# 数值分析实验报告

## 第七章

| | |
|---|---|
| 姓名 | 王琛 |
| 学号 | 2016011360 |
| 班级 | 计 65 |
| 实验日期 | 2019 年 6 月 9 日 |
| 报告日期 | 2019 年 6 月 9 日 |

# 第 7 章第 4 题

## 问题描述

用数值积分方法近似计算

$$ln2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

及圆周率

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

(1) 用复合 Simpson 求积公式计算，要求绝对误差限小于 $\frac{1}{2} * 10^{-8}$，试根据积分余项估计步长 h 的取值范围。按要求选择一个步长进行计算，观察数值结果与误差要求是否相符。

(2) 用 Romberg 外推方法求积分的近似值。

(3) 用复合 Gauss 公式计算近似积分。

## 解题思路

(1) 复合 Simpson 公式的积分余项 $R_s = -\frac{f^4(\eta)}{2880}(b-a)^5$。对于 $\frac{1}{x}$，当 $x \in (1,2)$, $f^4(x) = \frac{1}{24x^4} \leq 24$，$\frac{1}{2880} h^4 (b-a) * 24 < \frac{1}{2} * 10^{-8}$，得出 $n > 35.9$，可取 n=36。对于 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$，利用 syms 和 diff 可得，$f^4(x) = (24/(x^2+1)^3 - (288 * x^2)/(x^2+1)^4 + (384 * x^4)/(x^2+1)^5)$，使用 fminbnd(1/f(x),0,1) 得出 f(x) 在 (0,1) 最小值为 0.3249，则最大值约为 3.0769，估算得 $n > 12$，取 n=13。

(2) 实现书中算法 7.1 即可。代码中只需要保存两行的结果，用之前行的外推计算此行的结果。

(3) 由题目给出的 Gauss 公式，知高斯公式的余项为 $R_s = -\frac{f^4(\eta)}{4320}(b-a)^5$，使用和 (1) 问完全相同的方法进行估计，可得两个积分的 n 分别满足的要求为 $n >= 13$ 和 $n >= 33$

## 实验结果

(1) 使用 Simpson 公式计算得到的积分分别为 $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = 0.69314718$，$4 * \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 3.14159265$，都有 8 位正确的有效数字，符合要求。

(2) 使用 Romberg 方法计算得到的积分分别为 $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = 0.69314718$，$4 * \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 3.14159265$，都有 8 位正确的有效数字，符合要求。

(3) 使用 Gauss 方法计算得到的结果和前两问完全相同。Gauss 的方法由于误差更精确，因此取得区间长度比 Simpson 公式可以更大。

## 实验结论

使用三种方法计算的积分都有 8 位准确的有效数字，其中 Gauss 公式比 Simpson 公式计算量更小。

## 实验心得

通过这次实验，我实现了几种求积分公式。收获最大的是 Romberg 公式的理解和编程实现。

## 主要代码

复合 simpson

```
function[T] = simpson(f, a, b, n)
h=(b-a)/n;
T=0;
for i=1:n
    T=T+h/6*(f(a+(i-1)*h)+4*f(a+(i-1)*h+h/2)+f(a+i*h));
end
```

romberg

```
function[T] = romberg(f, a, b, e)
```

```
h=b-a;
n=1;
T1=h/2*(f(a)+f(b));
T2=h/2*(f(a)+f(b));
while 1
    n=n+1;
    T1=T2;
%      for i=1:n-1
%          fprintf("%.9f ", T1(i));
%      end
%      fprintf("\n");
    T2=zeros(1,n);
    T2(1)=0.5*T1(1);
    for j=1:2^(n-2)
        T2(1)=T2(1)+f(a+(2*j-1)/2^(n-1))*h/2; %复合梯形公式
    end
    for j=2:n
        T2(j)=(4^(j-1)*T2(j-1)-T1(j-1))/(4^(j-1)-1);
    end
    h=h/2;
    if(abs(T2(1)-T1(1))<e)
        break;
    end
end
T=T2(1);
```

复合 Gauss 公式

```
function[T] = gauss(f, a, b, n)
h=(b-a)/n;
T=0;
for i=1:n
    T=T+h/2*( f(a+(i-1)*h+h/2-h/(2*sqrt(3))) + f(a+(i-1)*h+h/2+h
       /(2*sqrt(3))) );
end
```