数值分析实验报告

第五章

姓名	王琛
学号	2016011360
班级	计 65
实验日期	2019 年 4 月 11 日
报告日期	2019 年 4 月 11 日

第 4 章第 2 题

问题描述

考虑常微分方程的两点边值问题:

$$\begin{cases} \epsilon \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = a, (0 < a < 1) \\ y(0) = 0, y(1) = 1 \end{cases}$$

容易知道它的精确解为

$$y = \frac{1-a}{1-e^{1/\epsilon}}(1 - e^{-\frac{x}{\epsilon}}) + ax$$

为了把微分方程离散，把 [0,1] 区间 n 等分，令 $h = \frac{1}{n}$，

$$x_i = ih, (i = 1, 2, ..., n-1),$$

得到有限差分方程

$$\epsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = a,$$

简化为

$$(\epsilon + h)y_{i+1} - (2\epsilon + h)y_i + \epsilon y_{i-1} = ah^2$$

从而离散后得到的线性方程组的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -(2\epsilon+h) & \epsilon+h & & & \\ \epsilon & -(2\epsilon+h) & \epsilon+h & & \\ & \epsilon & -(2\epsilon+h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \epsilon+h \\ & & & \epsilon & -(2\epsilon+h) \end{bmatrix}$$

(1) 对 $\epsilon = 1, a = \frac{1}{2}, n = 100$，分别用雅可比、G-S 和 SOR 方法求线性方程组的解，要求有 4 位有效数字，然后比较与精确解的误差.

(2) 对 $\epsilon = 0.1, \epsilon = 0.01, \epsilon = 0.0001$ 考虑同样的问题。

解题思路

首先生成 Hilbert 矩阵，由于其是对称正定矩阵，因此可以进行 Cholesky 分解，即 $H = LL^T$，其中 L 是下三角矩阵。

然后，$Hx = b$ 可写成 $LL^T x = b$ 的形式，利用后代和前代的方法可以求解出方程的近似解 $\hat{x}$。并且计算残差和误差，施加扰动后再次计算残差和误差，可以探究其中的规律。

实验结果

当 n 为 8，10，12 时，结果如下表：

	扰动前		扰动后	
n	$\|\|\boldsymbol{r}\|\|_\infty$	$\|\|\boldsymbol{\Delta x}\|\|_\infty$	$\|\|\boldsymbol{r}\|\|_\infty$	$\|\|\boldsymbol{\Delta x}\|\|_\infty$
8	2.2204e-16	4.1154e-07	2.2204e-16	0.0216
10	2.2204e-16	4.4459e-04	4.4409e-16	0.7007
12	4.4409e-16	0.3358	4.4409e-16	23.6202

实验结论

可以看出，随着 n 的增加，$||\boldsymbol{r}||_\infty$ 变化并不明显，并且加上扰动基本不会改变 $||\boldsymbol{r}||_\infty$ 的结果，这是因为计算残差时，是用变化后的 b 作为被减数，抵消了扰动。随着 n 的增加，误差的范数也在很快增大，求解方程的结果也就越来越不准确。另外，我们发现，很小的扰动对于误差的范数也造成了巨大的影响，正说明了 Hilbert 矩阵的病态性，n 越大，条件数越来越大，病态性越来越明显。

实验心得

这次实验我对于 Hilbert 矩阵的病态性有了深入的了解，我深刻体会到了小的扰动所带来的巨大变化。并且从 n=8 到 n=12，问题的误差竟然发