数值分析第一章实验报告

计 65 王琛 2016011360

2019 年 3 月 6 日

第 1 题

1. 解题思路

计算出各个误差对应的数学表达式作为纵坐标，将 h 作为横坐标，在一张图中画出相应的曲线。根据泰勒展开，

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi) \quad \xi \in [x, x+h]$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2}f''(\xi)}{h}$$

而近似方法 $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$。因此近似算法的截断误差为 $\frac{Mh}{2}$，其中 M 是 $|f''(\xi)|$ 的上界，本题取 1。舍入误差限为 $\frac{2\epsilon}{h}$，其中 ϵ 是数值误差的上界，本题中取 10^{-16}。

因此总的误差限为两者之和，即

$$\epsilon_{tot} = \frac{Mh}{2} + \frac{2\epsilon}{h} \tag{1}$$

由于 $f(x) = sinx$，$f'(x) = cosx$，matlab 中 $cosx$ 的计算可看成是精确的，因此当 $x = 1$ 时，实际总误差可写成：

$$|cos1 - \frac{sin(1+h) - sin1}{h}|$$

。

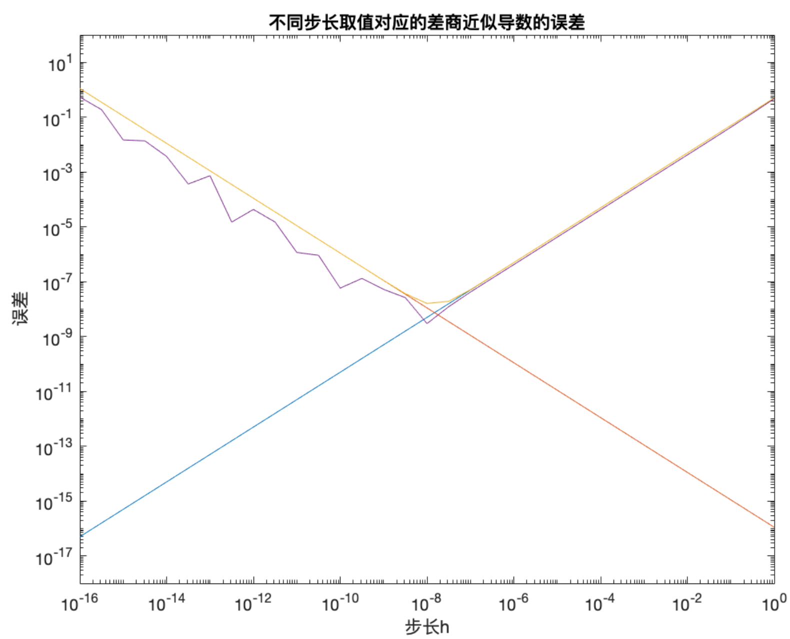
在 matlab 中画出每条线即可。

2. 实验结果

实验代码如下:

```
h=logspace(-16,0,33);
M=1;
loglog(h,1/2.*M.*h);
hold on
loglog(h, eps/2./h);
hold on
loglog(h, 1/2.*M.*h + eps/2./h);
hold on
loglog(h, abs((sin(1+h)-sin(1))./h - cos(1)));
hold on
xlabel("步长h");
ylabel("误差");
title("不同步长取值对应的差商近似导数的误差");
```

所得的结果如下图所示:



3. 实验结论

从图中可以看出，截断误差递增，舍入误差递减，总误差先减小后增大。根据等式 (1)，当 $h = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{M}} = 10^{-8}$ 时总计算误差最小，图中说明了这个结论。因此，我们在应用该方法计算时应该选取合适的 h。

第 3 题

1. 实验思路

(1) 使用 matlab 的 single 命令转化为单精度浮点数，进入循环，每次加上 $\frac{1}{n}$，当结果和上次循环相比不再变化时，退出循环。

(2) 使用 (1) 中求得的 n 进行循环，使用双精度。

2. 实验结果

(1) 实验代码如下：

```
n=0;
tot = single(0);
tot_prev = single(0);
while true
    n = n + 1;
    tot = tot + single(1/n);
    if tot == tot_prev
        break;
    end
    tot_prev = tot;
end
disp("n=" + num2str(n) + " sum=" + num2str(tot));
```

输出为 n=2097152 sum=15.4037。

(2) 代码如下：

```
res = 0;
tic
for i=1:n-1
    res = res + 1/i;
end
toc
disp("result with double float is " + num2str(res));
disp("error="+num2str(tot-res));
```

输出为 result with double float is 15.1333, error=0.27038。运行时间为 0.003595s。

c++ 估算时间程序:

```
#include <iostream>
#include <ctime>

int main() {
    int n = 2097152;
    double res = 0;
    std::cout << CLOCKS_PER_SEC << std::endl;
    double begin = (double)clock();
    for(int i = 1; i <= n; i++) {
        res += 1/(double)n;
    }
    double end = (double)clock();
    std::cout << end - begin << std::endl;
    return 0;
}
```

结果分析

(1) 由定理 1.6，当 $|\frac{1/(n+1)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}}| <= \frac{1}{2}\epsilon_{mach}$ 时，出现抵消现象，结果不再变化。而单精度浮点数的机器精度为 $2^{-24} = 6.25 * 10^{-8}$，可写出如下程序进行粗略估计:

```
sum=0;
i=1;
while(1/i/sum>0.5*6*10^(-8))
    sum=sum+1/i;
    i=i+1;
end
disp(i);
```

估计出 n=2113460 时结果不再变化，与实验得到的 n=2097152 接近。

(2) n=2097152 时，单精度结果为 15.4037，双精度结果为 15.1333，误差为 0.27038，相对误差为 1.79%。

(3) 由于 n 趋向 ∞ 时，$\sum \frac{1}{n} = lnn$，由定理 1.6，$\frac{\frac{1}{n}}{lnn} <= 0.5*1.11*10^{-16}$，得出 n 约等于 $5*10^{14}$。因 n=2097152 时，matlab 时间为 0.02587s 且波动较大，c++ 时间为 0.0062s, 采用 c++ 的结果估算。当 $n = 5*10^{14}$ 时，时间为 $\frac{0.0062*5*10^{14}}{2.1*10^{6}} = 1.5*10^{6}s$，大概为 17 天。