Systemy masowej obsługi

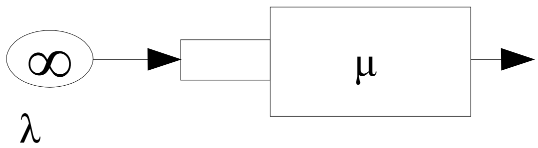
Celem niniejszego ćwiczenia jest:

- zapoznanie się z podstawowymi właściwościami najprostszego systemu analizowanego w ramach teorii masowej obsługi, systemu M/M/1
- zapoznanie się z podstawowymi własnościami prostego systemu z podziałem czasu (*time-sharing*) M/M/1/RNT
- poznanie podstawowych właściwości sieci stanowisk obsługi.

1. Jednokanałowy system masowej obsługi z regulaminem naturalnym M/M/1

Podstawowy układ rozpatrywany w teorii masowej obsługi jest przedstawiony na rys. 1. Zawiera on:

- źródło zgłoszeń
- kolejkę zgłoszeń czekających na obsługę
- stanowisko obsługi.



Źródło zgłoszeń

W trakcie niniejszego ćwiczenia rozpatrywać będziemy jedynie źródła zgłoszeń nieskończenie wymiarowe, to znaczy takie, że odstępy czasu między kolejnymi generacjami zgłoszeń u_1, u_2, u_3, ... są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Dystrybuantę zmiennej losowej u będziemy oznaczali przez $A(x)$

$$A(x)=P(u\leqslant x)$$

W dalszym ciągu zakładać będziemy, że zmienna losowa u posiada rozkład wykładniczy:

$$A(x)=1-e^{-\lambda x}$$

Proste przeliczenia prowadzą w tym przypadku do wniosku, że

$$E(u)=\frac{1}{\lambda}$$

co oznacza, że średnia liczba zgłoszeń na jednostkę czasu wynosi λ i że średnio w przedziale czasu o długości t nadchodzi λt zgłoszeń.

Kolejka

Kolejka jest scharakteryzowana przez regulamin, według którego wybierane są do obsługi zgromadzone w niej zgłoszenia. O systemie, w którym zgłoszenia obsługiwane są zgodnie z kolejnością nadejścia mówimy, że ma kolejkę z regulaminem naturalnym RN. W niniejszym ćwiczeniu właśnie takim systemem będziemy się zajmować.

Stanowisko obsługi

Stanowisko obsługi charakteryzuje zmienna losowa v określająca czas trwania obsługi zgłoszeń. Dystrybuantę zmiennej losowej v będziemy oznaczali przez $B(x)$

$$B(x)=P(v\leqslant x)$$

ze średnią $E(v)=\frac{1}{\mu}$

W dalszym ciągu będziemy zakładać że zmienna losowa v posiada rozkład wykładniczy

$$B(x)=1-e^{-\mu x} \quad .$$

Skrótową charakterystykę systemu obsługi ujmuje notacja Kendall'a: A/B/c/K/h/Z gdzie poszczególne symbole oznaczają:

A – typ rozkładu odstępów czasu między zgłoszeniami w strumieniu wejściowym

B – typ rozkładu czasów obsługi

c – liczba równoległych stanowisk obsługi

K – największa dopuszczalna liczba zgłoszeń w systemie

h – wymiar źródła zgłoszeń

Z – regulamin kolejki

Symbole K, h, Z pomija się, jeżeli brak ograniczeń długości kolejki, źródło zgłoszeń ma nieskończony wymiar, a regulamin kolejki jest naturalny. W przypadku rozkładu wykładniczego na określenie jego typu używa się litery M. Zapis M/M/1 oznacza więc system, do którego zgłoszenia napływają strumieniem Poissona (to znaczy odstępy czasu między zgłoszeniami mają rozkład wykładniczy) i są obsługiwane w czasie o rozkładzie wykładniczym w pojedynczym stanowisku obsługi. Regulamin kolejki jest naturalny a jej długość nieograniczona.

Analiza pracy systemu M/M/1

Niech $n(t)$ oznacza liczbę zgłoszeń w systemie w chwili t. Niech $P(n,t)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w chwili t liczba zgłoszeń w systemie wynosi n. Jeżeli w chwili t + dt w systemie znajduje się n zgłoszeń, $n \geq 1$, to jest to następstwem jednej z trzech możliwych sytuacji

- w chwili t w systemie było n – 1 zgłoszeń a w czasie dt nadeszło jeszcze jedno zgłoszenie. Obsługa żadnego zgłoszenia nie zakończyła się w tym czasie
- w chwili t w systemie było n zgłoszeń, w czasie dt nie nadeszło zgłoszenie i nie zakończyła się obsługa zgłoszenia
- w chwili t w systemie było n + 1 zgłoszeń i zakończyła się obsługa jednego zgłoszenia i nie nadeszło żadne zgłoszenie.

W przypadku gdy n = 0 możliwe są oczywiście tylko dwie ostatnie sytuacje.

Ponieważ rozkłady $A(x)$ i $B(x)$ są wykładnicze, prawdopodobieństwa nadejścia nowego zgłoszenia lub też zakończenia obsługi zgłoszenia w czasie dt zależą jedynie od długości przedziału dt i wynoszą odpowiednio λdt i μdt. Tak więc:

$$P(0,\ t+dt)=P(0,t)\cdot(1-\lambda\, dt)+P(1,t)\mu\, dt(1-\lambda\, dt)$$
$$P(n,t+dt)=P(n-1,t)\lambda\, dt(1-\mu\, dt)+P(n,t)(1-\mu\, dt)(1-\lambda\, dt)+Pn(n+1,t)(1-\lambda\, dt)\mu\, dt$$

stąd po przejściu do granicy $dt \rightarrow 0$, otrzymujemy

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -\lambda P(0,t) + \mu P(1,t)$$

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = \lambda P(n-1,t) - (\lambda+\mu) P(n,t) + \mu P(n+1,t)$$

W stacjonarnym stanie granicznym (który istnieje gdy $\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1$), $\lim_{t\to\infty} P(n,t) = P_n$ zachodzi $\frac{dP(n,t)}{dt} = 0$, a równania powyższe przyjmują postać $\lambda P_0 = \mu P_1$

oraz $(\lambda+\mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$ co uzupełnione warunkiem $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ daje rozwiązanie

$$P-n = \rho^n (1-\rho) \quad .$$

Stąd prawdopodobieństwo, że system pracuje wynosi $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \rho$ dlatego ρ nazywa się współczynnikiem wykorzystania lub obciążenia stanowiska obsługi. Proste przeliczenia prowadzą do wniosku, że średnia liczba zgłoszeń w systemie w stanie stacjonarnym wynosi:

$$E(n) = \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \rho(1-\rho) \quad .$$

Wyznaczanie charakterystyk stanu stacjonarnego systemu M/M/1 na drodze symulacji cyfrowej

Wyznaczanie charakterystyk systemów masowej obsługi metodami analitycznymi nie zawsze jest tak proste jak w przypadku systemu M/M/1. Gdy zawodzą te metody często wykorzystuje się metody symulacji cyfrowej (modelowania cyfrowego) polegające na generacji za pomocą maszyny cyfrowej realizacji procesu stochastycznego którego charakterystyki należy zbadać. W tym celu wykorzystuje się generatory liczb pseudolosowych, odpowiednio skonstruowane programy symulacji układów zdarzeń oraz metody statystyczne służące do oceny parametrów systemu.

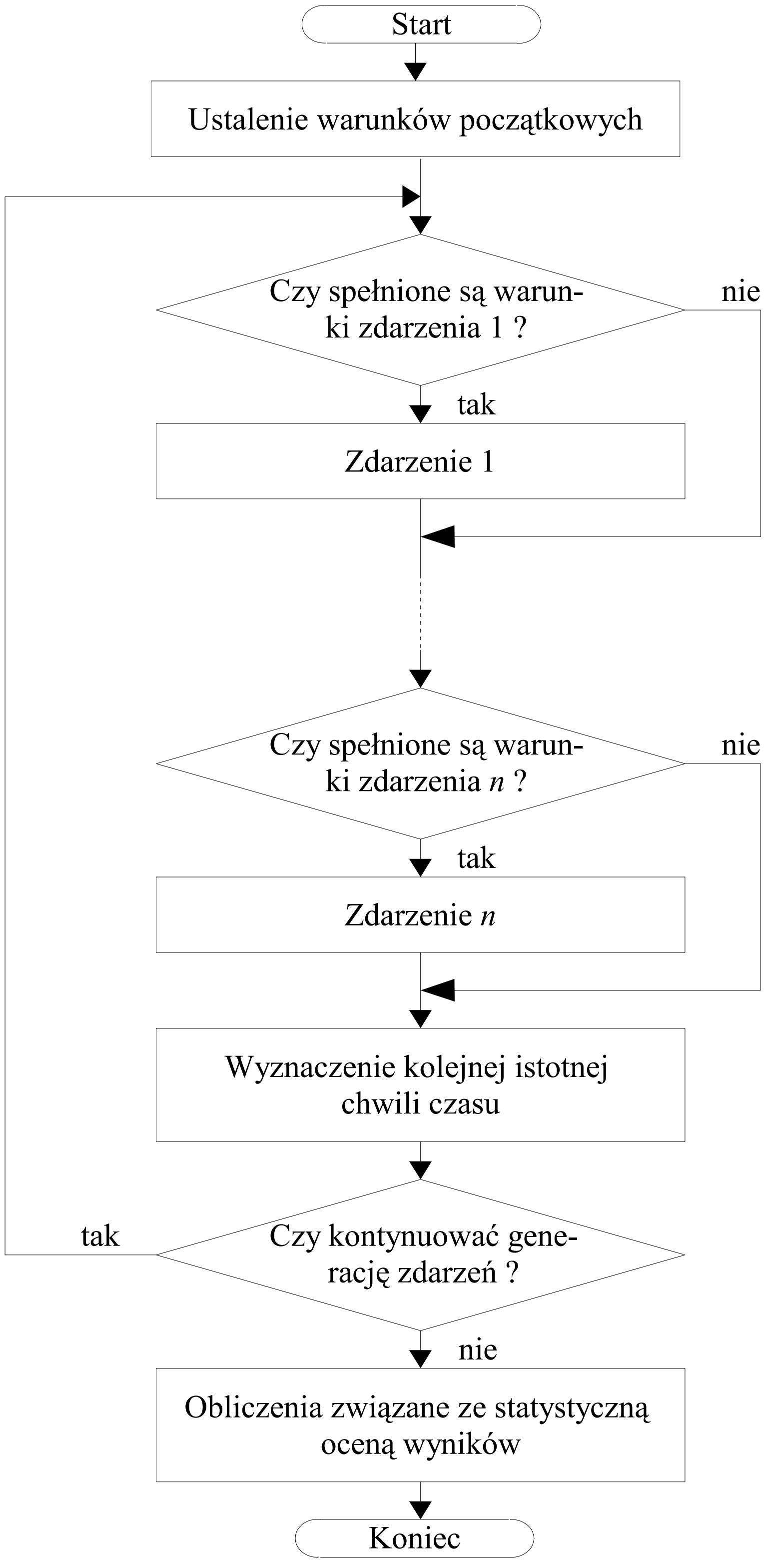
Generatory liczb pseudolosowych

Generator liczb pseudolosowych jest procedurą generującą ciąg liczb, które można uważać za realizację ciągu niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Najczęściej stosowanym generatorem liczb pseudolosowych x_1, x_2, ... o rozkładzie równomiernym na odcinku (0,1) jest generator multiplikatywny $x_{n+1} = A\, x_n - \lfloor A\, x_n \rfloor$, gdzie A – odpowiednio dobrana stała. Przez przekształcenie ciągu x_1, x_2, ... można uzyskiwać ciągi liczb pseudolosowych o innych rozkładach, np. rozkład wykładniczy ze średnią $\frac{1}{\lambda}$ uzyskuje się wykorzystując przekształcenie

$$y_n = \frac{-1}{\lambda} \cdot \ln x_n \quad .$$

Programy symulacji układów zdarzeń

Program symulacji układów zdarzeń najczęściej ma budowę przedstawioną na schemacie blokowym:



Krótkiego komentarza wymaga tu problem biegu czasu w rozpatrywanym programie. Podczas ustalania warunków początkowych i realizacji zdarzeń (nadejście zgłoszenia, zakończenie obsługi, itp.) wyznacza się czas do chwili wystąpienia następnego zdarzenia określonego typu (korzysta się tu najczęściej z generatorów liczb pseudolosowych) tak, że w trakcie realizacji programu znany jest ciąg t_1, t_2, ..., t_n określający czasy rozpoczęcia zdarzenia od 1 do n. Każdrazowo, po zakończeniu realizacji z listy zdarzeń wybierany jest minimalny, dodatni element t_i i odejmowany od wszystkich wartości t_1, .., t_n. Tak więc, zdarzenia których czas do rozpoczęcia realizacji w danym przebiegu listy zdarzeń równa się zero mogą być wykonane.

2. Badanie jednokanałowego systemu z podziałem czasu M/M/1/RNT

Przyjmiemy, że rozpatrywany system jest systemem M/M/1 w którym regulamin naturalny uzupełniono warunkiem, że zgłoszenie nie może przebywać na stanowisku obsługi dłużej niż ustalony kwant czasu θ. Jeżeli obsługa nie zostanie zakończona do tego czasu, zgłoszenie wraca na koniec kolejki, by doczekać na dokończenie obsługi. Jeżeli obsługa zostanie ukończona wcześniej, zgłoszenie opuszcza system a na jego miejsce wchodzi natychmiast następne, znajdujące się na czele kolejki. Tak opisany regulamin oznaczymy symbolem RNT a rozpatrywany system M/M/1/RNT. Całkowity czas v obsługi zgłoszeń w tym systemie ma rozkład wykładniczy:

$$B(x)=1-\mathrm{e}^{-\mu x} \quad .$$

Zgodnie z podanymi zasadami regulaminu RNT rozkład czasu v_T jednostkowego pobytu zgłoszenia na stanowisku obsługi ma postać

$$B_T(x)=\begin{Bmatrix} 1-e^{-\mu x} & \text{dla } x<\theta \\ 1 & \text{dla } x\geqslant\theta \end{Bmatrix}$$

Obliczmy wartość średnią zmiennej losowej v_T

$$E(v_T)=\int_0^\infty x\,dB_T(x)=\frac{1}{\mu}(1-\alpha) \quad \text{gdzie} \quad \alpha=e^{-\mu\theta}$$

oraz wartość średnią kwadratu tej zmiennej

$$E(v_T{}^2)=\int_0^\infty x^2\,dB_T(x)=\frac{2\,(1-\alpha)}{\mu^2}-\frac{2\,\theta\alpha}{\mu} \quad .$$

Mimo różnych regulaminów kolejki w systemach M/M/1 i M/M/1/RNT, liczby zgłoszeń w systemie n, n_T i długości kolejek k, k_T są takie same, gdyż nie zależą one od indywidualnych losów zgłoszenia. Mamy więc:

$$E(n_T)=E(n),\;\; E(k_T)=E(k),\;\; \rho_T=\rho \quad .$$

Czas oczekiwania w systemie M/M/1/RNT

Zgłoszenie, którego czas obsługi ma wartość v, taką że $(k-1)\theta<v\leqslant k\,\theta$ wymaga k wejść do stanowiska obsługi i k-krotnie oczekuje w kolejce na przydział kolejnej części czasu obsługi. Jego łączny średni czas oczekiwania jest sumą $E(w_T)=\sum_{i=1}^{k} E(w_i)$.

Czas oczekiwania na pierwsze wejście do systemu

Na średni czas czekania $E(w_1)$ składa się:

- czas potrzebny na obsługę wszystkich zgłoszeń zastanych w kolejce $E(k_T)\cdot E(v_T)$, gdzie

  $E(k_T)$ – średnia liczba zgłoszeń w kolejce

  $E(v_T)$ – średni czas obsługi
- czas potrzebny na dokończenie obsługi zgłoszenia, które w momencie wejścia do kolejki nowego zgłoszenia znajdowało się na stanowisku obsługi $E(s_T)\cdot E(\tau_T)$, gdzie

  $E(s_T)$ – średnia liczba zgłoszeń na stanowisku obsługi

  $E(\tau_T)$ – średni czas dokończenia obsługi.

Jak wiemy

$$E(k_T)=E(k)=\frac{\rho^2}{1-\rho}$$
$$E(s_T)=E(s)=\rho$$
$$E(v_T)=\frac{1}{\mu}(1-\alpha)$$
$$E(v_T^2)=\frac{2(1-\alpha)}{\mu^2}-\frac{2\theta\alpha}{\mu}$$

Dodatkowo trzeba obliczyć $E(\tau_T)$. Załóżmy, że w chwili t = 0 rozpoczyna się obsługa, której czas trwania v_T ma dystrybuantę $B_T(x)$, zaś w chwili u nadchodzi zgłoszenie. Strumień zgłoszeń jest strumieniem Poisson'a a zatem u jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym na odcinku $[0, \theta]$. Obliczymy dystrybuantę czasu dokończenia obsługi $T(x)$:

$$T(x)=P\{v_T-u\leqslant x|v_T\geqslant u\}=\frac{P\{0\leqslant v_T-u\leqslant x\}}{P\{v_T\geqslant u\}}$$

$$T(x)=\frac{\int_0^\theta P\{0\leqslant v_T-y\leqslant x\}\frac{dy}{\theta}}{\int_0^\theta P\{y\geqslant u\}\,dB_T(y)}=\frac{\frac{1}{\theta}\int_0^\theta P\{0\leqslant v_T-y\leqslant x\}\,dy}{\frac{1}{\theta}\int_0^\theta y\,dB_T(y)}=\frac{\int_0^\theta (B_T(x+y)-B_T(y))\,dy}{E(v_T)}$$

wartość oczekiwaną tej wielkości $E(\tau_T)$:

$$E(\tau_T)=\int_0^\theta x\,dT(x)=\frac{\int_0^\theta x\int_0^\theta \frac{\partial B_T(x+y)}{\partial x}\,dy\,dx}{E(v_T)}=\frac{\int_0^\theta x(1-B_T(x))\,dx}{E(v_T)}=\frac{\int_0^\theta \frac{x^2}{2}\,dB_T(x)}{E(v_T)}$$

$$E(\tau_T)=\frac{E(v_T^2)}{2\,E(v_T)}=\frac{1}{\mu}-\frac{\theta\alpha}{1-\alpha} \quad .$$

oraz prawdopodobieństwo P_P sytuacji, że obsługa, którą zgłoszenie zastaje na stanowisku obsługi, zostanie przerwana:

$$P_P=P\{v_T=\theta|v_T\geqslant u\}=\frac{P\{v_T=\theta\}}{P\{v_T\geqslant u\}}=\frac{e^{-\mu\theta}}{\frac{1}{\theta}E(v_T)}=\frac{\theta e^{-\mu\theta}}{E(v_T)} \quad .$$

Wtedy

$$E(w_1)=E(k_T)\cdot E(v_T)+E(s_T)\cdot E(\tau_T)$$
$$E(w_1)=\frac{\rho^2}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu}(1-\alpha)+\rho\left(\frac{1}{\mu}-\frac{\theta\alpha}{1-\alpha}\right)$$
$$E(w_1)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\rho^2(1-\alpha)}{(1-\rho)}+\rho\left(1-\frac{\mu\theta\alpha}{(1-\alpha)}\right)\right)$$

gdzie $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$, $\alpha=e^{-\mu\theta}$.

Czas czekania na drugie wejście do systemu

Dla obliczenia wartości średniej czasu oczekiwania na drugie wejście do stanowiska obsługi wyznaczymy średnią liczbę zgłoszeń, które ustawiły się w kolejce po rozważanym zgłoszeniu i teraz, w momencie, gdy zostało ono zwrócone na koniec kolejki, wyprzedzają je. W czasie $E(w_1)$ do kolejki nadchodzą zgłoszenia ze źródła o średniej wydajności λ zgłoszeń na jednostkę czasu i stanowiska obsługi, z którego część zgłoszeń powraca do kolejki (w czasie pierwszej części obsługi rozważanego zgłoszenia – tylko ze źródła zgłoszeń).

W czasie $E(w_1) + \theta$ źródło zgłoszeń wyśle średnio $\lambda(E(w_1) + \theta)$ zgłoszeń i dla ich obsługi będzie trzeba czasu $\lambda(E(w_1) + \theta)E(v_T)$. W czasie $E(w_1)$ stanowisko opuści średnio $E(n)$ zgłoszeń, na które złoży się średnio $E(k)$ zastanych w kolejce i średnio $E(s)$ zastanych na stanowisku.

Dla $E(k)$ zgłoszeń zastanych w kolejce prawdopodobieństwo nie zakończenia obsługi w czasie θ i odesłania ich do kolejki wynosi $\alpha=e^{-\mu\theta}$. Dla $E(s)$ zgłoszeń zastanych na stanowisku obsługi analogiczne prawdopodobieństwo P_P wynosi $P_P=\frac{\theta\alpha}{E}(v_T)$. Tak więc możemy napisać, że w czasie $E(w_1)$ do kolejki zostanie średnio zawrócona ze stanowiska obsługi następująca liczba zgłoszeń: $L=E(k)\cdot\alpha+E(s)\cdot\frac{\alpha\theta}{E(v_T)}$, zaś dla ich obsłużenia trzeba będzie średnio czasu $L\cdot E(v_T)$. Stąd:

$$E(w_2)=L\cdot E(v_T)+\lambda E(v_T)\cdot(\theta+E(w_1))=\frac{\rho^2}{1-\rho}\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{\mu}+\rho\alpha\theta+\lambda\frac{1-\alpha}{\mu}\theta+\lambda\frac{1-\alpha}{\mu}E(w_1)$$

$$E(w_2)=\frac{\rho^2}{1-\rho}\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{\mu}+\rho\alpha\theta+\rho(1-\alpha)\theta+\rho(1-\alpha)E(w_1)$$

$$E(w_2)=\frac{\rho^2}{1-\rho}\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{\mu}+\rho\theta+\rho(1-\alpha)E(w_1)$$

$$E(w_2)=\frac{1}{\mu}\cdot\left(\alpha\frac{\rho^2(1-\alpha)}{1-\rho}+\rho\mu\theta+\rho(1-\alpha)\mu E(w_1)\right)$$

Czas oczekiwania na trzecie i następne wejścia do systemu

Dla obliczenia $E(w_3)$ zauważmy, że dla obsługi zgłoszeń wysłanych w czasie $E(w_2) + \theta$ przez źródło zgłoszeń będzie trzeba czasu $\lambda(E(w_2) + \theta)E(v_T)$. W czasie $E(w_2)$ stanowisko opuści $\frac{E(w_2)}{E(v_T)}$ zgłoszeń z czego $\alpha\cdot\frac{E(w_2)}{E(v_T)}$ wróci do kolejki dla dokończenia obsługi. Ich obsługa będzie wymagać czasu $\alpha\cdot\frac{E(w_2)}{E(v_T)}\cdot E(v_T)=\alpha\cdot E(w_2)$ stąd $E(w_3)=(\theta+E(w_2))\lambda E(v_T)+\alpha E(w_2)$ lub ogólnie $E(w_{i+1})=(\theta+E(w_i))\lambda E(v_T)+\alpha E(w_i)$.

Schemat obliczeń czasów oczekiwania

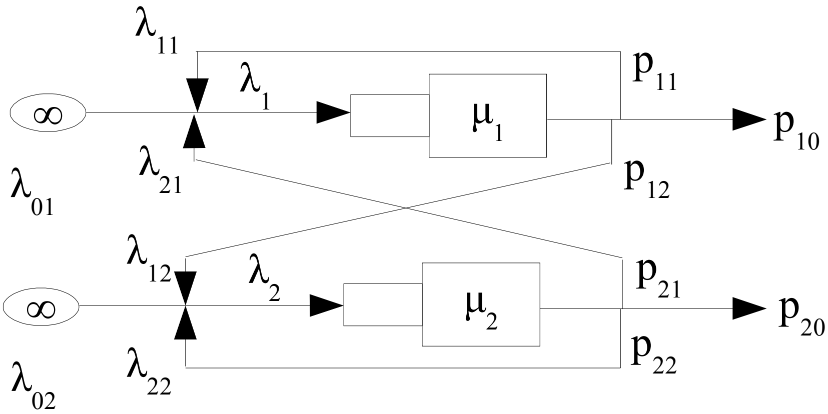
Wprowadźmy oznaczenia: $x_i=\mu E(w_i)$, $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$, $y=\mu\theta$, $E(k)=\frac{\rho^2}{1-\rho}$, $\alpha=e^{-\mu\theta}$. Wtedy podane powyżej wzory na obliczanie czasów oczekiwania przyjmują postać:

$$x_1 = E(k)\cdot(1-\alpha)+(1-\frac{y\alpha}{1-\alpha})\cdot\rho,$$
$$x_2 = x_1\,\rho\cdot(1-\alpha)+E(k)\alpha(1-\alpha)+y\rho,$$
$$x_{i+1} = y\rho(1-\alpha)+x_i(\rho\cdot(1-\alpha)+\alpha),\ \ i=2,3,\ldots$$

Tak więc $E(w_i)=\frac{x_i}{\mu}$, natomiast x_i jest jedynie funkcją $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ oraz $y=\mu\theta$.

1.Badanie sieci stanowisk obsługi

Niech będzie dana sieć złożona z 2 stanowisk obsługi jak na rysunku.



Przyjmiemy, że oba stanowiska obsługi są typu M/M/1. Rozkład czasów obsługi zgłoszeń w stanowisku *i* ma dystrybuantę $B_i(x)=1-e^{-\mu_i x}$. Drogę obiegu zgłoszeń pomiędzy stanowiskami obsługi określają prawdopodobieństwa przejść p_{ij} (prawdopodobieństwo, że zgłoszenie po zakończeniu obsługi na stanowisku *i* przejdzie do kolejki do stanowiska *j*, $p_{i0} = 1 - p_{i1} - p_{i2}$ jest prawdopodobieństwem, że zgłoszenie wychodząc ze stanowiska *i* opuszcza sieć). Do stanowiska *i* napływają zgłoszenia spoza sieci w formie strumienia Poissona o parametrze λ_{0i} oraz zgłoszenia z innych stanowisk sieci.

Analiza sieci

Powyższą sieć można przeanalizować biorąc pod uwagę następujące jej własności:

- strumień zgłoszeń opuszczających stanowisko obsługi typu M/M/1 jest strumieniem Poissona
- rozgałęzienie strumienia Poissona na dwa (lub więcej) strumieni zgłoszeń zachowuje tę własność podobnie jak i łączenia strumieni.

Tak więc łączny wejściowy strumień zgłoszeń nadchodzących do *i*-tego stanowiska zawiera średnio λ_i zgłoszeń w jednostce czasu i jest strumieniem Poissona:

$$\lambda_{\text{¿}}\lambda_{0\,i}+\lambda_1\cdot p_{1\,i}+\lambda_2\cdot p_{2\,i},\ \ i=1,2,\ldots$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań znamy strumienie wejściowe obu stanowisk obsługi i możemy określić stopień obciążenia tych stanowisk $\rho_i=\frac{\lambda_I}{\mu_i}$. Ponieważ powyższe związki w pełni definiują rozpatrywaną sieć, zachowanie się poszczególnych stanowisk można analizować osobno zgodnie z modelem M/M/1. Powyższe rozumowanie można łatwo rozszerzyć na sieć złożoną z więcej niż dwóch stanowisk obsługi.

Plan ćwiczenia

Stanowisko M/M/1

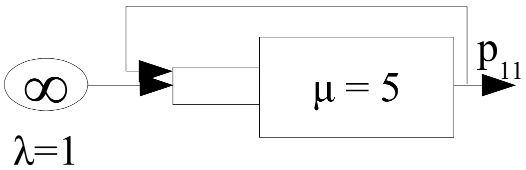
1. Zdjąć przebieg jednej z realizacji procesu n_i, $i = 1,2, \dots m$.
2. Zdjąć charakterystykę średniej liczby zgłoszeń w systemie $E(n) = f(\rho)$ i porównać z wynikami uzyskanymi na drodze analitycznej
3. Dla ustalonej wartości parametru $\mu = 10$ zdjąć charakterystykę średniego czasu pobytu zgłoszenia w systemie $E(\tau) = f(\rho)$ i porównać z wynikami uzyskanymi na drodze analitycznej

Stanowisko M/M/1/RNT

1. Zdjąć charakterystykę czasów czekania jako funkcję liczby wejść w systemie z podziałem czasu wykorzystując metodę symulacji cyfrowej.
2. Porównać wyniki uzyskane w punkcie poprzednim z otrzymanymi na podstawie odpowiednich wzorów.
3. Dla ustalonej wartości parametru $\mu = 10$ i trzech wybranych wartości θ zdjąć charakterystyki średniego czasu pobytu zgłoszenia w systemie $E(\tau) = f(\rho, \theta)$
4. Porównać uzyskane charakterystyki z podobną charakterystyką dla systemu M/M/1

Sieć stanowisk M/M/1

1. Obliczyć i porównać z wynikami symulacyjnymi średnią liczbę klientów w systemie pokazanym na rysunku poniżej dla różnych wartości prawdopodobieństwa p_{11}.



2. Dla sieci zaproponowanej przez prowadzącego obliczyć i porównać z wynikami symulacyjnymi średnią liczbę klientów w systemie, średnie długości kolejek przed każdym ze stanowisk oraz łączny średni czas pobytu zgłoszenia w systemie.