# MI-FME Cvičení 7

Tomáš Chvosta

Březen 2020

## Cvičení 7a

Úloha byla vypracována na cvičení.

## Cvičení 7b

### Zadání:

V teorii listů dokažte následující formuli:

$$(\forall l, x, y)(l = cons(x, cons(y, empty())) \Rightarrow first(rest(l)) = y)$$

### Důkaz:

Dokazujeme formuli, která má tvar $(\forall l, x, y)(F)$, což znamená, že zavedeme nové konstanty $a$,$b$ a $c$. Nechť tyto konstanty $a$,$b$,$c$ jsou libovolné ale pevné a dokažme $F[l \leftarrow a, x \leftarrow b, y \leftarrow c]$. Jedná se o implikaci, takže předpokládáme $a = cons(b, cons(c, empty()))$ a dokážeme $first(rest(a)) = c$. Využijeme jedno z ekvivalentních pravidel, že $(\neg\neg(first(rest(a)) = c)) \Leftrightarrow first(rest(a)) = c$. Nyní můžeme postupovat tak, že předpokládáme $\neg(first(rest(a)) = c)$ a najedeme spor. Do posledního předpokladu můžeme dosadit $a = cons(b, cons(c, empty()))$. V tuto chvíli můžeme využít jeden z axiomů, konkrétně $(\forall \mathrm{l}, \mathrm{x})(rest(cons(\mathrm{x}, \mathrm{l})) = \mathrm{l})$ a upravit poslední předpoklad na tvar $\neg(first(cons(c, empty()))) = c)$. Nyní můžeme využít dalšího axiomu, konkrétně $(\forall \mathrm{l}, \mathrm{x})(first(cons(\mathrm{x}, \mathrm{l})) = \mathrm{x})$ a upravit poslední předpoklad na tvar $\neg(c = c)$.

Tabulka 1: Důkazová tabulka

| **Krok** | **Předpokládáme** | **Dokazujeme** |
|---|---|---|
| 1. | | $(a = cons(b, cons(c, empty()))$ $\Rightarrow$ $first(rest(a)) = c)$ |
| 2. | $a = cons(b, cons(c, empty()))$ | $first(rest(a)) = c$ |
| 3. | | $\neg\neg(first(rest(a)) = c)$ |
| 4. | $\neg(first(rest(a)) = c)$ | hledáme spor |
| 5. | $\neg(first(rest(cons(b, cons(c, empty()))))) = c)$ | hledáme spor |
| 6. | axiom č. 1 $[x \leftarrow b, l \leftarrow cons(c, empty())]$ | hledáme spor |
| 7. | $\neg(first(cons(c, empty()))) = c)$ | hledáme spor |
| 8. | axiom č. 2 $[x \leftarrow c, l \leftarrow empty()]$ | hledáme spor |
| 9. | $\neg(c = c) \ldots \perp$ | hledáme spor |

Tabulka 2: Tabulka využitých axiomů ($\mathrm{l} \in \mathcal{L}[\mathcal{T}], \mathrm{x} \in \mathcal{T}$):

| **Číslo axiomu** | **Axiom** |
|---|---|
| 1. | $(\forall \mathrm{l}, \mathrm{x})(rest(cons(\mathrm{x}, \mathrm{l})) = \mathrm{l})$ |
| 2. | $(\forall \mathrm{l}, \mathrm{x})(first(cons(\mathrm{x}, \mathrm{l})) = \mathrm{x})$ |

# Cvičení 7c

## Zadání:

V teorii polí dokažte následující formuli:

$$(\exists a, i, j, x)(write(a, i, x)[j] \neq x)$$

## Důkaz:

V tomto důkazu se snažíme dokázat formuli, která má tvar $(\exists a, i, j, x)(F)$, což znamená, že zvolíme nějaké termy, které dosadíme za $a, i, j, x$ a tuto formuli poté dokážeme. Pro tento důkaz můžeme zvolit termy $k, l, w, write(a, l, v)$ a následně dokážeme $F[a \leftarrow write(a, l, v), i \leftarrow k, x \leftarrow w, j \leftarrow l]$. Je nutné podotknout, že $k \neq l$ a také $w \neq v$. Proměnná $v$ značí libovolnou hodnotu. Nyní nastává čas využít axiom $(\forall a, v, i, j)(\neg[i = j] \Rightarrow write(a, i, v)[j] = a[j])$. Víme, že $k \neq l$, pak tedy podle tohoto axiomu platí, že $write(write(a, l, v), k, w)[l] = write(a, l, v)[l]$. Nyní využijeme axiom $(\forall a, v, i, j)(i = j \Rightarrow write(a, i, v)[j] = v)$. Podle tohoto axiomu můžeme usoudit, že $write(a, l, v)[l] = v$. Dostáváme $v \neq w$, což už ale máme triviálně dokázáno.

Tabulka 3: Důkazová tabulka

| **Krok** | **Předpokládáme** | **Dokazujeme** |
|---|---|---|
| 1. | | $F[a \leftarrow write(a,l,v),$ $i \leftarrow k,$ $x \leftarrow w,$ $j \leftarrow l],$ kde $w \neq v$ a $k \neq l$ |
| 2. | axiom č. 1 $[a \leftarrow write(a,l,v),$ $i \leftarrow k,$ $v \leftarrow w,$ $j \leftarrow l]$ | $write(write(a,l,v),k,w)[l] \neq w$ |
| 3. | axiom č. 2 $[a \leftarrow a,$ $i \leftarrow l,$ $v \leftarrow v,$ $j \leftarrow l]$ | $write(a,l,v)[l] \neq w$ |
| 4. | | $v \neq w$ |

Tabulka 4: Tabulka využitých axiomů (a $\in \mathcal{A}[\mathcal{T}]$, v $\in \mathcal{T}$, i, j $\in \mathcal{N}$)):

| **Číslo axiomu** | **Axiom** |
|---|---|
| 1. | $(\forall a,v,i,j)(i = j \Rightarrow write(a,i,v)[j] = v)$ |
| 2. | $(\forall a,v,i,j)(\neg[i = j] \Rightarrow write(a,i,v)[j] = a[j])$ |

# Cvičení 7d

## Zadání:

V teorii polí dokažte následující formuli:

$$(\forall a,i,j,x)((write(a,i,x)[j] = x) \Rightarrow (i = j \vee a[j] = x))$$

## Důkaz:

Dokazujeme formuli, která má tvar $(\forall a,i,j,x)(F)$, což znamená, že zavedeme nové konstanty $p$,$k$,$l$ a $v$. Nechť tyto konstanty $p,k,l,v$ jsou libovolné ale pevné a dokažme $F[a \leftarrow p, i \leftarrow k, j \leftarrow l, x \leftarrow v]$. Dokazujeme implikaci, takže předpokládáme $write(p,k,v)[l] = v$ a dokážeme $k = l \vee p[l] = v$. Pro důkaz disjunkce předpokládejme, že platí $\neg(k = l)$ a dokažme $p[l] = v$. Nyní využijme následující axiom: $(\forall a,v,i,j)(\neg[i = j] \Rightarrow write(a,i,v)[j] = a[j])$. Jelikož ho můžeme použít jako platný předpoklad, můžeme také vhodně zvolit termy a usoudit $write(p,k,v)[l] = p[l]$. Spolu s předpokladem $write(p,k,v)[l] = v$ můžeme usoudit, že $p[l] = v$, čímž úspěšně dokončíme důkaz.

Tabulka 5: Důkazová tabulka

| **Krok** | **Předpokládáme** | **Dokazujeme** |
|---|---|---|
| 1. | | $write(a,i,x)[j] = x$ <br> $\Rightarrow$ <br> $i = j \vee a[j] = x$ |
| 2. | $write(p,k,v)[l] = v$ | $k = l \vee p[l] = v$ |
| 3. | $\neg(k = l)$ | $p[l] = v$ |
| 4. | axiom č. 1 <br> $[a \leftarrow p,$ <br> $v \leftarrow v,$ <br> $i \leftarrow k,$ <br> $j \leftarrow l]$ | $p[l] = v$ |
| 5. | $write(p,k,v)[l] = p[l]$ | $p[l] = v$ |
| 5. | $p[l] = v$ | $p[l] = v$ |

Tabulka 6: Tabulka využitých axiomů (a $\in \mathcal{A}[\mathcal{T}]$, v $\in \mathcal{T}$, i, j $\in \mathcal{N}$)):

| **Číslo axiomu** | **Axiom** |
|---|---|
| 1. | $(\forall a,v,i,j)(\neg[i = j] \Rightarrow write(a,i,v)[j] = a[j])$ |

# Cvičení 7e

## Zadání:

Dokažte pomocí Peano axiomů s vyjímkou indukčního axiomu následující formuli:

$$(\forall k)(0 + k = k)$$

Využijte principu slabé matematické indukce.

## Důkaz:

Dle principu slabé matematické indukce nejprve provedeme důkaz pro $k = 0$. Dokazujeme tedy $(\forall k)(0 + k = k)$ a zavedeme novou konstantu 0 a dosadíme $(0 + k = k)[k \leftarrow 0]$ a tedy dokážeme $0 + 0 = 0$. Pro dokázání této formule budeme potřebovat jeden z axiomů, konkrétně $(\forall x)(x + 0 = x)$, kdy můžeme zvolit term 0 a usoudit $(x + 0 = x)[x \leftarrow 0]$ tedy $0 + 0 = 0$, což úspěšně dokončí tuto část důkazu.

Tabulka 7: Důkazová tabulka $k = 0$

| **Krok** | **Předpokládáme** | **Dokazujeme** |
|---|---|---|
| 1. | | $(\forall k)(0 + k = k)$ $[k \leftarrow 0]$ |
| 2. | $(\forall x)(x + 0 = x)$ $[x \leftarrow 0]$ | $0 + 0 = 0$ |
| 3. | $0 + 0 = 0$ | $0 + 0 = 0$ |

V druhé části důkazu (matematické indukce) předpokládáme $(0 + k = k)$ a dokážeme formuli pro $k \leftarrow k+1$. Pokusíme se tedy dokázat $0+(k+1) = k+1$, k čemuž se nám bude hodit axiom $(\forall x, y)(x+(y+1) = (x+y)+1)$. V této části zvolíme dva termy 0 a $k$ a usoudíme $(x + (y + 1) = (x + y) + 1)[x \leftarrow 0, y \leftarrow k]$. Vzniknul nám tedy nový předpoklad $0 + (k + 1) = (0 + k) + 1$, do kterého můžeme z prvního předpokladu dosadit $0+k = k$. Tím získáme nový předpoklad $0 + (k + 1) = k + 1$, čímž úspěšně dokončíme důkaz.

Tabulka 8: Důkazová tabulka $k = k + 1$

| **Krok** | **Předpokládáme** | **Dokazujeme** |
|---|---|---|
| 1. | $0 + k = k$ | $(\forall k)(0 + k = k)$ $[k \leftarrow k + 1]$ |
| 2. | | $0 + (k + 1) = k + 1$ |
| 3. | $(\forall x, y)(x + (y + 1) = (x + y) + 1)$ $[x \leftarrow 0, y \leftarrow k]$ | $0 + (k + 1) = k + 1$ |
| 4. | $0 + (k + 1) = (0 + k) + 1$ | $0 + (k + 1) = k + 1$ |
| 5. | $0 + (k + 1) = k + 1$ | $0 + (k + 1) = k + 1$ |

# Cvičení 7f

Úloha bude vypracována na cvičení.