

# MI-FME Cvičení 3

Tomáš Chvosta

Únor 2020

## Cvičení 3a

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$\neg[[r \vee s] \Rightarrow q] \wedge [[r \vee s] \Rightarrow q] \Rightarrow [[p \Rightarrow q] \wedge \neg[p \Rightarrow q]]$$

### Důkaz:

Jelikož se jedná o implikaci, předpokládáme, že platí levá strana pravidla tedy konjunkce  $\neg[[r \vee s] \Rightarrow q]$  a  $[[r \vee s] \Rightarrow q]$ . Tyto dva předpoklady představují  $\perp$  a jelikož z  $\perp$  plyne cokoliv, nezáleží na tom, co máme na pravé straně implikace a formule vždy platí.

Table 1: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$\neg[[r \vee s] \Rightarrow q]$ $[[r \vee s] \Rightarrow q] \dots \perp$	$[p \Rightarrow q]$ $\neg[p \Rightarrow q]$

## Cvičení 3b

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[\neg p \Rightarrow p] \Rightarrow p$$

### Důkaz:

Jelikož se jedná o implikaci, je předpoklad  $[\neg p \Rightarrow p]$  a pokusíme se dokázat  $p$ . Použijeme Ratschanovo důkazní pravidlo, které říká, že když chceme dokázat  $p$ , pak můžeme nahradit  $p$  za  $\neg\neg p$  a následně použít pravidlo pro dokazování negací. Do seznamu předpokladů tedy přidáme  $\neg p$  a pokusíme se najít spor.

Předpoklad  $[\neg p \Rightarrow p]$  říká, že musí platit  $p$  jelikož máme v předpokladech  $\neg p$ , což je spor. Spor podle Ratschana dokončí úspěšně jakýkoliv důkaz.

Table 2: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$[\neg p \Rightarrow p]$	$p$
2.	$\neg p$	$\neg\neg p$ tedy $p$
3.	$p \dots \perp$	

## Cvičení 3c

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$\neg[p \Rightarrow q] \Rightarrow [q \Rightarrow p]$$

### Důkaz:

Jelikož se jedná o implikaci, je  $\neg[p \Rightarrow q]$  předpoklad. Pokusíme se tedy dokázat  $[q \Rightarrow p]$ . Použijeme stejný postup a předpokládáme, že platí  $q$ . Nyní by se mohlo hodit dokázat, že platí  $[p \Rightarrow q]$ . Jako lemma tedy zvolíme  $[p \Rightarrow q]$  a díky předpokladu  $q$  je jasné, že toto lemma platí. Můžeme tedy přidat předpoklad  $[p \Rightarrow q]$ , což společně s předpokladem  $\neg[p \Rightarrow q]$  vytvoří  $\perp$ , ze které plyne cokoliv.

Table 3: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$\neg[p \Rightarrow q]$	$[q \Rightarrow p]$
2.	$q$	$p$
3.		lemma $[p \Rightarrow q]$
4.	$[p \Rightarrow q] \dots \perp$	

## Cvičení 3d

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

**Důkaz:**

### **Cvičení 3e**

**Zadání:**

Dokažte následující formuli:

**Důkaz:**

### **Cvičení 3f**

**Zadání:**

Dokažte následující formuli:

**Důkaz:**

### **Cvičení 3g**

**Zadání:**

Dokažte následující formuli:

**Důkaz:**

### **Cvičení 3h**

**Zadání:**

Dokažte následující formuli:

**Důkaz:**

### **Cvičení 3i**

**Zadání:**

Dokažte následující formuli:

**Důkaz:**