Phi_1(x)$  sert en réalité à exprimer la fonction de relèvement  $u_g(x)$ . La fonction  $\Phi_1(x)$  est la fonction de Ritz associée au noeud  $x = 0$ . La remarque que nous venons de faire justifie a posteriori notre choix de numérotter ce noeud à la fin (voir tableau de numérotation 16.3), c'est à dire le numéro 7.

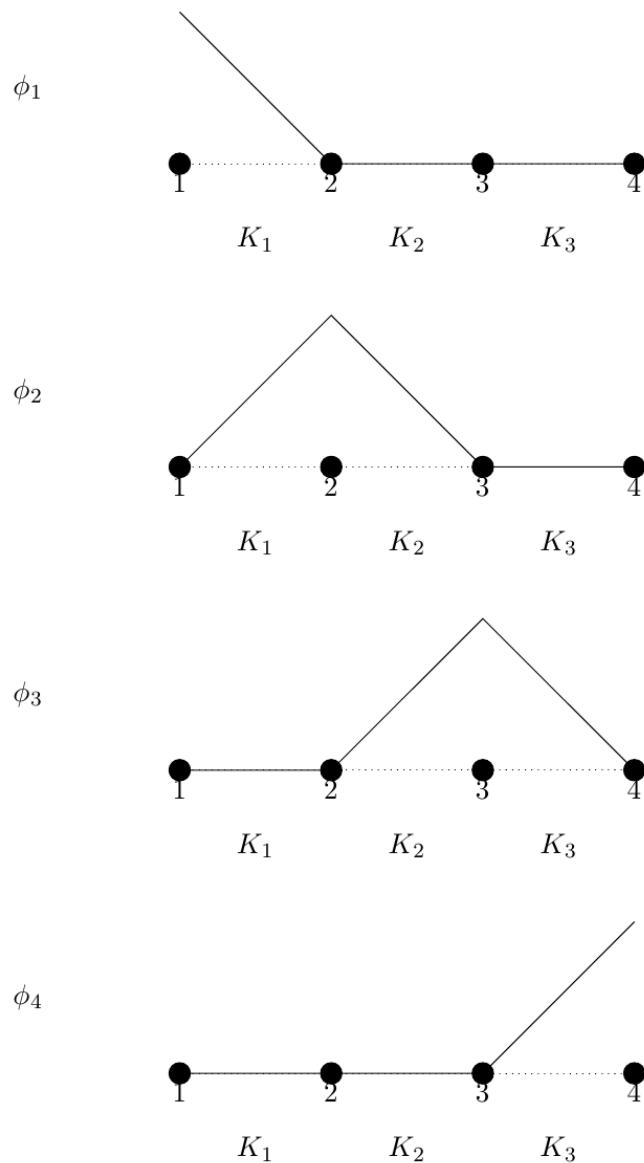


FIGURE 16.6. – Fonctions de Ritz linéaires en dimension 1.

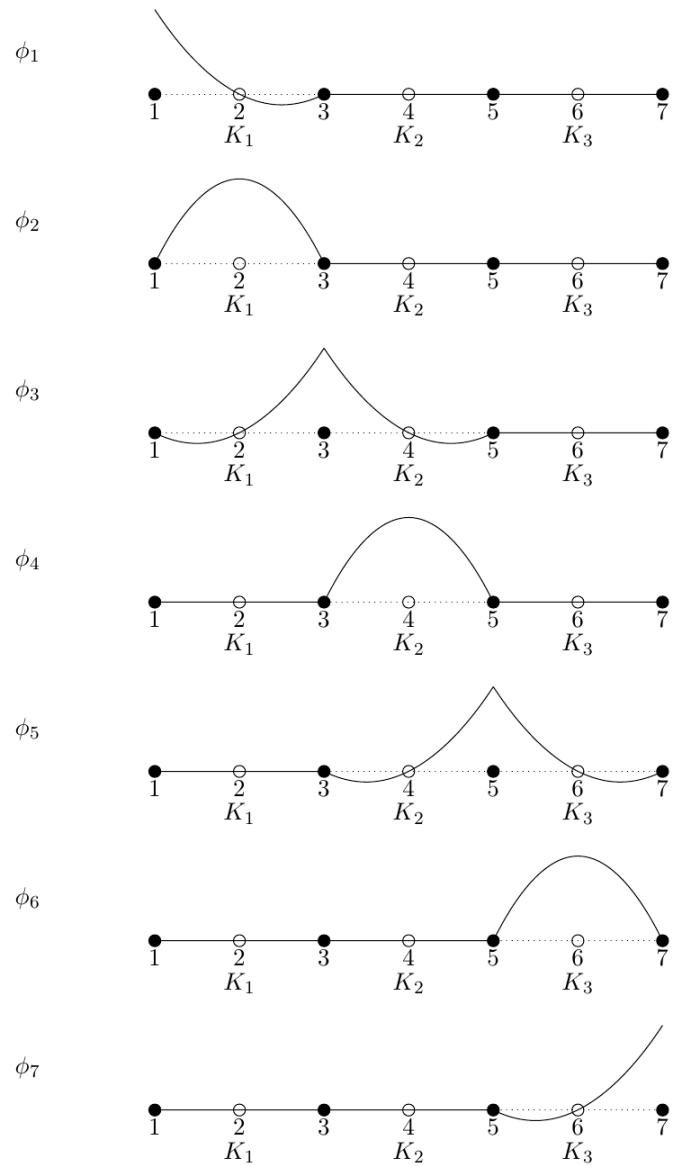


FIGURE 16.7. – Fonctions de Ritz quadratiques en dimension 1.

### 16.4.2. Construction système linéaire globale

Par intégration sur les éléments, nous avons été en mesure de calculer  $A^K$ ,  $\mathbf{F}^K$  et  $\mathbf{S}^K$  du système linéaire élémentaire. Maintenant, nous voulons remonter au système linéaire global issu de la méthode de Ritz appliquée au problème variationnel global. Pour cela, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a(\Phi_j, \Phi_i) = \int_0^L p(x) \cdot \Phi_j(x) \cdot \Phi_i(x) + q(x) \cdot \Phi'_j(x) \cdot \Phi'_i(x) dx \\ &= \sum_{K=1}^{n_{el}} \int_K p(x) \cdot (\Phi_j)|_K(x) \cdot (\Phi_i)|_K(x) + q(x) \cdot (\Phi'_j)|_K(x) \cdot (\Phi'_i)|_K(x) dx \end{aligned} \quad (16.32)$$

Finalement, sur un élément  $K$  donné, on peut choisir parmi  $n_t^K$  noeuds rangés de 1 à  $n_t^K$  relativement à  $K$ . Soit  $k_1$ , le rang relatif de l'un de ces noeuds. En utilisant le tableau d'adressage 16.4, on peut d'une part lire à quel numéro  $i$  correspond le  $k_1$ ème noeud dans la numérotation globale et connaître la fonction d'interpolation  $\Psi_{k_1}^K$  associée à ce noeud sur l'élément  $K$ . A ce stade, nous sommes en mesure de calculer les contributions  $f_{k_1}^K$  et  $s_{k_1}^K$  de l'élément  $K$  aux coefficients  $f_i$  et  $s_i$  du système global. En choisissant un second rang  $k_2$ , toujours en lisant le tableau d'adressage, nous en déduisons le numéro  $j$  correspond le  $k_2$ ème noeud et la fonction d'interpolation  $\Psi_{k_2}^K$  associée à ce noeud sur l'élément  $K$ . Nous sommes alors en mesure de calculer la contributions  $a_{k_1 k_2}^K$  de l'élément  $K$  au coefficient  $a_{ij}$  du système global. Le système global, s'obtient ainsi en balayant tous les éléments  $K$  et tous les rangs  $k_1$  et  $k_2$  possibles et en sommant toutes les contributions. Cela ce traduit par l'algorithme 1.

**Entrées :**  $A^K$ ,  $\mathbf{F}^K$  et  $\mathbf{S}^K$  associés à chaque élément  $K$

**Sorties :**  $A$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{S}$  du système linéaire global

Initialisation à 0 de la matrice  $A$  et des vecteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{S}$ ;

**pour chaque élément  $K$  faire**

**pour**  $k_1 \leftarrow 1$  à  $n_t^K$  **faire**

Obtenir le numéro  $i$  correspondant au rang  $k_1$  pour l'élément  $K$  (voir Tab.

Adress.);

$f_i \leftarrow f_i + f_{k_1}^K$ ;

$s_i \leftarrow s_i + s_{k_1}^K$ ;

**pour**  $k_2 \leftarrow 1$  à  $n_t^K$  **faire**

Obtenir le numéro  $j$  correspondant au rang  $k_2$  pour l'élément  $K$  (voir Tab.

Adress.);

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + a_{k_1 k_2}^K$ ;

**Algorithme 1 :** Algorithme de calcul des coefficients du système linéaire global

#### Exemple pour l'approximation quadratique

Dans le cadre de notre exemple d'un maillage à trois éléments, et avec une approximation quadratique, les systèmes élémentaires 3x3 étaient de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^K & a_{12}^K & a_{13}^K \\ a_{21}^K & a_{32}^K & a_{23}^K \\ a_{31}^K & a_{32}^K & a_{33}^K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{01}^K \\ u_{02}^K \\ u_{03}^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^K \\ f_2^K \\ f_3^K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11}^K \\ s_{12}^K \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.33)$$

Prenons le premier élément  $K_1$ , le tableau d'adressage indique les numéros globaux 7, 2 et 1 associés au rang 1, 2 et 3 relativement à l'élément  $K_1$ . Ainsi par exemple, la contribution au coefficient global  $f_7^{K_1}$  de l'élément  $K_1$  sera égal au coefficient  $f_1^K$  du vecteur élémentaire  $\mathbf{F}^{K_1}$ , et la contribution au coefficient global  $a_{12}^{K_1}$  de l'élément  $K_1$  sera égal au coefficient  $a_{32}^K$  de la matrice élémentaire  $\mathbf{A}^{K_1}$ . La contribution complète de l'élément  $K_1$  au système global 7x7 est donné par :

$$\begin{pmatrix} a_{33}^{K_1} & a_{32}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_1} \\ a_{23}^{K_1} & a_{22}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21}^{K_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13}^{K_1} & a_{12}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{K_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \\ u_{05} \\ u_{06} \\ u_{07} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3^{K_1} \\ f_2^{K_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^{K_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_{12}^{K_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_{11}^{K_1} \end{pmatrix} \quad (16.34)$$

Pour le deuxième élément  $K_2$ , le tableau d'adressage indique les numéros globaux 2, 4 et 3 associés au rang 1, 2 et 3 relativement à l'élément  $K_2$ . La contribution complète de l'élément  $K_2$  au système global 7x7 est donné par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{K_2} & a_{13}^{K_2} & a_{12}^{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{31}^{K_2} & a_{33}^{K_2} & a_{32}^{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}^{K_2} & a_{23}^{K_2} & a_{22}^{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \\ u_{05} \\ u_{06} \\ u_{07} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^{K_2} \\ f_3^{K_2} \\ f_2^{K_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_{11}^{K_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.35)$$

Pour le dernier élément  $K_3$ , le tableau d'adressage indique les numéros globaux 4, 6 et 5 associés au rang 1, 2 et 3 relativement à l'élément  $K_3$ . La contribution complète de l'élément  $K_3$  au système global 7x7 est donné par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}^{K_3} & a_{13}^{K_3} & a_{12}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_3} & a_{33}^{K_3} & a_{32}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0d_{21}^{K_3} & d_{23}^{K_3} & d_{22}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \\ u_{05} \\ u_{06} \\ u_{07} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^{K_3} \\ f_3^{K_3} \\ f_2^{K_3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_{11}^{K_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_{12}^{K_3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.36)$$

Au final, en sommant les contributions de  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ , nous obtenons le système global suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{33}^{K_1} & a_{32}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_1} \\ a_{23}^{K_1} & a_{22}^{K_1} + a_{11}^{K_2} & a_{13}^{K_2} & a_{12}^{K_2} & 0 & 0 & a_{21}^{K_1} \\ 0 & a_{31}^{K_2} & a_{33}^{K_2} & a_{32}^{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}^{K_2} & a_{23}^{K_2} & a_{22}^{K_2} + a_{11}^{K_3} & a_{13}^{K_3} & a_{12}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}^{K_3} & a_{33}^{K_3} & a_{32}^{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0a_{21}^{K_3} & a_{23}^{K_3} & a_{22}^{K_3} & 0 \\ a_{13}^{K_1} & a_{12}^{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^{K_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \\ u_{05} \\ u_{06} \\ u_{07} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_3^{K_1} \\ f_2^{K_1} + f_1^{K_2} \\ f_3^{K_2} \\ f_2^{K_2} + f_1^{K_3} \\ f_3^{K_3} \\ f_2^{K_3} \\ f_1^{K_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_{12}^{K_1} + s_{11}^{K_2} \\ 0 \\ s_{12}^{K_2} + s_{11}^{K_3} \\ 0 \\ s_{12}^{K_3} \\ s_{11}^{K_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16.37)$$

### 16.4.3. Application des conditions aux frontières et résolution

Une fois le système global obtenu, on applique les conditions essentielles aux noeuds numérotés en dernier (le 7ème dans notre exemple) et nous obtenons un système sous la forme générique :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0^I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^C \\ \mathbf{F}_2^C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{S}^C \\ \mathbf{S}^I \end{pmatrix} \quad (16.38)$$

Il reste à regarder les coefficients  $s_i$  liés au variables secondaires. Si le degré de liberté  $i$  est attaché à un noeud correspondant à la frontière entre 2 éléments  $K_-$  et  $K_+$ , nous aurons à la  $i$ ème ligne :

$$s_i = s_{12}^{K_-} + s_{11}^{K_+} \quad (16.39)$$

C'est à dire dans notre problématique :

$$s_i = q(x^-) \cdot u'(x^-) - q(x^+) \cdot u'(x^+) \quad (16.40)$$

$s_i$  peut être différent de 0. Cela doit être analysé en fonction du problème physique. Par exemple, il peut apparaître des discontinuités et des distributions de Dirac en ce noeud dans l'EDP (16.1). Physiquement, le choix de  $s_i$  indique explicitement la présence d'éléments ponctuels particuliers. Dans tous les autres cas, nous imposerons la continuité, c'est à dire  $s_i = 0$  pour les noeuds intérieurs au domaine.

Le système global peut alors être résolu entre extrayant des systèmes linéaires.

#### Résolution de l'exemple en approximation quadratique

Dans notre exemple, nous pouvons choisir  $u_g = c\dot{\Phi}_1$ , ce qui implique que  $u_{07} = 0$ . En  $x = 1$ , nous pouvons imposer la condition :

$$q(1) \cdot u'(1) = d \quad (16.41)$$

ce qui correspond à  $s_{12}^{K_3} = d$ . En l'absence de charge ponctuelle, nous considérons que :

$$s_{12}^{K_1} + s_{11}^{K_2} = s_{12}^{K_2} + s_{11}^{K_3} = 0 \quad (16.42)$$

On en déduit que  $\mathbf{S}^I = \left( s_{11}^{K_1} \right)$  et :

$$\mathbf{S}^C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \quad (16.43)$$

Nous avons :

$$\mathbf{U}_0^I = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \\ u_{05} \\ u_{06} \end{pmatrix} \quad (16.44)$$

En résolvant le système linéaire  $M_{11} \cdot \mathbf{U}_0^I = \mathbf{F}_1^C + \mathbf{S}^C$ , nous retrouvons les vecteurs  $\mathbf{U}_0^I = (u_{01}, u_{02}, u_{03}, u_{04}, u_{05}, u_{06})^T$  et donc :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \\ u_{05} \\ u_{06} \\ c \end{pmatrix} \quad (16.45)$$



# 17. Méthode des éléments finis en dimension quelconque

## 17.1. Problématique

Pour illustrer la présentation de la méthode des éléments finis en dimension supérieure, nous allons considérer le problème générique suivant :

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}) - \nabla \cdot (q(\mathbf{x}) \cdot \nabla u) = r(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{sur } \Gamma_0 \\ q(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = h(\mathbf{x}) & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (17.1)$$

avec  $p(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $q_1 \leq q(\mathbf{x}) \leq q_2$  sur  $]0, L[$ . Par ailleurs si on note  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$ , nous avons que  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  et  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ .

Comme dans le cas unidimensionnel, nous avons des dérivations d'ordre deux ce qui donnera des dérivations simples dans le problème variationnel. Notre espace de travail sera donc inclus dans  $H^1(\Omega)$ . Par ailleurs, des conditions essentielles sont imposées en  $\Gamma_0$ . L'espace fonctionnel approprié est donc l'espace  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . Nous supposerons que  $g \in H^{1/2}(\Gamma_0)$  pour qu'il existe une fonction de relèvement  $u_g(\mathbf{x})$  appartenant à  $H^1(\Omega)$ .

Sous ces conditions, en appliquant les méthodes déjà vues dans les chapitres précédents, nous obtenons le problème variationnel suivant :

$$a(u_0, \omega) = l(\omega) - a(u_g, \omega) \quad \forall \omega(\mathbf{x}) \in \mathcal{E} \quad (17.2)$$

avec  $\mathcal{E} = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . En posant :

$$a(u, \omega) = \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}) \, dv \quad (17.3)$$

$$l(\omega) = \int_{\Omega} r(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) \, dv + \int_{\Gamma_1} h(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) \, ds \quad (17.4)$$

Il est clair que ce problème est une généralisation directe du problème variationnel 16.3.

Pour résoudre ce problème par une méthode d'éléments finis, nous allons suivre exactement la même démarche que dans le cas unidimensionnel.

## 17.2. Maillage

Dans le cas unidimensionnel, le maillage est relativement simple dans la mesure où les éléments du maillage se ramènent à des intervalles. Dans le cas des dimensions supérieures, le choix de la nature des éléments est déjà une question à poser.

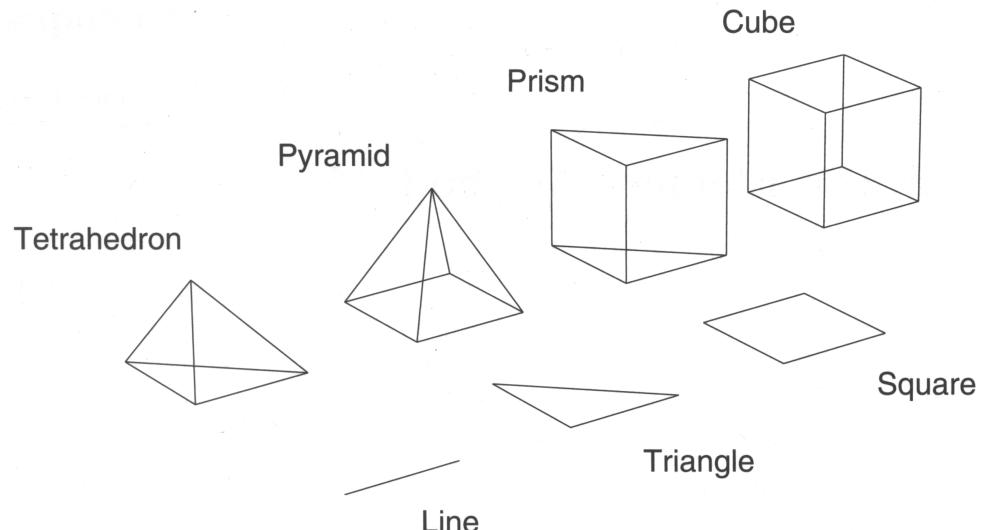


FIGURE 17.1. – Quelques exemples d’éléments en une dimension (segment), deux dimensions (triangle, carré) et trois dimensions (tétraèdre, pyramide, prisme et cube).

### 17.2.1. Les éléments

Si dans le cas unidimensionnel l’élément naturel est l’intervalle, en dimension 2 ou 3 il existe plusieurs types éléments différents qui arrivent naturellement à l’esprit, voir figure 17.1.

Cependant, il est à noter qu’il est beaucoup généralement plus facile de décomposer un domaine quelconque en triangles (dimension 2) et en tétraèdres (en dimension 3) que dans les autres géométries. Ce choix se retrouve dans la grande majorité des mailles modernes et c’est celui que nous adopterons. On notera  $n_{el}$  le nombre d’éléments du maillage.

### 17.2.2. Les nœuds

Quel que soit le choix de éléments, nous avons  $n_g^K$  nœuds géométriques (3 pour un triangle, 4 pour un carré, 4 pour un tétraèdre,...). Comme dans le cas unidimensionnel, nous pouvons être amené à introduire  $n_c^K$  nœuds de calcul supplémentaires ce qui nous donne un total de  $n_t^K = n_g^K + n_c^K$  nœuds sur chaque élément.

Dans le cadre de ce cours, nous considérons que le nombre de degré de liberté  $n_d^K$  sur chaque élément corresponds au nombre total de nœuds. Il est néanmoins à noter qu’il existe des méthodes d’éléments finis où cela n’est pas le cas.

On peut alors, de la même façon qu’en dimension 1, créer le tableau des coordonnées (tab. coord.), le tableau de connectivité (tab. connec.). En ce qui concerne les tableaux de numérotation (tab. numer.) et le tableau d’adressage qui en découle (tab. adress.), nous continuons à numérotter les nœuds où s’applique une condition essentielle à la fin. Cette contrainte étant posée, en dimension supérieure le choix de la numérotation n’a rien de naturel, contrairement au cas unidimensionnel où les nœuds sont tous alignés. En dimension 2, 3 ou plus, il existe plusieurs façons de numérotter les nœuds. D’ailleurs, ce choix n’est pas anodin pour la structure de la matrice globale. Les coefficients non nuls de la matrice global peuvent être plus ou moins resserrés autour de la diagonale en fonction de la méthode de numérotation choisie. Cela a des implications en termes de résolution du système

linéaire. Certains algorithmes par exemple celui de Cutill-McKee) permettent du construire une numérotation optimale. Dans le cadre de ce cours, nous n'aborderons pas cette problématique.

### 17.3. Formulation variationnelle élémentaire

En considérant le problème variationnel sur un élément  $K$ , le problème devient :

$$\int_K p(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}) \, dv = \int_K r(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) \, dv + \int_{\partial K} s^K(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) \, ds \quad (17.5)$$

en introduisant la variable secondaire :

$$s^K(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}^K} \quad (17.6)$$

où  $\mathbf{n}^K$  est le vecteur extérieur à la frontière  $\partial K$  de  $K$ .

En posant  $u = u_0 + u_g$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_K p(\mathbf{x}) \cdot u_0(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \cdot \nabla u_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}) \, dv &= \int_K r(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) \, dv \\ - \int_K p(\mathbf{x}) \cdot u_g(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \cdot \nabla u_g(\mathbf{x}) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}) \, dv + \int_{\partial K} s^K(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}) \, ds & \end{aligned} \quad (17.7)$$

Les fonctions de Ritz  $\Psi_j^K(\mathbf{x})$  associées à chaque élément  $K$  étant données, on a comme dans le cas 1D :

$$u_{0|_K} \simeq u_0^K = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{0j}^K \cdot \Psi_j^K(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad u_{g|_K} \simeq u_g^K = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \cdot \Psi_j^K(\mathbf{x}) \quad (17.8)$$

En prenant successivement  $\omega(\mathbf{x}) = \Psi_i^K(\mathbf{x})$  (avec  $i$  allant de 1 à  $n_d^K$ ), on obtient un système linéaire lié à l'élément  $K$  :

$$A^K \cdot \mathbf{u}_0^K = \mathbf{F}^K + \mathbf{S}^K \quad (17.9)$$

avec :

$$a_{ij}^K = \int_K p(\mathbf{x}) \cdot \Psi_j^K(\mathbf{x}) \cdot \Psi_i^K(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_j^K(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_i^K(\mathbf{x}) \, dv \quad (17.10a)$$

$$f_i^K = \int_K r(\mathbf{x}) \cdot \Psi_i^K(\mathbf{x}) \, dv - \int_K p(\mathbf{x}) \cdot u_g(\mathbf{x}) \cdot \Psi_i^K(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \cdot \nabla u_g(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi_i^K(\mathbf{x}) \, dv \quad (17.10b)$$

$$s_i^K = \int_{\partial K} s^K(\mathbf{x}) \cdot \Psi_i^K(\mathbf{x}) \, ds \quad (17.10c)$$

#### 17.3.1. Élément de référence

Dans le cas unidimensionnel, choisir pour élément de référence l'intervalle  $\hat{K} = [-1, 1]$  (ou un intervalle équivalent) semble évident. En dimensions supérieures, les éléments ont des formes et des structures de noeuds différentes. Le choix de l'élément de référence dépendra donc de la nature du maillage. La figure 17.3.1 nous montre quelques exemples classiques d'éléments de référence.

Nous choisirons de poser  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  les coordonnées dans le domaine  $\Omega$  et  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$  les coordonnées dans l'élément de référence  $\hat{K}$ . À chaque noeud géométrique  $\mathbf{x}_i^K = (x_i^K, y_i^K, z_i^K)$  de  $K$  doit correspondre le noeud géométrique  $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  de l'élément  $\hat{K}$ . Nous aurons donc :

$$T^K(\boldsymbol{\xi}_i) = \mathbf{x}_i^K \quad \text{et} \quad (T^K)^{-1}(\mathbf{x}_i^K) = \boldsymbol{\xi}_i \quad i = 1, \dots, n_g^K \quad (17.11)$$

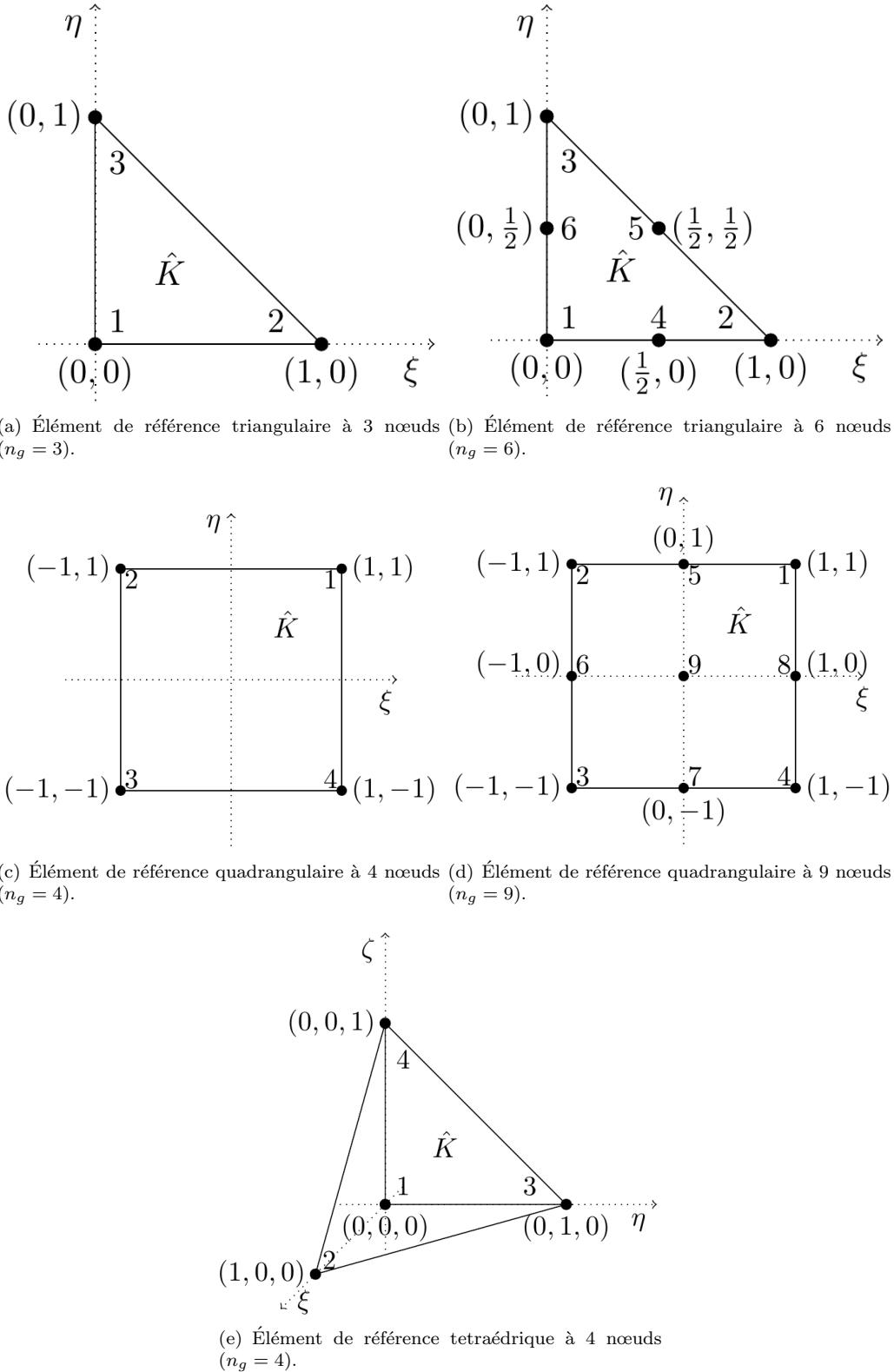


FIGURE 17.2. – Exemples d’éléments de référence

### 17.3. Formulation variationnelle élémentaire

Pour construire les fonctions de transformation géométrique  $T^K$ , nous introduisons  $n_g^K$  fonction d'interpolation de Lagrange telles que :

$$L_i(\boldsymbol{\xi}_j) = \delta_j^i \quad (17.12)$$

Les fonctions  $L_i$  étant déterminées, les fonctions  $T^K$  s'en déduisent directement :

$$\begin{aligned} (T^K)^{-1} : \quad K &\longrightarrow \hat{K} \\ \boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta) &\longrightarrow \mathbf{x} = (x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_g^K} \mathbf{x}_i^K \cdot L_i(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (17.13)$$

Pour faire le changement de variable  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}\mathbf{i}$  dans les intégrations des équations (17.10), il faut calculer la matrice jacobienne :

$$DT^K = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (17.14)$$

et surtout être en mesure de calcul le jacobien  $J^K = \det(DT^K)$ .

Le passage des coordonnées  $\mathbf{x}$  de l'élément  $K$  aux coordonnées  $\boldsymbol{\xi}$  de l'élément de référence  $\hat{K}$  étant résolu. Nous pourrons construire les fonction d'interpolations  $\Psi_i^K$  à partir des fonctions d'interpolation  $\hat{\Psi}_i$  construites sur l'élément de référence :

$$\Psi^K(x, y, z) = \Psi^K(T^K(\xi, \eta, \zeta)) = \hat{\Psi}(\xi, \eta, \zeta) \quad (17.15)$$

Le passage des dérivées partielles de  $\hat{\Psi}_i$  aux dérivées partielles de  $\Psi_i^K$  sera donné par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi^K(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi^K(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi^K(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\Psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\Psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{\Psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (17.16)$$

Ceci pourra s'écrire synthétiquement sous la forme :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \Psi^K(x, y, z) = B^K \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\xi, \eta, \zeta) \quad (17.17)$$

On notera que :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\Psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\Psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{\Psi}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi^K(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi^K(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi^K(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (17.18)$$

ou encore sous forme synthétique :

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\xi, \eta, \zeta) = (DT^K)^{\top} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Psi^K(x, y, z) \quad (17.19)$$

Nous en déduisons donc que  $B^K = (DT^K)^{-\top}$  :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \Psi^K(x, y, z) = (DT^K)^{-\top} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\xi, \eta, \zeta) \quad (17.20)$$

Au final, les coefficients du système linéaire lié au problème variationnel élémentaire pourront s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} a_{ij}^K = \int_{\hat{K}} p(T^K(\boldsymbol{\xi})) \cdot \hat{\Psi}_j(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\Psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \\ + q(T^K(\boldsymbol{\xi})) \cdot [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\Psi}_j(\boldsymbol{\xi})]^{\top} \cdot (B^K)^{\top} \cdot B^K \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\Psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \cdot J^K d\hat{v} \end{aligned} \quad (17.21a)$$

17. Méthode des éléments finis en dimension quelconque

$$f_i^K = \int_{\hat{K}} r(T^K(\xi)) \cdot \hat{\Psi}_i(\boldsymbol{x}) \cdot J^K d\hat{v} - \int_{\hat{K}} p(T^K(\xi)) \cdot \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \hat{\Psi}_j(\xi) \right) \cdot \hat{\Psi}_i(\xi) \cdot J^K d\hat{v} \\ - \int_{\hat{K}} q(T^K(\xi)) \cdot \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_d^K} u_{gj}^K \nabla_{\xi} \hat{\Psi}_j(\xi) \right) \right] \cdot (B^K)^T \cdot B^K \cdot \nabla_{\xi} \hat{\Psi}_i(\xi) \cdot J^K d\hat{v} \quad (17.21b)$$

$$s_i^K = \int_{\partial K} s^K(\boldsymbol{x}) \cdot \Psi_i^K(\boldsymbol{x}) ds \quad (17.21c)$$

**Exemple 1**

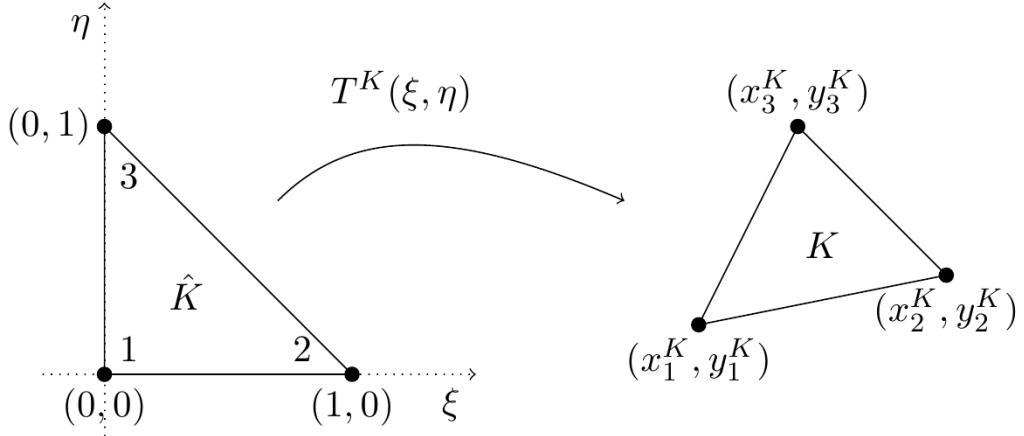


FIGURE 17.3. – Transformation linéaire pour un maillage triangulaire ( $n_g^K = 3$ ).

Pour illustrer, considérons un premier l'exemple d'un maillage triangulaire pour lequel on considère une transformation linéaire entre l'élément  $K$  et l'élément de référence  $\hat{K}$  voir figure 17.2(a). Il nous faut dans ce cas 3 nœuds géométriques ( $n_g^K = 3$ ) et donc 3 polynômes de Lagrange d'ordre 1 à 2 variables ( $\xi$  et  $\eta$ ). Les transformations  $T^K$ , voir figure 17.3, seront alors de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^K(\xi) = \sum_{i=1}^3 L_i(\xi) \begin{pmatrix} x_i^K \\ y_i^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1(\xi)x_1^K + L_2(\xi)x_2^K + L_3(\xi)x_3^K \\ L_1(\xi)y_1^K + L_2(\xi)y_2^K + L_3(\xi)y_3^K \end{pmatrix} \quad (17.22)$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\xi-\eta)x_1^K + (\xi)x_2^K + (\eta)x_3^K \\ (1-\xi-\eta)y_1^K + (\xi)y_2^K + (\eta)y_3^K \end{pmatrix} \quad (17.23)$$

La matrice jacobienne aura alors pour expression :

$$DT^K = \begin{pmatrix} x_2^K - x_1^K & x_3^K - x_1^K \\ y_2^K - y_1^K & y_3^K - y_1^K \end{pmatrix} \quad (17.24)$$

et nous aurons que :

$$B^K = (DT^K)^{-T} = \frac{1}{J^K} \begin{pmatrix} y_3^K - y_1^K & y_1^K - y_2^K \\ x_1^K - x_3^K & x_2^K - x_1^K \end{pmatrix} \quad (17.25)$$

Il est à noter que dans cet exemple  $J^K = 2 \times \text{aire}(K) = 2A^K$  ne dépend pas de  $\xi$  et que ce jacobien s'annule uniquement si les trois points  $\boldsymbol{x}_i^K$  sont alignés. On peut même choisir un maillage où les éléments  $K$  ont tous la même aire et dans ce cas, le jacobien  $J^K$  sera une constante du problème.

### 17.3. Formulation variationnelle élémentaire

Pour notre problème variationnel élémentaire (17.5), si nous fixons  $p(x) = 0$ ,  $u_g = 0$  et les fonctions  $q(x)$  et  $r(x)$  constantes sur chaque élément  $K$  ( $q|_K(x) = q^K$  et  $r|_K(x) = r^K$ ), on obtient les coefficients :

$$a_{ij}^K = \frac{q^K}{4A^K} (\beta_i^K \beta_j^K + \gamma_i^K \gamma_j^K) \quad (17.26a)$$

$$f_i^K = \frac{1}{3} r^K A^K \quad (17.26b)$$

avec :

$$\beta_1^K = y_2^K - y_3^K \quad \gamma_1^K = -(x_2^K - x_3^K) \quad (17.27)$$

$$\beta_2^K = y_3^K - y_1^K \quad \gamma_2^K = -(x_3^K - x_1^K) \quad (17.28)$$

$$\beta_3^K = y_1^K - y_2^K \quad \gamma_3^K = -(x_1^K - x_2^K) \quad (17.29)$$

#### Exemple 2

Dans le cas d'un maillage quadrangulaire, voir figure 17.2(c), avec une transformation bilinéaire, nous avons 4 noeuds géométriques (sommets  $n_g^K = 4$ ) et 4 polynômes de Lagrange à 2 variables ( $\xi$  et  $\eta$ ). Les transformations  $T^K$  seront alors de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^K(\xi) = \sum_{i=1}^4 L_i(\xi) \begin{pmatrix} x_i^K \\ y_i^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1(\xi)x_1^K + L_2(\xi)x_2^K + L_3(\xi)x_3^K + L_4(\xi)x_4^K \\ L_1(\xi)y_1^K + L_2(\xi)y_2^K + L_3(\xi)y_3^K + L_4(\xi)y_4^K \end{pmatrix} \quad (17.30)$$

et les polynômes de Lagrange auront pour expression :

$$L_1(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (17.31a)$$

$$L_2(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (17.31b)$$

$$L_3(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (17.31c)$$

$$L_4(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (17.31d)$$

La matrice jacobienne sera donnée par :

$$DT^K = \begin{pmatrix} B_{11}^K + \eta C_{11}^K & B_{12}^K + \eta C_{12}^K \\ B_{21}^K + \eta C_{21}^K & B_{22}^K + \eta C_{22}^K \end{pmatrix} \quad (17.32)$$

avec :

$$B_{11}^K = \frac{1}{4}(x_1^K - x_2^K - x_3^K + x_4^K) \quad C_{11}^K = \frac{1}{4}(x_1^K - x_2^K + x_3^K - x_4^K) \quad (17.33a)$$

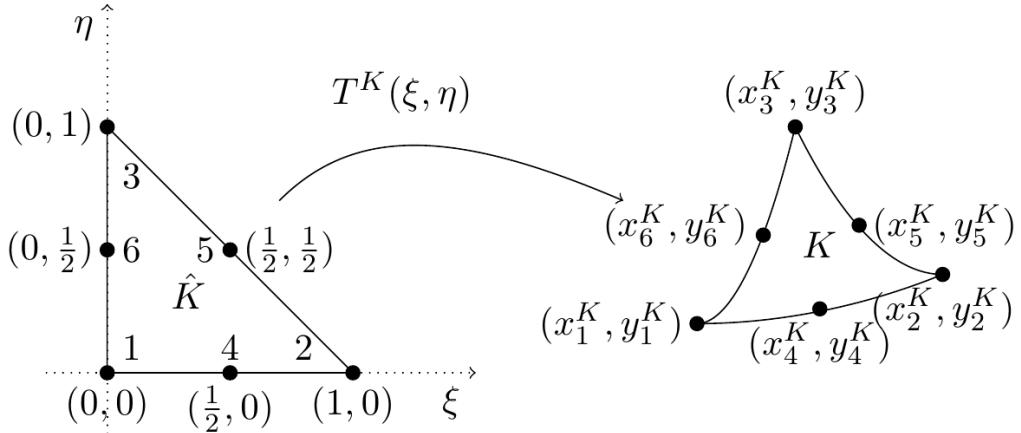
$$B_{12}^K = \frac{1}{4}(x_1^K + x_2^K - x_3^K - x_4^K) \quad C_{12}^K = \frac{1}{4}(x_1^K - x_2^K + x_3^K - x_4^K) \quad (17.33b)$$

$$B_{21}^K = \frac{1}{4}(y_1^K - y_2^K - y_3^K + y_4^K) \quad C_{21}^K = \frac{1}{4}(y_1^K - y_2^K + y_3^K - y_4^K) \quad (17.33c)$$

$$B_{22}^K = \frac{1}{4}(y_1^K + y_2^K - y_3^K - y_4^K) \quad C_{22}^K = \frac{1}{4}(y_1^K - y_2^K + y_3^K - y_4^K) \quad (17.33d)$$

Il est à noter que dans ce cas le jacobien  $J^K$  est une fonction de  $\xi$  et de  $\eta$ . Enfin, nous aurons :

$$B^K = (DT^K)^{-\top} = \frac{1}{J^K} \begin{pmatrix} B_{22}^K + \xi C_{22}^K & - (B_{21}^K + \eta C_{21}^K) \\ - (B_{12}^K + \xi C_{12}^K) & B_{11}^K + \eta C_{11}^K \end{pmatrix} \quad (17.34)$$


 FIGURE 17.4. – Transformation quadratique pour un maillage triangulaire ( $n_g^K = 6$ ).

### Exemple 3

Dans les deux exemples précédents, le maillage était constitué d'éléments  $K$  à bords droits. Dans bon nombre de problèmes physiques, les frontières du domaine  $\Omega$  ne peuvent être réduites à des segments. Il est alors intéressant d'introduire un maillage avec des côtés courbes. Pour cela, on peut par exemple considérer des polynômes de Lagrange quadratiques. Pour un maillage triangulaire courbe avec 6 noeuds géométriques, on peut considérer l'élément de référence de la figure 17.2(b). Les transformations  $T^K$ , voir figure 17.4, seront alors de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^K(\xi) = \sum_{i=1}^6 L_i(\xi) \begin{pmatrix} x_i^K \\ y_i^K \end{pmatrix} \quad (17.35)$$

### Exemple 4

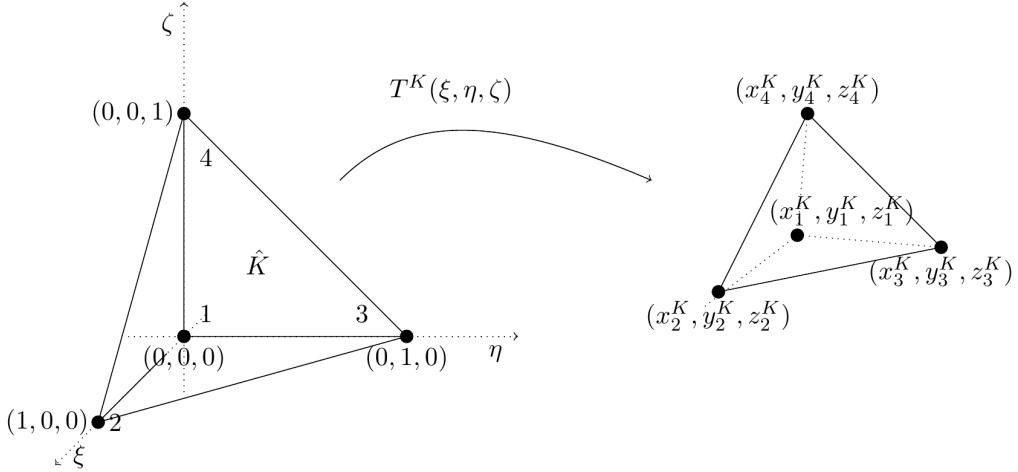
Dans un contexte tridimensionnel, nous pouvons considérer un maillage tétraédrique à 4 noeuds géométriques ( $n_g^K = 4$ ), voir l'élément de référence  $\hat{K}$  à la figure 17.2(e). On considérera 4 polynômes de Lagrange linéaires à 3 variables ( $\xi, \eta$  et  $\zeta$ ). Les transformations  $T^K$ , voir figure 17.5, seront alors de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T^K(\xi) = \begin{pmatrix} L_1(\xi)x_1^K + L_2(\xi)x_2^K + L_3(\xi)x_3^K + L_4(\xi)x_4^K \\ L_1(\xi)y_1^K + L_2(\xi)y_2^K + L_3(\xi)y_3^K + L_4(\xi)y_4^K \\ L_1(\xi)z_1^K + L_2(\xi)z_2^K + L_3(\xi)z_3^K + L_4(\xi)z_4^K \end{pmatrix} \quad (17.36)$$

$$= \begin{pmatrix} (1 - \xi - \eta - \zeta)x_1^K + \xi x_2^K + \eta x_3^K + \zeta x_4^K \\ (1 - \xi - \eta - \zeta)y_1^K + \xi y_2^K + \eta y_3^K + \zeta y_4^K \\ (1 - \xi - \eta - \zeta)z_1^K + \xi z_2^K + \eta z_3^K + \zeta z_4^K \end{pmatrix} \quad (17.37)$$

La matrice jacobienne s'écrira :

$$DT^K = \begin{pmatrix} x_2^K - x_1^K & x_3^K - x_1^K & x_4^K - x_1^K \\ y_2^K - y_1^K & y_3^K - y_1^K & y_4^K - y_1^K \\ z_2^K - z_1^K & z_3^K - z_1^K & z_4^K - z_1^K \end{pmatrix} = (t_{ij}^K) \quad (17.38)$$

FIGURE 17.5. – Transformation linéaire pour un maillage tétraédrique ( $n_g^K = 4$ ).

et nous aurons :

$$B^K = (DT^K)^{-\top} = \frac{1}{J^K} \begin{pmatrix} t_{22}^K t_{33}^K - t_{32}^K t_{23}^K & t_{13}^K t_{32}^K - t_{12}^K t_{33}^K & t_{12}^K t_{23}^K - t_{13}^K t_{22}^K \\ t_{31}^K t_{23}^K - t_{21}^K t_{33}^K & t_{11}^K t_{33}^K - t_{13}^K t_{31}^K & t_{21}^K t_{13}^K - t_{23}^K t_{11}^K \\ t_{21}^K t_{32}^K - t_{31}^K t_{22}^K & t_{12}^K t_{31}^K - t_{32}^K t_{11}^K & t_{11}^K t_{22}^K - t_{12}^K t_{21}^K \end{pmatrix} \quad (17.39)$$

Par ailleurs, il est à noter que  $J^K = 6 \times \text{volume}(K) = 6V^K$  ne dépend pas de  $\xi$ .

### 17.3.2. Fonctions d'interpolation sur l'élément $K$

À l'image de ce que nous avons fait en dimension 1, nous faisons correspondre les noeuds  $(\mathbf{x}_1^K, \mathbf{x}_2^K, \dots, \mathbf{x}_{n_t}^K)$  de calcul de l'élément  $K$  aux noeuds  $(\xi_1^K, \xi_2^K, \dots, \xi_{n_t}^K)$  de calcul de l'élément de référence  $\hat{K}$  :

$$\xi_i = (T^K)^{-1} (x_i^K) \quad (17.40)$$

En construisant des fonctions d'interpolation (par exemple des polynômes de Lagrange)  $\hat{\Psi}_1^K, \hat{\Psi}_2^K, \dots, \hat{\Psi}_{n_t}^K$  sur l'élément de référence  $\hat{K}$ , on en déduit les fonctions d'interpolation  $(\Psi_1^K, \Psi_2^K, \dots, \Psi_{n_t}^K)$  sur l'élément  $K$  :

$$\Psi_j^K(\mathbf{x}) = \hat{\Psi}_j(\xi) \quad (17.41)$$

et

$$\Psi_j^K(\mathbf{x}_i) = \hat{\Psi}_j(\xi_i) \quad (17.42)$$

Cela étant posé, nous sommes en mesure de calculer les coefficients (17.21) du système linéaire lié au problème variationnel élémentaire ramené à l'élément de référence  $\hat{K}$ .

## 17.4. Assemblage

Pour retrouver le système linéaire de Ritz global, il suffit d'appliquer le même algorithme 1 que l'on a donné en dimension 1. Seule la dimension des matrices sera modifiée par rapport au cas unidimensionnel. Les fonctions de Ritz résultent directement de l'assemblage des fonctions  $\Psi_i^K$  en suivant cet algorithme.

## 17.5. Application des conditions aux frontières et résolution

Finalement, en respectant les conventions que l'on s'est fixées, nous obtenons un système linéaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0^I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^C \\ \mathbf{F}_2^C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{S}^C \\ \mathbf{S}^I \end{pmatrix} \quad (17.43)$$

Pour résoudre le problème, on détermine le vecteur  $\mathbf{U}_0^I$  en résolvant :

$$M_{11}\mathbf{U}_0^I = \mathbf{F}_1^C + \mathbf{S}^C \quad (17.44)$$

Une fois  $\mathbf{U}_0^I$  connu, on résout :

$$\mathbf{S}^I = M_{21}\mathbf{U}_0^I - \mathbf{F}_2^C \quad (17.45)$$

## **Quatrième partie .**

### **Annexes**



## **A. Compléments mathématiques**

## A.1. Rappel sur les opérateurs différentiels

Avant d'aborder les différents domaines de la physique traités dans ce cours, il nous faut rappeler les principaux opérateurs différentiels utilisés dans les équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes de propagation. C'est à dire :

- Le gradient, noté *grad* ou  $\nabla$
- Le rotationnel, noté *rot* ou  $\nabla \times$
- La divergence, noté *div* ou  $\nabla \cdot$ .
- Le laplacien, noté  $\Delta$

Il est important de préciser que le gradient s'applique à une fonction scalaire, alors que la divergence et le rotationnel s'appliquent à un champ de vecteurs. Le laplacien, quant à lui, peut s'appliquer indifféremment à une fonction scalaire et à un champ de vecteurs.

Dans une moindre mesure, on peut être amené à utiliser les opérateurs suivants :

- Le grand gradient, noté *Grad*, appliqué à un vecteur
- La grande divergence, noté *Div*, appliquée à un tenseur

### A.1.1. Définitions en coordonnées cartésiennes

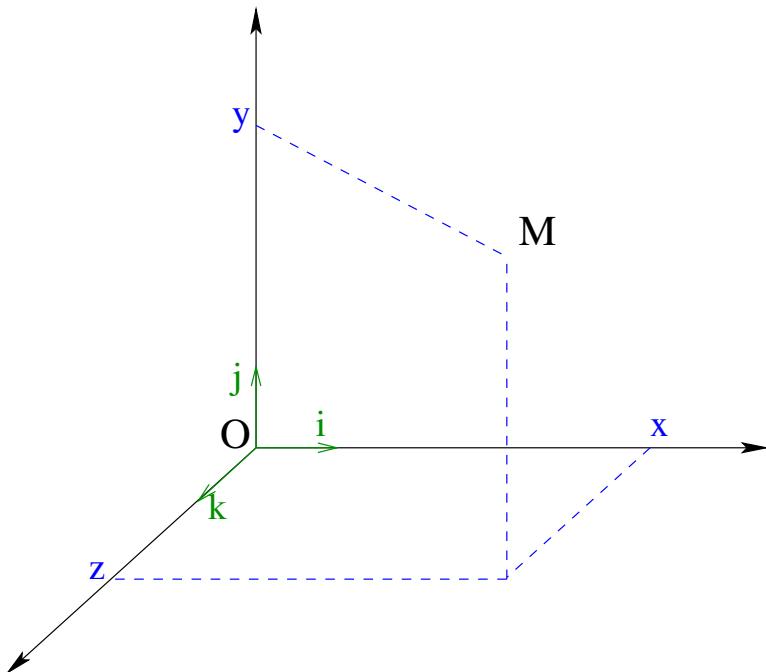


FIGURE A.1. – Repère cartésien.

On choisit un repère cartésien défini par les vecteurs ( $i, j$  et  $k$ ) et le système de coordonnées ( $x, y$  et  $z$ ), voir figure (A.1). En posant que  $V$  une fonction et  $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$  un champ de vecteurs, les

différents opérateurs s'expriment sous la forme :

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \mathbf{k} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta E_x \cdot \mathbf{i} + \Delta E_y \cdot \mathbf{j} + \Delta E_z \cdot \mathbf{k} \quad (\text{A.5})$$

S'agissant du grand gradient et de la grande divergence, nous avons :

$$Grad(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$Div(T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

### A.1.2. Repères cylindriques et sphériques

Les opérateurs différentiels précisément peuvent bien évidemment s'exprimer dans d'autres systèmes de coordonnées que celui issu du repère cartésien, et notamment les repères cylindriques et sphériques.

#### Repère cylindrique

Soit le repère cylindrique ( $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$  et  $\mathbf{u}_z$ ) défini à partir du système de coordonnées ( $r, \theta$  et  $z$ ), voir figure (A.2). Les différents opérateurs s'expriment sous la forme :

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \mathbf{u}_z \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \det \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}_z}{r} & \frac{\mathbf{u}_r}{r} & \mathbf{u}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ E_z & E_r & r E_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial r E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (\text{A.10})$$

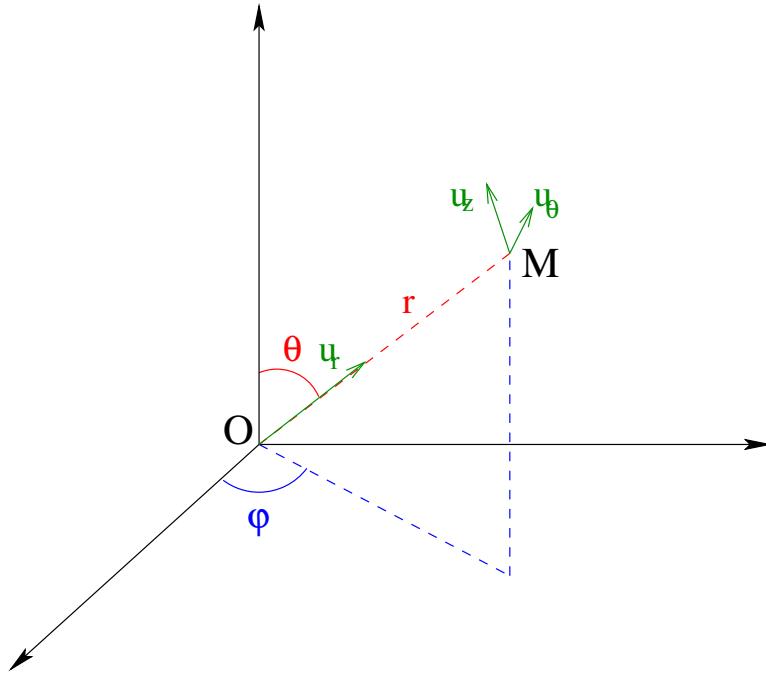


FIGURE A.2. – Repère cylindrique.

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \Delta E_r - \frac{1}{r^2} (E_r + 2 \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}) \\ \Delta E_\theta - \frac{1}{r^2} (E_\theta + 2 \frac{\partial E_r}{\partial \theta}) \\ \Delta E_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

### Repère sphérique

Soit le repère sphérique ( $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_\theta$  et  $\mathbf{u}_\psi$ ) définit à partir du système de coordonnées ( $r, \theta$  et  $\psi$ ), voir figure (A.3). Les différents opérateurs s'expriment sous la forme :

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \psi} \cdot \mathbf{u}_\psi \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \det \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}_r}{r^2 \sin \theta} & \frac{\mathbf{u}_\theta}{r \sin \theta} & \frac{\mathbf{u}_\psi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ E_r & r E_\theta & r \sin \theta E_\psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 E_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta E_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\psi}{\partial \psi} \quad (\text{A.15})$$

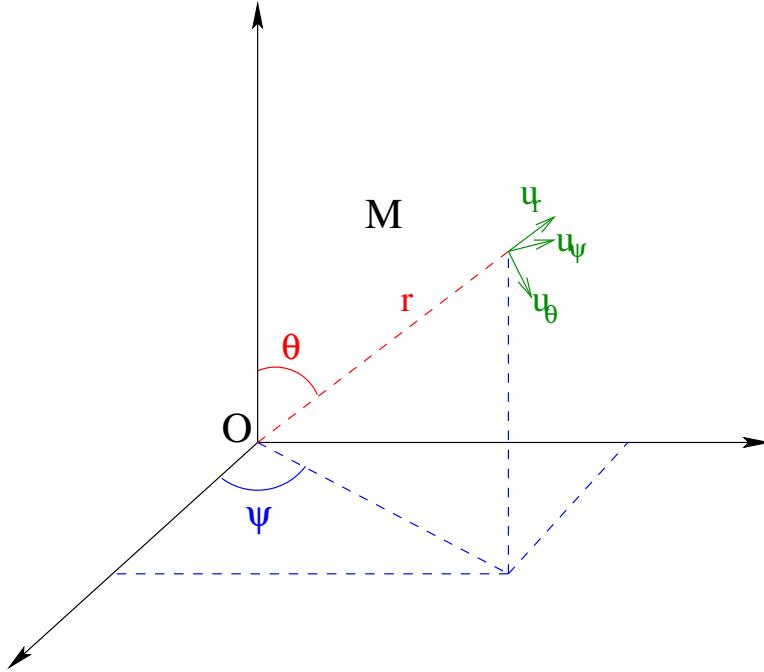


FIGURE A.3. – Repère sphérique.

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \quad (\text{A.16})$$

$$\Delta \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \Delta E_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left( E_r \sin \theta + \frac{\partial \sin \theta E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_\psi}{\partial \psi} \right) \\ \Delta E_\theta - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{E_\theta}{2} - \sin^2 \theta \frac{\partial E_r}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial E_\psi}{\partial \psi} \right) \\ \Delta E_\psi - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{E_\psi}{2} - \sin^2 \theta \frac{\partial E_r}{\partial \psi} + \cos \theta \frac{\partial E_\theta}{\partial \psi} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

En coordonnées sphériques, et avec  $r$  grand devant les dimensions du sous-espace à l'origine du phénomène (le premier terme du laplacien étant prépondérant devant les autres termes), on a alors :

$$\Delta V \simeq \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \left( 2r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) \quad (\text{A.18a})$$

$$\Delta V \simeq \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \quad (\text{A.18b})$$

$$\Delta V \simeq \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \cdot V}{\partial r^2} \quad (\text{A.18c})$$

Cette dernière expression s'avère fort utile dans le cadre des problèmes de propagation.

### A.1.3. Propriétés remarquables des opérateurs différentiels

Les opérateurs que nous venons de définir sont particulièrement utilisés car ils possèdent un certain nombre de propriétés remarquables.

## A. Compléments mathématiques

### Combinaison entre opérateurs

Les opérateurs différentiels produisent selon les cas une fonction scalaire ou un champ de vecteur. Il est donc possible d'appliquer une nouvelle fois à ces fonctions ou à ces champs un opérateur différentiel (et ainsi de suite...). La combinaison de plusieurs opérateurs différentiels permet d'aboutir à certaines propriétés, par exemple :

- Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul

$$\text{rot } \mathbf{grad}f = \nabla \times \nabla f = 0 \quad (\text{A.19})$$

- La divergence d'un rotationnel est aussi identiquement nulle

$$\text{div } \text{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.20})$$

- La divergence d'un gradient est un laplacien

$$\text{div } \mathbf{grad}f = \nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f \quad (\text{A.21})$$

- Le rotationnel d'un rotationnel peut s'exprimer à partir d'un gradient d'une divergence et d'un laplacien

$$\text{rot } \text{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (\text{A.22})$$

- Autre identité remarquable

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = \nabla f \cdot \mathbf{A} + f \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.23})$$

### Propriétés intégrales

Certains opérateurs possèdent des propriétés particulières vis à vis de l'intégration. Ces propriétés sont données par les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski.

**Théorème A.1 (Théorème de Stokes )** La circulation d'un vecteur  $\mathbf{A}$  le long d'une spire fermée  $C$  est égale au flux du rotationnel de ce vecteur au travers de toute surface  $S$  ayant pour contour  $C$ .

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{A.24})$$

Ce théorème donne souvent un sens physique évident aux équations qui utilisent le rotationnel. Cet opérateur est associé à une notion de circulation.

**Théorème A.2 (Théorème d'Ostrogradski )** Le flux d'un vecteur  $\mathbf{A}$  au travers d'une surface fermée  $S$  est égal à la divergence de ce vecteur dans le volume  $V$  enfermé par la surface  $S$ .

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV \quad (\text{A.25})$$

Ce théorème donne également souvent un sens physique plus intuitif aux équations qui utilisent la divergence. Cet opérateur est associé à une notion de flux.

## A.2. Fonctions spéciales

Nous avons vu que les techniques de séparations de variables impliquait généralement la mise en œuvre de bases de fonctions propres qui étaient des solutions d'une équation différentielle ordinaire. Nous allons maintenant décrire des fonctions particulières qui entrent justement dans ce cadre. Ces fonctions qui apparaissent régulièrement en physique sont appellées fonctions de BESSEL. Nous en profiterons par la suite pour présenter la fonction d'erreur qui est également fort utile en physique.

### A.2.1. Les fonctions de BESSEL

Les fonctions de BESSEL de première et deuxième espèce, notées  $J_\nu(kz)$  et  $Y_\nu(kz)$ , sont les deux solutions indépendantes de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) f = 0 \quad (\text{A.26})$$

Les fonctions  $Y_\nu(kz)$  sont parfois appelées fonctions de NEUMANN.

Si  $\nu$  est un nombre entier, les fonctions  $J_\nu = J_n$  se définissent par :

$$J_{2p}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta) \cos(2p\theta) d\theta \quad (\text{A.27a})$$

si  $n = 2p$ .

$$J_{2p+1}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(z \sin \theta) \sin((2p+1)\theta) d\theta \quad (\text{A.27b})$$

si  $n = 2p+1$ .

## A. Compléments mathématiques

Les fonctions  $Y_\nu$  s'expriment en fonction de  $J_\nu$  :

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos(\pi\nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)} \quad (\text{A.28})$$

En pratique, toutes les fonctions  $J_\nu$  et  $Y_\nu$  sont des fonctions tabulées et supposées connues au même titre que les fonctions sin, cos ou exponentielles.

On peut aussi définir les fonctions de HANKEL de première et deuxième espèces respectivement notées  $H^{(1)}$  et  $H^{(2)}$  :

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + i \cdot Y_\nu \quad (\text{A.29a})$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu - i \cdot Y_\nu \quad (\text{A.29b})$$

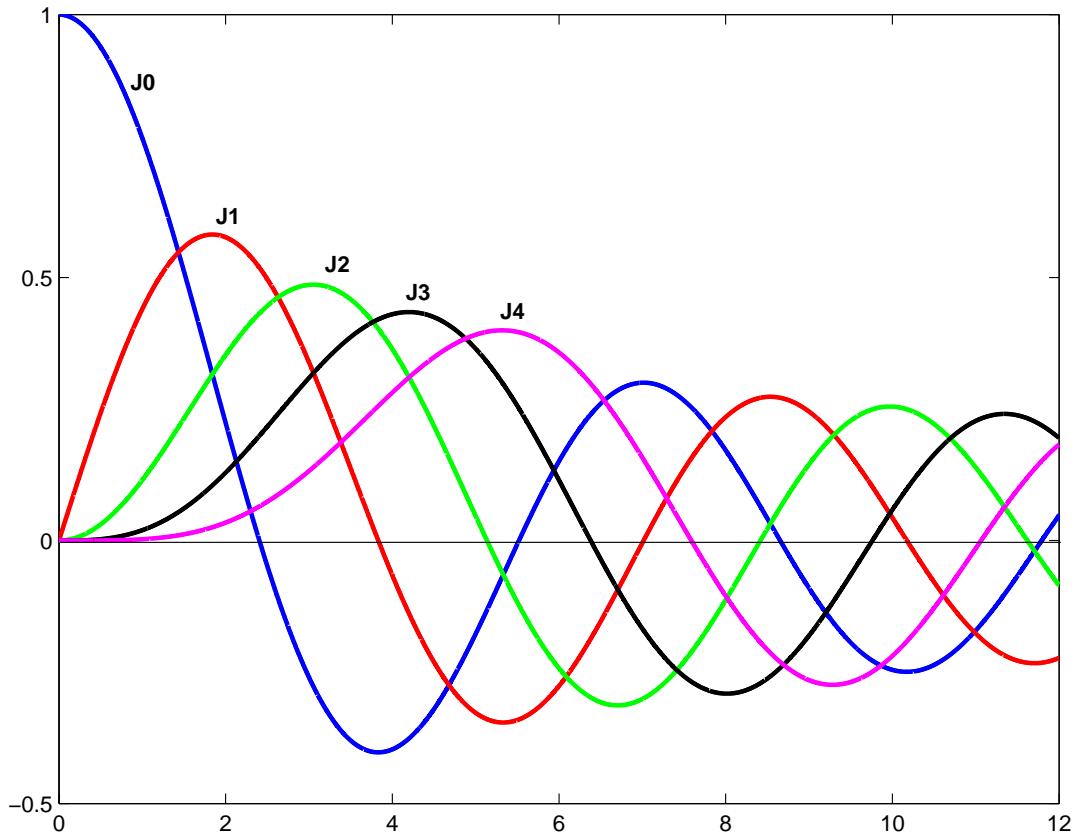


FIGURE A.4. – Exemple de quelques fonctions de BESSEL de première espèce.

### Propriétés génériques

En notant  $B_\nu$  indifféremment les fonctions  $J_\nu$ ,  $Y_\nu$ ,  $H^{(1)}$  et  $H^{(2)}$ , les principales propriétés génériques de ces fonctions peuvent s'exprimer sous la forme :

$$B_{-\nu}(z) = (-1)^n B_\nu(z) \quad (\text{A.30a})$$

$$B_{\nu-1}(z) + B_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} B_\nu(z) \quad (\text{A.30b})$$

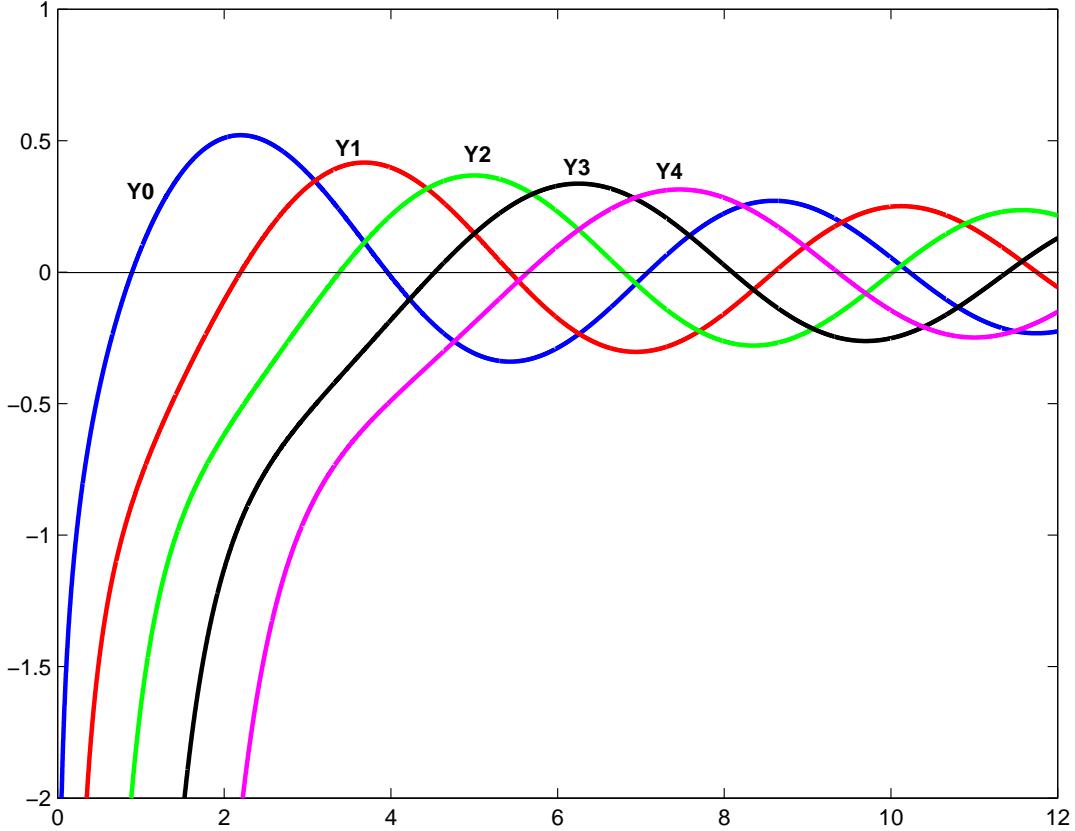


FIGURE A.5. – Exemple de quelques fonctions de BESSEL de deuxième espèce.

$$B'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} B_\nu(z) - B_{\nu+1}(z) \quad (\text{A.30c})$$

$$2B'_\nu(z) = B_{\nu-1}(z) - B_{\nu+1}(z) \quad (\text{A.30d})$$

### Propriétés asymptotiques

Lorsque l'argument devient grand ( $z$  grand), il est possible de donner une forme asymptotique pour les différentes fonctions de BESSEL :

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-1/2} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + O(|z|^{-3/2}) \quad (\text{A.31a})$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-1/2} \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + O(|z|^{-3/2}) \quad (\text{A.31b})$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-1/2} e^{i(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2})} + O(|z|^{-3/2}) \quad (\text{A.31c})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-1/2} e^{-i(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2})} + O(|z|^{-3/2}) \quad (\text{A.31d})$$

Ces expressions sont capitales pour simplifier le problème physique lorsqu'il est considéré par un observateur lointain. Par exemple, pour appliquer les conditions de SOMMERFELD à l'infini, ces expressions sont pratiquement incontournables.

### A.2.2. La fonction d'erreur

La fonction d'erreur  $\text{erf}(x)$  se définit par l'expression :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (\text{A.32})$$

**ATTENTION :** Il existe d'autres définitions pour cette fonction d'erreur. Par exemple, on peut utiliser une intégration de  $-\infty$  à  $x$  avec le facteur de normalisation  $1/\sqrt{2\pi}$ , voir cours de statistiques. Néanmoins, l'expression donnée ici est sans doute la plus pratique en physique.

La fonction d'erreur sera fréquemment rencontrée dans les problèmes paraboliques plans ou sphériques.

On vérifie immédiatement que :

$$\text{erf}(0) = 0 \quad (\text{A.33})$$

et que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{erf}(x) = 1 \quad (\text{A.34})$$

## **B. Énoncés des TD et BE**

## B.1. TD I

### Méthode des caractéristiques

Résoudre le problème :

$$x \cdot u_x + t \cdot u_t + 2u = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad 1 < t < \infty \quad (\text{B.1a})$$

$$u(x, 1) = \sin x \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{B.1b})$$

On notera que la condition initiale est donnée en  $t = 1$ .

### Problème de Sturm-Liouville

Mettre les problèmes suivants sous la forme de problèmes de Sturm-Liouville :

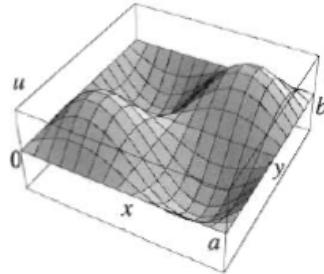
$$x \cdot y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(2) = 0, \quad x \in [1, 2] \quad (\text{B.2})$$

$$x \cdot y'' - y' + \lambda \cdot x \cdot y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(3) = 0, \quad x \in [1, 3] \quad (\text{B.3})$$

Que se passerait il si on considérait les conditions aux frontières :  $y(-1) = 0$  et  $y(3) = 0$  ?

### Séparation de variables

On considère une membrane élastique (de masse surfacique  $\mu$  [kg/m<sup>-2</sup>]) tendue fixement ( $N_0$  tension initiale de la membrane [N/m]) sur un cadre rectangulaire de dimension  $a$  sur  $b$ .



On admettra que cette membrane subit de petites oscillations modélisées par l'équation des ondes en dimension 2 :

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad t > 0 \quad (\text{B.4})$$

où  $c^2 = N_0/\mu$  et  $u(x, y, t)$  représente la déformation de la membrane ( $u \ll (a, b)$ ) par rapport à sa position d'équilibre. À l'instant initial  $t = 0$ , nous avons :

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad \text{et} \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y) \quad (\text{B.5})$$

Trouver la solution générale du problème.

Dans un second temps, on prendra  $a = b = 1$ ,  $c = 1/\pi$  et :

$$f(x, y) = x(x-1)y(y-1) \quad \text{et} \quad g(x, y) = 0 \quad (\text{B.6})$$

## B.2. TD II

### Diffusion de la chaleur dans une barre isolée

1.)

On considère qu'en sa première extrémité la température du cylindre est imposée à  $\theta_0 = 0$  et qu'à l'autre extrémité la température est imposée à  $\theta_L$ . On attend la stabilisation du phénomène. Donner la température dans la barre en fonction de la position.

2.)

On plonge ensuite l'extrémité en  $L$  dans une eau à  $0^{\circ}C$  (température de l'eau imposée). Le coefficient de transfert superficiel est noté  $h$  entre la barre et l'eau, et le coefficient de conductivité thermique  $\lambda$ . On notera enfin  $r = \frac{h}{\lambda}$ . Donner l'expression de la température dans la barre en fonction de la position et du temps.

3.)

Enfin, après la stabilisation, on impose à l'extrémité  $L$  une température variable en fonction du temps  $\theta_L(t)$ . En utilisant les transformations intégrales de Laplace, donner l'expression de la température dans la barre en fonction de la position et du temps (On supposera que le problème est connu pour  $\theta_L(t) = 1$ ).

Quelle autre approche aurait été possible ?

### B.3. TD III

L'objectif premier de ce TD est de “manipuler“ des distributions en montrant le liens avec les connaissances physiques vues durant les années antérieures. Concrètement, nous nous intéressons à un problème élémentaire d'électrostatique et à un problème de propagation acoustique classique.

#### Electrostatique

Nous considérons une charge ponctuelle  $e$  et nous souhaitons étudier le potentiel  $V$  généré par cette charge (nous imposerons que le potentiel est nul à l'infini).

- 1.) En utilisant des techniques étudiées en cours de physique, donner l'expression du potentiel  $V$ .
- 2.) Montrer que le problème se résume à une EDP et une condition aux frontières.
- 3.) Montrer que l'expression du potentiel que nous avons obtenue est bien solution de l'EDP.
- 4.) Donner la fonction de Green du problème.

**Propagation acoustique** Nous considérons la propagation d'une onde scalaire (typiquement une onde acoustique) générée par une source acoustique ponctuelle émettant un signal périodique de pulsation  $\omega$ .

- 1.) Écrire l'EDP et la CF correspondant à cette problématique.
- 2.) Montrer que l'expression suivante est bien solution du problème :

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r}$$

**Remarque B.1** On admettra qu'il s'agit d'une égalité entre distributions spatiales (la variable temps n'introduisant pas de difficulté particulière). De même, suite à l'exercice précédent, on ne considérera que des fonctions test à symétrie sphérique.

- 3.) Donner la fonction de Green du problème.

## B.4. TD IV

**Remarque préliminaire :** Ce TD sur les fonctions de Green prolonge le TD sur les distributions. On pourra donc réutiliser les techniques de calcul et les résultats établis lors de ce TD. L'important est le lien que l'on peut établir entre un énoncé de physique et le modèle mathématique correspondant.

### Problème d'acoustique sous-marine

On considère une source de très petite taille (assimilée à une source ponctuelle omnidirectionnelle unitaire) et monochromatique en temps. On note  $f$  sa fréquence et  $\omega$  sa pulsation. On suppose en premier lieu que cette source est placée dans un milieu infini, isotrope et homogène. On note  $c$  la célérité du son dans l'eau.

- 1.)** Ecrire l'équation des ondes en coordonnées sphériques (système de coordonnées parfaitement adapté au cas présent) et vérifier que l'onde sphérique progressive suivante est solution du problème considéré :

$$P(r, \theta, \varphi, t) = \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi r}$$

Pour répondre à cette question, on commencera par faire une liste des contraintes imposées à cette fonction pour être solution du problème physique.

Interpréter ce résultat en terme de fonction de Green du problème. Que se passe-t-il si la source n'est plus ponctuelle ?

- 2.)** On s'intéresse maintenant au champ de pression produit par cette même source mais cette fois-ci, placée dans un domaine semi-infini en immersion ( $z$  allant de 0 pour la surface, à l'infini pour le fond). Les conditions aux limites sont ainsi donnée en  $z = 0$  par les caractéristiques de réflexion/transmission du dioptre air/eau. On admettra que cette interface peut être considérée comme molle pour une source située dans l'eau.

La source est immergée une profondeur  $z_s$ . L'étude de ce type de scénario est d'une utilité relativement pratique puisqu'il se trouve dans les problèmes de propagation d'ondes sonores par grand fond.

Donner la nouvelle liste des contraintes imposées à la nouvelle solution du problème physique.

Donner l'expression du champ acoustique produit par la source dans ces conditions. Déterminer la nouvelle fonction de Green du problème. Que se passe-t-il si la source n'est plus ponctuelle ?

### Mesure acoustique en auditorium

On cherche à transformer une pièce rectangulaire en une pièce anéchoïde (auditorium) en la recouvrant de mousse absorbante. Avant de faire ce travail, on cherche à modéliser la propagation acoustique dans cette salle lorsque l'on y introduit une source ponctuelle une source ponctuelle omnidirectionnelle monochromatique unitaire. On admettra que les parois sont assimilables à des surfaces parfaitement rigides.

Donner l'expression de la modélisation. Quel problème cela pose-t-il ? Quels suggestions physiques proposeriez-vous pour éliminer ce problème ?

## Problème d'électrostatique

**1.)** On cherche à déterminer le potentiel électrique  $V$  engendré par une distribution de charge continue  $\rho(r')$ . Expliciter mathématiquement l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier le potentiel  $V$  induit par une charge ponctuelle unitaire située à l'origine.

En utilisant le théorème de Gauss en électrostatique, donner l'expression de ce potentiel  $V$ . Vérifier que cette expression est solution de l'EDP. Donner l'expression de la fonction de Green du problème physique. Donner alors l'expression du potentiel généré par la distribution  $\rho(r')$ .

**2.)** On considère une sphère conductrice de rayon  $a$  dont le potentiel en surface est fixé à  $V_s = 0$ . Donner la fonction de Green pour le problème électrostatique et pour le domaine extérieur à la sphère.

## B.5. TD V

### Calcul des variations

**1.)** Démontrer que la courbe de longueur minimale joignant les points  $A(a, \alpha)$  et  $B(b, \beta)$  du plan est bien le segment  $AB$ .

**2.)** Soit  $\mathcal{C}$  la courbe contenue dans un plan vertical, de longueur  $l_0$ , joignant deux points  $A(a, \alpha)$  et  $B(b, \beta)$  du plan lorsque la courbe est pesante, de poids linéaire  $\gamma$ . Donner une équation différentielle que doit vérifier cette courbe.

**3.)** Trouver la surface d'aire minimale tendue entre deux cercles coaxiaux de même rayon. On note  $R$  le rayon des cercles. L'axe  $Oz$  est suivant l'axe commun et les cotes des cercles sont  $-h$  et  $+h$ .

## B.6. TD VI

### Les espaces de Sobolev

Soient les 3 fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Ces fonctions font elles parties de  $L^2([-1, 1])$ , de  $H^1([-1, 1])$  ou de  $H^2([-1, 1])$  ?

### Application des théorèmes de Lax-Milgram

Dans cette partie, nous supposerons que  $f \in L^2(\Omega)$ .

#### 1er cas :

Soit le problème

$$\begin{cases} -u'' = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Rappeler la formulation variationnelle associée, choisir en justifiant le choix l'espace des fonctions test et en utilisant les théorèmes de Lax-Milgram montrer l'équivalence avec le problème direct.

#### 2ème cas :

On considère un volume  $\Omega$  (dimension 3) délimité par un contour  $\Gamma$  ayant une conductivité thermique  $k$ . Nous supposerons qu'en chaque point de la plaque se trouve une source d'énergie thermique  $f(\mathbf{x})$ . Enfin, nous imposons que la température sur le contour est nulle (condition de Dirichlet). Nous voulons connaître la répartition de la température  $u(\mathbf{x})$  à l'équilibre dans le volume. Justifier rapidement que le problème se traduit par la formulation mathématique suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k \nabla u) = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Trouver une formulation variationnelle associée, choisir en justifiant le choix l'espace des fonctions test et en utilisant les théorèmes de Lax-Milgram montrer l'équivalence avec le problème direct. Enfin, montrer que le problème variationnel correspond à la minimisation d'une fonctionnelle.

#### 3ème cas :

Nous considérons le même problème que précédemment mais cette fois la température est fixée par la fonction  $g(\mathbf{x})$  le long du contour  $\Gamma$ .

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k \nabla u) = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Mêmes questions que précédemment.

## B.7. TD VII

### Application des théorèmes de Lax-Milgram (suite)

Dans le TD B.6, nous avons cherché à appliquer le théorème de Lax-Milgram pour des problèmes impliquant des conditions de type Dirichlet. Les conditions aux frontières où des conditions de type Dirichlet s'appliquent, s'appellent des **conditions essentielles**. Ici, nous allons considérer également des parties de frontières où doit s'appliquer une condition de type Neumann.

#### Cas de conditions aux frontières mixte :

On considère un volume  $\Omega$  (dimension 3) délimité par un contour  $\Gamma$  ayant une conductivité thermique  $k$ . Nous supposerons qu'en chaque point de la plaque se trouve une source d'énergie thermique  $f(\mathbf{x})$ . Enfin, nous imposons que la température sur la partie  $\Gamma_0$  du contour est donnée par  $g$  (condition de Dirichlet) et que la dérivée normale de la température sur la partie  $\Gamma_1$  du contour est donnée par  $h/k$  (condition de Neumann). Nous admettrons que  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  et que  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . La répartition de la température  $u(\mathbf{x})$  à l'équilibre dans le volume est donnée par :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k \nabla u) = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma_0 \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Trouver une formulation variationnelle associée sous la forme donnée par le théorème de Lax-Milgram et justifier le choix l'espace des fonctions test.

### Application de la méthode de Ritz

Dans les deux cas suivant, nous cherchons à construire une approximation numérique de la solution par la méthode de Ritz.

#### 1er cas :

$$\begin{cases} -u'' + u = 0 & \text{sur } ]0, 1[ \\ u(0) = 1 \\ \frac{du}{dx}(1) + u(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Justifier que la base des fonctions  $\phi_i(x) = x^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  convient à notre problème. Appliquer la méthode de Ritz.

#### 2ème cas :

Sur  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 10 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

avec  $g = \inf(x, y)$ .

Justifier que la base des fonctions  $\phi_i(x, y) = \sin(i_1 \pi x) \cdot \sin(i_2 \pi y)$ ,  $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N$  convient à notre problème. Appliquer la méthode de Ritz.

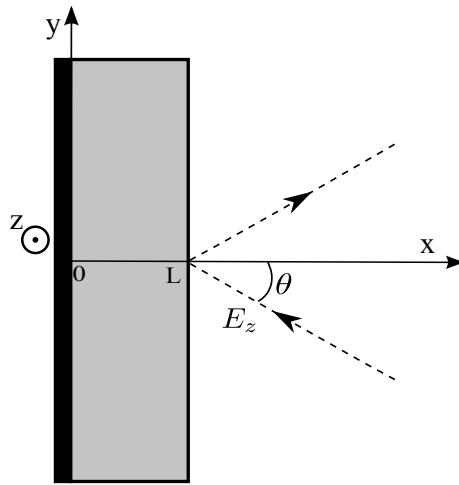
## B.8. TD VIII

### Éléments finis en dimension 1

Dans ce TD, nous allons nous intéresser à la réflexion d'une onde plane monochromatique incidente (dont le champ électrique est polarisé selon  $Oz$ ) sur un diélectrique ( $\varepsilon_r$  et  $\mu_r$ ) d'épaisseur  $L$  et dont une face ( $x = 0$ ) est couverte d'une couche métallique assimilée à un conducteur parfait, voir figure ci-dessous. L'onde électrique incidente d'angle  $\theta$  est donnée par :

$$E_z^{inc}(x, y) = E_0 \cdot e^{ik_0 x \cos \theta - ik_0 y \sin \theta} \quad (\text{B.14})$$

L'épaisseur est fixée à  $L = 0.25\lambda_0$  et  $\varepsilon_r = \mu_r = 4$ .



#### Modélisation électromagnétique :

Nous admettrons que dans le diélectrique l'équation de propagation est de la forme :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\mu_r} \frac{dE_z}{dx} \right) + k_0^2 \left( \varepsilon_r - \frac{1}{\mu_r} \sin^2 \theta \right) E_z = 0 \quad (\text{B.15})$$

Trouver les conditions aux frontières. Pour mettre en œuvre une méthode des éléments finis, nous décomposons l'épaisseur du diélectrique en 10 intervalles réguliers. Ce choix vous paraît-il adapté ?

#### Méthode des éléments finis

Mettre le problème sous une forme variationnelle pertinente. Expliciter le maillage en construisant le tableau des coordonnées, le tableau de connectivité, le tableau de numérotation et le tableau d'adressage. Dans le cadre d'une approximation linéaire, donner les fonctions d'interpolation élémentaires  $\Psi_i$  associées à chaque élément (graphiquement et analytiquement). Construire les systèmes linéaires associés élémentaires. Donner les fonctions de Ritz du problème global. Construire le système linéaire global et expliquer comment trouver une solution approchée du champ électromagnétique dans le diélectrique. Comment faire pour obtenir une expression approchée du coefficient de réflexion.

Que faut-il changer pour appliquer une méthode des éléments finis quadratique ?

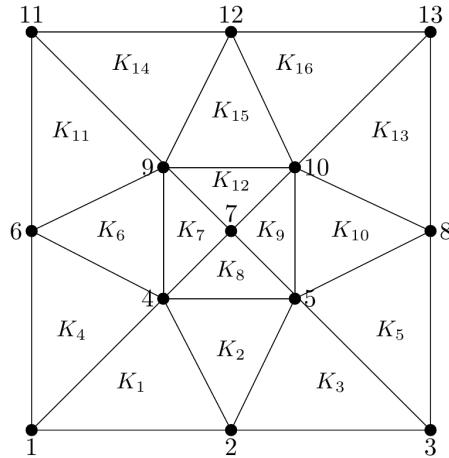
## B.9. TD IX

### Application de la méthode des Éléments finis en dimension 2

Dans ce TD, nous allons considérer l'équation de poissos

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = 1 \quad (\text{B.16})$$

sur le domaine carré  $[0, 1]^2$  et avec des conditions homogène  $u_g(\mathbf{x}) = 0$  sur la frontière.



Comme l'illustre la figure, nous maillons le domaine par 16 éléments triangulaires et 13 noeuds. Les coordonnées des noeuds sont fournies par le tableau de coordonnée.

Coordonnées des noeuds Tableau <i>coor</i>					
Noeud	Composante $x_1$	Composante $x_2$	Noeud	Composante $x_1$	Composante $x_2$
1	0,0000	0,0000	8	1,0000	0,5000
2	0,5000	0,0000	9	0,3333	0,6667
3	1,0000	0,0000	10	0,6667	0,6667
4	0,3333	0,3333	11	0,0000	1,0000
5	0,6667	0,3333	12	0,5000	1,0000
6	0,0000	0,5000	13	1,0000	1,0000
7	0,5000	0,5000			

- Mettre ce problème sous forme variationnel en déduire l'espace fonctionnel de travail.
- Donner le tableau de connectivité, le tableau de numérotation et le tableau d'adressage.
- Choisir l'élément de référence et la nature des transformations associées.
- Construire les systèmes linéaires élémentaires.
- Construire le système linéaire global.
- Résoudre le problème.

## B.10. BE I

Bureau d'étude du cours d'EDP

### B.10.1. Préambule

Le silicium est l'élément le plus abondant après l'oxygène dans la croûte terrestre (28%). On le trouve dans de très nombreux silicates. On obtient le silicium commercial par réduction de la silice SiO<sub>2</sub> avec du carbone ou CaC<sub>2</sub> dans un four électrique. Le silicium est utilisé comme semi-conducteur. Mais pour cette application, il faut un métal d'une extrême pureté.

Typiquement le silicium de qualité métallurgique est obtenu à partir du sable, et plus spécifiquement de sables très purs du désert australien, très riches en silice et au contraire relativement pauvres en composés néfastes tel le sodium, selon un processus de fonderie en deux temps : le matériau est d'abord attaqué chimiquement par HCl ce qui conduit à un mélange de SiCl<sub>4</sub> et SiHCl<sub>3</sub>. Ce produit est alors réduit par l'hydrogène vers 1000°C.

Ce silicium est pur à environ 99%. On parle alors de silicium de pureté N2 (2 chiffres 9). Toutefois, ce type de silicium est impropre à l'utilisation pour l'industrie électronique qui nécessite du Si de type N6 au moins c'est à dire à >99.9999% de pureté. Cette purification est obtenue en exploitant le procédé dit de purification physique par zone fondue.

### B.10.2. Principe de purification

La méthode de purification dite de la zone fondue utilise le fait que les impuretés contenues dans un milieu quelconque ont tendance à se concentrer dans les domaines où la diffusion est la plus facile. Il est clair que les impuretés se diffusent plus rapidement dans un milieu liquide que dans un milieu solide.

Cette propriété est utilisée pour purifier le silicium en faisant fondre par chauffage une zone limitée et en déplaçant cette zone fondue, voir figure (B.1).

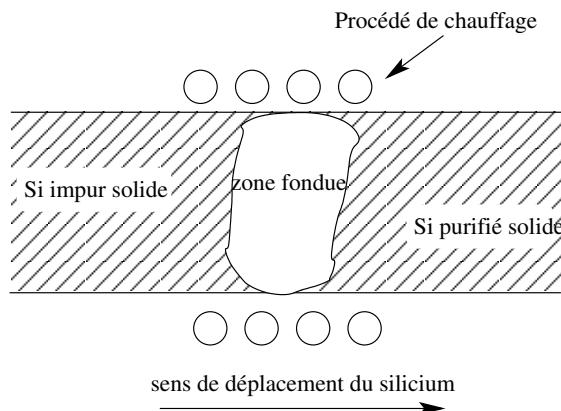


FIGURE B.1. – Principe général.

Le barreau de silicium est introduit dans un four, en atmosphère neutre ou sous vide, et soumis à l'action limitée d'un processus de chauffage, soit par induction, soit par laser de puissance, qui provoque la fusion d'une très faible tranche du barreau. Dans ces conditions les impuretés de la zone solide proche diffusent selon la loi de Fick vers la microzone liquide qui s'enrichit en impuretés tandis

que la phase solide se purifie. Il suffit de déplacer cette zone fondu d'une extrémité du barreau à l'autre (en déplaçant la bobine HF) pour transporter l'essentiel des impuretés à l'extrémité du barreau. En procédant à plusieurs balayages successifs on aboutit progressivement à l'obtention d'un barreau de pureté convenable. L'extrémité impure est évidemment éliminée. On notera  $\theta_f$ , la température de fusion du silicium.

### B.10.3. Modélisation de la fusion

Nous allons assimiler le barreau de silicium à une plaque de longueur et de largeur infinie. L'épaisseur étant fixée à  $L$ .

#### Généralité en diffusion thermique

D'une manière générale, préciser l'équation aux dérivées partielles (EDP) que doit suivre la loi de diffusion dans un milieu solide et l'adapter à notre problème.

Hors du four, le silicium est à la température ambiante  $\theta_a$ . Dans le four qui a une largeur  $l_0$ , les parois de la plaque sont soumises à la température  $\theta_e$ . On supposera que la propagation de la chaleur dans la plaque s'effectue uniquement dans le sens de l'épaisseur de la plaque. On donnera la position d'un observateur suivant l'épaisseur par la variable  $x$ . On choisira le repère de telle façon que  $x = 0$  (respectivement  $x = L$ ) corresponde à la position de la paroi supérieure (respectivement inférieure).

Avant de chercher à résoudre ce problème, donner la forme générale de la solution à l'aide d'une analyse dimensionnelle.

#### Résolution du problème

**Séparation de variable** Nous souhaitons résoudre ce problème par une approche de séparation de variable. Est elle envisageable dans ce problème ? Est elle souhaitable ? En justifiant votre démarche, trouver la solution de ce problème.

**Numérique** On admettra une erreur maximale de 5% sur le calcul de la température. Proposer en la justifiant une troncature de la série.

Par un programme MATLAB, tracer les courbes de température dans la plaque de silicium à différents instants (par exemple au milieu de la plaque).

Estimer la vitesse maximale de déplacement du silicium dans le four électrique.

### B.10.4. Contrôle du processus

Il est clair que le processus de fusion doit être précisément contrôlé. En particulier, la mesure de la température  $\theta_e$  doit se faire en temps réel. On positionne donc des capteurs thermiques dans le corps du four, voir la figure (B.2). On notera  $a_s$  la constante de diffusivité dans le corps du four.

Les parois du four à proximité des sources de chaleur sont à la température  $\theta_e$ . On supposera que le corps du four n'est pas limitée dans le sens de la hauteur vers les extérieurs (haut et bas). On simplifiera le problème en supposant que la propagation de la chaleur dans le corps du four s'effectue uniquement dans le sens de cette hauteur (les parois à droite et à gauche sont donc supposées ne jouer aucun rôle particulier). La position de l'observateur est donnée par la variable  $x$ .

## B. Énoncés des TD et BE

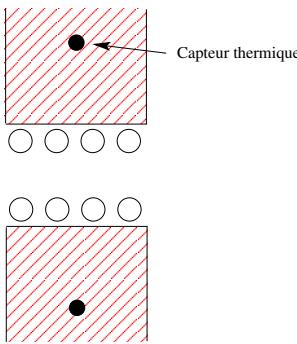


FIGURE B.2. – Positionnement des capteurs dans la structure du four.

On choisira le repère de telle façon que  $x = 0$  corresponde à la position de la paroi (proche de la source) du four. Le capteur thermique est situé à la distance  $x_c$  de cette paroi. Avant d'allumer le four, le four est à température ambiante  $\theta_a$ .

### Analyse du problème

Pour déterminer la température dans le corps du four une démarche de séparation de variable est elle possible ? Si oui, est elle aussi intéressante que dans le cas précédent ? Justifier vos réponses.

Quelle autre approche semblerait logique ?

### Étape préliminaire

Avant de s'intéresser à la modélisation de la température dans la structure du four proprement dite, nous allons étudier l'évolution de la température dans un milieu infini lorsque la distribution initiale de température  $\theta_0(x)$  est donnée.

Nous noterons  $\tilde{\theta}(\nu, t)$  la transformée de Fourier de  $\theta(x, t)$  par rapport à la variable spatiale  $x$ . Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $\tilde{\theta}(\nu, t)$ . En considérant les conditions initiales et la transformée de Fourier  $\tilde{\theta}_0(\nu)$  de la fonction  $\theta_0$ , donner l'expression de  $\tilde{\theta}(\nu, t)$ . En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, démontrer que la température est de la forme :

$$\theta(x, t) = \theta_0 * N(x, t) \quad (\text{B.17})$$

où  $*$  est un produit de convolution.  $N(x, t)$  est appelé le noyau de l'EDP. Expliciter l'expression analytique de  $N(x, t)$ .

### Résolution du problème

Nous revenons maintenant au problème de la distribution de température dans le corps du four. On notera que la position de l'observateur est maintenant limitée par la paroi en contact avec la barre  $x \in [0, +\infty[$ .

**Expression analytique** En utilisant des propriétés de symétrie ou d'antisymétrie, démontrer que la température  $\theta(x, t)$  peut se mettre sous la forme :

$$\theta(x, t) - \theta_e = \int_0^{+\infty} (\theta_0(u) - \theta_e) \cdot N_{demi\ espace}(x, u, t) du \quad (\text{B.18})$$

Explicitier l'expression de  $N_{demi\ espace}(x, u, t)$ .

Modéliser la température dans le corps du four et démontrer en particulier que la température peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\theta - \theta_e}{\theta_0 - \theta_e} = A * \operatorname{erf}(\dots) \quad (\text{B.19})$$

**Numérique** Par un programme MATLAB, tracer la courbe de température dans la structure du four à différents instants.

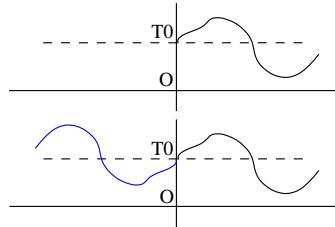
### Retour au problème précédent

Peut-on résoudre le problème précédent (barre dans le four) par une approche s'appuyant sur la transformation de Fourier. Si oui, retrouver les résultats obtenus par séparation de variable en appliquant cette démarche.

### Informations complémentaires

**Utilisation de la symétrie :** En physique, il est primordial d'exploiter les propriétés de symétrie du problème posé. Il est ainsi très courant de pouvoir remplacer un problème de physique par un problème équivalent ayant des contraintes de symétrie. En électromagnétisme ou en acoustique, on peut citer le cas de la méthode des images pour modéliser la réflexion sur un miroir.

Dans le cas de la diffusion de la chaleur, deux problèmes physiques peuvent ainsi être remplacés l'un par l'autre. Comme l'illustre la figure ci-dessous, il est en effet équivalent d'imposer la température  $T_0$  sur la paroi d'un semi-massif (située en O) et de laisser évoluer une répartition de température initiale donnée sur  $x \in [0, +\infty[$ , que de considérer une distribution initiale de température symétrique par rapport à  $T_0$  et de laisser évoluer le système sur  $x \in ]-\infty, +\infty[$ .



Dans les deux cas, pour des raisons de symétrie, la température en  $O$  sera constamment égale à  $T_0$ .

**Valeur numérique des constantes :** La température ambiante sera fixée à  $\theta_a = 25^\circ C$ . La température de fusion du silicium est de  $\theta_f = 1410^\circ C$ . Dans le four, les parois de la plaque sont soumises à la température  $\theta_e = 1800^\circ C$ . La diffusivité thermique du silicium  $a_s = 33 \cdot 10^{-8} m^2 s^{-1}$ . L'épaisseur de la plaque de silicium est de  $L = 5 cm$ . La diffusivité thermique de la structure du four, constitué d'un matériau réfractaire, est de  $a_f = 51.7 \cdot 10^{-8} m^2 s^{-1}$ . La largeur du four est de  $l_f = 30 cm$ .

**Définition de la fonction "erf" :** La fonction d'erreur  $erf(x)$  se définit par l'expression :

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (\text{B.20})$$

**ATTENTION :** Il existe d'autres définitions pour cette fonction d'erreur. Par exemple, on peut utiliser une intégration de  $-\infty$  à  $x$  avec le facteur de normalisation  $1/\sqrt{2\pi}$ , voir cours de statistiques. Néanmoins, l'expression donnée ici est sans doute la plus pratique en physique.

La fonction d'erreur sera fréquemment rencontrée dans les problèmes paraboliques plans ou sphériques.

On vérifie immédiatement que :

$$erf(0) = 0 \quad (\text{B.21})$$

et que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} erf(x) = 1 \quad (\text{B.22})$$

## B.11. BE II

Bureau d'étude II du cours d'EDP

### B.11.1. Préambule

Nous allons considérer une ligne microstrip de longueur infinie correspondant à la figure B.1 :

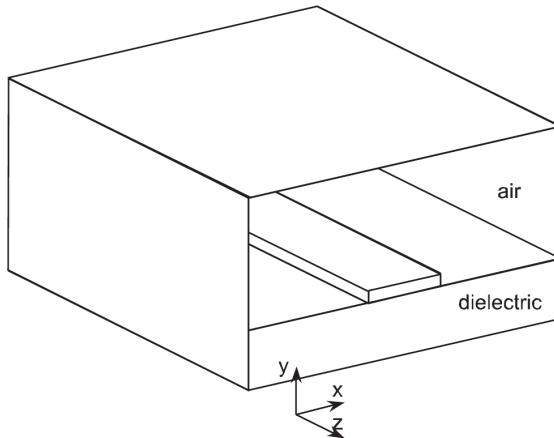


FIGURE B.1. – Ligne microstrip.

Pour caractériser cette ligne, nous cherchons à déterminer l'impédance caractéristique  $Z$  et la constante de propagation  $\beta$  de la ligne. En appelant respectivement  $L$  et  $C$  l'inductance et la capacité par unité de longueur de la ligne, nous avons que :

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = v_p L = \frac{1}{v_p C} \quad \text{et} \quad \beta = \omega \sqrt{LC} \quad (\text{B.1})$$

où  $v_p$  est la vitesse de phase et  $\omega$  la pulsation de l'onde dans la ligne.

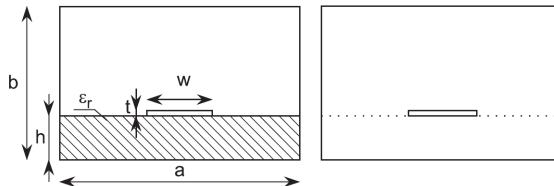


FIGURE B.2. – Ligne microstrip avec diélectrique et remplacé par du vide.

Dans notre cas, la ligne a pour support un diélectrique, voir figure B.2. Si nous remplaçons ce diélectrique par de l'air (assimilé à du vide), nous avons :

$$Z^{air} = \sqrt{\frac{L}{C^{air}}} = cL = \frac{1}{cC^{air}} \quad (\text{B.2})$$

## B. Énoncés des TD et BE

À noter que nous avons fait l'hypothèse que le diélectrique n'a pas de propriété magnétique partielle  $\mu_r = 1$  et que  $L^{air} = L$ . Ainsi :

$$L = \frac{Z^{air}}{c} = \frac{1}{c^2 C^{air}} \quad (\text{B.3})$$

Finalement, nous obtenons que :

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{c\sqrt{C^{air}C}} \quad (\text{B.4})$$

et :

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{C}{C^{air}}} \quad (\text{B.5})$$

On peut conclure que connaissant la capacité de la ligne avec support diélectrique et avec de l'air, on en déduit les caractéristique  $Z$  et  $\beta$  de la ligne.

Pour calculer la capacité d'une ligne, une technique consiste à appliquer une différence de tension  $\Delta V$  entre la bande de cuivre intérieure et la partie cuivrée extérieure. Si l'on peut calculer l'énergie electrostatique alors accumulée par la ligne, on en déduit que :

$$C = \frac{2U}{(\Delta V)^2} \quad \text{et} \quad C^{air} = \frac{2U^{air}}{(\Delta V)^2} \quad (\text{B.6})$$

On notera que :

$$U^{air} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dv \quad (\text{B.7a})$$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dv + \frac{\varepsilon_d}{2} \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 dv \quad (\text{B.7b})$$

### B.11.2. Modélisation du problème

Justifier que le problème électrostatique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \Omega \\ u(\mathbf{x}) = g & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

où  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  et utilisant les notation de la figure B.3. On notera également la condition de continuité entre les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  :

$$\frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)_{|\Gamma_{i,1}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)_{|\Gamma_{i,2}} \quad (\text{B.9})$$

### B.11.3. Problème variationnel

Exprimer le problème d'EDP sous la forme d'un problème variationnel.

En déduire l'espace fonctionnel de travail.

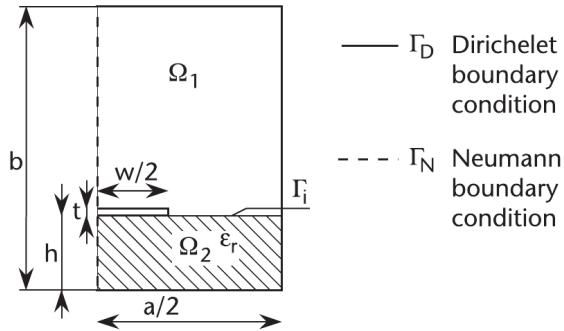


FIGURE B.3. – Domaine 2D de la ligne microstrip.

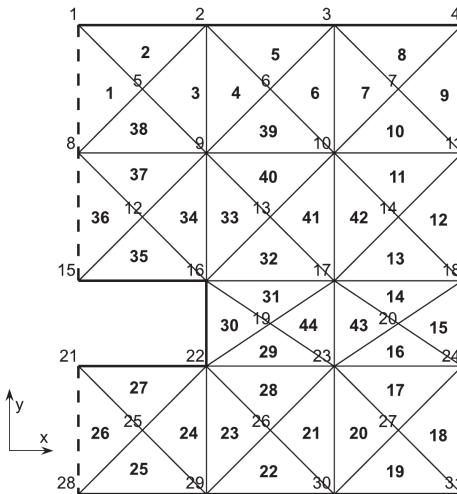


FIGURE B.4. – Maillage du domaine 2D.

#### B.11.4. Maillage

Nous souhaitons mailler le domaine en 44 éléments comme le montre la figure B.4.

Le maillage géométrique est contenu dans le fichier “raw.fem”. Afficher ce fichier avec un éditeur de texte. Pour construire le maillage à partir de ce fichier, nous utiliserons la fonction “ReadFemFile.m”. Lancer cette fonction et expliquer les tableaux que cette fonction crée. A quoi sert les étiquettes données à chaque éléments ?

Les données électriques sont contenues dans les fichiers “rawA.aux” et “rawD.aux”. La première ligne précise qu'il y a deux tensions imposées. La première (1) à 0V et la seconde (2) à 1V. La troisième ligne indique le nombre de milieux (ici 1) en plus de l'air. La dernière ligne indique l'étiquette (2) et la permittivité relative (1 ou 8.875) du milieu diélectrique. Pour lire ces fichiers, lancer la fonction “ReadElecFile.m”.

Après avoir lancé les deux fonctions, afficher les noeuds du maillage en utilisant la fonction Matlab “scatter” (voir help). À partir des noeud, Matlab peut générer un maillage en utilisant la fonction “Delaunay”. Générer le maillage avec cette fonction et afficher le avec “triplot”. Correspond-

## B. Énoncés des TD et BE

il au maillage que l'on souhaite ? Trouver le tableau qui contient notre maillage et afficher le avec "triplot".

### B.11.5. Problème variationnel élémentaire

Donner l'expression du problème variationnel sur un élément.

Sur chaque élément, on considère une base de fonction une base de fonction de Lagrange  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  décrite à la figure B.5.

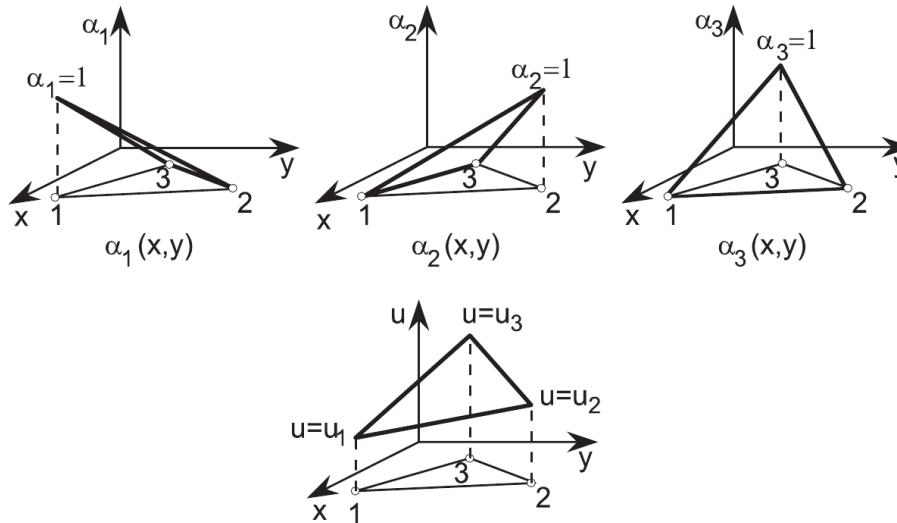


FIGURE B.5. – Fonction de Lagrange d'ordre 1 sur chaque élément.

Donner les expressions des fonctions  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  à partir des coordonnées des points  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ .

Déterminer le système linéaire lié au problème variationnel élémentaire.

Construire la fonction "setri.m".

### B.11.6. Assemblage

Expliquer à quoi sert la fonction "embed.m".

### B.11.7. Finalement

Lancer le calcul complet "Laplace.m", expliquer son fonctionnement et interpréter les résultats.

# Bibliographie

- [BCHL10] É. Bécache, P. Ciarlet, C. Hazard, and É. Lunéville. *La méthode des éléments finis. De la théorie à la pratique. II. Compléments.* ENSTA ParisTech, 2010.
- [CL93] Gabriel B. Costaa and Lawrence E. Levine. Families of separable partial differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(5) :631–635, 1993.
- [CL09] P. Ciarlet and É. Lunéville. *La méthode des éléments finis. De la théorie à la pratique. I. Concepts généraux.* ENSTA ParisTech, 2009.
- [Far93] S. J. Farlow. *Partial differential equations for scientists and engineers.* Dover, 1993.
- [For11] A. Fortin. *Les éléments finis : de la théorie à la pratique.* École polytechnique de Montréal, 2011.
- [Kev00] J. Kevorkian. *Partial Differential Equations. Analytical Solution Techniques.* Springer, 2000.
- [Luc04] B. Lucquin. *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations.* Mathématiques à l'Université. Ellipses, 2004.
- [PR05] Y. Pinchover and J. Rubinstein. *An introduction to partial differential equations.* Cambridge, 2005.
- [Tay96] M. E. Taylor. *Partial differential eq. Basic theory.* Springer, 1996.
- [ZT86] E.C. Zachmanoglou and Dale W. Thoe. *Introduction to Partial Differential Equations with Applications.* Dover, 1986.
- [Zui02] C. Zuily. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles.* Sciences sup. Dunod, 2002.



# Index

- condition essentielle, 159
- courbe caractéristique, 59
- courbe intégrale, 59
- distribution
  - de Schwartz, 86
  - régulière, 87
  - tempérée, 87
- élément, 114
  - de référence, 117
- espace
  - $L^2$ , 104
  - de Schwartz  $\mathcal{D}$ , 86
  - de Schwartz  $\mathcal{S}$ , 86
  - de Sobolev d'ordre 1, 104
  - de Sobolev d'ordre 2, 106
- fonction d'interpolation, 116
- fonction propre, 66
- fonctionnelle, 86
- forme bilinéaire, 107
- forme bilinéaire coercive, 108
- forme bilinéaire continue, 107
- forme bilinéaire symétrique, 107
- forme linéaire, 85
- forme linéaire continue, 107
- hilbertien, 65
- méthode de Petrov-Galerkin, 112
- méthode de Rayleigh-Ritz, 112
- matrice de rigidité, 117
- multiplicateur de Lagrange, 100
- nœud
  - d'interpolation, 114
  - de calcul, 114
  - géométrique, 114
- préhilbertien, 65
- produit pondéré, 85
- relèvement, 105
- solution faible, 102
- solution forte, 102
- Sturm-Liouville périodique, 67
- Sturm-Liouville régulier, 66
- système orthogonal, 65
- système orthogonal total, 65
- système orthonormal, 65
- théorème d'Otrogradski, 146
- théorème de Stokes, 146
- trace
  - au bord, 105
  - normale au bord, 106
- valeur propre, 66
- variable secondaire, 116
- vecteur des degrés de liberté, 117
- vecteur des sollicitations élémentaires, 117
- vecteur propre, 66