MI-FME Cvičení 4

Tomáš Chvosta

Březen 2020

Cvičení 4a

Úloha byla vypracována na cvičení.

Cvičení 4b

Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))] \Rightarrow [[(\forall x)(P(x))] \wedge [(\forall x)(Q(x))]]$$

Důkaz:

Jelikož se jedná o implikaci, můžeme předpokládat $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ a dokázat $[[(\forall x)(P(x))] \wedge [(\forall x)(Q(x))]]$. Znamená to tedy, že máme dokázat zvlášť $(\forall x)(P(x))$ a $(\forall x)(Q(x))$. Pokud dokazujeme $(\forall x)(P(x))$, zavedeme novou konstantu, například a a píšeme: „Nechť a je libovolné ale pevné" a dokážeme $P[x \leftarrow a]$ tedy $P(a)$. Z předpokladu $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ můžeme produkovat nové známé věci. Například zvolíme term a a usoudíme $P(a) \wedge Q(a)$. Z tohoto předpokladu můžeme usoudit $P(a)$ a $Q(a)$. Tím máme dokázáno $P(a)$. Stejně tak postupujeme při dokazování $(\forall x)(Q(x))$. Zavedeme novou konstantu, například b a píšeme: „Nechť b je libovolné ale pevné" a dokážeme $Q(b)$. Z předpokladu $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ můžeme produkovat nové známé věci. Například zvolíme term b a usoudíme $P(b) \wedge Q(b)$. Z tohoto předpokladu můžeme usoudit $P(b)$ a $Q(b)$. Tím máme dokázáno $Q(b)$.

Tabulka 1: Důkazová tabulka

Krok	**Předpokládáme**	**Dokazujeme**
1.	$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$	$[(\forall x)(P(x))] \wedge [(\forall x)(Q(x))]$
2.		$(\forall x)(P(x))$ $(\forall x)(Q(x))$
3.		$P(a)$
4.	$P(a) \wedge Q(a)$	$P(a)$
5.	$P(a)$ $Q(a)$	$P(a)$
6.		$Q(b)$
7.	$P(b)$ $Q(b)$	$Q(b)$

Cvičení 4c

Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[(\exists x)(P(f(x)) \vee Q(g(x)))] \Rightarrow [[(\exists x)(P(x))] \vee [(\exists x)(Q(x))]]$$

Důkaz:

Pro důkaz formule nejprve předpokládejme $(\exists x)(P(f(x)) \vee Q(g(x)))$ a dokažme $[(\exists x)(P(x))] \vee [(\exists x)(Q(x))]$. Pro první předpoklad zvolme novou konstantu tak, že $x \leftarrow a$ a tedy platí $P(f(a)) \vee Q(g(a))$. Disjunkci dokážeme například tak, že předpokládáme $\neg[(\exists x)(P(x))]$ a dokážeme $[(\exists x)(Q(x))]$.

Nyní rozdělíme důkaz na dvě části. Nejprve předpokládejme, že platí $P(f(a))$. Dokážeme lemma $(\exists x)(P(x))$ jelikož se přímo nabízí zvolit term $f(a)$ a dokázat $P[x \leftarrow f(a)]$ tedy $P(f(a))$, což je ale triviálně dokázáno, neboť $P(f(a))$ máme v předpokladech. V této části důkazu záskáváme spor.

V druhé části předpokládejme, že platí $Q(g(a))$. Nyní už stačí jen zvolit term $g(a)$ a dokázat, že platí $Q[x \leftarrow g(a)]$ tedy $Q(g(a))$. To je triviálně dokázáno, neboť $Q(g(a))$ už máme v předpokladech.

Tabulka 2: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$(\exists x)(P(f(x)) \vee Q(g(x)))$	$[(\exists x)(P(x))] \vee [(\exists x)(Q(x))]$
2.	$P(f(a)) \vee Q(g(a))$	$[(\exists x)(P(x))] \vee [(\exists x)(Q(x))]$
3.	$\neg(\exists x)(P(x))$	$(\exists x)(Q(x))$
4a.	$P(f(a))$	$(\exists x)(Q(x))$
5a.		lemma $(\exists x)(P(x))$
6a.	$(\exists x)(P(x)) \ldots \perp$	
4b.	$Q(g(a))$	$(\exists x)(Q(x))$
5b.		$Q(g(a))$

Cvičení 4d

Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[(\exists x)(S \Rightarrow Q(x))] \Rightarrow [S \Rightarrow (\exists x)(Q(x))]$$

Důkaz:

Jelikož se jedná o implikaci, můžeme předpokládat $(\exists x)(S \Rightarrow Q(x))$ a dokázat $S \Rightarrow (\exists x)(Q(x))$. Opět dokazujeme implikaci, takže předpokládáme S a dokážeme $(\exists x)(Q(x))$. Nyní se hodí vyprodukovat novou znalost z prvního předpokladu. Zavedeme novou konstantu a tak, že $(S \Rightarrow Q(x))[x \leftarrow a]$ a přidáme $S \Rightarrow Q(a)$ do seznamu předpokladů. V předpokladech máme implikaci a také předpokládáme, že platí S, můžeme tedy usoudit $Q(a)$. Pro důkaz $(\exists x)(Q(x))$ zvolíme term a, který dosadíme za x a dokážeme $Q(a)$. To je však již triviálně dokázáno.

Tabulka 3: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$(\exists x)(S \Rightarrow Q(x))$	$S \Rightarrow (\exists x)(Q(x))$
2.	S	$(\exists x)(Q(x))$
3.	$S \Rightarrow Q(a)$	$(\exists x)(Q(x))$
4.	$Q(a)$	$(\exists x)(Q(x))$
5.		$Q(a)$

Cvičení 4e

Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[(\neg\exists x)(\exists y)(T(x,y))] \Rightarrow [(\forall x)(\neg T(f(g(x)), f(x)))]$$

Důkaz:

Jelikož dokazujeme implikaci, můžeme předpokládat $(\neg\exists x)(\exists y)(T(x,y))$ a dokázat $(\forall x)(\neg T(f(g(x)), f(x)))$. Zvolme nyní novou konstantu, například a a nechť a je libovolné, ale pevné, a dokažme $\neg T[x \leftarrow a]$ tedy $(\neg T(f(g(a)), f(a)))$. Formuli, před kterou máme negaci, dokážeme tak, že předpokládáme, že platí a pokusíme se najít spor. K tomu abychom našli spor, se nám bude hodit dokázat lemma $(\exists x)(\exists y)(T(x,y))$. To dokážeme tak, že nejprve zvolíme term $f(g(a))$, dosadíme za x a dokážeme $(\exists y)(T(f(g(a)), y))$ a poté zvolíme term $f(a)$, dosadíme za y a dokážeme $T(f(g(a)), f(a))$, což už je ale díky předpokladu triviálně dokázáno. Nový předpoklad $(\exists x)(\exists y)(T(x,y))$ vytvoří spor, což úspěšně dokončí důkaz.

Tabulka 4: Důkazová tabulka

Krok	**Předpokládáme**	**Dokazujeme**
1.	$(\neg\exists x)(\exists y)(T(x,y))$	$(\forall x)(\neg T(f(g(x)), f(x)))$
2.		$(\neg T(f(g(a)), f(a)))$
3.	$T(f(g(a)), f(a))$	hledáme spor
4.		lemma $(\exists x)(\exists y)(T(x,y))$
5.	$(\exists x)(\exists y)(T(x,y)) \ldots \perp$	hledáme spor

Tabulka 5: Důkazová tabulka lemmatu

Krok	**Předpokládáme**	**Dokazujeme**
1.	$T(f(g(a)), f(a))$	lemma $(\exists x)(\exists y)(T(x,y))$
2.		$T[x \leftarrow f(g(a))]$
3.		$(\exists y)(T(f(g(a)), y))$
4.		$T[y \leftarrow f(a)]$
5.		$T(f(g(a)), f(a))$

Cvičení 4f

Úloha bude vypracována na cvičení.