



清华大学
Tsinghua University

数值分析实验报告

第三章

姓名	王琛
学号	2016011360
班级	计 65
实验日期	2019 年 4 月 9 日
报告日期	2019 年 4 月 9 日

第 3 章第 6 题

问题描述

编程序生成 Hilbert 矩阵 H_n ，以及 n 维向量 $b = H_n x$ ，其中， x 为所有分量都是 1 的向量。用 Cholesky 分解算法求解方程 $b = H_n x$ ，得到近似解 \hat{x} ，计算残差 $r = b - H_n \hat{x}$ 和误差 $\Delta x = \hat{x} - x$ 的 ∞ 范数。

- (1) 设 $n=10$ ，计算 $\|r\|_\infty$ 、 $\|\Delta x\|_\infty$ ；
- (2) 在右端项上施加 10^{-7} 的扰动然后解方程组，观察残差和误差的变化情况。
- (3) 改变 n 的值为 8 和 12，求解相应的方程，观察 $\|r\|_\infty$ 、 $\|\Delta x\|_\infty$ 的变化情况，通过这个实验说明了什么问题？

解题思路

首先生成 Hilbert 矩阵，由于其是对称正定矩阵，因此可以进行 Cholesky 分解，即 $H = LL^T$ ，其中 L 是下三角矩阵。

然后， $Hx = b$ 可写成 $LL^T x = b$ 的形式，利用后代和前代的方法可以求解出方程的近似解 \hat{x} 。并且计算残差和误差，施加扰动后再次计算残差和误差，可以探究其中的规律。

实验结果

当 n 为 8, 10, 12 时，结果如下表：

	扰动前		扰动后	
n	$\ r\ _\infty$	$\ \Delta x\ _\infty$	$\ r\ _\infty$	$\ \Delta x\ _\infty$
8	2.2204e-16	4.3048e-07	2.2204e-16	0.0216
10	4.4409e-16	4.3455e-04	4.4409e-16	0.7007
12	4.4409e-16	0.4052	2.2204e-16	24.0552

实验结论

可以看出,随着 n 的增加, $\|r\|_{\infty}$ 变化并不明显,并且加上扰动不会改变 $\|r\|_{\infty}$ 的结果,这是因为计算残差时,是用变化后的 b 作为被减数,抵消了扰动。随着 n 的增加,误差的范数也在很快增大,求解方程的结果也就越来越不准确。另外,我们发现,很小的扰动对于误差的范数也造成了巨大的影响,正说明了 Hilbert 矩阵的病态性, n 越大,条件数越来越大,病态性越来越明显。

实验心得

这次实验我对于 Hilbert 矩阵的病态性有了深入的了解,我深刻体会到了小的扰动所带来的巨大变化。并且从 $n=8$ 到 $n=12$,问题的误差竟然发生了指数级别的改变。因此,在实际问题的求解时,我们要十分注意系数矩阵的性质,最好计算出条件数,看是否符合要求。

主要代码

生成 hilbert 矩阵

```
function [h,b] = hilbert(n)
h=zeros(n);
x=ones(n,1);
for i=1:n
    for j=1:n
        h(i, j)=1/(i+j-1);
    end
end
b=h*x;
```

根据 Cholesky 分解求解方程组

```
function[x] = lu_solve(l, u, b)
%lu_solve
```

```

% solve x using l, u decomposition. NOTE that the diagonal of l
    is not
% required to be 1.
[m,n]=size(l);
if m~=n
    fprintf("error! l is not square matrix!");
end
y=zeros(n,1);
for i=1:n
    y(i)=b(i);
    for j=1:i-1
        y(i)=y(i)-l(i,j)*y(j);
    end
    y(i)=y(i)/l(i,i);
end
x=zeros(n,1);
for i=n:-1:1
    if u(i,i)==0
        fprintf("error, cannot find pivot!");
    end
    x(i)=y(i);
    for j=n:-1:i+1
        x(i)=x(i)-u(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=x(i)/u(i,i);
end

```
