Complejidad Computacional 2023-I

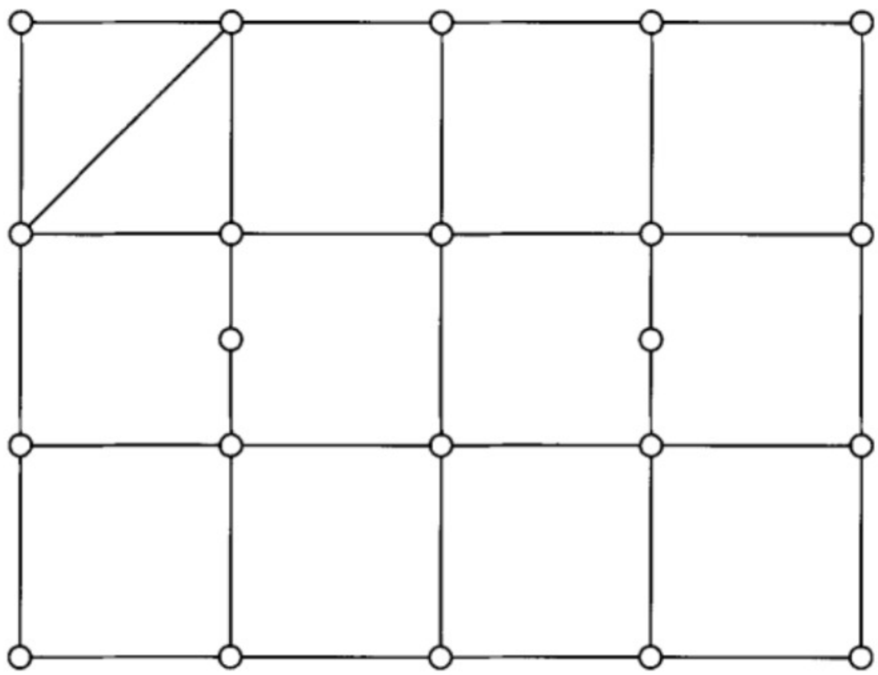
Tarea 1

Acosta Arzate Ruben 317205776

López Miranda Ángel Mauricio 317034808

Ejercicio 1

Investiga en que consisten los problemas sobre gráficas de conjunto independiente y cubierta de vértices. Da la definición del problema en su versión como problema de decisión (Descripción del ejemplar y pregunta) y responde las siguientes preguntas sobre la gráfica no dirigida de la Figura :

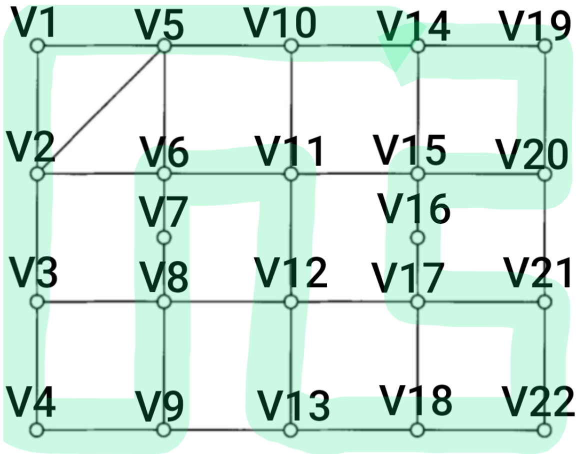


- Conjunto independiente:
  el conjunto independiente es aquel que dados dos conjuntos la intersección entre ambos es el vació, por otro lado el conjunto de vértices independientes es aquel que dado un subconjunto de vértices no debe haber dos vértices en dicho subconjunto que represente una arista en G ahora bien, también tenemos el problema del máximo conjunto independiente el cual pertenece a la clase de complejidad NP-completo y nos dice que si se añade cualquier otro vértice de G entonces existiría una arista rompiendo así la definición

- Cubierta:
  Nos dice que dado un conjunto X debe de haber una familia de subconjuntos de X sin subconjuntos duplicados cuya unión cumpla que sea el conjunto X en su totalidad. Una cobertura minima es aquella que destruye la definicion anterior, al remover un subconjunto nos encontraremos que la union ya no es el conjunto X.

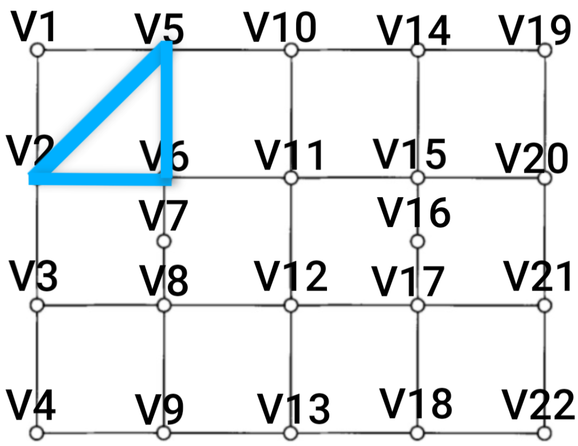
¿Tiene un ciclo Hamiltoniano?
Ejemplar: Una Gráfica G=(V,E) con V=$\{v_1, v_2 ... v_{22}\}$ y E=$\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_9),$
$(v_3, v_8), (v_2, v_6), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8), (v_8, v_9), (v_5, v_{10}), (v_6, v_{11}), (v_8, v_{12}),$

$(v_9, v_{13}), (v_{12}, v_{13}), (v_{12}, v_{11}), (v_{10}, v_{11}), (v_{10}, v_{14}), (v_{11}, v_{15}), (v_{12}, v_{17}), (v_{13}, v_{18}), (v_{18}, v_{17}), (v_{17}, v_{16}), (v_{16}, v_{15}), (v_{15}, v_{14}), (v_{14}, v_{19}), (v_{15}, v_{20}), (v_{17}, v_{21}), (v_{18}, v_{22}), (v_{22}, v_{21}), (v_{21}, v_{20}), (v_{20}, v_{19})\}$
Pregunta: ¿G tiene un ciclo Hamiltoniano? Si, como no existe aún un teprema que nos diga en tiempo polinomial si una gráfica tiene o no un ciclo Hamiltoniano entonces se debe encontrar por busqueda exhaustiva, en particular nosotros encontramos el siguiente:
$v_{14}, v_{19}, v_{20}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{21}, v_{22}, v_{18}, v_{13}, v_{12}, v_{11}, v_6, v_7, v_8, v_9, v_4, v_3, v_2, v_1, v_5, v_{10}, v_{14}$



- ¿Cual es el clan más grande?

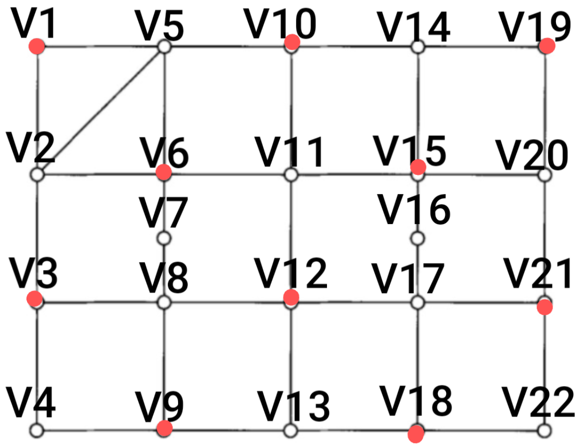
Ejemplar: Una Gráfica G=(V,E) con V=$\{v_1, v_2 ... v_{22}\}$ y E=$\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_9), (v_3, v_8), (v_2, v_6), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8), (v_8, v_9), (v_5, v_{10}), (v_6, v_{11}), (v_8, v_{12}), (v_9, v_{13}), (v_{12}, v_{13}), (v_{12}, v_{11}), (v_{10}, v_{11}), (v_{10}, v_{14}), (v_{11}, v_{15}), (v_{12}, v_{17}), (v_{13}, v_{18}), (v_{18}, v_{17}), (v_{17}, v_{16}), (v_{16}, v_{15}), (v_{15}, v_{14}), (v_{14}, v_{19}), (v_{15}, v_{20}), (v_{17}, v_{21}), (v_{18}, v_{22}), (v_{22}, v_{21}), (v_{21}, v_{20}), (v_{20}, v_{19})\}$
Pregunta: ¿G tiene un clan de tamaño k=3?
Si, para resolverlo no usamos ningún algoritmo solo usamos la definición de clan, y lo redactamos con k=3 ya que es la k mas grande que cumple con la definición de ser una gráfica completa así nuestro clan quedo como sigue:v_2, v_5, v_6



- ¿Cual es el conjunto independiente más grande?

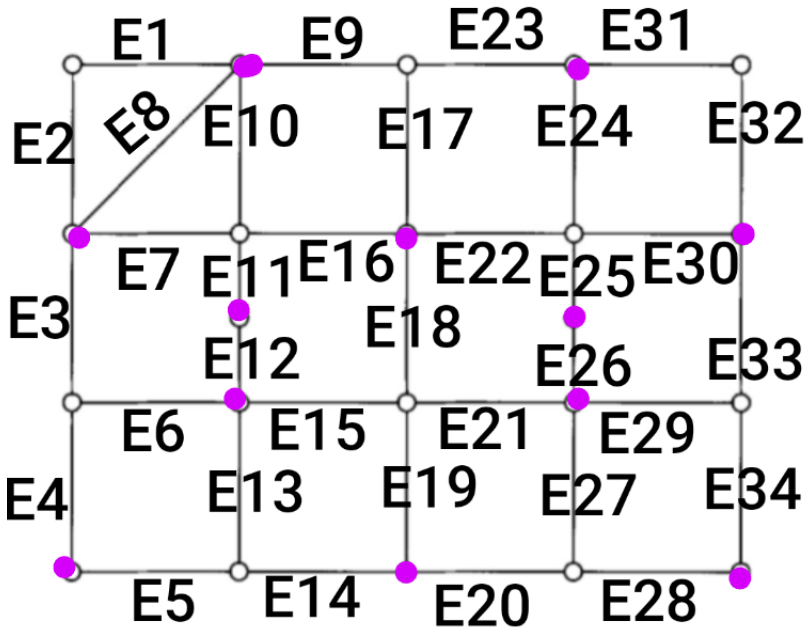
Ejemplar: Una Gráfica G=(V,E) con V=$\{v_1, v_2 ... v_{22}\}$ y E=$\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_9), (v_3, v_8), (v_2, v_6), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8), (v_8, v_9), (v_5, v_{10}), (v_6, v_{11}), (v_8, v_{12}), (v_9, v_{13}), (v_{12}, v_{13}), (v_{12}, v_{11}), (v_{10}, v_{11}), (v_{10}, v_{14}), (v_{11}, v_{15}), (v_{12}, v_{17}), (v_{13}, v_{18}), (v_{18}, v_{17}), (v_{17}, v_{16}), (v_{16}, v_{15}), (v_{15}, v_{14}), (v_{14}, v_{19}), (v_{15}, v_{20}), (v_{17}, v_{21}), (v_{18}, v_{22}), (v_{22}, v_{21}), (v_{21}, v_{20}), (v_{20}, v_{19})\}$
Pregunta: ¿G tiene un conjunto independiente de tamaño k=10?
Si, redactamos el problema con K=10 ya que efectivamente 10 es el conjunto más grande que

se puede tener en la gráfica, para demostrarlo de manera informal supongamos que K=11 luego entonces dada la gráfica siguiente tomaremos un vértice arbitrariamente, digamos v_7, al agregarlo al conjunto independiente notamos que ahora ambos vértices de la arista v_6, v_7 pertenecen al conjunto, rompiendo así la definición luego entonces si quitamos v_7 y seguimos tomando arbitrariamente otros vértices cada uno de los vértices que no están en H nos daremos cuenta que rompen la definición de conjunto independiente
Así $H = \{v_1, v_3, v_6, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{15}, v_{18}, v_{19}, v_{21}\}$



• ¿Cual es la cubierta de vértices más pequeña?
Ejemplar: Una Gráfica G=(V,E) con V=$\{v_1, v_2...v_{22}\}$ y E=$\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_9),$ $(v_3, v_8), (v_2, v_6), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8), (v_8, v_9), (v_5, v_{10}), (v_6, v_{11}), (v_8, v_{12}),$ $(v_9, v_{13}), (v_{12}, v_{13}), (v_{12}, v_{11}), (v_{10}, v_{11}), (v_{10}, v_{14}), (v_{11}, v_{15}), (v_{12}, v_{17}), (v_{13}, v_{18}), (v_{18}, v_{17}), (v_{17}, v_{16}),$ $(v_{16}, v_{15}), (v_{15}, v_{14}), (v_{14}, v_{19}), (v_{15}, v_{20}), (v_{17}, v_{21}), (v_{18}, v_{22}), (v_{22}, v_{21}), (v_{21}, v_{20}), (v_{20}, v_{19})\}$
de tal forma que $U = \{E1, E2...E34\}$ y $S = \{Sv_1, Sv_2, Sv_3, Sv_4, Sv_5, Sv_6, Sv_7, Sv_8, Sv_9, Sv_{10}, Sv_{11},$ $Sv_{12}, Sv_{13}, Sv_{14}, Sv_{15}, Sv_{16}, Sv_{17}, Sv_{18}, Sv_{19}, Sv_{20}, Sv_{21}, Sv_{22}\}$
$Sv_1 = \{E1, E2\}$
$Sv_2 = \{E3, E2, E7, E8\}$
$Sv_3 = \{E3, E4, E6\}$
$Sv_4 = \{E4, E5\}$
$Sv_5 = \{E1, E8, E9, E10\}$
$Sv_6 = \{E7, E10, E11, E16\}$
$Sv_7 = \{E11, E12\}$
$Sv_8 = \{E6, E12, E13, E15\}$
$Sv_9 = \{E5, E13, E14\}$
$Sv_{10} = \{E9, E17, E23\}$
$Sv_{11} = \{E16, E17, E18, E22\}$
$Sv_{12} = \{E15, E18, E19, E21\}$
$Sv_{13} = \{E14, E19, E20\}$
$Sv_{14} = \{E23, E24, E31\}$
$Sv_{15} = \{E22, E24, E25, E30\}$
$Sv_{16} = \{E25, E26\}$
$Sv_{17} = \{E21, E26, E27, E29\}$
$Sv_{18} = \{E20, E27, E28\}$
$Sv_{19} = \{E31, E32\}$
$Sv_{20} = \{E30, E32, E33\}$
$Sv_{21} = \{E29, E33, E34\}$
$Sv_{22} = \{E28, E34\}$

Pregunta:¿G tiene una cobertura k=12?
Si, la unión de estos conjuntos es U así $S = \{Sv_2, S_v4, Sv_5, Sv_7, Sv_8, Sv_{11}, Sv_{13}, Sv_{14}, Sv_{16}, Sv_{17}, Sv_{20}, Sv_{22}\}$ esta cobertura es valida puesto que su complemento $S\complement = \{v_1, v_3, v_6, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{15}, v_{18}, v_{19}, v_{21}\}$ es un conjunto independiente, de hecho es el conjunto independiente de la pregunta anterior por lo que ya ha sido demostrado que no se puede agregar otro vértice al conjunto S



Ejercicio 2

• ¿Cuales son las diferencias entre Problema de Decisión, Problema de Búsqueda y Problema de Optimización?

R=Los problemas de decisión regresan como respuesta un si o un no, los de búsqueda regresan un o todos los ejemplares que cumplan la condición del problema y por ultimo los de optimización nos devuelven una cota mínima o cota máxima que satisfaga la condición de la pregunta

• Da un ejemplo de cada uno de los tres tipos de problemas anteriores, presentando el problema en su versión canónica. Muestra un ejemplar concreto de cada uno de los problemas.

Problema de decisión
-Set basis Problem:

Ejemplar: Dado una colección C de Subconjuntos de un conjunto finito S, un entero positivo $K \leq |C|$

Pregunta: ¿Existe una colección B de subconjuntos de S con $|B| = K$ tal que para cada subconjunto c en C, hay una subcolección en B cuya unión es c?

Problema de optimizacion
-Problema de la supercadena en comun mas corta:

Ejemplar: Sea S y T cadenas de caracteres

Pregunta: De un entero L tal que sea Z una cadena de caracteres tal que $S \subseteq Z$ y $T \subseteq Z$, $L \leq |Z|$

Problema de busqueda
-Spanning Tree Problem:

Ejemplar: Sea una gráfica G=(V,A), donde V son los vértices y A las aristas de la gráfica

Pregunta: De un árbol T=(v,a) donde v=V y $a \subseteq A$

• Menciona un par de ejemplos de problemas de decisión, cuyos ejemplares no involucren gráficas. Los ejemplos deben ser diferentes a los vistos en clase

-Tableau equivalence:

Ejemplar: Sea P y Q preposiciones logicas

Pregunta: ¿P y Q son tableau-equivalentes?

-Numerical matching with target sums problem

Ejemplar: Sea un conjunto de números enteros $S = \{s_1, ..., s_n\}$ y K un numero entero

Pregunta: Existe un vector $x_i \in \{-1, 1\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i s_i = k$$

Ejercicio 3

Considera los siguientes dos problemas bastante diferentes con respecto a ciclos Hamiltonianos. Uno es el problema de decisión, la pregunta de si existe o no uno de tales ciclos. El otro es el problema de búsqueda, en el que queremos de hecho encontrar el ciclo. Supón que existe un oráculo que nos dice, por el precio de una moneda por pregunta, si una gráfica tiene un ciclo Hamiltoniano.

• Demuestra que haciendo una serie de preguntas, quizás involucrando versiones modificadas de la gráfica original, podemos encontrar el ciclo Hamiltoniano después de una cantidad de monedas que crece polinomialmente como una función del numero de vértices.

Con las especificaciones anteriores, el procedimiento para encontrar un ciclo hamiltoniano seria, después de saber que la gráfica que queremos analizar si tiene un ciclo hamiltoniano, debemos de tomar una subgrafica de la gráfica original donde no contenga alguna arista de esta, preguntar si en esta nueva subgrafica existe un ciclo hamiltoniano, si el oráculo nos dice que en la subgrafica ya no existe el ciclo hamiltoniano quiere decir que esa arista pertenece al ciclo, en caso de que siga existiendo un ciclo hamiltoniano eliminamos la arista de la gráfica y escojemos otra arista para seguir con el algoritmo.

Al final de esto lo que pasara es que no encontraremos en la subgrafica una arista que no pertenezca al ciclo hamiltoniano por lo que habremos obtenido el ciclo.

Ahora al ya haber encontrado un algoritmo que nos permite encontrar un ciclo hamiltoniano apartir del oráculo ahora nos falta ver su complejidad.

En el peor de los casos lo que pasara es que tendremos que estar preguntando al oráculo m veces si en una subgrafica existe un ciclo hamiltoniano, donde m veces es el numero de aristas de la gráfica original. Pero si recordamos el numero de aristas de una gráfica es a lo mas $\frac{n(n-1)}{2}$

Por lo tanto si tomamos en cuenta que preguntarle al oráculo si en una gráfica existe un ciclo hamiltoniano nos toma tiempo constante

Entonces podemos concluir que nuestro algoritmo es de complejidad $\frac{n(n-1)}{2}$
lo cual es $O(n^2)$

P.D que $\frac{n(n-1)}{2} \leq n^2$

Caso base: n=1

$\frac{1(1-1)}{2} = \frac{1(0)}{2} = 0$ y $1^2 = 1$

$\therefore 0 \leq 1$

Hipótesis de inducción: Supongamos que $\frac{n(n-1)}{2} \leq n^2$

Paso inductivo: n+1

$\frac{n+1(n)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

y por el otro lado tenemos $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

y $\frac{n^2}{2} < n^2; \frac{n}{2} < 2n; 0 < 1$

$\therefore \frac{n(n-1)}{2} \leq n^2$

$\therefore$ nuestro algoritmo es de complejidad $O(n^2)$ por lo que podemos decir que crece de manera polinomial

- Concluye que podemos resolver el problema de decisión en tiempo polinomial sı y solo si podemos resolver el problema de búsqueda también en tiempo polinomial.

$\rightarrow$

P.D Si podemos resolver el problema de decisión en tiempo polinomial, entonces podemos resolver el problema de búsqueda en tiempo polinomial.

si logramos resolver el problema de decisión en tiempo polinomial quiere decir que podemos realizar un proceso similar al anterior tomamos la gráfica y creamos subgraficas para identificar las aristas que pertenecen al problema de búsqueda, resolviendo el problema de decisión, por lo que a lo mas resolveremos m problemas de decisión donde m es el numero de aristas de la gráfica y sabemos que el numero de aristas crece a lo mas en tiempo polinomial por lo que seguimos en tiempo polinomial así que resolvemos el problema de busqueda en a lo mas tiempo polinomial

$\therefore$ podemos resolver el problema de decisión en tiempo polinomial, entonces podemos resolver el problema de búsqueda en tiempo polinomial

$\leftarrow$

P.D Si podemos resolver el problema de búsqueda en tiempo polinomial, entonces podemos resolver el problema de decisión en tiempo polinomial.

Supongamos que resolver el problema de búsqueda nos tomo tiempo polinomial, entonces quiere decir que ya tenemos un ejemplar que responde a nuestro problema o sabemos que no existe un ejemplar valido, pero si esto pasa quiere decir que el problema de decisión pues básicamente se vuelve trivial, pues si encontramos un ejemplar es si y si no lo encontramos es no, por lo que resolver el de decisión teniendo el de búsqueda podemos resolverlo en tiempo constante, pero como $c < n^2$ entonces podemos decir que también es de $O(n^2)$

$\therefore$ podemos resolver el problema de decisión en tiempo polinomial

$\therefore$ podemos resolver el problema de decisión en tiempo polinomial sı y solo si podemos resolver el problema de búsqueda también en tiempo polinomial

Ejercicio 4

Considera el siguiente problema: La facultad tiene clubs en los que se organizan miembros de la comunidad para realizar diferentes actividades (deportes, talleres, seminarios, etc), de los cuales en el mas grande hay m miembros, todos estudiantes; toma en cuenta que los estudiantes pueden estar afiliados a mas de un club. El director de la facultad quiere hacer un evento en honor de tales actividades estudiantiles. Desafortunadamente, dadas las limitantes de espacio, solo se permite que hay un numero máximo de k invitados. Por tal motivo, el director debe limitar la lista de invitados a k estudiantes tal que cada club tenga al menos un miembro asistente.

- Enuncia el problema anterior como un problema de búsqueda.

Teniendo un conjunto de clubs C, Encontrar un conjunto S de K alumnos tal que para todo club $c \in C$, en S existe un alumno $s \in S$ tal que s pertenece a c

- Enuncia el problema anterior, en su versión canónica, como un problema de decisión.

Ejemplar:
Sea una gráfica G=(V,E) donde V son los vértices de la gráfica y E sus aristas, donde los vértices representan a los alumnos y si e_1 y e_2 alumnos pertenecen al mismo club entonces $e_1e_2 \in E$ y K un entero positivo

Pregunta:
Existe un subconjunto S de V, tamaño K tal que para todo $s \in S$, si $v \in V$ y $v \notin S$ existe una arista $sv \in E$

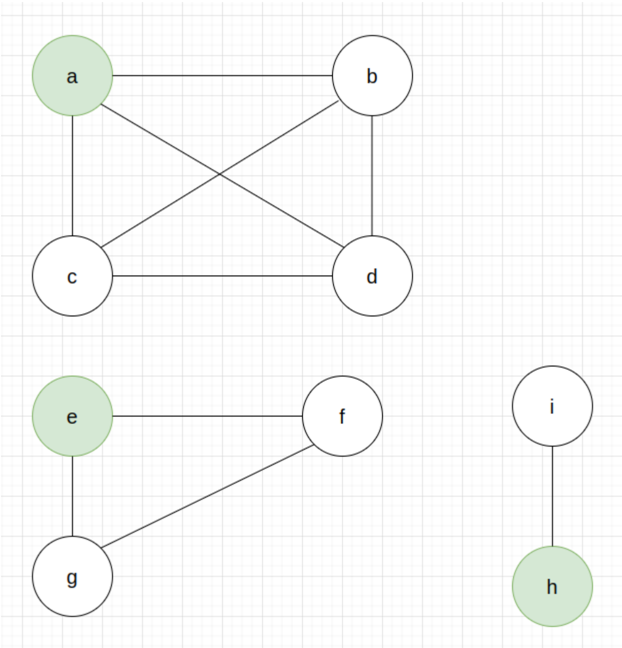
- Da un ejemplar concreto para el problema de decisión y muestra una posible solución para el ejemplar dado.

Ejemplar:
Sea G={V=(a,b,c,d,e,f,g,h,i),E=(ab,ac,ad,bc,bd,cd,ef,eg,fg,hi)} y K=3

Pregunta:
Existe un subconjunto S de V de tamaño 3, tal que para todo vértice s de S, si v es vértice de G y $v \notin S$, entonces existe la arista sv

Respuesta:
S={a,e,h} y $|S| = 3$

Podemos comprobarlo checando los demás vértices de la gráfica
caso b: $b \notin S$ pero $ab \in E$
caso c: $c \notin S$ pero $ac \in E$
caso d: $d \notin S$ pero $ad \in E$
caso f: $f \notin S$ pero $ef \in E$
caso i: $i \notin S$ pero $hi \in E$



Ejercicio 5

- Propón un algoritmo de búsqueda exhaustiva para resolver el problema del CLAN.

EL problema del CLAN nos pregunta

Sea G(V,E) un grafo y k un numero entero.
Existe un k-clan en la gráfica G?

Por lo que nuestro algoritmo nos queda:

Tomamos todos los subconjuntos con cardinalidad almenos 1 de V y después revisamos todos los subconjuntos tamaño k y checamos si en ese conjunto de vértices, existe un clan en G para cada respectivo subconjunto, i.e, sacamos el conjunto potencia del conjunto V de G de tal forma que comencemos a recorrer subconjunto por subconjunto del conjunto potencia si es que el subconjunto cumple con ser una gráfica k completa en el conjunto E de G

De esta manera podemos decir que revisamos todas las posibles combinaciones, por lo que revisamos todos los posibles clanes

- ¿Cual es la complejidad del algoritmo propuesto? Justifica ampliamente tu respuesta

En el algoritmo propuesto debemos calcular todos los subconjuntos de nuestros vértices.
Esto equivale a calcular el conjunto potencia -1 ya que no nos interesa calcular el conjunto vació y como sabemos esto es $2^n - 1$ donde n es el numero de vértices, y de ese conjunto revisamos los conjuntos de k-tamaño y revisamos que estén todas las posibles aristas de estos subconjuntos, ahora como solo nos interesan los k-conjuntos entonces en el peor de los casos tendremos que revisar a lo mas $\frac{k(k-1)}{2}$ aristas de los conjuntos que sean de tamaño k.

Por lo que nos queda: $(2^n - 1)(\frac{k(k-1)}{2}) = (2^n - 1)(\frac{k^2-k}{2})$
y reduciendo tendríamos $2^n - 1$ sigue siendo de orden 2^n y en $k^2 - k$ tenemos que sigue siendo de orden k^2

Sea n el numero de vértices de G y k el numero que se nos pasa por parámetro tendiramos $O(n, k) = k^2 2^n$

Por lo tanto nuestro algoritmo es exponencial

• Ilustra la ejecución del algoritmo propuesto con un ejemplar concreto.

Sea G={(a,b,c,d),(ab,ac,cd,bc)} y k=3

Calculamos todos sus subconjuntos:
S={{a},{b},{c},{d},{a,b},{a,c},{a,d},{b,c},{b,d},{c,d},{a,b,c},{b,c,d},{a,c,d},{a,b,d},{a,b,c,d}}

Posteriormente revisamos todos los obtenidos si existen un clan con esos vértices

Como k=3 nos enfocamos en los subconjuntos de 3: {a,b,c},{b,c,d},{a,c,d},{a,b,d}
Y empezamos con a,b,c a revisar las aristas que tienen a esos vértices las cuales son ab,bc,ac y como podemos ver las aristas forman un clan de 3 vértices siendo estos a,b,c, K={(a,b,c),(ab,bc,ac)}

Por lo que la respuesta al problema de decisión es si

referencias

`https://mathworld.wolfram.com/IndependentSet.html`
`https://mathworld.wolfram.com/Cover.html`