

Problem Set 11.1

$$1. (I - UV^T)^{-1} = I + UV^T + UV^TUV^T + \dots$$

$$= I + U [1 + V^T U + V^T U V^T U + \dots] V^T$$

$$= I + \frac{UV^T}{1 - V^T U}$$

$$2. (a). E^{-1} = \begin{bmatrix} I & -UD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -V^T & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + UD^{-1}V^T & -UD^{-1} \\ -D^{-1}V^T & D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(b). E^{-1} = \begin{bmatrix} (I - UV^T)^{-1} & 0 \\ -V^T(I - UV^T)^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -U \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - UV^T)^{-1} & -(I - UV^T)^{-1}U \\ -V^T(I - UV^T)^{-1} & V^T(I - UV^T)^{-1}U + 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = (I - UV^T)^{-1} = I + UD^{-1}V^T = I + \frac{UV^T}{1 - V^T U}$$

$$3. M^{-1} = (A - UV^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(I - V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A - UV^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - UV^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (1 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$4. (A - UV^T)(x + \frac{V^T x}{1 - V^T z} z)$$

$$= Ax + \frac{V^T x}{1 - V^T z} Az - UV^T x - \frac{V^T x}{1 - V^T z} UV^T z$$

$$= Ax + (\frac{V^T x}{1 - V^T z} - V^T x) U - \frac{V^T x}{1 - V^T z} UV^T z$$

$$= Ax + \frac{V^T x V^T z}{1 - V^T z} U - \frac{V^T x V^T z}{1 - V^T z} U$$

$$= Ax$$

$$= b$$

$$5. M^{-1}(A - UV^T)$$

$$= (A^{-1} + A^{-1}U(I - V^TA^TU)^{-1}V^TA^{-1})(A - UV^T)$$

$$= I + (I - A^{-1}UV^T)^{-1}A^{-1}UV^T - A^{-1}UV^T$$

$$- (I - A^{-1}UV^T)^{-1}A^{-1}UV^TA^{-1}UV^T$$

$$= I + (I - A^{-1}UV^T)^{-1}(I - A^{-1}UV^T)A^{-1}UV^T - A^{-1}UV^T$$

$$= I + A^{-1}UV^T - A^{-1}UV^T$$

$$= I$$

$$6. U = V = I_n$$

$$(A - I)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(I - A^{-1})^{-1}A^{-1}$$

$$= A^{-1}[I + (I - A^{-1})^{-1}A^{-1}]$$

$$= A^{-1}[(I - A^{-1})^{-1}(I - A^{-1} + A^{-1})]$$

$$= A^{-1}(I - A^{-1})^{-1}$$

$$(A - I)(A^{-1}(I - A^{-1})^{-1})$$

$$= (I - A^{-1})^{-1} - A^{-1}(I - A^{-1})^{-1}$$

$$9. \frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = - \begin{bmatrix} 1 & -t^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -t^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. obviously.

$$7. (A - UV^T)(x + zw)$$

$$= Ax - UV^Tx + Azw - UV^Tzw$$

$$= Ax + Uw - U(V^Tz)w - UV^Tzw$$

$$= Ax + Uw - Uw + UV^Tzw - UV^Tzw$$

$$= Ax$$

$$= b$$

$$8. \frac{(A + \Delta A)^2 - A^2}{\Delta t} = \frac{A \Delta A + \Delta A \cdot A + (\Delta A)^2}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{dA^2}{dt} = A \frac{dA}{dt} + \frac{dA}{dt} A$$