

# MI-FME Cvičení 3

Tomáš Chvosta

Únor 2020

## Cvičení 3a

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$\neg[[r \vee s] \Rightarrow q] \wedge [[r \vee s] \Rightarrow q] \Rightarrow [[p \Rightarrow q] \wedge \neg[p \Rightarrow q]]$$

### Důkaz:

Jelikož se jedná o implikaci, předpokládáme, že platí levá strana pravidla tedy konjunkce  $\neg[[r \vee s] \Rightarrow q]$  a  $[[r \vee s] \Rightarrow q]$ . Tyto dva předpoklady představují  $\perp$  a jelikož z  $\perp$  plyne cokoliv, nezáleží na tom, co máme na pravé straně implikace a formule vždy platí.

Table 1: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$\neg[[r \vee s] \Rightarrow q]$ $[[r \vee s] \Rightarrow q] \dots \perp$	$[p \Rightarrow q]$ $\neg[p \Rightarrow q]$

## Cvičení 3b

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[\neg p \Rightarrow p] \Rightarrow p$$

### Důkaz:

Jelikož se jedná o implikaci, je předpoklad  $[\neg p \Rightarrow p]$  a pokusíme se dokázat  $p$ . Použijeme důkazní pravidlo z přednášky, které říká, že když chceme dokázat  $p$ , pak můžeme nahradit  $p$  za  $\neg\neg p$  a následně použít pravidlo pro dokazování negací. Do seznamu předpokladů tedy přidáme  $\neg p$  a pokusíme se najít spor.

Předpoklad  $[\neg p \Rightarrow p]$  říká, že musí platit  $p$  jelikož máme v předpokladech  $\neg p$ , což je spor. Spor podle přednášky dokončí úspěšně jakýkoliv důkaz.

Table 2: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$[\neg p \Rightarrow p]$	$p$
2.	$\neg p$	$\neg\neg p$ tedy $p$
3.	$p \dots \perp$	

## Cvičení 3c

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$\neg[p \Rightarrow q] \Rightarrow [q \Rightarrow p]$$

### Důkaz:

Jelikož se jedná o implikaci, je  $\neg[p \Rightarrow q]$  předpoklad. Pokusíme se tedy dokázat  $[q \Rightarrow p]$ . Použijeme stejný postup a předpokládáme, že platí  $q$ . Nyní by se mohlo hodit dokázat, že platí  $[p \Rightarrow q]$ . Jako lemma tedy zvolíme  $[p \Rightarrow q]$  a díky předpokladu  $q$  je jasné, že toto lemma platí. Můžeme tedy přidat předpoklad  $[p \Rightarrow q]$ , což společně s předpokladem  $\neg[p \Rightarrow q]$  vytvoří  $\perp$ , ze které plyne cokoliv.

Table 3: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$\neg[p \Rightarrow q]$	$[q \Rightarrow p]$
2.	$q$	$p$
3.		lemma $[p \Rightarrow q]$
4.	$[p \Rightarrow q] \dots \perp$	

## Cvičení 3d

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[p \Rightarrow [[q \vee r] \wedge \neg q \wedge \neg r]] \Rightarrow \neg p$$

### Důkaz:

Nejprve předpokládejme  $[p \Rightarrow [[q \vee r] \wedge \neg q \wedge \neg r]]$  a dokažme  $\neg p$ . To uděláme tak, že předpokládáme  $p$  a zkusíme najít spor. Pokud platí  $p$ , tak můžeme usoudit

$[[q \vee r] \wedge \neg q \wedge \neg r]$ . Z předchozího předpokladu můžeme usoudit, že platí  $\neg q$ ,  $\neg r$  a také  $[q \vee r]$ . Pokud víme, že platí disjunkce  $[q \vee r]$ , pak postupujeme tak, že nejprve předpokládáme  $q$  a následně dokončíme důkaz a poté předpokládáme  $r$  a následně dokončíme důkaz. V obou dvou případech získáme  $\perp$ , čímž získáváme spor a důkaz je úspěšně dokončen.

Table 4: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$[p \Rightarrow [[q \vee r] \wedge \neg q \wedge \neg r]]$	$\neg p$
2.	$p$	hledáme spor
3.	$[[q \vee r] \wedge \neg q \wedge \neg r]$	hledáme spor
4.	$\neg q$ $\neg r$ $[q \vee r]$	hledáme spor
5a.	$q \dots \perp$	hledáme spor
5b.	$r \dots \perp$	hledáme spor

## Cvičení 3e

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$q \Rightarrow [[p \wedge q] \vee [\neg p \wedge q]]$$

### Důkaz:

Na počátku předpokládáme, že platí  $q$  a dokážeme  $[[p \wedge q] \vee [\neg p \wedge q]]$ . To můžeme udělat například tak, že předpokládáme  $\neg[p \wedge q]$  a dokážeme  $[\neg p \wedge q]$  (nebo klidně obráceně, avšak toto je výhodnější a snazší). Při důkazu konjunkce je potřeba dokázat  $\neg p$  i  $q$ . Při dokazování  $q$  využijeme toho, že máme  $q$  v předpokladech a tedy je triviálně dokázáno. Při dokazování  $\neg p$  předpokládáme, že platí  $p$  a najdeme spor. Ten jsme však již vytvořili přidáním  $p$  do předpokladů, poněvadž jistě platí  $[p \wedge q]$  díky předpokladům  $p$  a  $q$  a tedy spolu s  $\neg[p \wedge q]$  získáme  $\perp$ , čímž je důkaz úspěšně dokončen.

Table 5: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$q$	$[[p \wedge q] \vee [\neg p \wedge q]]$
2.	$\neg[p \wedge q]$	$[\neg p \wedge q]$
3.		$q$
4.		$\neg p$ $q$
5.	$p$	hledáme spor
6.		lemma $[p \wedge q]$
7.	$[p \wedge q] \dots \perp$	hledáme spor

## Cvičení 3f

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$\neg[p \wedge q] \Rightarrow [\neg p \vee \neg q]$$

### Důkaz:

Nejprve předpokládáme, že platí  $\neg[p \wedge q]$  a dokážeme  $[\neg p \vee \neg q]$ . To dokážeme tak, že předpokládáme, že platí  $p$  a dokážeme  $\neg q$ . To dokážeme tak, že předpokládáme  $q$  a najdeme spor. Nyní díky předpokladům  $p$  a  $q$  můžeme usoudit, že platí lemma  $[p \wedge q]$ , což však společně s  $\neg[p \wedge q]$  tvoří  $\perp$ . Podobně bychom mohli zvolit v druhém kroku  $q$  místo  $p$  a dostali bychom stejný výsledek.

Table 6: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$\neg[p \wedge q]$	$[\neg p \vee \neg q]$
2a.	$p$	$\neg q$
2b.	$q$	$\neg p$
3a.	$q$	hledáme spor
3b.	$p$	hledáme spor
4.		lemma $[p \wedge q]$
5.	$[p \wedge q] \dots \perp$	hledáme spor

### Poznámky:

V tabulce buď zvolíme variantu a) nebo b), ale ne obojí!

## Cvičení 3g

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[[p \wedge q] \Rightarrow r] \Rightarrow [[p \Rightarrow r] \vee [q \Rightarrow r]]$$

### Důkaz:

Na začátku tohoto důkazu předpokládejme, že platí  $[[p \wedge q] \Rightarrow r]$  a dokažme  $[[p \Rightarrow r] \vee [q \Rightarrow r]]$ . V tomto kroku máme opět dvě volby jako v předchozí úloze, nyní budeme předpokládat, že platí  $\neg[q \Rightarrow r]$  a pokusíme se dokázat  $p \Rightarrow r$ . To dokážeme tak, že předpokládáme  $p$  a dokazujeme  $r$ . Nyní se hodí využít faktu, že  $r$  je ekvivalentní s  $\neg\neg r$ . Následně můžeme předpokládat  $\neg r$  a poté se pokusit najít spor. Aby platil předpoklad  $[p \wedge q] \Rightarrow r$  a zároveň předpoklad  $\neg r$ , musí platit  $\neg[p \wedge q]$ . Stejně tak, aby platil předpoklad  $\neg[q \Rightarrow r]$  a zároveň  $\neg r$ , musí platit  $q$ . Nyní díky předpokladům  $p$  a  $q$  můžeme dokázat lemma  $[p \wedge q]$ , což nám vytvoří krásný spor s předpokladem  $\neg[p \wedge q]$  a vznikne  $\perp$ , což úspěšně dokončí důkaz.

Table 7: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$[p \wedge q] \Rightarrow r$	$[p \Rightarrow r] \vee [q \Rightarrow r]$
2.	$\neg[q \Rightarrow r]$	$p \Rightarrow r$
3.	$p$	$r$
4.		$\neg\neg r$
5.	$\neg r$	hledáme spor
6.	$\neg[p \wedge q]$	hledáme spor
7.	$q$	hledáme spor
8.	$[p \wedge q] \dots \perp$	hledáme spor

## Cvičení 3h

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[p \wedge q] \Rightarrow \neg[\neg p \vee \neg q]$$

### Důkaz:

Na začátku předpokládejme  $p \wedge q$  a dokažme  $\neg[\neg p \vee \neg q]$ . Z předpokladu  $p \wedge q$  můžeme usoudit  $p$  a  $q$ . V dalším kroku předpokládejme, že platí  $\neg p \vee \neg q$  a pokusíme se najít spor. Pokud víme, že platí  $\neg p \vee \neg q$ , můžeme nejprve

předpokládat  $\neg p$  a dokončit důkaz a poté předpokládat  $\neg q$  a dokončit důkaz. V obou případech nalezneme spor a vznikne  $\perp$ , čímž je důkaz úspěšně dokončen.

Table 8: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$p \wedge q$	$\neg[\neg p \vee \neg q]$
2.	$p$ $q$	
3.	$\neg p \vee \neg q$	hledáme spor
4.	$\neg p \dots \perp$	hledáme spor
5.	$\neg q \dots \perp$	hledáme spor

## Cvičení 3i

### Zadání:

Dokažte následující formuli:

$$[p \Rightarrow q] \vee [q \Rightarrow r]$$

### Důkaz:

Jelikož máme dokázat disjunkci, můžeme postupovat tak, že předpokládáme, že levá část disjunkce neplatí a dokážeme pravou stranu. V tomto konkrétním případě to znamená předpokládat, že platí  $\neg[p \Rightarrow q]$  a dokázat  $q \Rightarrow r$ . Dále pokračujeme předpokladem, že platí  $q$  a máme dokázat  $r$ . Díky předpokladu  $q$  si můžeme dokázat lemma  $[p \Rightarrow q]$ , díky platnosti  $q$  bude lemma vždy platit bez ohledu na to, jestli platí  $p$ . Nyní se v předpokladech ocitla formule  $[p \Rightarrow q]$ , která nám vytvoří spor s prvním předpokladem. Z toho plyne, že první část počáteční formule  $[p \Rightarrow q]$  musí platit, čímž jsme důkaz úspěšně dokončili.

Table 9: Důkazová tabulka

Krok	Předpokládáme	Dokazujeme
1.	$\neg[p \Rightarrow q]$	$q \Rightarrow r$
2.	$q$	$r$
3.		lemma $p \Rightarrow q$
4.	$[p \Rightarrow q] \dots \perp$	$r$