Yet Another KogSys Summary

Adam L. Urban
adam.urban@gmail.com
LaTeX 2_ε– Build vom 2. September 2014
Revision: 6

Einleitung

Anmerkung zur Zusammenfassung für SS14 Klausur

Diese Version beinhaltet kleine Änderungen und Ergänzungen speziell für die SS 14 Klausur. Ein Hauptaugenmerk war es Teile die nicht klausurrelevant sind zu entfernen. Diese Teile können aber für spätere Klausuren relevant sein! Außerdem habe ich die Kapitelstruktur so geändert, dass es der zeitlichen Abfolge der Vorlesung entspricht. Ich habe auch Teile hinzugefügt die in der Version von Adam Urban nicht drin waren (Kapitel: Visuelle Wahrnehmung des Menschen). Ich hoffe diese sind für andere Studenten hilfreich. In diesem Sinne würde ich mich freuen wenn weitere Personen diese Zusammenfassung als Basis für spätere Klausuren aufgreifen.

Anmerkung zur Zusammenfassung von Adam Urban

Dies ist der Versuch einer Zusammenfassung der Vorlesung Kognitive Systeme aus dem Sommersemester 2006 an der Universität Karlsruhe (TH). Sie erhebt weder Anspruch auf Vollständigkeit, noch auf Korrektheit. Dieses Dokument hält sich sehr stark an den Folien von Prof. R. Dillmann und Prof. A. Waibel.
Bei Fehlern würde ich mich über eine eMail an adam.urban@gmail.com freuen.

Links

Meine Homepage: adam.urban.de.vu

Offizielle KogSys Seite: http://wwwiaim.ira.uka.de/Teaching/VorlesungKogSys/

für die Community

"Gebildet ist, wer weiß,
wo er findet, was er nicht weiß."

G. Simmel

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Signalverarbeitung

Die erste Aufgabe der Signalverarbeitung ist eine Vorverarbeitung. So muss z.B. ein analoges elektrisches Sensorsignal digitalisiert werden bevor es in einem Rechner verarbeitet werden kann. Anschließend wird durch die Signalverarbeitung die relevante Information aus dem Signal extrahiert. Oder in anderen Worten: Unwichtige Informationen sollen herausgefiltert werden. Beispiele für unwichtige Informationen:

- Sprecheridentität (sprecherabhängigen Anteile)
- Hintergrundgeräusche, Hall, Echo, absolute Lautstärke
- Rotationen in Bildern
- Helligkeit

1.0.1 Faltung

In der Mathematik und besonders in der Funktionalanalysis beschreibt die Faltung einen mathematischen Operator, welcher für zwei Funktionen f und g eine dritte Funktion liefert. Diese gibt eine Art "Überlappung" zwischen f und einer gespiegelten und verschobenen Version von g an. Definition:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad \text{(kontinuierlich)}$$

$$(f * g)[i] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f[i-j]g[j] \qquad \text{(diskret)}$$

Bedeutung:
Eine anschauliche Deutung der Faltung ist die Gewichtung einer Funktion mit einer anderen. Der Funktionswert der Gewichtsfunktion an einer Stelle t gibt an, wie stark der um t zurückliegende Wert der gewichteten Funktion in den Wert der Ergebnisfunktion eingeht.
Faltung der Zeitfunktion:

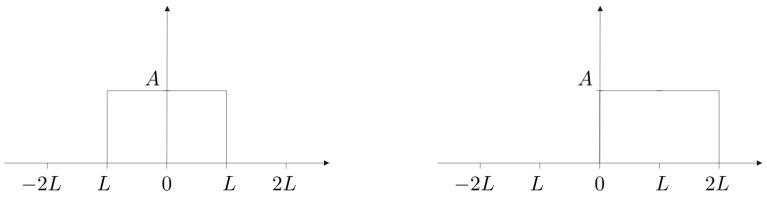
$$F(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

Multiplikation der Zeitfunktionen:

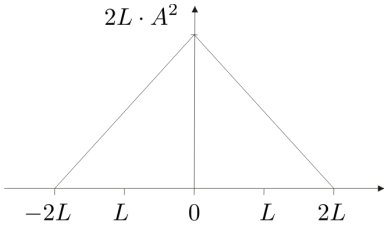
$$F(f_1(t) \cdot f_2(t)) = F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Faltung zweier Funktionen entspricht dem Filtern eines Signals.
Beipiel mit den folgenden zwei Funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{für} \quad x \in [-L; L] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} A & \text{für} \quad x \in [0; 2L] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Die Faltung der beiden Funktionen sieht folgendermaßen aus:



Die Faltung lässt sich wiefolgt ermitteln:

1. Symbolisch: Lösung des Integrals
2. Grafisch: Spiegelung von f und über g schieben. Wert der Faltung für t entspricht der Fläche der Überlappung

1.0.2 Grundlegendes

Erfassen/Messen von Signalen:

- Signal als Funktion:
  - Akustik $f(t)$
  - Bilder $f(x, y)$
  - Energie als Funktion der Zeit oder des Raumes
  - Energie: Lautstärke, Helligkeit, Grauwertintensität
  - Farbe, Stereo, Bildsequenzen
- Eigenschaften:
  - Hinlänglich glatt
  - $0 \leq f(x, y) < \infty$ (wertbeschränkt)

Abtastung und Sampling:

- Man messe das Signal $f(x)$ an verschiedenen Punkten x
- Punkte x, in diskreten Abständen, an meist äquidistanten Stellen eines Abtastrasters
- Akustik: $G = f(0), f(\Delta), f(2\Delta), \ldots, f((N-1)\Delta)$
- Bild:

$$G = \begin{bmatrix} f(0,0) & \cdots & f(0,N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N-1,0) & \cdots & f(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

- Meist: $N = 2^m$
- Bild: Rechtwinklig, schiefwinklig, sechseckige Raster
- Wie oft? Wie großes Raster? → Sampling Theorem

Quantisierung:

- Im Computer müssen Messwerte quantisiert werden. Die Anzahl der Quantisierungsstufen bestimmt Auflösung.

- Feinere Auflösung: Bessere Qualität, mehr Speicher
- Dynamische Abtastung: Starke Übergänge: Fein rastern - grob quantisieren; schwache Übergänge: Grob rastern, fein quantisieren

Digitalisierung von Signalen:

- CD, Video (DV, DVD), Digitaler Rundfunk (DAB), ISDN
- Vorteile: Qualität (Bits sind Bits, verlustfreie Übertragung); Kompression; mehrfacher Nutzen von Kommunikationskanälen (Time Division Multiple Access)

Diracfunktion:

- Definition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)dx = \int_{x_0^-}^{x_0^+} \delta(x-x_0)dx = 1$$

- Hat Fläche 1, an einer beliebig kleinen Umgebung
- $A\delta(x-x_0)$ Impuls mit Stärke A an der Stelle $x = x_0$

1.1 Fouriertransformation

1.1.1 Idee der Fouriertransformation

- Zerlegung eines Signals in eine Summe von komplexen Sinus- und Cosinusfunktionen.
- Unterschiedliche Frequenzen.
- Darstellung: Amplituden und Phasen von Frequenz

1.1.2 Fouriertransformation

- Fouriertransfromation:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

- Inverse Fouriertransformation:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{+i\omega t}d\omega$$

- Betrag des Fourierspektrums:

$$|F(\omega)| = \sqrt{\Re(F(\omega))^2 + \Im(F(\omega))^2}$$

- Phase des Spektrums:

$$\phi(F(\omega)) = \arctan\frac{\Im(F(\omega))}{\Re(F(\omega))}$$

1.1.3 Eigenschaften

- Linearität:

$$F(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1F(f_1) + c_2F(f_2)$$

- Differentiation:

$$F(f^{(n)}) = (i\omega)^nF(f)$$

- Verschiebung:

$$F(f(t-T)) = e^{-i\omega T}F(f) \qquad \text{(Zeit)}$$
$$F(e^{-i\omega_0 t}f(t)) = F(\omega-\omega_0) \qquad \text{(Frequenz)}$$

1.1.4 Zusammenhänge

Signal	$\Rightarrow$	Transformierte
Transformierte	$\Leftarrow$	Signal
diskret	$\Leftrightarrow$	periodisch
reell	$\Leftrightarrow$	gerade
imaginär	$\Leftrightarrow$	ungerade

1.1.5 Typische Fouriertransformationen

- Sinusfunktion:

$$f(x) = a\sin(2\pi\alpha x) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{a}{2}i\delta(\omega+\alpha) - \frac{a}{2}i\delta(\omega-\alpha)$$

- Cosinusfunktion:

$$f(x) = a\cos(2\pi\alpha x) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{a}{2}\delta(\omega+\alpha) + \frac{a}{2}\delta(\omega-\alpha)$$

(Sinus- und cosinusförmige Signale werden im Frequenzbereich als zwei Impulse wiedergegeben.)

- Impulszug:

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(x-\nu T) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{\nu}{T})$$

1.1.6 Anmerkungen

- Periodisch unendlich ausgedehntes Signal wird im Fourierbereich als endliche Bandbreite dargestellt.
- Endliches Signal kann zu unendlichem Spektrum führen. Approximation nötig!
- Je stärker die Übergänge im Signal, desto höher die Frequenz der Komponenten, um so breiter das Spektrum.

1.1.7 Kurzzeitspektralanalyse

Problem: Beide kontinuierlich, schwer digital darzustellen

- Diskrete Zeit (*discrete time*) Fouriertransformation:
  Eingabe: diskret, aperiodisch
  Ergebnis: periodisch, kontinuierlich
- Diskrete Fouriertransformation (DFT, FFT):
  Eingabe: periodisch, diskret
  Ergebnis: diskret, periodisch
  Spezialfall der Z-Transformation.
  Periodische Eingabe? Man schneidet ein Fenster aus und tut so, als ob es so periodisch unendlich fortgesetzt wird.

Spektrum einer ganzen Aufnahme ist häufig nicht hilfreich bzw. kann die Analyse ja immer nur für ein endliches Intervall erfolgen. Problem: Frequenzauflösung vs. Zeitauflösung.
Beispiel Phoneme: Phoneme haben eine Länge von 10-100ms. Es wird angenommen, dass Sprache stationär ist in einem kurzen Zeitbereich. Es wird deshalb die Frequenzverteilung in kurzen Segmenten analysiert. Eine Herrausforderung ist es eine Abwägung zwischen zeitlicher Auflösung und der Frequenzauflösung zu finden. Es wird deshalb ein überlappender Ausschnitt aus einem Signal verwendet.
Fensterung erfolgt

- Es wird Periodizität des ausgesuchten Signals angenommen. Daher DFT.

- Problem: Periodizität des gefensterten Signals. Periodische Fortsetzung kann unstetig sein.

Weiterer Effekt der Fensterung ist der Leck-Effekt. Ein Ausschneiden eines Stückes aus einem Signal entspricht im zeitbereich einer Multiplikation mit einer Rechteck-Funktion. Im Frequenzbereich entspricht dies einer Faltung des originalen Spektrums mit der sinc-Funktion. Die Ideale Fensterung wäre keine Fensterung. Dies entspricht im frequenzbereich einer Faltung mit einem Dirac. Eine sinc-Funktion weicht also sehr stark von einem Dirac ab. Eine Verringerung des Leck-Effekts lässt sich nur erreichen wenn das Fenster am Rand sehr viele Ableitungen hat die gegen 0 gehen. Ein solches Fenster ist das Hanning-Fenster.

1.2 Fourierreihen

1.2.1 Fourierreihenzerlegung

- Periodisches Signal
- Signal:

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(x)e^{-i\pi\frac{k}{L}x}dx \quad \text{wobei} \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\pi\frac{k}{L}x}$$

- Komplexe Schreibweise:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

- Parameter: Amplitude, Phase, Frequenz (Periode)

1.2.2 Fourierreihe für Rechteckfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\right)$$

Beispiel für Fourierreihenentwicklung:
Für $f(x) = \text{sign}(\sin(x))$ gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) \end{aligned}$$

und somit

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right)$$

1.3 Aliasing

In der Signalverarbeitung treten Alias-Effekte beim Digitalisieren analoger Signale auf.
Damit das Ursprungssignal korrekt wiederhergestellt werden kann, dürfen im abgetasteten Signal nur Frequenzanteile vorkommen, die weniger als halb so groß wie die Abtastfrequenz sind. Wird dieses Abtasttheorem verletzt, werden Frequenzanteile, die größer sind als die halbe Abtastfrequenz als niedrigere Frequenzen interpretiert. Die hohen Frequenzen geben sich sozusagen als jemand anderes aus, daher die Bezeichnung Alias. Die halbe Abtastfrequenz wird als Nyquist-Frequenz bezeichnet.
Falls es nicht zu vermeiden ist, dass hohe Frequenzen im Eingangssignal vorhanden sind, wird das Eingangssignal zur Unterdrückung von Alias-Effekten durch einen Tiefpass gefiltert (Anti-Aliasing-Filter), wobei die aktive Filterwirkung dieses Abschneidens der hohen Frequenzen eindeutiger mit Höhensperre, Höhenfilter, High Cut und Treble Cut beschrieben wird.

1.3.1 Abtast/Sampling Theorem

$$\Delta x \leq \frac{1}{2\omega}$$

- Die Samplingfrequenz muss mindestens zweimal so gross sein als die höchste im Signal vorkommende Frequenz ω (*Cutoff-frequency*).
- Um Aliasing zu vermeiden muss das Abtasttheorem eingehalten werden.
- Ist das Abtasttheorem eingehalten, kann ein Signal durch inverse Fouriertransformation vollständig rekonstruiert werden.

1.3.2 Abtasten in der Praxis

- Abtasten nur in endlichem Intervall möglich.
- Sprektrum lokal (in kleinem Intervall interessant)
  - Multiplikation des Signals mit Fensterfunktion
  - Faltung des Fenstersprektrums mit Signalspektrum
  - Ungenauigkeiten, genaue Rekonstruktion nicht mehr möglich
- Ausnahme: Signal ist periodisch und bandbegrenzt

1.3.3 Behebung von Aliasing

Möglichkeiten zur Behebung von Aliasing:

- Samplefrequenz erhöhen. Nachteil: erhöhtes Datenaufkommen
- Bandbegrenzen des Originalsignals durch Tiefpassfilter (Anti-Aliasing Filter). Nachteil: Informationsverlust

1.4 Korrelation

- Eindimensionale Kreuzkorrelation:

$$R_{f,g}(m) = \sum_i f(i)g(i-m)$$

- Zweidimensionale Kreuzkorrelation:

$$R_{f,g}(m) = \sum_i \sum_j f(i,j)g(i-m, j-n)$$

- Autokorrelation = Kreuzkorrelation mit sich selbst:

$$\begin{aligned} A(m) &= \sum_i f(i)f(i-m) \\ A(m,n) &= \sum_i \sum_j f(i,j)f(i-m,j-n) \end{aligned}$$

1.5 Schablonenanpassung (*Template Matching*)

- Eine einfache Form der Klassifikation.
- Ziel: Ein Muster zu erkennen das einem abgespeicherten Beispiel ähnlich ist.
- Maß der Übereinstimmung ist der Absolutbetrag zwischen Muster und Schablone (zentriert an (m, n)):

$$M_{f,g}(m,n) = \sum_i \sum_j |f(i,j)g(i-m, j-n)|$$

- Abstand $E(m, n)$ ist definiert als Quadrat der Kreuzkorrelation:

$$E_{f,g}(m,n) = \left(\sum_i \sum_j f(i,j)g(i-m, j-n) \right)^2$$

Kapitel 2

Bildverarbeitung

2.1 Bildgenerierung

- Heute werden oftmals Digitalkameras verwendet (meist CCD, aber auch CMOS)
- Anschluss erfolgt über: Firewire (IEEE1394), USB, Camera Link, ...
- Kameras liefern direkt digitalisierte Bilddaten
  - Format je nach Kamera und Modus unterschiedlich
  - Bei S/W-Kameras meist 8bit Graustufen
  - Bei Farbkameras entweder als bayer-Pattern oder meist bereits konvertiert als RGB24, YUV422, etc.
- Kameras unterscheiden sich durch:
  - Bildqualität (Qualität CCD-Chip, aber auch grundlegend: Auswahl Linse/Objektiv)
  - Graustufen- oder Farbkamera
  - Auflösung
  - Bei Farbkameras: Welche Farbkodierungen sind verfügbar? (8bit, 16bit, 24bit)
  - Wichtig je nach Anwendung: Welche maximale Framerate ist bei welchem Bildformat noch verfügbar? (z.B. 15/30/60/120/200 Hz)

2.2 Bildrepräsentation

Monochrombild: Diskrete Funktion

$$\begin{aligned} Img : [0 \dots n-1] \times [0 \dots m-1] &\rightarrow [0 \dots q] \\ (u, v) &\mapsto Img(u, v) \end{aligned}$$

Üblich: $q = 255$; $n = 640$, $m = 480$ (VGA) oder $n = 768$, $m = 576$ (PAL)

2.2.1 Farbbild

- Viele verschiedene Farbmodelle für unterschiedliche Anwendungen
- Klassifikation nach erreichbarem Farbraum
-
  - S/W, Grauwertstufen
  - RGB-Modell: speziell für Monitore (Phosphor-Kristalle), sehr üblich

$$Img(u, v) \in \mathbb{R}^3 = (r, g, b)^T$$

- HSI (Hue, Saturation, Intensity): speziell für Farbsegmentierung
- CIE: physikalisch (Wellenlänge)
- CMYK- Modell: Farbdrucker (subtraktive Farbmischung)
- YIQ: Fernsehmodell

RGB-Modell

$$\begin{aligned} Img : [0 \dots n-1] \times [0 \dots m-1] &\rightarrow [0 \dots R] \times [0 \dots G] \times [0 \dots B] \\ (u, v) &\mapsto Img(u, v) = (r, g, b) \end{aligned}$$

- additive Farbmischung
- drei Farbwerte: Rot, Grün, Blau
  oft: $256 \times 256 \times 256$ Nuancen
  ($R = G = B = 255$, 8Bit, "RGB24") = 16,8 Mio. Farben
- oft verwendet von Kamera-Treibern

HSI-/HSV-Modell

- Hue (Farbnuancen), Saturation (Sättigung), Intensity/Value (Helligkeit)
- trennt Helligkeit vom Farbwert $\Rightarrow$ unempfindlich gegen Beleuchtungsänderungen
- Umrechnung von RGB nach HSI (falls $R = G = B$, dann ist H undefiniert; falls $R = G = B = 0$, dann ist S undefiniert)

$$\begin{aligned} c &= \arccos \frac{2R - G - B}{2\sqrt{(R-G)^2 + (R-B)(G-B)}} \\ H &= \begin{cases} c & \text{falls } B < G \\ 360^\circ - c & \text{sonst} \end{cases} \\ S &= 1 - \frac{3}{R+G+B} \min(R, G, B) \\ I &= \frac{1}{3}(R + G + B) \end{aligned}$$

Hinterlegung

- Hinterlegung eines 8bit Graustufen-Bildes im Speicher
  - Pixel werden zeilenweise, von oben links nach unten rechts, linear abgelegt (Achtung: z.B. bei Bitmaps von unten links nach oben rechts)
  - Graustufen-Kodierung: ein Byte pro pixel; 0 schwarz, 255 weiß, dazwischen Graustufen
- Hinterlegung eines RGB24 Farbbildes im Speicher
  - Pixel werden zeilenweise, wie beim Graustufen-Bild, abgelegt
  - Farbkodierung: drei Bytes pro Pixel; für jeden Kanal gilt: 0 minimale, 255 maximale Intensität, dazwischen Nuancen

Grauwert-Transformation

Transformation von RGB24 nach 8bit Graustufen:

- Eine Möglichkeit: $g = (R + G + B)/3$, aber: menschliches Auge ist am empfindlichsten gegenüber der Farbe Grün.
- Üblicherweise wird deshalb verwendet:

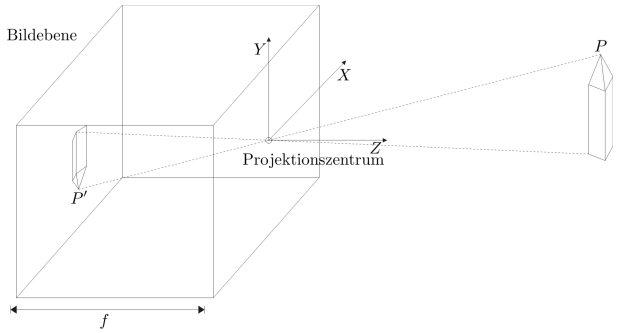
$$g = 0,299 \cdot R + 0,587 \cdot G + 0,114 \cdot B$$

Bayer-Pattern

Sehr hochwertige Kameras, wie z.B. zum Filmen verwendet, besitzen drei Chips pro Pixel. Die meisten Farbkameras haben einen Chip pro pixel, der gegenüber der Farbe Rot, Grün oder Blau empfindlich ist. Bei "Ein-Chip-Kameras" wird meist das Bayer-Pattern verwendet:

- Um nach RGB24 zu konvertieren, muss interpoliert werden.
- Die Empfindlichkeit einer Ein-Chip-Kamera ist um den Faktor 3 niedriger als die einer reinen Graustufen-Kamera.

Lochkameramodell

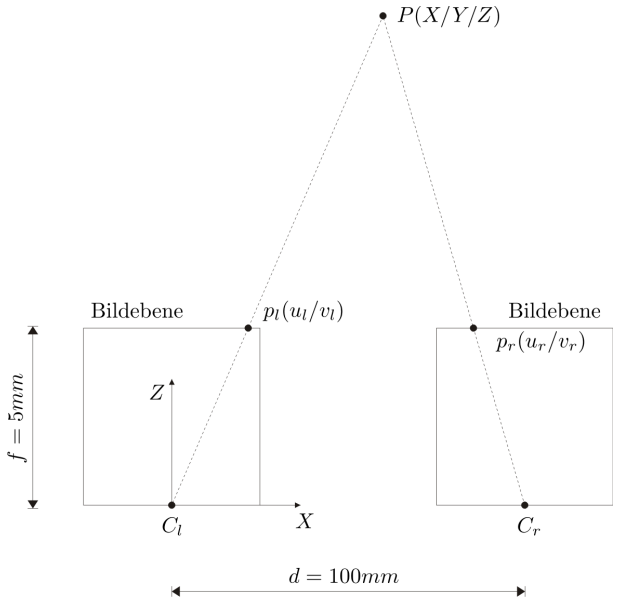


Projektion eines Szenenpunktes $P = (X, Y, Z)$ auf einen Bildpunkt $p = (u, v, w)$ mit Brennweite f:

$$\frac{-u}{f} = \frac{X}{Z} \quad , \quad \frac{-v}{f} = \frac{Y}{Z} \quad , \quad w = -f \qquad \Rightarrow \qquad X = -\frac{uZ}{f} \quad , \quad -\frac{vZ}{f}$$

$$p = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -f \end{pmatrix} = -\frac{f}{Z} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -\frac{f}{Z} P$$

Bei der Projektion geht die Z-Komponente verloren!
Beispiel mit 2 Kameras:



Lochkameramodell in Positivlage (Mattscheibenmodell)

Einziger Unterschied Mattscheibenmodell $\Leftrightarrow$ Lochkameramodell:

- Projektionszentrum C liegt hinter der Bildebene
- dadurch: keine Spiegelung (Minuszeichen entfallen)

2.3 Bildverarbeitung

Konzepte

- Homogene Punktoperationen
- Histogrammauswertung
- Filterung
- Geometrische Operatoren

→ Unterdrückung von Störungen, "Verschönern" von Bildern, Verformen von Bildern

Homogene Punktoperatoren

Anwendung:

$$Img'(u,v) = f(Img(u,v))$$

Unabhängig von der Position bzw. den Nachbarn des Pixels. Implementierung der Funktion f oftmals als Look-Up-Table (Hardware).

2.3.1 Affine Punktoperatoren

$$\begin{array}{rcl} f : [0 \dots q] & \rightarrow & [0 \dots q] \\ x & \mapsto & ax + b \end{array}$$

Parameter a und b legen die Funktion fest. Anwendungen:

- Kontrasterhöhung: $b = 0$, $a > 0$
- Kontrastverminderung: $b = 0$, $a < 0$
- Helligkeitserhöhung: $b > 0$, $a = 1$
- Helligkeitsverminderung: $b < 0$, $a = 1$
- Invertierung: $b = q$, $a = -1$
- Kombinationen: z.B. $b = -50$, $a = 2$

2.3.2 Nicht-Affine Punktoperationen

Beliebige Abbildungsfunktion

$$f : [0 \dots q] \rightarrow [0 \dots q]$$

Anwendung:

- Ausgleich von Sensor-Nichtlinearitäten
- Gewichtung
- Binarisierung

2.3.3 Automatische Kontrastanpassung

Spreizung

- Berechne min und max Intensität
- Bilde das Intervall [min,max] linear auf [0,255] ab
- Ist eine affine Punktoperation!
- Nachteil: Nicht roboust und nur unter optimalen Bedingungen anwendbar
- Abbildungsvorschrift:

$$Img'(u,v) = q * \frac{Img(u,v) - min}{max - min}$$

- Als affine Punktoperation:

$$Img'(u,v) = \frac{q}{max - min} * Img(u,v) - \frac{q * min}{max - min}$$

Histogramme

Histogrammfunktion: gibt die Häufigkeit eines Selektionsmerkmals an. Normalerweise: Grauwert

$$H_{Img}(x) = \#(u,v) \,:\, Img(u,v) = x\,,\, x \in [0 \ldots q]$$

Histogrammdehnung:

- Verbesserung der Spreizung
- Anstatt min und max werden Quantile verwendet
- Die Histogrammdehnung ist eine affine Punktoperation
- Akkumuliertes Histogramm berechnen:

$$H_a(x) := \sum_{k=0}^{x} H(k)$$

- $H_q(p_{min})$ und $H_q(p_{max})$ (z.B. $p_{min} = 0.1$ und $p_{max} = 0.9$) bestimmen mit:

$$H_q(p) := \inf\{x \in \{0, \ldots, q\} : H_a(x) \geq p \cdot H_a(q)\}$$

- Falls $H_q(p_{min}) = H_q(p_{max})$: Bild ist homogen
- Sonst:

$$a := \frac{q}{H_q(p_{max}) - H_q(p_{min})}$$

$$b := -\frac{q * H_q(p_{min})}{H_q(p_{max}) - H_q(p_{min})}$$

$$Img' \leftarrow \text{AffinePunktoperation}(Img, a, b)$$

Histogrammausgleich:

- Der Histogrammausgleich erhöht den Kontrast in Bereichen in denen ein Grauwert oft vertreten ist. Dies macht diese Bereiche besser für das Auge sichtbarer
- Histogrammausgleich ist eine homogene Punktoperation, aber keine affine Punktoperation
- Nachteil: Kann in der Praxis auch zu einer Verminderung des Kontrast führen (siehe Übung)

- Histogrammausgleich: bessere Anpassung an das Sehvermögen des Menschen; kein Informationsgewinn
  $H_n(0)$:= $H_{Img}(0)$
  for x := 1 to q do
    $H_n(x)$:= $H_n(x-1) + H_{Img}(x)$
  endfor

- Automatische Kontrast- und Helligkeitsapassung durch Histogrammanalyse
  $H_n(0)$:= $H_{Img}(0)$
  for x := 1 to q do
    $H_n(x)$:= $H_n(x) \cdot \frac{q}{width \cdot heigth}$
  endfor

- Bei bereits berechnetem Histogramm $H_{Img}(x)$ kann der Histogrammausgleich durch den folgenden Algorithmus berechnet werden:
  $H_n(0)$:= $H_{Img}(0)$
  for y := 0 to $height - 1$ do
    for x := 0 to $width - 1$ do
      $Img'(u,v)$:= $H_n(Img(u,v))$
    endfor
  endfor

2.3.4 Bildanalyse durch Frequenzanalyse

- (Grauwert-) Bilder lassen sich signaltheoretisch als Summe verschiedenfrequenter Signale betrachten.
- Niedrige Frequenzen: Schwache Grauwertübergänge
- Hohe Frequenzen: Scharfe Grauwertübergänge
- Nützlich z.B. zum Finden gerader Linien

→ Fourier-Analyse!

2-Dim Fouriertransformation

Kontinuierliches 2-dimensionales Signal:

$$F(u,v) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dxdy$$

Diskretes 2-dimensionales Signal:

$$F(u,v) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f[x,y] e^{-2i\pi(ux+vy)T}$$

Fouriertransformation in der Bildverarbeitung

DFT bei Bild mit ImgSize $[0 \leq x \leq M][0 \leq y \leq N]$:

$$F(u,v) = \sum_{y=0}^{N-1} \left(\sum_{x=0}^{M-1} f[x,y] e^{-2i\pi \frac{ux}{M}} \right) \cdot e^{-2i\pi \frac{vy}{N}}$$

DFT bei quadratischem Bild mit ImgSize $[0 \leq x \leq N][0 \leq x \leq N]$:

$$\sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{N-1} f[x,y] e^{\frac{-2i\pi(ux+vy)}{N}}$$

Anschaulich: Durchführung der 1D-DFT auf jeder Zeile und Speicherung der Daten in Matrix (inndere Klammer). Durchführung der 1D-DFT auf jeder Spalte der ermittelten Matrix.

- Gewichtete Summation aller Bildpunkte
- Zerlegung des Bildes in Sinus- und Cosinusfunktionen
- Je weiter ein Punkt im Spektrum vom Bildmittelpunkt entfernt ist, desto höher ist seine darstellende Frequenz u bzw. v.
- D.h. im Bildinneren tiefe Frequenzen, in äußeren Bereichen hohe Frequenzen
- Anwendung:
  - Bildanalyse (z.B. Muster-, Geschwindigkeitserkennung)
  - Bildfilterung (z.B. Tiefpass)
  - Bildkompression (z.B. in jpeg Format)

Fouriertransformation

- Die Variablen u und v heissen Frequenzvariablen
- $F(u, v)$ ist komplexe Funktion
- $F(u, v)$ ist darstellbar als 2 Bilder
  - in Realteil und Imaginärteil

$$F(u, v) = R(u, v) + I(u, v)$$

  - oder Betrag (auch Spektrum genannt, oft logarithmisch dargestellt) und Phase

$$F(u, v) = |F(u, v)| \cdot e^{i\varphi(u,v)}$$

- Quadrat des Spektrums heisst spektrale Dichte.

2.3.5 Bildbearbeitung

- Durch Filter im Ortsbereich oder Transferfunktionen im Frequenzbereich.
- Ortsbereich:
  - Manipulation von Grauwerten
  - anschaulich
  - häufig: Punktoperationen, Glättung
- Frequenzbereich:
  - Manipulation der Frequenzanteile
  - keine unmittelbare bildliche Vorstellung
  - häufig: starke Glättung, frequenzselektive Filter

Bildbearbeitung im Ortsbereich

Faltung zweier Funktionen 1D kontinuierlich:

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{a=-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$$

Faltung zweier Funktionen 1D zeitdiskret:

$$h[x] = f[x] * g[x] = \sum_{a=-\infty}^{\infty} f[a]g[x-a]$$

Faltung zweier Funktionen 2D kontinuierlich:

$$h(x,y) = f(x,y) * g(x,y) = \int_{a=-\infty}^{\infty} \int_{b=-\infty}^{\infty} f(a,b)g(x-a,y-b)dadb$$

Faltung zweier Funktionen 2D zeitdiskret:

$$h[x,y] = f[x,y] * g[x,y] = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} f[a,g[x-a,y-b]$$

Faltung

- Bildmatrizen werden in den relevanten Randbereichen mit Nullen gefüllt.
- Der neue Bildwert ist eine gewichtete Summe der Pixel die unter der gespiegelten Matrix liegen.
- Als Gewichte dienen die Matrizenwerte.
- Bildfilterung ist die Faltung einen Bildes mit einer Filtermatrix bzw. Maske.
- Die Transferfunktion $H(u,v)$ ist die Fouriertransformierte der Filterfunktion $h(x,y)$.

Beispiel Sobel-X Filters:

$f(x,y)$ $g(x,y)$ $h(x,y)$

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j
k	l	m	n	o
p	q	r	s	t
u	v	w	x	y

$*$

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

$=$

	g'	h'	i'	
	l'	m'	n'	
	q'	r'	s'	

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j
k	l	m	n	o
p	q	r	s	t
u	v	w	x	y

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j
k	l	m	n	o
p	q	r	s	t
u	v	w	x	y

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j
k	l	m	n	o
p	q	r	s	t
u	v	w	x	y

$$g' = -a + c - 2f + 2h - k + m$$

$$h' = (d + 2l + n) - (b + 2g + l)$$

$$l' = (e + 2j + o) - (c + 2h + m)$$

Filteroperationen

- Tiefpassfilter: Glättung, Rauschelimination
  - Mittelwertfilter
  - Gauß-Filter
- Hochpassfilter: Kantendetektion
  - Prewitt
  - Sobel
  - Roberts
  - Laplace
- Kombinierte Operationen: Laplacian of Gaussian

2.3.6 Filter

Mittelwertfilter

- Ziel: Rauschunterdrückung
  Beispiel: Durchschnitt aus 8-Umgebung und Punkt. Größe beliebig wählbar.
- $$m'(x,y) = \sum_{j=-1}^{1} \sum_{i=-1}^{1} m(i,j) \cdot p(x-j, y-i)$$

Gauß-Filter

- Ziel: Rauschunterdrückung, Glättung
- Definiert durch zweidimensionale Gauß-Funktion
  - Ortsbereich: $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$
  - Frequenzbereich: $F(u,v) = e^{-\frac{u^2+v^2}{2}\sigma^2}$
- Approximation von $f(x,y)$ durch einen 3x3-Filter für $\sigma = 0.85$: $F_{Gau} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Die Stärke der Glättung ist ausschließlich durch den Parameter σ bestimmt (je größer σ desto stärker die Glättung)
- Die Größe nxn beeinflusst die Güte der Approximation des Filters
- Im Ortsbereich kann als Faustregel für eine ausreichende Approximation $n = 2\sigma \cdot 2 + 1$ verwendet werden
- Deshalb: Für eine starke Glättung lohnt sich die Anwendung im Frequenzbereich

Prewitt

Prewitt-X Filter

$$P_x = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

approximiert durch

$$p_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kantendetektion: vertikal gut, horizontal schlecht

Prewitt-Y Filter

$$P_y = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

approximiert durch

$$p_y = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kantendetektion: vertikal schlecht, horizontal gut

Prewitt-Operator

- Kombination der Prewitt-Filter zur Bestimmung des Grauwertgradientenbetrages M:

$$M \approx \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

- Danach: Schwellwertfilterung

Sobel

Sobel-X Filter

$$S_x = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

approximiert durch

$$s_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kantendetektion: vertikal gut, horizontal schlecht

Sobel-Y Filter

$$S_y = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

approximiert durch

$$s_y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Kantendetektion: vertikal schlecht, horizontal gut

Sobel-Operator

- Kombination der Sobel-Filter zur Bestimmung des Grauwertgradienten-Betrages M:

$$M \approx \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

- Danach: Schwellwertfilterung

Roberts

$$R(g(x,y)) = |R_x(g(x,y))| + |R_y(g(x,y))|$$

wobei

$$R_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad R_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kantendetektion: diagonal gut

Laplace

Laplace-Operator:

$$\nabla^2 g(x,y) = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}$$

wobei

$$\nabla^2 \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kantendetektion: Nulldurchgänge markieren Kanten, Subpixelgenauigkeit erreichbar
Näherung des Laplace-Operators:

$$\nabla^2 \approx \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Kantendetektion: Stärkere Kanten, aber mehr Störkanten

Laplacian of Gauß (LoG)

Der Laplace-Operator ist gegen Rauschen sehr empfindlich. Wesentlich bessere Ergebnisse erhält man, wenn man das Bild zunächst mit einem Gauß-Filter glättet und danach den Laplace-Operator anwendet.

$$LoG(g(x,y)) = \nabla^2 (G(x,y) * g(x,y))$$

Approximation (Faltung mit Matrix):

$$\nabla^2 G(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 16 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kantendetektion: Stärkere Kanten,weniger Rauschen

Canny-Kantendetektor

- Ziel: Der optimale Kantendetektor
  - Gute Detektion
  - Gute Lokalisierung
  - Minimale Antwort („dünne Linien“)
- Canny-Kantendetektor liefert binäre Antwort
  - 0: keine Kante
  - 255: Kante
- Subpixelgenauigkeit durch Erweiterung möglich
- Algorithmus besteht aus mehreren Schritten

1. Rauschunterdrückung: Gauß-Filter
2. Berechnung der Gradienten in horizontaler und in vertikaler Richtung mit Prewitt oder Sobel
   - Berechnung der Richtung: $\phi = atan(\frac{g_y}{g_x})$
   - Einteilung der Richtung in vier Quadranten:
     (a) $[-67,5, -22,5)$
     (b) $[-22.5, 22.5)$
     (c) $[22.5, 67.5)$
     (d) $[-90, -67.5)$ oder
     (e) $[67.5, 90]$
3. Non-Maximum Surpression:
   - Für jeden Pixel in Gradientenrichtung schauen, ob das Pixel davor oder dahinter einen höheren Wert hat. Falls ja, dann Pixel auf 0 setzen, falls nein, dann beibehalten.
4. Hysterese-Schwellwerverfahren:
   - Verwende zwei Schwellwerte T_1 und T_2 mit $T_1 \leq T_2$
   - Markiere alle Pixel mit Werten größer T_2 als Kantenpixel
   - Setze alle Pixel mit Werten kleiner T_1 auf 0
   - Beginnend bei jedem Kantenpixel:
     – Verfolge alle angrenzenden Kanten, solange Wert $\geq T_1$
     – Markiere alle dazugehörigen Pixel als Kanten
   - Setze alle noch nicht als Kante markierten Pixel auf 0

2.4 2D Bildverarbeitung

Sensorische Erfassung

Aufgaben der sensorischen Umwelterfassung:

- Wiedererkennung bekannter Sachverhalte: Objekte, Personen, Orte
- Erlernen neuer Sachverhalte
- Erkennung der eigenen Bewegung

Verfahren zur Lösung dieser Aufgaben:

- Sensorische Primitive, Segmentierung
- Annahmen, Einschränkungen
- Lernverfahren

2.4.1 Segmentierung

Segmentierung ist die Aufteilung eines Bildes in aussagekräftige Bestandteile. Erlaubt:

- Aussagen über das Bild
- Reduktion der Datenmenge
- Verfolgung von Merkmalen über die Zeit / mehrere Sensoren

Beliebt sind: Kanten, Ecken, Textur, Farbe

Schwellwertfilterung

Schwellwertfilterung zur Konvertierung eines Grauwertbildes in ein binäres Bild. Ziel: Trennung interessanter Objekte vom Hintergrund.

$$Img'(u,v) = \begin{cases} q & \text{falls } Img(u,v) \geq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Farbe

Oft können Objekte über ihre Farbe segmentiert werden:

- menschliche Hautfarbe
- einheitlich gefärbte Objekte

Problem:

- wechselnde Lichtbedingungen
- Reflexionen, Schattenwürfe

Verfahren:

- Histogrammbasiert (z.B. in RGB, HSV bzw. RG, HS)
  HS-Farbhistogramm:
  - Weglassen des I-Kanals ergibt 2D-Histogramm
  - Training eines Klassifikators auf dem Histogramm
- mit Hilfe der Mahalanobis-Distanz (z.B. in RGB):
  gegeben: $x_i = (R,G,B)^T$ sind manuell positiv klassifizierte Pixel

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(x_i - \overline{x})^T && \text{Kovarianzmatrix} \\ p(x) &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^T C^{-1} x} && \text{Berechnung der Farbwahrsch.} \end{aligned}$$

- Klassifikation durch Verwendung von Neuronalen Netzen
- durch Intervallschranken im HSI-Farbraum:

$$f(H,S,V) = H \geq H_{\min} \wedge H \leq H_{\max} \wedge S \geq S_{\min} \wedge S \leq S_{\max} \wedge V \geq V_{\min} \wedge V \leq V_{\max}$$

2.4.2 Morphologische Operatoren

- Wähle Struckturelement, z.B. Quadrat mit 3x3 Pixel
- Wandere mit Struckturelement über Bild und führe Operation durch
- **Dilatation** ist ein Operation auf Binärbildern. Alle Bereiche, die farbig (1 und nicht 0, da Binär) sind, werden ausgedehnt. Immer wenn unter dem mittleren Pixel des Struckturelements ein farbiges Pixel ist, werden alle Pixel unter dem Struckturelement als farbig markiert.
- **Erosion** ist die Komplemetäroperation zu Dilatation. Nur falls alle Pixel unter dem Struckturelement farbig sind, wird das Element in der Mitte farbig gelassen und alle anderen auf 0 gesetzt. Falls nicht alle Pixel farbig sind, werden alle auf 0 gesetzt.
- Öffnen-Operation: Zuerst Erosion und anschließend Dilatation anwenden.
- Schließen-Operation: Zuerst Dilatation und anschließend Erosion anwenden.

Bewegung

Einfacher Ansatz: Differenzbilder

- Subtraktion aufeinander folgender Bilder einer Video-Sequenz:

$$Img'_t(u,v) = |Img_t(u,v) - Img_{t-1}(u,v)|$$

- Anschließend kann auf Img'_t Schwellwertfilterung durchgeführt werden
- Regionen, in denen sich etwas bewegt, erscheinen weiß; ruhige Regionen erscheinen schwarz
- Bewegung in homogenen Regionen wird nicht erkannt (Kanten, Textur sind notwendig)
- Richtung der Bewegung wird nicht erkannt

Differenzbilder werden auch für Hintergrundsubtraktion verwendet, dann wird Img_{t-1} durch ein festes Img_0 ersetzt. Weitere Ansätze: Optical Flow und Erweiterungen

Region Growing

gegeben: Graustufen-Bild, gesucht: zusammenhängende Regionen
Algorithmus in Pseudocode:

1. wähle Saatpunkt $p_0 = (u_0, v_0)$
2. initialisiere Region $R = \{p_0\}$, wähle Schwelle ε
3. solange $\exists p \in R$, $q \notin R$ mit $||p - q|| \leq 1$ und $|Img(p_0) - Img(q)| \leq \varepsilon$ mache $R = R \cup \{q\}$

Kanten

Vom Menschen konstruierte Umgebungen:

- gut strukturiert
- viele gerade Linien (Wände, Türen, Schränke)
- einfache Segmentierung / 3D-Rekonstruktion
- viele Informationen in einem einzigen Merkmal

Vorgehensweise:

$$\text{Bildaufnahme} \quad \Rightarrow \quad \text{Filtern, Binarisieren} \quad \Rightarrow \quad \text{Pixel} \rightarrow \text{Kantensegmente}$$

Pixel → Kanten

Iterative Endpoint Fit:
gegeben: Punkte P, Linien $L = \{\}$, Distanzschwelle d

- Fine x_1, x_2 aus P mit $||x_1 - x_2|| = \max$;
  verbinde sie durch Linie $l_0 = \{x_1, x_2\}$; $L = L \cup \{l_0\}$
- Entferne x_1, x_2 aus P
- Für alle $l \in L$:
  - Finde $x \in P$ mit $||l - x|| = \max$
  - Wenn $||l - x|| < d$:
    - Ordne x als Mitgliedpunkt l zu
    - Entferne x aus P
  - Sonst

    - Brich l in $l_1 = \{x_1, x\}$ und $l_2 = \{x, x_2\}$ auf
    - Andere Mitgliedspunkte von l wieder in P
  - P leer $\Rightarrow$ Abbruch, sonst weiter
- Lösche Linien mit weniger als n Punkten

Hough-Transformation:

- Ziel: Erkennung gerader Linien im Bild
- Ansatz: Stelle Linie durch Normalenvektor (Länge, Winkel) in Polarkoordinaten dar (Sinus-Kosinus-Kurve)
- Kurven für kollineare Punkte schneiden sich in genau zwei Punkten

$$r = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$$

- Transformation in den Hough-Raum: Additives Eintragen aller Sinus-Kosinus-Kurven für alle Pixel in ein Histogramm
- Finden der Maxima bzw. Cluster von "Treffern" im Hough-Raum
- Brute-Force-Ansatz; für ein $n \times n$-Bild liegt die Laufzeit in $O(n^3)$

Unterschied zur Regressionsanalyse: Die Bestimmung der Regressionsgerade ist das geeignetere Verfahren, wenn schon klar ist, welche Pixel eine Gerade bilden sollen; dann ist die Regressionsgerade die optimale Gerade im Sinne der Summe der Fehlerquadrate. Die Regressionsgerade kann jedoch keine Segmentierung vornehmen. Dahingegen lassen sich mit der Hough-Transformation in beliebigen Bildern geradlinige Strukturen berechnen; die punkte dazu müssen jedoch verhältnismäßig exakt auf einer Linie liegen.

2.4.3 Punktmerkmale

Kanten/Konturen/Farbe können nicht immer für die Segmentierung herangezogen werden. Texturierte Objekte lassen sich in der Regel nicht durch die bislang vorgestellten Verfahren segmentieren. Lösung: Verwendung von *lokalen* Punktmerkmalen (auch genannt: Textmerkmale):

- Harris Corner Detector
- Shi-Tomasi Features
- SIFT-Features
- Maximally Stable Extremal Regions

Punktmerkmal: $(2n+1) \times (2n+1)$-Pixel-Block um Pixel p. Fast immer basierend auf Grauwertbildern. Gewünschte Eigenschaft: Wiedererkennbarkeit
$\Rightarrow$ hoher Gradient in mehrerer Richtungen

Harris Corner Detector:
Sind die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial Img(x,y)}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial Img(x,y)}{\partial x}\frac{\partial Img(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial Img(x,y)}{\partial x}\frac{\partial Img(x,y)}{\partial y} & \left(\frac{\partial Img(x,y)}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

groß, dann verursacht eine kleine Bewegung in beliebiger Richtung eine große Grauwertänderung. Finden von Ecken durch Suche nach lokalen Maxima in:

$$R = det(A) - k \cdot trace(A)^2 \quad , \quad k \approx 0,04$$

Häufiges Problem:

- Wiederfinden bzw. Zuordnung von Punktmerkmalen für:
  - Objekterkennung auf der Basis von Punktmerkmalen
  - Stereo-Sehen bzw. "Structure from Motion" (Korrespondenzproblem)
- Lösung des Korrespondenzproblems erfolgt für Punktmerkmale durch Korrelationsverfahren:
  - **Sum of Squared Differences** (SSD) wird minimal bei guter Übereinstimmung:

$$\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}(Img_0(x-i,y-j)-Img_1(x-i,y-j))^2$$

  - **Sum of Absolute Differences** (SAD) wird minimal bei guter Übereinstimmung:

$$\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}|Img_0(x-i,y-j)-Img_1(x-i,y-j)|$$

  - **(Zero Mean) Cross Correlation** wird maximal bei guter Übereinstimmung:

$$\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}(Img_0(x-i,y-j)-\overline{Img_0})(Img_1(x-i,y-j)-\overline{Img_1})$$

    wobei

$$\overline{Img} : \text{Durchschnitt}$$

  - **Zero Mean Normalized Cross Correlation** wird maximal bei guter Übereinstimmung:

$$\frac{\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}Img_1(u_1+i,v_1+j)-\overline{Img_1}(u_1,v_1,n))\cdot(Img_2(u_2+i,v_2+j)-\overline{Img_2}(u_2,v_2,n))}{\sqrt{\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}(Img_1(u_1+i,v_1+j)-\overline{Img_1}(u_1,v_1,n))^2\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}Img_2(u_1+i,v_1+j)-\overline{Img_2}(u_1,v_1,n))^2}}$$

    wobei

$$\overline{Img}(u,v,n)=\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}Img(u+i,v+j)$$

Für die Objekterkennung geschieht das Wiederfinden oftmals unter Verwendung:

- der Hauptkomponentenanalyse oder engl. *Principal Component Analysis* (PCA) und Nearest-Neighbor- bzw. k-Nearest-Neighbor-Klassifikator
- von Neuronalen Netzen
- oder Kombinationen (zuerst PCA zur Kompression, dann SVM (*Support Vector Machine*) zur Klassifikation)

Für die Objekterkennung existieren eine Vielzahl von Repräsentationen von lokalen Merkmalen:

- SIFT (Scale Invariant Feature Transformation
- SURF (Speeded Up Robust Features)
- MSER (Maximally Stable Extremal Regions)
- Repräsentation eines Bildausschnittes über eine Vielzahl (100-200) synthetisch generierter Ansichten, Matching über PCA (Principal Component Analysis)

2.5 Geometrische 2D-Transformationen

2.5.1 Translation

Translation eines 2D-Vektors:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x \\ y_0 + y \end{pmatrix}$$

2.5.2 Rotation

- o.B.d.A. auf Einheitsvektor zurückführbar (Basistransformation)
- Konvention: Rechtskoordinatensystem
- Rotation von (x_0, y_0) um Winkel β mit Ergebnis (x, y):

Aus Additionstheorem:

$$\begin{aligned} x &= \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ y &= \sin(\alpha+\beta) = \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

und mit $(x_0, y_0) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Homogene Koordinaten

Homogene Koordinaten

$$h = (h_0, h_1, \ldots, h_i, h_{i+1})$$

eines Punktes p im R^i mit

$$p = (p_0, \ldots, p_i)$$

sind Zahlen, für die gilt:

$$p_k = \frac{h_k}{h_{i+1}} \quad \forall 0 \leq k \leq i$$

Homogene 2D-Transformationen

Transformationen definiert durch Rotation R und Translation t.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Darstellung mit Hilfe homogener Koordinaten und einer geschlossenen Transformationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} & R & t \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.6 Partikel Filter und 2D-Tracking

- Für Tracking-Applikationen wird oftmals das Kalmanfilter, das Partikel Filter oder Kombinationen aus beiden verwendet. Vorteile des Partikel Filters gegenüber dem Kalmanfilter:
  - Es kann automatisch mehrere, parallel existierende Hypothesen halten ⇒ geringere Gefahr in lokalen Minima zu verharren.
  - Es kann beliebige Wahrscheinlichkeitsdichten modellieren und dadurch nichtlineare Bewegungen auf natürliche Weise verfolgen.

- Nachteil: Rechenaufwand ist proportional zur Anzahl der notwendigen Partikel, welche (bei konstanter Auflösung) mit der Dimension des Konfigurationsraums exponentiell steigt.
- Im Kern des Partikel Filters befinden sich ein Modell mit Konfigurationsraum R^n.
- *Eingabe:* Beobachtungen z; hier: Bilder einer Videosequenz
- *Ausgabe:* Schätzung der Konfiguration $s \in R^n$, die den aktuellen Beobachtungen z entspricht
- *Zentrale Funktion:* Bewertungsfunktion $p(z|s)$, die die a-posteriori Wahrscheinlichkeit berechnet, dass s die zu z passende Konfiguration ist.
- Das Partikel Filter modelliert die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion oder engl. *probability density function (pdf)* durch eine feste Anzahl von N Partikeln.
- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschreibt die a-posteriori Wahrscheinlichkeiten für den Konfigurationsraum.
- Jedes Partikel ist ein Paar (s_i, π_i), wobei s_i eine Konfiguration ist und π_i die dazugehörige a-posteriori Wahrscheinlichkeit mit $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$.
- Die aktuelle Schätzung des Partikel Filters erfolgt über das gewichtete Mittel über alle Partikel: $\overline{s} = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \cdot s_i$

Algorithmus

1. Initialisiere alle N Partikel (z.B. mit Gleichverteilung)
2. Verarbeite neue Beobachtungen (z.B. Vorverarbeitung neuer Bilder)
3. Ziehe N Partikel aus der letzten Generation, proportional zu ihrer Wahrscheinlichkeit π_i, und für jedes dieser Partikel:
   - Berechne neue Konfiguration auf Basis der alten Konfiguration durch Addition normalverteilten Rauschens und evtl. durch Hinzunahme eines dynamischen Modells.
   - Berechne für diese neue Konfiguration die neue a-posteriori Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Bewertungsfunktion $P(z \mid s)$
4. Berechne aktuelle Schätzung $\overline{s}$ über alle Partikel
5. Fahre fort mit Schritt 2

Einfaches Beispiel für eine Bewertungsfunktion

- Anwendung:
  2D-Tracking einer dichten, in etwa quadratischen Fläche von in etwa fester Größe in einem binarisierten Bild
- Modell:
  Quadrat fester Größe mit Kantenlänge k mit Konfigurationsraum R^2 (Koordinaten u, v im Bild)
- Bewertungsfunktion:
  $$P(z \mid s) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(k^2 - \sum_{m \in M} g_m\right)}$$
  wobei M die Menge aller Pixel im binarisierten Bild z (Beobachtungen) im durch s (Konfiguration) definierten Quadrat beschreibt und g_m deren Intensität aus $\{0, 1\}$.

Kapitel 3

Klassifikation

- Einordnen in die Welt
  - Gesellschaftlich definierte Konventionen: Buchstaben, menschliche Artifakte, Kredite
  - Biologisch definierte Kategorien: Katze, Hund
- Komplex
  - Was definiert einen Stuhl? Eine Katze?
  - Beziehungen zu Komplex, Regeln -> Lernen
  - Nie 100% richtig -> Wahrscheinlichkeit
- Eine einfache Form der Klassifikation ist Template Matching
- Ziel: Ein Muster zu erkennen das einem abgespeicherten Beispiel ähnlich ist.
- Maß der Übereinstimmung zwischen Muster und Schablone zentriert an (m,n) muss maximiert werden $M_{f,g}(m,n) = \sum_i \sum_j f(i,j)g(i-m,j-n)$

Pattern Recognition Overview

- Static Patterns, no dependence on Time or Sequential Order
- Important Notions
  - Supervised - Unsupervised
  - Parametric - Non-Parametric
  - Linear - Non-linear
- Classical Methods
  - Bayes Classifier
  - k-nearest neighbor
- Connectionist Methods
  - Perceptron
  - Multilayer Perceptrons

3.1 Supervised – Unsupervised Training

Supervised Training Die zu erkenndende Klasse ist für jede Auswahl in den Trainingsdaten bekannt. Benötigt a priori Wissen von nützlichen Eigenschaften und Kenntnis / Bezeichnung von jedem Trainingsmerkmal (Kosten!).

Unsupervised Training Die Klasse ist nicht bekannt und die Struktur muss automatisch herausgefunden werden.

3.2 Parametrisch – Nicht-parametrisch

Parametrisch:

- grundlegende Aufteilungswahrscheinlichkeit annehmen
- Parameter der Aufteilung abschätzen
- Beispiel: "Gauss Klassifikation"

Nicht-parametrisch:

- keine Aufteilung annehmen
- Fehlerwahrscheinlichkeit oder Fehlerkriterium direkt aus den Trainingsdaten berechnen
- Beispiele: Parzen Fenster, k-nächster Nachbar, Perzeptron

3.3 Bayes Entscheidungstheorie

Bayes Regel:

$$P(\omega_j|x) = \frac{p(x|\omega_j)P(\omega_j)}{p(x)} \quad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_j p(x|\omega_j)P(\omega_j)$$

A priori Wahrscheinlichkeit:

$$P(\omega_j)$$

A posteriori Wahrscheinlichkeit:

$$P(\omega_j|x)$$

Klassenbedingte Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$p(x|\omega_j)$$

3.4 Zwei Klassen Fall

$$P(error|x) = \begin{cases} P(\omega_1|x) & \text{wenn wir uns für } \omega_2 \text{ entscheiden} \\ P(\omega_2|x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Fehler ist minimiert, wenn wir uns entscheiden für:

- ω_1 wenn $P(\omega_1|x) > P(\omega_2|x)$
  ω_2 sonst
- ω_1 wenn $p(x|\omega_1)P(\omega_1) > p(x|\omega_2)P(\omega_2)$
  ω_2 sonst

Mehr Klassen:

- ω_i wenn $P(\omega_i|x) > P(\omega_j|x)$ für alle $i \neq j$

3.5 Klassifizierende Diskriminanzfunktionen

$$g_i(x) \quad , \quad i = 1, \ldots, c$$

Ordne x der Klasse ω_i zu, wenn $g_i(x) > g_j(x)$ für alle $j \neq i$

$$\begin{aligned} g_i(x) &= P(\omega_i|x) \\ &= \frac{p(x|\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^{c} p(x|\omega_j)P(\omega_j)} \\ g_i(x) &= p(x|\omega_i)P(\omega_i) \\ g_i(x) &= \log(p(x|\omega_i)) + \log(P(\omega_i)) \end{aligned}$$

3.6 Classifier Design in Practice

- Need a priori probability $P(\omega_i)$ (not too bad)
- Need class conditional PDF $p(x/\omega_i)$
- Problems:
  - limited training data
  - limited computation
  - class-labelling potentially costly and errorful
  - classes may noat be known
  - good features not known
- Parametric Solution
  - Assume that $p(x/\omega_i)$ has a particular prametric form
  - Most common representative: multivariate normal density

3.7 Gauss Klassifizierer

Eindimensionale Normaldichte:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{x}-\vec{\mu}}{\sigma}\right)^2} \sim N(\vec{\mu}, \sigma^2)$$

Mehrdimensionale Dichte:

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^t \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$$

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}(x-\mu_i)^t \sum_i^{-1}(x-\mu_i) - \frac{d}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\Sigma_i| + \log P(\omega_i)$$

Für jede Klasse i muss folgendes aus den Trainingsdaten berechnet werden:

- Kovarianz-Matrix Σ_i
- Mittelwertsvektor $\vec{\mu_i}$

Schätzung der Parameter

- MLE, Maximum Likelihood Estimation
- Für den mehrdimensionalen Fall:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{x_k}$$

$$\Sigma = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (\vec{x_k} - \vec{\mu})(\vec{x_k} - \vec{\mu})^T$$

3.8 Probleme beim Klassifikationsentwurf

Merkmale:

- Welche und wie viele Merkmale sollten gewählt werden?
- Beliebige Merkmale?
- Je mehr desto besser?
- Wenn zusätzliche Merkmale nicht nützlich sind, sollen sie dann automatisch ignoriert werden?

Der Unsegen der Dimensionalität

- Allgemein gilt: das Hinzufügen von Eigenschaften verschlechtert die Performance!
- Grund: Trainingsdaten vs. Anzahl der Parameter; beschränkte Trainingsdaten
- Lösung: Eigenschaften sorgfältig wählen; Dimension verringern; Principle Component Analysis

3.9 Principal Component Analysis (PCA)

- Assumption: Single dimensions are correlated
- Aim: Reduce number of dimensions with minimum loss of information
- Remove dimensions with low variance

3.10 Risiko

- Es kann zu Entscheidungsverweigerungen kommen in mehrdeutigen Fälle ($\rightarrow$ Bandbreite)
- Bewerte die Kosten für jede Entscheidung (etwas Kostenaufwendiger als anders)

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}\ s \text{ Zustände der Eigenschaften}$$

$$A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_a\} a \text{ mögliche Aktionen}$$

Verlustfunktion $\lambda(\alpha_i|\omega_j)$: Verlust der Aktion α_i beim gegebenen Zustand ω_j

$$P(\omega_j|\ \vec{x}) = \frac{P(\vec{x}\ |\omega_j)P(\omega_j)}{P(\vec{x})}$$

Angenommener Verlust von Aktion α_i:

$$R(\alpha_i|\ \vec{x}) = \sum_{j=1}^{s} \lambda(\alpha_i|\omega_j)P(\omega_j|\ \vec{x}) \qquad \text{(bedingtes Risiko)}$$

Minimierung des angenommenen Verlusts indem man die Aktion α_i wählt, die das bedingte Risiko minimiert.

Zwei Kategorien Fall

$$\lambda(\alpha_i|\omega_j) \triangleq \lambda_{ij}$$

$$\begin{aligned} R(\alpha_1|\ \vec{x}) &= \lambda_{11}P(\omega|\ \vec{x}) + \lambda_{12}P(\omega_2|\ \vec{x}) \\ R(\alpha_2|\ \vec{x}) &= \lambda_{21}P(\omega|\ \vec{x}) + \lambda_{22}P(\omega_2|\ \vec{x}) \end{aligned}$$

- Wähle ω_1, wenn $R(\alpha_1|\ \vec{x}) < R(\alpha_2|\ \vec{x})$
- Wähle ω_1, wenn $(\lambda_{21} - \lambda_{11}P(\omega_1|\ \vec{x}) > (\lambda_{12} - \lambda_{22}P(\omega_2|\ \vec{x})$
- Wähle ω_1, wenn $(\lambda_{21} - \lambda_{11}P(\vec{x}\ |\omega_1)P(\omega_1) > (\lambda_{12} - \lambda_{22}P(\vec{x}\ |\omega_2)P(\omega_2)$
- Wähle ω_1, wenn $\frac{p(\vec{x}|\omega_1)}{p(\vec{x}|\omega_2)} > \frac{\lambda_{12}-\lambda_{22}}{\lambda_{21}-\lambda_{11}} \cdot \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$

3.11 Minimum Error Rate Classification

- Decision rule to minimize error rate
- Define zero-one loss function
- $\lambda(\alpha_i|\omega_j) = \left\{ \begin{array}{c} 0 : i = j \\ 1 : i \neq j \end{array} \right\} i, j = 1...c$
- $R(\alpha_i|\vec{x}) = \sum_{j=1}^{c} \lambda(\alpha_i|\omega_j)p(\omega_j|\vec{x})$
- $= \sum_{j \neq i} p(\omega_j|\vec{x}) = 1 - p(\omega_i|\vec{x})$
- To minimize risk and the average probability of error, select i that maximizes posterior $p(\omega_i|\vec{x})$
- Decide ω_i if $p(\omega_i|\vec{x}) > p(\omega_j|\vec{x})$ for all $j \neq i$
- Normal distribution does not model this situation well
- other densities may be mathematically intractable -> non-parametric techniques

3.12 Parzen Fenster

Es werden keine Annahmen über die Verteilung gemacht, stattdessen wird $p(x)$ direkt aus den Daten geschätzt.

- wähle ein Fenster mit dem Volumen V
- zähle die Anzahl Samples, die in das Fenster fallen
- $p(x) \approx \frac{k/n}{V}$, k = Anzahl, n = Anzahl Samples

Probleme:

- Volumen zu groß
  $\Rightarrow$ Auflösung geht verloren
- Volumen zu klein
  $\Rightarrow$ unbeständig, schlechte Abschätzung

Setze

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

3.13 k-nächster Nachbar

Volumen als Funktion der Daten. Verwende die k nächsten Nachbarn für die Abschätzung. Setze

$$k = \sqrt{n}$$

Um Sample x zu klassifizieren:

- finde k nächste Nachbarn von x
- bestimme die am häufigsten vorkommende Klasse in diesen k Samples
- ordne x dieser Klasse zu

Probleme: Für eine endliche Anzahl von Samples n sollte k möglichst

- groß sein für eine gute Abschätzung
- klein sein, um zu garantieren, dass alle k NAchbarn nah beieinander sind

Trainingsdatenbanken müssen groß sein.

3.14 Entscheidungsfunktion $g(x)$

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) > 0 &\Rightarrow \text{Klasse A} \\ g(\vec{x}) < 0 &\Rightarrow \text{nicht Klasse A} \\ g(\vec{x}) = 0 &\Rightarrow \text{keine Entscheidung} \end{aligned}$$

$$g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_1 x_1 + w_0 = \vec{w}^T \vec{x} + w_0$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$: Eigenschaftsvektor, $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)^T$: Gewichtungsvektor, w_0 : Schwellenwert

3.15 Lineare Diskriminantenfunktionen

- Keine Annahme über die Verteilung (Nicht-parametrisch)
- Lineare Entscheidungsflächen
- Start durch überwachtes Training (Klassen der Trainingsdaten gegeben)
- Diskriminantenfunktion:

$$g(x) = w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i, \quad x_0 = 1$$

- $g(x)$ ergibt die Distanz von der Entscheidungsfläche
- Zwei Kategorien Fall:

$$\begin{aligned} g_1(x) > 0 &\Rightarrow \text{Klasse 1} \\ g_1(x) < 0 &\Rightarrow \text{Klasse 2} \end{aligned}$$

Hyperebe H: $g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_1 x_1 + w_0 = \vec{w}^T \vec{x} + w_0 = 0$

$$\Rightarrow \vec{x} = q\frac{\vec{w}}{|| \vec{w} ||} + r\frac{\vec{w}}{|| \vec{w} ||} + \vec{x}_p$$

Vektor $q\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}$ entspricht: $g\left(q\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}\right) = 0 = q|| \vec{w} || + w_0$

$$\Rightarrow q = -\frac{w_0}{|| \vec{w} ||}$$

Und mit $g(\vec{x}) = \vec{w}^T\ q\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} + \vec{w}^T\ r\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} + \vec{w}\vec{x}_p + w_0 = -w_0 + r|| \vec{w} || + w_0$ erhalten wir

$$r = \frac{g(\vec{x})}{|| \vec{w} ||}$$

3.16 Fisher-lineare Diskriminante

- Dimensionsreduktion
- Projeziert eine Menge von mehrdimensionalen Punkten auf eine Line $y = \vec{w}\vec{x}$
- Die Fisher Diskriminaten ist eine Funktion, die folgendes Kriterium maximiert

  $$g(x) = \frac{|\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2|}{\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2}$$

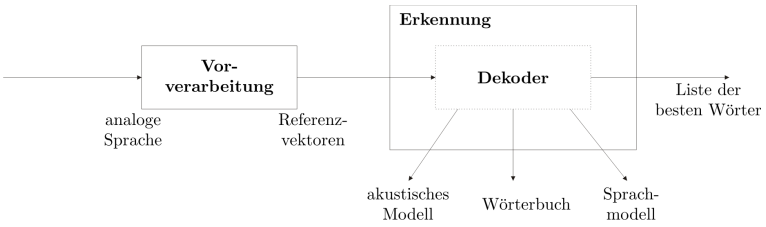
  wobei $\tilde{m}_i = \frac{1}{n} \sum_{y \in Y_i} y$: Mittel für projezierte Muster, $\tilde{s}_i^2 = \sum_{y \in Y_i} (y - \tilde{m}_i)^2$: Streuung für projezierte Muster
- Fisher's lineare Diskriminante:

  $$\begin{aligned} \vec{w} &= s_w^{-1}(\vec{m}_1 - \vec{m}_2) \\ s_w &= s_1 + s_2 \\ s_i &= \sum_{x \in X_i} (\vec{x} - \vec{m}_i)(\vec{x} - \vec{m}_i)^T \end{aligned}$$

Kapitel 4

Spracherkennung

4.0.1 Spracherkennungssystem



4.0.2 Erkennung

gegeben: akustische Daten $A = a_1, a_2, \ldots, a_k$

Ziel: Wortsequenz $W = w_1, w_2, \ldots, w_n$ finden, so dass $P(W \mid A)$ miximiert wird.

Wiederholung: **Bayes Regel**

$$P(W \mid A) = \frac{P(A \mid W) \cdot P(W)}{P(A)}$$

wobei $P(A \mid W)$: akustisches Modell (HMM), $P(W)$: Sprachmodell, $P(A)$: Konstante für einen kompletten Satz

4.0.3 Hidden Markov Modelle (HMM)

Ein Hidden Markov Modell ist ein stochastisches Modell, das sich durch zwei Zufallsprozesse beschreiben lässt.
Der erste Zufallsprozess entspricht dabei einer Markow-Kette, die durch Zustände und Übergangswahrscheinlichkeiten gekennzeichnet ist. Die Zustände der Kette sind von außen jedoch nicht direkt sichtbar (sie sind verborgen). Stattdessen erzeugt ein zweiter Zufallsprozess zu jedem Zeitpunkt beobachtbare Ausgangssymbole gemäß einer zustandsabhängigen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Aufgabe besteht häufig darin, aus der Sequenz der Ausgabesymbole auf die Sequenz der verborgenen Zustände zu schließen.

Elemente

Menge an Zuständen:	$S = \{S_0, S_1, \ldots, S_N\}$
Übergangswahrscheinlichkeiten:	$P(q_t = S_i \mid q_{t-1} = S_j\} = a_{ij}$
Ausgabewahrscheinlichkeitsverteilungen: (bei Zustand j für Symbol k)	$P(y_t = O_k \mid q_t = S_j) = b_j(k)$

HMM Probleme und Lösungen

Evaluation: *Problem:* Bei einem gegebenen Modell soll die Wahrscheinlichkeit einer speziellen Ausgabesequenz bestimmt werden.
Lösung: **Forward-Algorithmus** und **Viterbi-Algorithmus**

Dekodierung: *Problem:* Es soll die wahrscheinlichste Sequenz der Zustände bestimmt werden, die eine vorgegebene Ausgabesequenz erzeugt hat.
Lösung: **Viterbi-Algorithmus**

Training: *Problem:* Gegeben ist nur die Ausgabesequenz. Es sollen die Parameter des HMM bestimmt werden, die am wahrscheinlichsten die Ausgabesequenz erzeugen.
Lösung: **Forward-Backward-Algorithmus**

4.0.4 Evaluation

Wahrscheinlichkeit einer Ausgabesequenz $O = O_1 O_2 \dots O_T$ bei einem gegebenen Hidden Markov Modell λ ist

$$\begin{aligned} P(O \mid \lambda) &= \sum_{\forall Q} P(O, Q \mid \lambda) \\ &= \sum_{\forall q_0,\dots,q_T} a_{q_0 q_1} b_{q_2}(O_2) \cdots a_{q_{T-1} q_T} b_{q_T}(O_T) \end{aligned}$$

wobei $Q = q_0 q_1 \dots q_T$ eine Folge von Zuständen ist
Nicht praktisch, da die Zahl der Wege in $O(N^T)$ liegt. (N: Anzahl der Zustände im Modell, T: Anzahl der Ausgabesequenzen)

Der Forward Algorithmus

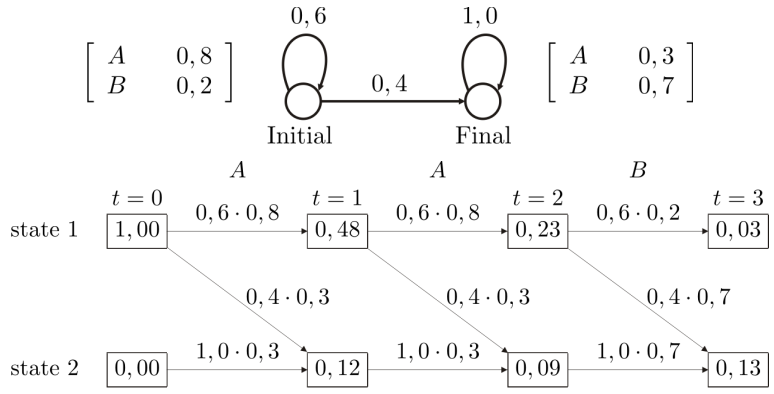
$$\alpha_t(j) = P(O_1 O_2 \dots O_t, q_t = S_j \mid \lambda)$$

rekursive Berechnung von α:

$$\begin{aligned} \alpha_0(j) &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } j \text{ Startzustand} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \alpha_t(j) &= \left(\sum_{i=0}^{N} \alpha_{t-1}(i) a_{ij} \right) b_j(O_t) \quad t > 0 \end{aligned}$$

($P(O \mid \lambda) = \alpha_T(S_N)$, Berechnung liegt in $O(N^2 T)$)

Forward Trellis



Der Backward Algorithmus

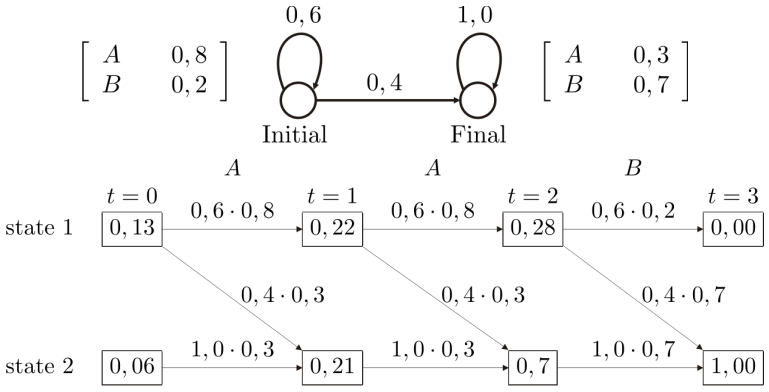
$$\beta_t(i) = P(O_{t+1}O_{t+2}\dots O_T\,,\, q_t = S_i \,|\, \lambda)$$

rekursive Berechnung von β:

$$\begin{aligned}\beta_0(i) &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \text{ Endzustand} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \beta_t(i) &= \sum_{j=0}^{N} a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j) \quad t < T\end{aligned}$$

($P(O \,|\, \lambda) = \beta_0(S_0) = \alpha_T(S_N)$, Berechnung liegt in $O(N^2T)$)

Backward Trellis



4.0.5 Dekodierung

Der Viterbi Algorithmus

- Finde die Zustandsfolge Q, die $P(O\,,\, Q \,|\, \lambda)$ maximiert.
- Verläuft ähnlich wie der Forward Algorithmus, jedoch wird das Maximum anstatt der Summe berechnet.

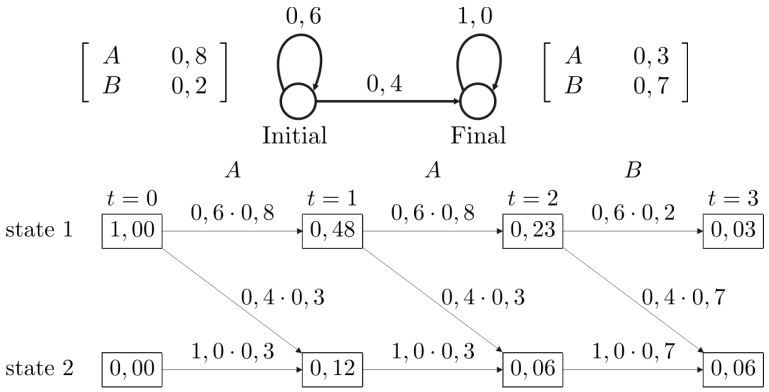
$$VP_t(i) = \max_{q_0,\dots,q_{t-1}} P(O_1O_2\dots O_t\,,\, q_t = i \,|\, \lambda)$$

rekursive Berechnung:

$$\begin{aligned} VP_t(j) &= \max_{i=0,\dots,N} VP_{t-1}(i) a_{ij} b_j(O_t) \quad t > 0 \\ P(O\,,\, Q \,|\, \lambda) &= VP_T(S_N)\end{aligned}$$

Speicher jedes Maximum für die Ablaufverfolgung am Ende.

Viterbi Trellis



4.0.6 Training

- Trainiere Parameter vom Hidden Markov Modell
  - λ einstellen, um $P(O \mid \lambda)$ zu maximieren
  - kein effizienter Algorithmus für das globale Optimum
  - ein effizienter iterativer Algorithmus findet das lokale Optimum
- Viterbi-Training
  - berechne den Viterbi-Weg mittels aktuellem Modell
  - bewerte die Parameter neu, indem die Bezeichnung benutzt werden, die der Viterbi Algorithmus bestimmt hat
- Baum-Welch (Forward-Backward)
  - berechne Wahrscheinlichkeiten mittels aktuellem Modell
  - Filtere $\lambda \rightarrow \lambda$ basierend auf den berechneten Weten
  - benutze α und β vom Forward-Backward

Der Forward-Backward Algorithmus

Wahrscheinlichkeit beim Übergang von S_i nach S_j zur Zeit t bei gegebenem O:

$$\begin{aligned} \xi_t(i,j) &= P(q_t = S_i\,,\, q_{t+1} = S_j \mid \lambda) \\ &= \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{P(O \mid \lambda)} \end{aligned}$$

Baum-Welch Neubewertung

$$\begin{aligned} \overline{a}_{ij} &= \frac{\text{angenommene Anzahl an Übergängen von } S_i \text{ nach } S_j}{\text{angenommene Anzahl an Übergängen von } S_i} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=0}^{N} \xi_t(i,j)} \\ \overline{b}_j(k) &= \frac{\text{angenommene Dauer im Zustand } j \text{ mit Symbol } k}{\text{angenommene Dauer im Zustand } j} \\ &= \frac{\sum_{t:O_t=k} \sum_{i=0}^{N} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=0}^{N} \xi_t(i,j)} \end{aligned}$$

Konvergenz des Forward-Backward Algorithmus

1. initialisiere $\lambda = (A, B)$
2. berechne α, β und ξ
3. bewerte $\overline{\lambda} = (\overline{A}, \overline{B})$ aus ξ
4. ersetze λ durch $\overline{\lambda}$
5. wenn nicht konvergiert, gehe zu 2

Es kann gezeigt werden, dass $P(O \mid \overline{\lambda}) > P(O \mid \lambda)$ gilt, wenn nicht $\lambda = \overline{\lambda}$ gilt.

4.0.7 Sprachmodelle

Bassierend auf die Grammatik

- Bestimme Grammatik für mögliche Satzmuster
- Vorteile: Lange Historie / Kontext; es wird keine große Textdatenbank benötigt
- Problem: Grammatik zu schreiben ist sehr aufwendig; unflexibel: nur erstellte Muster können erkannt werden

N-Gram

- nächstes Wort wird anhand der Historie bestimmt
- die Historie ist approximiert durch die letzten 2 oder 3 (allgemein n) Wörter
- alles vor Wort w_{i-n+1} wird in eine Äquivalenzklasse plaziert
- schliesslich ist die Wahrscheinlichkeit für das nächste Wort gegeben durch
  - Trigram: $P(w_i \,|\, w_{i-1}\,,\, w_{i-2})$
  - Bigram: $P(w_i \,|\, w_{i-1})$
  - Unigram: $P(w_i)$
- Vorteile:
  - trainierbar auf großen Textdatenbanken
  - "milde" Vorhersage
  - kann direkt kombiniert werden mit einem Akustikmodell
- Problem: benötigt eine große Textdatenbank für jedes Gebiet

Objektive Bewertung der Qualität von Sprachmodellen

Genau ein Sprachmodell ist besser als eine Alternative, wenn die Wahrscheinlichkeit $\hat{P}(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ mit dem es den Großteil eines Tests W erzeugen würde, größer ist. Aber:

$$\hat{P}(w_1, w_2, \ldots, w_n) = \prod_{i=1}^{n} Q(w_i \,|\, \Psi(w_1, \ldots, w_{i-1}))$$

ein gutes Qualitätsmaß ist das LOGPROB:

$$\hat{H}(W) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log_2 Q(w_i \,|\, \Psi(w_1, \ldots, w_{i-1}))$$

Wenn Wörter einheitlich durch Zufall aus einem Vokabular der Größe V von "Sprachmechanismen" erzeugt wurden, dann gilt

$$Q(w_i \,|\, \Psi(w_1, \ldots, w_{i-1})) = \frac{1}{V}$$

und

$$2^{\hat{H}(W)} = 2^{\log V} = V$$

Also definieren wir die Perplexität eines Sprachmodells folgendermaßen:

$$PP(W) = 2^{\hat{H}(W)}$$

und interpretieren sie als "Abzweigungsfaktor" der Sprache, wenn Ψ gegeben ist.

Erfasste Erkennungsperformance

Wortfehlerrate

$$WER = \frac{\#Ins + \#Del + \#Sub}{N}$$

4.1 Maschinelles Lernen

4.2 Neuronale Netze

4.2.1 Wieso neuronale Netze?

- Massiver Parallelismus
- Massive Randbedingungsgenugtuung für "krank"-definierte Eingaben
- Einfache Recheneinheiten
- Viele Prozesseinheiten, viele Verbindungen
- Einheitlichkeit ($\rightarrow$ Sensorverschmelzung)
- Nichtlineare Klassifizierer / Abbilder ($\rightarrow$ gute Performance)
- Lernfähig / anpassbar

4.2.2 Parametrisch – Nicht-parametrisch

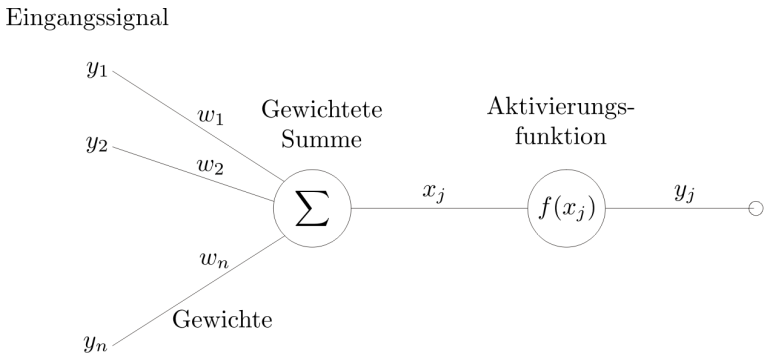
Parametrisch:

- grundlegende Aufteilungswahrscheinlichkeit annehmen
- Parameter der Aufteilung abschätzen
- Beispiel: "Gauss Klassifikation"

Nicht-parametrisch:

- keine Aufteilung annehmen
- Fehlerwahrscheinlichkeit oder Fehlerkriterium direkt aus den Trainingsdaten berechnen
- Beispiele: Parzen Fenster, k-nächster Nachbar, Perzeptron

4.2.3 Das Perzeptron



4.2.4 Entscheidungsfunktion $g(x)$

$$
\begin{aligned}
g(\vec{x}) > 0 &\Rightarrow \text{Klasse A} \\
g(\vec{x}) < 0 &\Rightarrow \text{nicht Klasse A} \\
g(\vec{x}) = 0 &\Rightarrow \text{keine Entscheidung}
\end{aligned}
$$

$$
g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_1 x_1 + w_0 = \vec{w}^T \vec{x} + w_0
$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$: Eigenschaftsvektor, $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)^T$: Gewichtungsvektor, w_0 : Schwellenwert

4.2.5 Lineare Diskriminantenfunktion

Hyperebe H: $g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_1 x_1 + w_0 = \vec{w}^T \vec{x} + w_0 = 0$

$$\Rightarrow \vec{x} = q\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} + r\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} + \vec{x}_p$$

Vektor $q\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}$ entspricht: $g\left(q\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}\right) = 0 = q||\vec{w}|| + w_0$

$$\Rightarrow q = -\frac{w_0}{||\vec{w}||}$$

Und mit $g(\vec{x}) = \vec{w}^T q\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} + \vec{w}^T r\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} + \vec{w}\vec{x}_p + w_0 = -w_0 + r||\vec{w}|| + w_0$ erhalten wir

$$r = \frac{g(\vec{x})}{||\vec{w}||}$$

4.2.6 Fisher-lineare Diskriminante

- Dimensionsreduktion
- Projeziert eine Menge von mehrdimensionalen Punkten auf eine Line $y = \vec{w}\vec{x}$
- Die Fisher Diskriminaten ist eine Funktion, die folgendes Kriterium maximiert

  $$g(x) = \frac{|\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2|}{\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2}$$

  wobei $\tilde{m}_i = \frac{1}{n}\sum_{y \in Y_i} y$: Mittel für projezierte Muster, $\tilde{s}_i^2 = \sum_{y \in Y_i}(y - \tilde{m}_i)^2$: Streuung für projezierte Muster
- Fisher's lineare Diskriminante:

  $$\begin{aligned} \vec{w} &= s_w^{-1}(\vec{m}_1 - \vec{m}_2) \\ s_w &= s_1 + s_2 \\ s_i &= \sum_{x \in X_i}(\vec{x} - \vec{m}_i)(\vec{x} - \vec{m}_i)^T \end{aligned}$$

Lineare Diskriminantenfunktionen

- Keine Annahme über die Verteilung (Nicht-parametrisch)
- Lineare Entscheidungsflächen
- Start durch überwachtes Training (Klassen der Trainingsdaten gegeben)
- Diskriminantenfunktion:

  $$g(x) = w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i, \quad x_0 = 1$$

- $g(x)$ ergibt die Distanz von der Entscheidungsfläche
- Zwei Kategorien Fall:

  $$\begin{aligned} g_1(x) > 0 &\Rightarrow \text{Klasse 1} \\ g_1(x) < 0 &\Rightarrow \text{Klasse 2} \end{aligned}$$

Perzeptron

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i \quad x_0 = 1 \qquad \rightarrow \qquad \text{finde } w$$

Alle Vektoren x_i sind korrekt benannt

$$\begin{aligned} \vec{w}\vec{x}_i &> 0 \qquad \text{wenn } x_i \text{ zu } \omega_1 \text{ gehört} \\ \vec{w}\vec{x}_i &< 0 \qquad \text{wenn } x_i \text{ zu } \omega_2 \text{ gehört} \end{aligned}$$

Oder setze alle Muster, die zu ω_2 gehören auf ihr negatives $(-\vec{x}_i)$. Dann sind alle Vektoren korrekt klassifiziert, wenn $\vec{w}\vec{x}_i > 0$ für alle i.

Kriteriumsfunktion vom Perzeptron

$$J_P(\vec{w}) = \sum_{x \in X} (-\vec{w}\vec{x})$$

X ist die Menge der falsch klassifizierten Merkmale. Da $\vec{w}\vec{x}$ die Negation für falsch klassifizierte Merkmale ist, ist $J_P(\vec{w})$ positiv. Sobald $J_P = 0$ gilt, ist ein Lösungsvektor gefunden.
J_P ist proportional zu der Summe der Distanzen der falsch klassifizierten Mustern zur Entscheidungsgrenze.

$$\nabla J_P = \sum_{x \in X} (-\vec{x}) \qquad \vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k + \zeta_k \sum_{x \in X} \vec{x}$$

Lernen des Perzeptron

Fragen:

- Wie soll man die Lernrate setzen?
- Wie soll man die initialen Gewichte setzen?

Probleme:

- Untrennbare Daten
- Trennbare Daten, aber welche Entscheidungsfläche
- Nicht linear trennbar

Variationen

Entspannungsprozedur:

$$J_q(\vec{w}) = \sum_{x \in X} (\vec{w}^t \vec{y})^2$$

Der Gradient ist kontinuierlich $\rightarrow$ gleichmäßige Fläche. Manchmal geht es gegen Null!

$$J_q(\vec{w}) = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \frac{(\vec{x}^t \vec{w} - b)^2}{||x||^2} \text{ begrenzt durch } b$$

4.2.7 Generalisierung

- Leistung auf Trainingsdaten interessiert uns nicht, sondern ungesehene real Welt...
- Wie gut funktioniert mein System in unvorhergesehenen Situationen?

Generalisierungsfähigkeit

Fähigkeit, das aus den Trainingsdaten Erlernte auf neue Daten (Testdaten) anzuwenden.

Drei Gründe für schlechte Generalisierung

1. Overfitting / Overtraining (zu lange trainiert)
2. Zu viele Parameter (weights) bzw. zu wenig Trainingsmaterial
3. falsche Netzwerkstruktur

Methoden zur Verbesserung der Generalisierung

1. Training am Besten Punkt abbrechen
   - Aufteilung der Daten in: Trainings-, Crossvalidation- und Test-Menge
   - Wichtig: Testdaten von Trainingsdaten trennen! Wiederholtes Testen ist leichtes Trainieren (Tuning) → Crossvalidation Set
2. Reduzierung der Komplexität des Netzwerkes durch Regularisierung: Weight Decay, Weight Elimination, Optimal Brain Damage, Optimal Brain Surgeon
3. Schrittweises Vergrößern eines zu kleinen Netzes (konstruktiv): Cascade Correlation, Meiosis Netzwerke, ASO (Automativ Structure Optimization)

4.2.8 Unsupervised Learning

- Datensammlung und Bezeichnung kostenaufwendig und zeitverschwenderisch.
- Die Charaktermerkmale der Muster können sich ändern im Verlauf der Zeit.
- Vielleicht hat man keine Einsicht in die Struktur der Daten.

⇒ Die Klassen sind nicht bekannt.

4.2.9 Mischdichten

- Beispiele kommen von c Klassen
- A priori Wahrscheinlichkeit $P(\omega_j)$
- Annahme: Die Formen der Klassenbedingten PDF (probability density function – Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion) $P(X|\omega_j, \theta_j)$ sind bekannt
- Unbekannter Parametervektor $\theta_1, \ldots, \theta_c$

Problem: Haarige Mathematik
Vereinfachung / Approximation
Betrachte nur Mittel → Isodaten

- Wähle initiale $\mu_1, \ldots, \mu_c$
- Klassifiziere n Muster zu dem Mittel, das am nähesten liegt.
- Berechne die Mittel neu aus den Mustern der Klasse
- Mittel hat sich geändert? Gehe zu Schritt 2, sonst: stopp

Isodaten, Probleme:

- Die Wahl der initialen Mittel μ.
- Wissen über die Anzahl der Klassen.
- Annahme über die Verteilung.
- Was bedeutet "nah"?

4.2.10 Clustering

- Ähnlichkeit
- Kriteriumsfunktion
- Muster in der selben Klasse sollten die Kriteriumsfunktion noch extremer machen, dies erfasst die Cluserqualität.
- Beispiel: Summe des Fehlerkriteriums:

$$J = \sum_{i=1}^{c} \sum_{\max} ||x - m_i||^2$$

4.2.11 Hierarchisches Clustering

- c muss nicht bestimmt werden
- Mittel müssen nicht erraten werden

(1) Initialisiere $c := n$

(2) Finde die nähesten Paare von eindeutigen Clustern X_i und X_j

(3) Vereinige sie und dekrementiere c

(4) Wenn $c < C_{stop}$: stoppen, sonst: gehe zu Schritt (2)

Kapitel 5

3D-Bildverarbeitung

5.1 Geometrische 3D-Transformationen

Grundlage von Sensorik und Aktorik: Beschreibung von Objektposen (Position, Rotation)

- Pose des messenden Systems im Raum
- Pose mehrerer Sensoren zueinander
- Pose sensorisch erfasster Objekte relativ zum Sensor
- Pose von Aktoren (Greifer, Lötlampen etc.) im Raum und relativ zum manipulierten Objekt
- Gelenkwinkelstellungen im Roboterarm

Anforderungen:

- geschlossene Ausdrücke
- Invertierbarkeit
- Interpolation

Zwei Systeme haben sich durchgesetzt:

- Homogene Geometrie (für Translationen und Rotationen)
- Quaternionendarstellung (nur für Rotationen)

5.1.1 Translation

Translation eines 3D-Vektors:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x \\ y_0 + y \\ z_0 + z \end{pmatrix}$$

5.1.2 Rotation

- o.B.d.A. auf Einheitsvektor zurückführbar (Basistransformation)
- Konvention: Rechtskoordinatensystem
- Rotation von (x_0, y_0, z_0) um Winkel β mit Ergebnis (x, y, z_0)

Aus Additionstheorem:

$$\begin{aligned} x &= \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ y &= \cos(\alpha+\beta) = \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

und mit $(x_0, y_0) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

z_0 invariant, da Rotation um z!

Rotationsmatrix

Rotationsmatrix allgemein:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Rotation um x:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Rotation um y:

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Rotation um z:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Rotationsmatrizen:

- regulär, invertierbar, Determinante = 1
- jede beliebige Rotation im Raum kann durch drei Variablen beschrieben werden (Eulers Theorem)
- Einzelrotationen können als eine Matrix dargestelt werden:

$$R_r(\gamma)R_q(\beta)R_p(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad p,q,r \in \{x,y,z\} = R_{pqr}(\alpha,\beta,\gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- damit reicht Angabe von α, β, γ zur Beschreibung der Rotation
- das macht natürlich nur Sinn, wenn eine Konvention für die Zuordnung p, q, r zu den Achsen x, y, z definiert wurde

Zwei grundlegend unterschiedliche Rotationstypen:

- Rotation um mitgedrehte Achsen (Euler-Winkel)
- Rotation um raumfeste Achsen (Roll Pitch Yaw)

Konventionen zur Erstellung von Rotationsmatrizen:

- Standard-Beispiel für Euler-Winkel:
  Zuerst um die x-Achse, dann um die mitgedrehte y-Achse, dann um die (zweimal) mitgedrehte z-Achse
  $$R_{X'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)$$
- Standard-Beispiel für raumfeste Achsen:
  Zuerst um die raumfeste z-Achse, dann um die raumfeste y-Achse, dann um die raumfeste x-Achse.
  $$R_{ZYX}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

5.1.3 Homogene 3D-Transformation

Transformation definiert durch Rotation R und Translation t:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

Darstellung mit Hilfe homogener Koordinaten und einer geschlossenen Transformationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & R & & t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Probleme mit Rotationsmatrizen:

- hoch redundant
- rechenaufwendig
- Interpolation schwierig
- Euler-Winkel: Singularitäten

5.1.4 Quaternionen

Erweiterung der komplexen zahlen ins vierdimensionale. Definition:
Ein Quaternion $\mathbf{q}$ ist eine Zahl

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_x, q_y, q_z, q_w)(i, j, k, 1)^T \\ &= (\mathbf{q}_v, q_w)(i, j, k, 1)^T \\ &= iq_x + jq_y + kq_z + q_w \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

q_w ist der Realteil, $\mathbf{q}_v = (q_x, q_y, q_z)$ der Imaginärteil des Quaternions. Man schreibt einfach (q_x, q_y, q_z, q_w) oder $(\mathbf{q}_v, q_w)$.

Rechenregeln für Quaternionen

- Addition:

$$\mathbf{q} + \mathbf{r} = (q_w, \mathbf{q}_v) + (r_w, \mathbf{r}_v) = (q_w + r_w, \mathbf{q}_v + \mathbf{r}_v)$$

- Multiplikation:

$$\mathbf{qr} = (q_w r_w - \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{r}_v, \mathbf{q}_v \times \mathbf{r}_v + q_w \mathbf{r}_v + r_w \mathbf{q}_v)$$

  assoziativ, aber nicht kommutativ

- Konjugierter Quaternion:

$$\overline{\mathbf{q}} = (q_w, -\mathbf{q}_v) \text{ für } \mathbf{q} = (q_w, \mathbf{q}_v)$$

- Norm:

$$N(\mathbf{q}) = \sqrt{\mathbf{q}\overline{\mathbf{q}}} = \sqrt{\overline{\mathbf{q}}\mathbf{q}} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 + q_w^2}$$

  Quaternionen $\mathbf{q}$ mit $N(\mathbf{q}) = 1$ heißen Einheitsquaternionen

- Multiplikative Identität:

$$I = (0, 1)$$

- Multiplikative Inverse:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{q}}}{N^2(\mathbf{q})}$$

Rotation mit Quaternionen

- Einheitsquaternion $\mathbf{q}$ ist definiert durch Rotationsachse u mit $|u| = 1$ und Winkel θ:

$$\mathbf{q} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\,,\, u\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

- Quaternion $\mathbf{a}$ ist definiert durch zu rotierenden Vektor v:

$$\mathbf{a} = (v\,,\, 0)$$

- Das Produkt $\mathbf{q}\mathbf{a}\overline{\mathbf{q}}$ rotiert v um die Achse u mit dem Winkel θ.

Interpolation zwischen zwei Quaternionen

- Sphärische Lineare Interpolation (SLERP)
- Berechnet für $t \in [0, 1]$ die kürzeste Verbindung auf der vierdimensionalen Einheitssphäre zwischen q und r.
- Analytisch:

$$SLERP(q, r, t) = q(rq^{-1})^t$$

- Numerisch:

$$SLERP(q, r, t) = q\frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)} + r\frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}$$

  mit Winkel θ zwischen r und q.

Umrechnung

Quaternion $\rightarrow$ Rotationsmatrix:

$$\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z, q_w) \Rightarrow M_q = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_y^2 + q_z^2) & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & 1 - 2(q_x^2 + q_z^2) & 2(q_y q_z - q_w q_x) \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & 1 - 2(q_x^2 + q_y^2) \end{pmatrix}$$

Rotationsmatrix → Quaternion:

$$
\begin{aligned}
q_w &= \frac{1}{2}\sqrt{1+\sum_{i=1}^{3} m_{ii}} \\
q_x &= \frac{(m_{32}-m_{23})}{4q_w} \\
q_y &= \frac{(m_{13}-m_{31})}{4q_w} \\
q_z &= \frac{(m_{21}-m_{12})}{4q_w}
\end{aligned}
$$

Vor- und Nachteile

Vorteile:

- Rotation direkt um gewünschte Drehachse
- Interpolation möglich
- weniger Rechenaufwand
- keine Redundanz ⇒ numerisch stabiler, weniger Gefahr für Singularitäten

Nachteil:

- nur Rotation berechenbar ⇒ Kombination mit Matrizen nötig ⇒ Rechenaufwand für Umwandlungen

5.2 Erweitertes Kameramodell

Lochkameramodell vereinfacht die realen Verhältnisse stark. Deshalb werden in der Praxis Erweiterungen des Lochkameramodells verwendet. Zunächst einige Definitionen:

Optische Achse: Gerade durch das Projektionszentrum, senkrecht zur Bildebene

Bildhauptpunkt $C(c_x\,,\,c_y)$**:** Schnittpunkt der optischen Achse mit der Bildebene

Koordinatensysteme:

Bildkoordinatensystem: 2D-Koordinatensystem, Einheit [Pixel], Vereinbarung für die Vorlesung (gilt für die meisten Kameratreiber): Ursprung in der linken oberen Ecke des Bildes, u-Achse zeigt nach rechts, v-Achse zeigt nach unten.

Kamerakoordinatensystem: 3D-Koordinatensystem, Einheit [mm], Ursprung liegt im Projektionszentrum, Achsen parallel zu den Achsen des Bildkoordinatensystems, d.h. x-Achse nach rechts, y-Achse nach unten und die z-Achse gemäß der Dreifingerregel für ein rechtshändiges Koordinatensystem nach vorne.

Weltkoordinatensystem: 3D-Koordinatensystem, Einheit [mm], Basiskoordinatensystem, das beliebig im Raum liegen kann.

Begriffe:

Intrinsische Kameraparameter: Brennweite, Bildhauptpunkt, Parameter für die Beschreibung radialer/tangentialer Linsenverzerrung; definieren die nicht (eindeutig) umkehrbare Abbildung vom Kamerakoordinatensystem in das Bildkoordinatensystem.

Extrinsische Kameraparameter: Definieren die Transformation vom Kamerakoordinatensystem in das Weltkoordinatensystem, im Allgemeinen durch eine Rotation R und eine Translation t.

Vereinfachungen des Lochkameramodells:

- Ursprung des Bildkoordinatensystems ist identisch mit dem Bildhauptpunkt
- Pixel werden als quadratisch angenommen
- keinerlei Modellierung der Linsenverzerrung
- es existiert kein Weltkoordinatensystem bzw. es ist identisch mit dem Kamerakoordinatensystem, d.h. es werden keine extrinsischen Kameraparameter modelliert

Brennweite:

- In der Praxis wird die Umrechnung von [mm] nach [Pixel] in den/die Parameter für Brennweite mit aufgenommen.
- Da Pixel nicht mehr als quadratisch sondern als rechteckig angenommen werden, gibt es deshalb für jede Richtung einen Parameter, also: f_x, f_y.
- Die Parameter f_x, f_y sind dann das Produkt aus der tatsächlichen Brennweite mit Einheit [mm] und dem jeweiligen Umrechnungsfaktor mit Einheit [Pixel/mm].
- Die Einheit für die Parameter f_x, f_y ist somit [Pixel].

Die Abbildung vom Kamerakoordinatensystem in das Bildkoordinatensystem, ausschließlich mit den intrinsischen Parametern, ist dann definiert durch:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \frac{1}{Z} \cdot \begin{pmatrix} f_x \cdot X \\ f_y \cdot Y \end{pmatrix}$$

oder als Matrixmultiplikation mit Kalibriermatrix K auf homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} u \cdot w \\ v \cdot w \\ w \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Extrinsische Kamerakalibrierung:

- Ist definiert durch eine Koordinatentransformation bestehend aus Rotation und Translation.
- Koordinatentransformation vom Weltkoordinatensystem in das Kamerakoordinatensystem:

  $$x_c = Rx_w + t$$

  Koordinatentransformation vom Kamerakoordinatensystem in das Weltkoordinatensystem:

  $$x_w = R^T x_c - R^T t$$

- 3×4 Gesamt-Projektionsmatrix P (intrinsisch und extrinsisch) auf homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} u \cdot w \\ v \cdot w \\ w \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = (K\,R \,|\, K\,t)$$

5.3 Kamerakalibrierung

Die Kalibrierung einer Kamera bedeutet die Bestimmung ihrer Parameter bezüglich eines gewählten Kameramodells. Die Bestimmung der intrinsischen Parameter ist unabhängig vom Aufbau; solange Zoom und Fokus der Kamera gleich bleiben, verändern sich diese Parameter nicht. Die Bestimmung der extrinsischen Parameter ist abhängig von der Wahl des Weltkoordinatensystems und ändert sich je nach Aufbau.
Ist die Kamera kalibriert, dann liegt die Abbildungsfunktion f vor, die einen Punkt vom Weltkoordinatensystem eindeutig in das Bildkoordinatensystem abbildet:

$$f : R^3 \to R^2$$

f ist definiert durch die Projektionsmatrix P und anschließender Transformation der homogenen Koordinaten durch Division durch w. Die Inverse Abbildung bildet einen Punkt im Bildkoordinatensystem auf eine Gerade im Weltkoordinatensystem ab, die durch das Projektionszentrum verläuft.
Verfahren zur Kamerakalibrierung:

- Direkte Lineare Transformation (DLT)
- Erweiterungen der DLT, welche Linsenverzerrung modellieren

gesucht: 3×4-Matrix, hat also 12 Unbekannte; Verfahren Testfeldkalibrierung:

- Bestimmung einer Menge von Punktkorrespondenzen: 3D-Punkt in einem gewählten Weltkoordinatensystem und 2D-Punkt im Bildkoordinatensystem
- 3D-Punkte sind durch Verwendung eines geeigneten Kalibrierobjekts oder -musters a-priori bekannt
- 2D-Punkte werden durch Methoden der Bildverarbeitung berechnet

benötigt: 6 bekannte Objektpunkte, da jede Punktkorrespondenz zwei Gleichungen liefert
Bedingung: 3D-Punkte dürfen nicht koplanar liegen, d.h. sie müssen einen dreidimensionalen Raum aufspannen
Möglichkeiten:

- Verwendung eines 2D-Musters, das in mindestens zwei verschiedenen Tiefen präsentiert wird.
- Verwendung eines geeigneten 3D-Kalibrierobjekts.

5.3.1 Direkte Lineare Transformation

Ein Standard-Verfahren für die Berechnung der Projektionsmatrix P ist die Direkte Lineare Transformation (DLT)

$$\begin{pmatrix} u \cdot w \\ v \cdot w \\ w \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = (K\,R \,|\, K\,t) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u &= \frac{p_1X + p_2Y + p_3Z + p_4}{p_9X + p_{10}Y + p_{11}Z + p_{12}} \\ v &= \frac{p_5X + p_6Y + p_7Z + p_8}{p_9X + p_{10}Y + p_{11}Z + p_{12}} \end{aligned}$$

o.B.d.A. kann ein Parameter normiert werden. Üblicherweise wird $p_{12} = 1$ gewählt.

$$\begin{aligned} p_1X + p_2Y + p_3Z + p_4 &= up_9X + up_{10}Y + up_{11}Z + u \\ p_5X + p_6Y + p_7Z + p_8 &= vp_9X + vp_{10}Y + vp_{11}Z + v \end{aligned}$$

Formuliert als überbestimmtes LGS $Ax = b$ mit $n \geq 6$ Punktkorrespondenzen, das beispielsweise mit Hilfe der Normalengleichung gelöst werden kann:

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1X_1 & -u_1Y_1 & -u_1Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -v_1X_1 & -v_1Y_1 & -v_1Z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_nX_n & -u_nY_n & -u_nZ_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -v_nX_n & -v_nY_n & -v_nZ_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{11} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

5.4 Stereokonstruktion

Gegeben:

- zwei Kameras (durch ihre Zentren C und C') mit Projektionsmatrizen P und P'
- zwei Abbilder x und x' des Punktes X
- dann kann X rekonstruiert werden

Triangulation zwischen linker und rechter Kamera möglich durch Kenntnis der Kameraparameter. Eine Möglichkeit zur Berechnung von 3D-Punkten aus Bildpunkt-Korrespndenzen x, x':

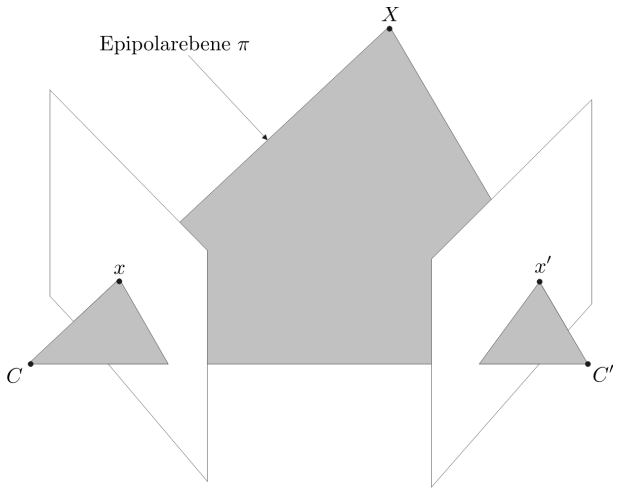
- Aufstellen der beiden Geraden g, g' der möglichen Punkte zu x, x' im Weltkoordinatensystem mit Hilfe der Projektionsmatrizen P, P':

$$\begin{aligned} g : x &= a + r \cdot u \\ g' : x &= b + s \cdot v \end{aligned}$$

- Berechnung des optimalen "Schnittpunktes" S durch Lösung des überbestimmten LGS $Ax = c$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & -v_1 \\ u_2 & -v_2 \\ u_3 & -v_3 \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix} \quad , \quad c = b - a \qquad s = \frac{a + r' \cdot u + b + s' \cdot v}{2}$$

5.4.1 Epipolargeometrie



Zusammenhang zwischen zwei Kameras ist gegeben durch die Epipolargeometrie. Die Schnittpunkte e und e' der Geraden durch die Projektionszentren mit den Bildebenen nennt man Epipole.

Epipolarebene $\pi(X)$**:** Ebene, die durch C, C' und Szenenpunkt X aufgespannt wird.

Epipolarlinie $l'(x)$**:** Schnittgerade von $\pi(X)$ mit Bildebene.

Alle Punkte X, die auf x in Kamera 1 abgebildet werden, werden auf einen Punkt der Linie $l'(x)$ in Kamera 2 abgebildet. Alle Epipolarlinien eines Kamerasystems schneiden sich in den Epipolen e und e'.
Nutzen: Einschränkung des Korrespondenzproblems von zwei Dimensionen auf eine Dimension, da nach entsprechenden Merkmalen nur noch entlang der Epipolarlinie gesucht werden muss:

- höhere Robustheit (weniger falsche Korrespondenzen)
- höhere Effizienz

5.4.2 Fundamentalmatrix

Mathematische Beschreibung der Epipolargeometrie erfolgt durch die Fundamentalmatrix. Eigenschaften der Fundamentalmatrix F:

- 3×3-Matrix
- Rang 2
- für alle Korrespondenzen x, x' gilt:
$$x'^T F x = 0$$
x und x' sind Bildpunkte in homogenen Koordinaten mit $w = 1$

Mit der Fundamentalmatrix lassen sich die Epipolarlinien berechnen:

$$l = F^T x' \qquad \text{und} \qquad l' = Fx$$

Für die Epipole gilt:

$$Fe = 0 \qquad \text{und} \qquad F^T e' = 0$$

Hinweis: l (bzw. l') definieren eine 2D-Gerade wie folgt:
$lx = 0$ für alle Bildpunkte x (in homogenen Koordinaten mit $w = 1$), die auf dieser Geraden liegen.
Die Fundamentalmatrix lässt sich auf mehrere Arten berechnen:

- über Bildpunkt-Korrespondenzen in der linken und rechten Kamera
- bei bekannter intrinsischer und extrinsischer Kalibrierung der Kameras direkt über die Kalibriermatrizen K, K' und der Essentialmatrix E, die durch die extrinsischen Parameter definiert ist

Berechnung über Bildpunkt-Korrespondenzen:

$$x'^T F x = 0 \quad , \quad x' = (x', y', z') \quad , \quad x = (x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & x'x f_{11} + x'y f_{12} + x' f_{13} \\ & + y'x' f_{21} + y'y f_{22} + y' f_{23} \\ & + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Für $n \geq 7$ Korrespondenzen x, x':

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ \vdots \\ f_{33} \end{pmatrix}}_{f} = 0$$

$Af = 0$ lösen z.B. mit Singulärwertzerlegung (SVD)
Berechnung über Essentialmatrix:
Essentialmatrix lässt sich durch die extrinsischen Parameter berechnen:
gegeben:

- Kamera 1 mit $(I \,|\, 0)$ als Transformation (Identität)
- Kamera 2 mit $(R \,|\, t)$ als Transformation

Essentialmatrix E lässt sich berechnen zu:

$$E = [t]_x R = \begin{pmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Epipole gilt:

$$e = -KR^T t \quad \text{und} \quad e' = K't$$

Hat man die Essentialmatrix (z.B.über die extrinsischen Parameter) berechnet und die intrinsischen Parameter, d.h. Kalibriermatrizen K, K', so lässt sich die Fundamentalmatrix berechnen zu:

$$F = K'^{-T} E K^{-1}$$

Hat man umgekehrt die Fundamentalmatrix bestimmt (z.B. über Bildpunkt-Korrespondenzen) und die intrinsischen Parameter, d.h. die Kalibriermatrizen K, K', so lässt sich die Essentialmatrix berechnen zu:

$$E = K'^T F K$$

Stereo-Sehen

Weiter Eigenschaften der Fundamentalmatrix:

- Mit ihr lassen sich die Eingabebilder rektifizieren.
  - Nach Rektifizierung verlaufen alle Epipolarlinien horizontal mit derselben v-Koordinate wie der Bildpunkt im anderen Kamerabild.
  - Nach Korrespondenzen muss nur noch horizontal (in eine Richtung) gesucht werden.
- Mit Hilfe der Essentialmatrix lassen sich die Projektionsmatrizen bis auf Skalierung genau rekonstruieren, mit Hilfe der Fundametalmatrix bis auf Skalierung und Projektion genau.

Rektifizierte Bilder haben den Vorteil, dass sich optimierte Korrelations-Algorithmen für die Lösung des Korrespondenzproblems verwenden lassen. ⇒ Laufzeit unabhängig von der Fenstergröße
Nachteile:

- Interpolation notwendig für die Berechnung der rektifizierten Bilder ⇒ Qualitätsverlust
- Bilder je nach Aufbau stark verzerrt

Nach Lösung des Korrespondenzproblems können

- Punktwolken berechnet werden durch Triangulation, wie zuvor erläutert
- Tiefenbilder erzeugt werden durch Eintrag der Disparitäten (Differenz der u-Koordinaten für gefundene Korrespondenzen in den rektifizierten Bildern) in ein Graustufenbild:
  ⇒ Je höher der Grauwert, desto näher befindet sich der entsprechende 3D-Punkt zur Kamera

Kapitel 6

Visuelle Wahrnehmung des Menschen

Klausurrelevant Folien 1-24

6.0.3 Bewegungserfassung I

Problemstellung beim Human Motion Capture (HMC):

- Eingabe: Sequenz von Bildern bzw. Bildpaaren oder Bildtupeln
- Ausgabe: Geschätzte Konfiguration (Gelenkwinkel) für jedes Frame bezüglich eines zuvor definierten Menschmodells
- Schwierigkeit: Hohe Dimensionalität des Suchraumes

Menschmodell

Menschmodell für HMC setzt sich zusammen aus

- Kinematischem Modell
- Geometrischen Modell
  - Meist aus Festköpern
  - Optional: deformierbares Hautmodell

Aus Gründen der Rechenzeit werden vereinfachte Modelle verwendet.

Kinematisches Modell

- Definiert die Anzahl und Art der Gelenke
- Definiert die Segmentlängen zwischen der Gelenken
- Für die Erfassung wird die Schulter meist durch ein einzelnes Kugelgelenk modelliert

Geometrisches Modell

- Definiert die 3D-Form der einzelnen Segmente
- Übliche 3D-Primitive:
  - Zylinder
  - Kegelausschnitte (Kreis- oder Ellipsenförmiger Querschnitt)

Berechnung

Berechnung der projizierten Kontur $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$ eines Kegelausschnitts mit kreisförmigem Querschnitt. Gegeben:

- Porjektionszentrum=Ursprung Z
- Fußpunkt c
- Richtung n
- Länge L
- Radien r,R

Berechnung

- $u = \frac{n \times c}{|n \times c|}$
- $c_t = c + L \cdot \frac{n}{|n|}$
- $p_{1,3} = c \pm R \cdot u$
- $p_{2,4} = c_t \pm r \cdot u$

Bildbasiert mit Partikelfilter

Den Kern bildet eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche bewertet, wie gut eine gegeben Konfiguration des Menschmodells zu den aktuellen Beobachtungen (Bilddaten) passt.
Hinweise (engl. Cues) für die Bewertung, die aus den Bilddaten gewonnen werden können sind:

- Region Cue [DBR00]
- Kanten Cue [DBR00]
- Distanz Cue [Azad]

Region Cue

- Benötigt Segmentierung der Person vom Hintergrund
- Bewertet den Abgleich des Segmentierungsergebnisses mit der Projektion der Körpersegmente
- Hierzu werden Punkte innerhalb der projizierten Kontur überprüft
- Bewertungsfunktion:

6.0.4 Iterative Closet Point (ICP)

6.0.5 Bewegungserfassung II

Kapitel 7

Wissen und Planung

7.1 Wissen

7.1.1 Einführung

Was ist Wissen?

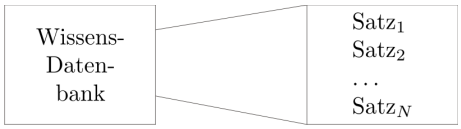
Gespeicherte

- Beschreibungen, Modelle, Aktionsfolgen
- Vorschriften zur Reaktion auf Ereignisse
- Motorische, kognitive Fähigkeiten

konkreter:

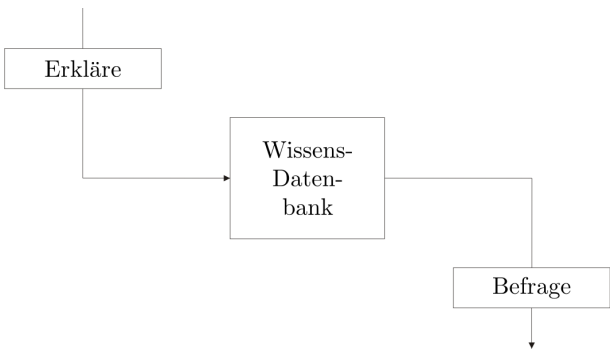
- Computerprogramme
- Regeln der Aussagenlogik
- Gewichte von Neuronalen Netzen, ...

7.1.2 Grundlagen



Eine Wissensdatenbank besteht aus Sätzen, die in einer Wissensrepräsentationssprache abgefasst sind. Jeder Satz stellt eine Annahme über die Welt dar:

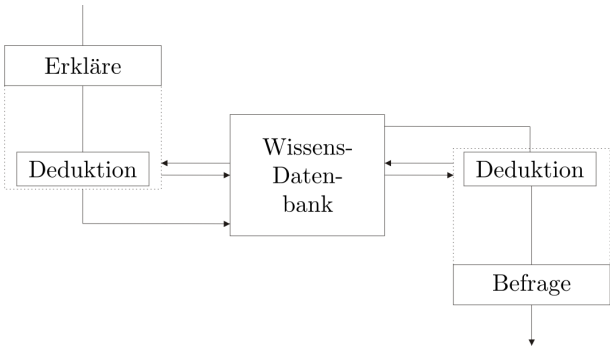
α: "**Ident1** IST-EIN Fahrrad."
β: "**Ident2** IST-EIN Mensch."
γ: "**Ident3** BESITZT Ident1." oder
α: "$r \in R^{20}$."



Erkläre: Füge der Datenbank Wissen hinzu.

Befrage: Frage Wissen aus Datenbank ab.

Erkläre(DB, "Ident1 BESITZT Ident2.")
→ OK
Befrage(DB, "Was BESITZT Ident2?")
→ Ident1



Deduktion: Leite neue Sätze von bekannten ab. Injektive Abbildung Deduktion:

$$DB \rightarrow DB$$

Minimale Deduktion: Identität.

7.1.3 Logik allgemein

Eine allgemeine Logik besteht aus einer Symbolmenge, einer Belegungsmenge, einer Syntax, einer Semantik, einem Folgerungsoperator $\models$ und den elementaren Aussagen wahr und falsch.

- Elementarwerte für Aussagen: wahr, falsch
- Symbolmenge S: enthält alle Symbole, über die Aussagen gemacht werden können.
- Belegung/Modell: Zuweisung eines Wertes jedem Symbol d.h. eine Menge von Paaren (s_i, w_i) von Symbolen
  $s_i \in S$ mit zugeordneten Werten, $w_i \in Def(s_i)$
- Belegungsmenge M: Menge aller gültigen Belegungen

Beispiel: Aussagenlogik

$$\begin{aligned} S &= \{a, b\} \\ M &= \{\{(a, wahr), (b, wahr)\}, \\ &\quad \{(a, wahr), (b, falsch)\}, \\ &\quad \{(a, falsch), (b, wahr)\}, \\ &\quad \{(a, falsch), (b, falsch)\}\} \end{aligned}$$

Schreibweise: lateinische Buchstaben für Symbole, griechische Buchstaben für Sätze

Syntax: Legt fest, welche Sätze wohlgeformt sind.

Nur wohlgeformte Sätze sind gültig!

$(a \vee b) \Rightarrow c$	wohlgeformt
$()a \vee \Rightarrow bc$	nicht wohlgeformt

Semantik: Beschreibt wie einem gegebenen Satz der Logik ein Wahrheitswert zugeordnet wird. Das kann immer dann geschehen, wenn eine Belegung gewählt wurde, d.h. unter jeder Belegung hat ein logischer Satz einen durch die Semantik eindeutig definierten Wahrheitswert, ist also entweder wahr oder falsch.

$$\begin{aligned} \text{Satz } \alpha &= (a \wedge b) \Rightarrow c \\ \text{Modell } M &= \{(a, wahr), (b, wahr), (c, wahr)\} \\ &\Rightarrow \alpha/M \; wahr \text{ , } M \text{ erfüllt } \alpha \\ \text{Modell } M &= \{(a, wahr), (b, wahr), (c, falsch)\} \\ &\Rightarrow \alpha/M \; falsch \end{aligned}$$

Folgerung $\models$

$$\alpha \models \beta \; : \; "\beta \text{ folgt aus } \alpha"$$

$\alpha \models \beta$ genau dann, wenn für alle Modelle, in denen α wahr ist, β ebenfalls wahr ist.

$$\alpha : x + y = 4 \qquad \beta_1 : y = 4 - x \qquad \beta_2 : \frac{x}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha \models \beta_1 \qquad \alpha \not\models \beta_2$$

Wissensbasis

Kann als $\wedge$-verknüpfte Sequenz von Sätzen aufgefasst werden:

$$WB : \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 : x + y = 4 \\ \alpha_2 : \; x/y = 1 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow WB = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \; wahr \; \forall M \; : \; x = 2, \; y = 2$
$\Rightarrow M$ erfüllt $WB \; \forall M \; : \; x = 2, \; y = 2$

$$WB \models \beta \quad \text{genau dann wenn} \quad \left(\bigwedge_{\alpha_i \in WB} \alpha_i \right) \Rightarrow \beta = wahr$$

Modellprüfung

Algorithmus zur Überprüfung einer $WB \models \alpha$-Relation:

1. Finde Menge aller Modelle $M = \{M_i\}$ über S
2. Eliminiere alle M_i mit $WB/M = falsch$
3. $WB \models \alpha$ genau dann, wenn
$$\forall M_i \in M \; : \; \alpha/M_i = wahr$$

Deduktion

Wenn ein Algorithmus i existiert, der den Satz α aus der Wissensbasis WB ableiten kann, schreiben wir

$$WB \vdash_i \alpha$$

("α wird durch i aus WB abgeleitet" oder "i leitet α aus WB ab")
Eigenschaften von Deduktionsalgorithmen:

- Algorithmus i "korrekt" genau dann, wenn er nur Sätze aus WB ableitet, die aus WB folgen:
$$\forall \alpha \; : \; WB \vdash_i \alpha \quad \Rightarrow \quad WB \models \alpha$$
- Algorithmus i "vollständig" genau dann, wenn er alle Sätze aus WB ableitet, die aus WB folgen:
$$\forall \alpha \; : \; WB \models \alpha \quad \Rightarrow \quad WB \vdash_i \alpha$$

Zusammenfassung

Eine Logik:

- bestimmt den Wahrheitsgehalt von Sätzen in Bezug auf Modelle
- besteht aus Symbolmenge, Modellmenge, Syntax, Semantik, Folgerung

Eine Wissensbasis:

- besteht aus einer Menge von Sätzen
- passt zu einem Modell M (oder auch nicht)

Ein Deduktions-Algorithmus

- leitet Sätze aus einer Wissensbasis ab
- kann korrekt und / oder vollständig sein

7.2 Aussagenlogik

- Aussagenlogik als Beispiel einer sehr einfachen Logik
- sehr alt (antikes Griechenland)
- bildet die Basis, von der die allgemeine Logik abgeleitet wurde
- eignet sich sehr "natürlich" zur Illustration bestimmter Konzepte

7.2.1 Syntax

$$
\begin{array}{rcl}
Satz & \rightarrow & Atom \,|\, Komplex \\
Atom & \rightarrow & True \,|\, False \,|\, Symbol \\
Symbol & \rightarrow & P \,|\, Q \,|\, R \ldots \\
Komplex & \rightarrow & \neg Satz \,|\, (Satz \wedge Satz) \,|\, (Satz \vee Satz) \,|\, (Satz \Rightarrow Satz) \,|\, (Satz \Leftrightarrow Satz)
\end{array}
$$

Semantik

Wahrheitsgehalt im Modell M:

1. $True = wahr$, $False = falsch$ $\forall M$
2. Wahrheitsgehalt von Symbolen wird in M spezifiziert
3. Wahrheitsgehalt aller anderen Sätze rekursiv:
   (a) $\forall$ Sätze α $\forall$ Modelle M : $\neg\alpha$ $falsch$ gdw $\alpha \in M$ $wahr$
   (b) $\forall \alpha, \beta \forall M$: $\alpha \wedge \beta$ $wahr$ gdw $\alpha \in M$ $wahr$ und $\beta \in M$ $wahr$
   (c) etc.

   (Alternative: Wahrheitstabelle)

7.2.2 Muster

Allgemeingültige Deduktionsregeln aus der klassischen Literatur:

- **Modus Ponens:**
  Wenn $\alpha \Rightarrow \beta$ und α gegeben sind, kann β inferiert werden.

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta\,,\ \alpha}{\beta}$$

- **Und-Elimination:**

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

  Aus einer Konjunktion kann jedes der Elemente inferiert werden.
  Korrektheitsbeweis aus Wahrheitstabelle!

7.2.3 Resolution

Basis für Deduktionsalgorithmen
Einheits-Resolutionsregel (aus Modus Ponens):
Seien $p_1, \ldots, p_k$ und q Literale mit $q = \neg p_i$. Dann gilt:

$$\frac{p_1 \vee \cdots \vee p_k\,,\ q}{p_1 \vee \cdots \vee p_{i-1} \vee p_{i+1} \vee \cdots \vee p_k}$$

Allgemeine Form der Resolutionsregel:
$p_1, \ldots, p_k$ und $q_1, \ldots, q_n$ Literale mit $p_i = \neg q_j$. Dann gilt:

$$\frac{p_1 \vee \cdots \vee p_k\,,\ q_1 \vee \cdots \vee q_n}{p_1 \vee \cdots \vee p_{i-1} \vee p_{i+1} \vee \cdots \vee p_k \vee q_1 \vee \cdots \vee q_{j-1} \vee q_{j+1} \vee \cdots \vee q_n}$$

Jeder vollständige Suchalgorithmus, kombiniert mit der Resolutionsregel,

- kann jede Schlussfolgerung ableiten, die aus jeder Wissensbasis der Aussagenlogik folgt.
- bildet die Basis für Familien von vollständigen Deduktionsalgorithmen.
- beweist $WB \models \alpha$ durch Widerlegung von $(WB \wedge \neg\alpha)$.

Voraussetzung: Sätze müssen in konjunktiver Form vorliegen.

Klausel: Eine Disjunktion von Literalen

$$(l_1 \vee \cdots \vee l_n)$$

Konjunktive Form (KF): Jede aussagenlogische Formel kann als Konjunktion von Klauseln ausgedrückt werden. Dann liegt sie in konjunktiver Form vor:

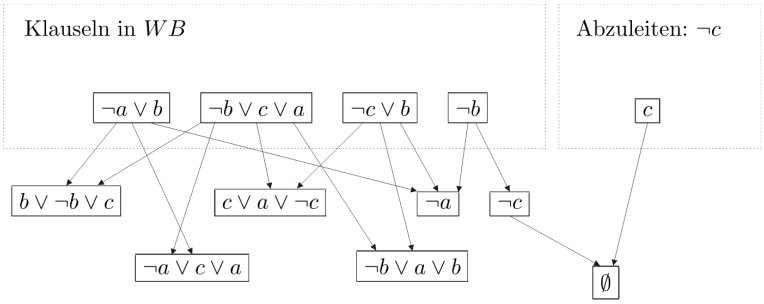
$$(l_{1,1} \vee \cdots \vee l_{1,k_1}) \wedge \cdots \wedge (l_{n,1} \vee \cdots \vee l_{n,k_n})$$

Resolutionsalgorithmus

Zeige $WB \models \alpha$ durch Widerlegung von $(WB \wedge \neg\alpha)$

```
klauseln := Menge Klauseln in KF (WB ∧ ¬α)
neu := {}
loop:
  for all C_m, C_n in klauseln:
    res := resolution(C_m, C_n)
    if ∅ = res: return true
    neu := neu ∪ res
  if neu ⊆ klauseln: return false
  klauseln := klauseln ∪ neu
```

Beispiel:



Der Resolutionsalgorithmus ist vollständig aber auch sehr afwendig – $O(n^2)$. Realistische Vereinfachungen:

- Horn-Klauseln (Prolog), Vorwärts-/Rückwärts-Verkettung
- Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL)

7.2.4 Horn-Klausel

Horn-Klausel: Disjunktion von Literalen, von denen höchstens eins positiv ist:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c)$$

lasst sich schreiben als:

$$\underbrace{(a \wedge b)}_{Koerper} \Rightarrow \underbrace{c}_{Kopf}$$

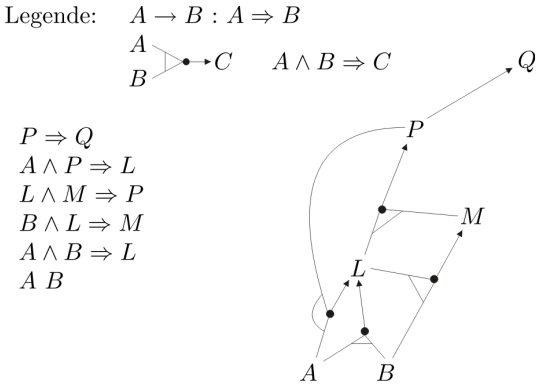
Spezialtypen von Horn-Klauseln:

- keine negativen Literale: Fakt, Axiom
- genau ein positives Literal: Definition
- kein positives Literal: Integritätseinschränkung

Eigenschaften von Horn-Klausel-basierten Wissensbasen:

- einfach visualisierbar: Und-Oder-Graph
- Inferenz durch Vorwärts- und Rückwärtsverkettung, sehr natürliche und leicht verständliche Algorithmen
- Folgerungsentscheidung kann in linearer Zeit geschehen!

Und-Oder-Graph: einfache Visualisierung eines Horn-Klausel-Systems.



Vorwärtsverkettung:

- gehe von Fakten aus
- arbeite dich vorwärts durch den Baum
- Ergebnis: alle durchführbaren Folgerungsentscheidungen

Rückwärtsverkettung:

- gehe von Anfrage aus
- arbeite dich rückwärts durch den Baum
- stoppe bei bekannten Fakten (Ground Truth, Axiome)
- Ergebnis: Wahrheitsgehalt der Anfrage

7.2.5 DPLL

Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL): Rekursiver Modellprüfungs-Algorithmus mit folgenden Verbesserungen:

- früher Abbruch: benutzt $(A \vee B) \wedge (A \vee C) = true$, sobald $A = true$
- Einheitsklauseln (Klauseln mit nur einem Literal): Konjunktionen mit Einheitsklauseln sind nur wahr, wenn die Einheitsklauseln wahr sind
  $\Rightarrow$ weitere Einschränkung des Suchraums
- reine Symbole: in $(A \vee \neg B)$, $(\neg B \vee \neg C)$, $(C \vee A)$ sind A und $\neg B$ rein und C unrein
  Suche nach reinen Symbolen schränkt Raum möglicher Modelle stark ein!

Algorithmus:

```
funktion DPLL(k, s, m):
  #  k Klauselmenge, s Symbolmenge, m Modell
  if alle Klauseln wahr in m: return  true
  if eine Klausel falsch in m: return  false
  P, wert :=  FINDE_EINHEITSKLAUSEL(k, s, m)
  if  P nicht leer:
    return  DPLL(k, s − P,SETZE_IN_MODELL(P, wert, m))
  P, wert :=  FINDE_REINES_SYMBOL(k, m)
  if  P nicht leer:
    return  DPLL(k, s − P,SETZE_IN_MODELL(P, wert, m))
  P :=  ERSTES(s);  rest :=  REST(s)
  return DPLL(k, rest,SETZE_IN_MODELL(P, true, m))  or
         DPLL(k, rest,SETZE_IN_MODELL(P, false, m))
```

DPLL zur Überprüfung von Erfüllbarkeit:

```
function DPLL_ERFUELLBAR(s) :
  # s : Satz der Aussagenlogik
   klauseln := Klauselmenge der KNF von s
   symbole := Menge der Symbole aus s
  return DPLL(klauseln, symbole, {})
```

7.2.6 Prädikatenlogik

7.3 Planung

Repräsentation von Plänen

Wie kann man Probleme so formulieren, dass

- ein Lösungsplan einfach zu erstellen ist?
- die Existenz einer Lösung bewiesen/widerlegt werden kann?

→ Einschränkungsregeln für formelle Spezifikation von Zuständen, Zielen, Aktionen. Beispiele solcher Regelsysteme: STRIPS, ADL

7.3.1 STRIPS

- **ST**anford **R**esearch **I**nstitute **P**roblem **S**olver
- "Urvater" vieler Planungssysteme
- sehr einfach aufgebaut
- teilweise eingeschränkt

Repräsentation von Zuständen:

- Konjunktion positiver aussagenlogischer Literale

$$Blau \wedge Rund$$

- Literale erster Ordnung ($L1$)

$$IstTasse(T1) \wedge IstUntertasse(U1) \wedge StehtAuf(T1, U1)$$

- $L1$ müssen funktions- und variablenfrei sein!

Closed-World Assumption

- geschlossene Welt: was nicht im Zustand vorkommt, ist falsch!
- keine Negationen im Zustand und Vorbedingungen, aber in Nachbedingungen benötigt:

$$b \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a \text{ darf nicht im Weltmodell vorkommen} \\ b \text{ muss im Weltmodell vorkommen} \end{array}$$

- Negationen in Nachbedingungen:

$$\neg c \wedge d \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{entferne } c \text{ aus dem Weltmodell} \\ \text{füge } d \text{ dem Weltmodell hinzu} \end{array}$$

Repräsentation von Zielen:

- Ziel: teilweise spezifizierter Zustand
- angegeben als Konjunktion von positiven Literalen

$$StehtAuf(T1, U1) \wedge StehtAuf(U1, Tisch)$$

- ein Zustand S erfüllt ein Ziel Z, wenn er alle Literale in Z enthält

$$StehtAuf(T1, U1) \wedge StehtAuf(U1, Tisch) \wedge StehtAuf(Teller, Tisch)$$

  erfüllt

$$StehtAuf(T1, U1) \wedge StehtAuf(U1, Tisch)$$

Aktionen werden angegeben durch

- Aktionsname
- Parameter
- Vorbedingungen
- Effekte

$$A = (N_A, P_A, V_A, E_A)$$

$(StelleAuf,$
$(Obj1, Obj2),$
$IstUntersatz(Obj2) \wedge Auf(Obj1, Tisch) \wedge Auf(Obj2, Tisch),$
$\neg Auf(Obj1, Tisch \wedge Auf(Obj1, Obj2))$

Alternative Schreibweise:

Action ($StelleAuf(Obj1, Obj2)$,
Vorbed: $IstUntersatz(Obj2) \wedge$
$Auf(Obj1, Tisch) \wedge$
$Auf(Obj2, Tisch)$,
Effekt: $\neg Auf(Obj1, Tisch) \wedge$
$Auf(Obj, Obj2)$)

Semantik:

Anwendbarkeit: Eine Aktion ist anwendbar auf allen Modellen M, die ein Modell für die Vorbedingung V_A sind.

Ergebnis: Das Ergebnis M' der Ausführung einer Aktion A auf einem Modell M erhält man durch

- entfernen aller negativen Literale des Effekts E_A aus M
- hinzufügen aller positiven Literale aus E_A zu M.

Einschränkunen von STRIPS:

- Literale müssen funktionsfrei sein
  - endliche Grammatik
  - jede Aktion kann als endliche aussagenlogische Konjunktiondargestellt werden
  - Lösbarkeitsbeweis einfach
- Nur positive Literale l, "geschlossene Welt"
  - einfachere Planung
  - aber: Falsch-Sachverhalte nur implizit
- keine Quantisierung

$\Rightarrow$ STRIPS-Aussagen oft lang und unübersichtlich

7.3.2 ADL

- **A**ction **D**escription **L**anguage: Weiterentwicklung von STRIPS
- "offene Welt": Was nicht im Zustand vorkommt, ist unbekannt.
- negative Literale und Disjunktionen erlaubt
- Effekt $\neg P \wedge Q$:
  - füge $\neg P$ und Q hinzu
  - lösche P und $\neg Q$
- Gleichheits-Prädikat "=" eingebaut
  - $StelleAuf(T1, T1)$ nicht mehr möglich

Typüberprüfung

- Typüberprüfung benötigt für Ausführbarkeit bestimmter Aktionen
- in STRIPS nur explizit (als Prädikat): $IstUntersetzer(x)$, $IstTasse(y)$
- häufig weggelassen (Schreibarbeit!), aber eigentlich nötig
- in ADL implizit möglich:

$$\begin{array}{lll} \textbf{Action} (& StelleAuf(Obj1 : Untersatz,\ Obj2 : Manipulierbar), & \\ & \textbf{Vorbed:} & Auf(Obj1, Tisch) \wedge \\ & & Auf(Obj2, Tisch), \\ & \textbf{Effekt:} & \neg Auf(Obj1, Tisch) \wedge \\ & & Auf(Obj, Obj2) \qquad) \end{array}$$

Suche im Zustandsraum ist einfach:

- keine Funktionssymbole
  $\Rightarrow$ endlicher Zustandsraum
  $\Rightarrow$ Standard-Algorithmen zur Baumsuche (z.B. A*)
- Transformation Vorbedingungen $\Leftrightarrow$ Effekte bijektiv
  $\Rightarrow$ Suche auch rückwärts möglich

Aber:

- Zustandsraum oft sehr groß
- naive Suche sehr ineffizient
- benötigt gute Heuristik oder Segmentierung in Teilprobleme

Heuristiken für Zustandsraumsuche

- versuche, die Suchtiefe einzuschränken
- Def. **Heuristikfunktion**:
  $$h = H(M_0, M_1)$$
  angenommene maximale Anzahl von Aktionen, um von M_0 zu M_1 zu kommen
- beschränke Suche auf Teilbaum der Tiefe h
- wenn nicht gefunden: suche je eine Ebene tiefer
- Problem: finde möglichst gute Heuristikfunktionen

Vorranggraph

Vor- und Nachbedingungen können zur Problemdekomposition verwendet werden. Parralelisierung möglich? → Vorranggraph
Vorranggraph ermöglicht:

- Parallelisierung der Planung
- Parallelisierung der Ausführung
- bei dynamischen Effekten (Hindernisse, etc.)
  - Blockierung des momentanen Teilplans
  - zuerst Ausführung anderer Teilpläne
  - dann Überprüfung, ob blockierter Teilplan jetzt ausführbar (Hindernis jettz weg?)
  - ggf. Neuplanung nur ab der letzten Gabelung notwendig

7.3.3 Umweltmodell

Das Umweltmodell eines kognitiven Systems bildet die reale Umwelt auf eine innere Repräsentation ab. Logisch-semantische Beziehungen genügen für ein System mit Aktorik nicht; zusätzlich:

- geometrisches Modell: Ausdehung und Lage von Objekten
- topologisches Modell: (teil-geometrische) Beziehungen zwischen Objekten

Objektmodellierung

- Darstellung der Objekte der realen Umwelt (Türen, Wände, Hindernisse)
- 3-dim. Darstellung der Umgebung aus Sensorwahrnehmungen
- Projektion auf x-y-Ebene für Navigation bodengebundener Roboter ausreichend

verschiedene Darstellungen:

- Kantenmodelle:
  Ermittlung von markanten Punkten. Verbinden durch geeignete Kanten auf Oberfläche des Objekts
- Oberflächenmodelle
  - Nachbildung der Objektoberflächen
  - Darstellung ebener Flächenelemente mit Polygonen
  - gekrümmte Flächenelemente:
    - mathematische Grundflächen (Zylinder, Kegel, Torusflächen)
    - Bezier-Flächen
    - näherungsweise durch Freiformflächen (Patches)
- Volumenmodelle:
  - Unterscheidung von Raumpunkten hinsichtlich ihrer Lage zum Objekt (innen-/außenliegend)
  - Repräsentationsmöglichkeiten: Begrenzungsflächenmethode, Grundkörperdarstellung, Zellenzerlegung (Octtree), Volumenapproximation, einhüllende Quader, Geradensegmente

Geometrisches Modell: Anwendungen:

- Bahnplanung feinkörnig
- aktives Messen

- Objekterkennung (Basisobjekte)
- fahren von x_s, y_s, z_s nach x_e, y_e, z_e

Topologisches Modell: Anwendungen:

- Planung (Manipulationsplanung, mittlere Körnigkeit, Bewegungsplanung)
- "fahre von Raum1 nach Raum5"

Über topologische Modelle:

- Anordnung von Objekten und Umwelt relativ zueinander gespeichert
- abgeleitet aus geometrischen Modellen:
  Pfade z.B. aus Voronoi.Diagrammen, Quadtree, Potentialfeldern
- grobe Aktionsplanung aus topologischen Modellen
- kurzfristige Verwendung anderer Modelle bei unerwarteten Hindernissen (geometrischer Bodenplan, ad-hoc erzeugte Kantenmodelle aus Laserscan, Kamera)

Semantisches Modell: Anwendung: Planung auf Aufgabeneben → "fahre durch alle Büros"
Über semantische Modelle:

- besondere Bedeutung im Rahmen der Mensch-Maschine-Kommunikation
- belegte Fläche als Objekt klassifiziert (z.B Schrank, Stuhl)
- eingeordnet in topologische Beschreibung
- Objekteigenschaften verwertbar: Objektzustand (Tür offen, Tasse leer); äußere Erscheinung des Objekts (Form, Farbe) als Diskriminator und Hilfe für die Sensorik; geometrisches Objektmodell für Greifplanung etc.

zugehörig zu semantischen Umweltbeschreibungen:

- Funktion eines Objektes
- Landmarken
- geometrische Objekte
- topologische Umweltdarstellungen
- Positionen

Umweltrepräsentation der Information:

- Pfade
- Freiraum
- Objekte
- gemischte Modelle

Pfade

Normal: 2-dimensionaler Raum

- Polygonale Beschreibung der Objekte
- Pfad: lineare oder nichtlineare Verbindung zweier Punkte im Operationsraum
- Speicherung der Umwelt und Planungsinformation
- Repräsentation als ungerichteter Graph

Sichtbarkeitsgraphen:

- einfache Umweltdarstellung, partielle Modellierung
- kollisionsfreie Bewegung nur auf gespeicherten Pfaden
- Sichtbarkeitsgraphen zur automatischen Generierung von Pfaden

Erstellung eines Sichtbarkeitsgraphen:

```
for i = 1..#Obj
  for j = 1..#Objekte[i]
    for k = i..#Obj
      for l = 1..#Objekte[k]
        if (Sichtbarkeitstest(objekte[i][j], objekte[k],[l] == ok)
          neuer Pfad(i,j,k,l)
```

Voronoi-Diagramme: Fahrwege liegen auf maximalem Abstand zu den Hindernissen. Das Voronoi-Diagramm ist der duale Graph der Delaunay-Triangulation.

Freiraum

- Projektion der realen Welt in 2D/3D-Grundrissdarstellung
- kollisionsfrei befahrbare Freiräume in geeignete Bereiche zerlegt
- vorhandene Objekte und Hindernisse nicht berücksichtigt

Freiraumgraph:

- Knoten: Freiraumbereiche
- Kanten: Verbindung der Gebiete

Vorteile:

- geringere Komplexität der Wegplanung
- reduzierter Zeit- und Rechenaufwand
- Fahrsicherheitsüberlegungen deutlich vereinfacht
- Verbesserung der Anpassungsfähigkeit der Algorithmen an verschiedene Umwelten

Darstellungsformen der Freiflächen:

- Kacheln (Quader)
  - Darstellung von besetzten Räumen durch orthogonale begrenzende Linien (Näherungen)
  - Verlängerung der Linien bis zum nächsten besetzten Raum
  - bildet Mosaik von besetzten und freien Kacheln/Quadern
  - freie Kacheln $\rightarrow$ Graph, durch den Bewegung möglich ist

  Quadtree-/Octtree-Aufteilung:

  - hierarchische Aufteilung in freie und belegte Zellen
  - Aufteilung teilbelegter Zellen in 4 (2D) bzw. 8 (3D) Unterzellen
  - Resultat: Baumstruktur
  - Pfadplanung: Aufstieg von Start- und Zielknoten bis zum ersten gemeinsamen Knoten; Liste besuchter Knoten: Pfad
- konvexe Polygone (Polyeder)

Modelle

Aufgliederung des benötigten Wissens:

- Ausführung von Aufgaben
  - semantisches Aufgabenmodell
  - Umweltmodell vorher, nachher
- Bewegung über Grund in 2D, Bewegung des Arms in 3D
  - statische Umweltkarte (geometrisch und topologisch)
  - dynamische Hinderniserfassung in 3D
  - Freiraum-, Hindernismodell
- Manipulation von Objekten
  - Objektpositionen
  - geometrische und topologische Objektmodelle

7.3.4 Geometrisches Planen

Grundlagen der Bahnplanung

Bewegung eines Roboters:

- Zustandsänderungen über der Zeit (Trajektorie)
- relativ zu stationärem Koordinatensystem (kartesischer Raum, Gelenkwinkelraum)
- häufig Gütekriterien, Neben-, Randbedingungen

Bekannt:

- S_{start}: Zustand zum Startzeitpunkt
- S_{ziel}: Zustand zum Zielzeitpunkt

Gesucht:

- S_I: Zwischenzustände (Stützpunkte)
- glatte, stetige Trajektorie

Bahnplanungsverfahren nach Zustandsraum:

- Gelenkwinkelzustandsraum (Konfigurationsraum)
- 3-dim. euklidischer Raum
- Sensorzustandsraum, Objektzustandsraum, ...

Bahnplanungsverfahren nach Art des Roboters:

- Bahnplanung für Manipulatoren
- Bahnplanung für mobile Roboter
- Bahnplanung für Laufmaschinen und antropomorphe Systeme
- Greif- und Montageplanung

Bahnplanung im Gelenkwinkelraum

- Trajektorie als Funktion der Gelenkwinkel
- Ausführung solcher Trajektoren durch
  - Steuerung der Achsen unabhängig voneinander (Punkt zu Punkt) oder
  - achsinterpolierte Steuerung (Bewegung aller Achsen beginnt und endet zum gleichen Zeitpunkt) erfolgen
- Bahnverlauf muss im kartesischen Raum nicht definiert sein
- Vorteile: einfach; keine Singularitäten

Bahnplanung im kartesischen Raum

- Trajektorie angegeben als Funktion der Endeffektorposition
- Funktionen z.B.: lineare Bahnen, Polynombahnen, Splines
- Vorteile:
  - Verlauf der Trajektorie explizit in 3D
  - einfach nachvollziehbar, visualisierbar
- Nachteile:
  - für jeden Punkt muss Gelenkwinkelrücktransformation berechnet werden
  - Trajektorie nicht immer ausführbar (Arbeitsraumbegrenzung, Singularitäten des Roboters)

Bahnplanungs-Schema

gegeben: Robotermodell (Geometrie, Kinematik), Umweltmodell

1. Berechnung des Konfigurationsraums K
2. Berechnung des Hindernisraums H
3. Berechnung des Freiraums $F = K \backslash H$
4. Zerlegung des Freiraums in Unterräume
5. Bahnplanung im Unterraum
6. Integration der lokalen Lösungen in Gasamtlösung

Konfiguration

Konfiguration k_R: beschreibt den Zustand eines Roboters R

- im euklidischen Raum durch Lage und Orientierung
- im Gelenkwinkelraum durch die Werte der Gelenke

Konfigurationsraum K_R: Raum aller möglichen Konfigurationen von R

Weg w von k_{start} bis k_{ziel}: stetige Abbildung

$$w : [0,1] \to K \quad \text{mit} \quad w(0) = k_{start}\,,\, w(1) = k_{ziel}$$

Arbeitsraum-Hindernis $h_{A,O}$: Raum, der von einem Objekt O im Arbeitsraum A eingenommen wird

Konfigurationsraum-Hindernis $h_{K,O}$: Raum, der von einem Objekt O im Konfigurationsraum K eingenommen wird

Hindernisraum H:

$$H = \bigcup_{O} h_{K,O}$$

Freiraum

- Freiraum F_R : $F_R = K_R \backslash H$
- Aufwand für Freiraumberechnung: $O(m^n)$ mit
  - n: Anzahl der Freiheitsgrade des Roboters
  - m: Anzahl der Hindernisse
- Deshalb oft approximative Verfahren zur Vereinfachung des Freiraums
  - Sichtgraphen
  - Quadtree, Octtree

7.3.5 Bahnplanung in 2D

Einfacher Algorithmus: "Strassenkarten"
gegeben: 2-dim. Weltmodell, Start und Ziel
gesucht: güstigste Verbindung von Start zu Ziel
Lösung:

1. konstruiere Netz von Wegen W in F_R
2. bilde k_{start} und k_{ziel} auf W ab: $(W(k_{start}), W(k_{ziel})$
3. suche Weg w, der $W(k_{start})$ mit $W(k_{ziel})$ verbindet

Wegkonstruktion

Wegkonstruktion mit

- Retraktionverfahren (z.B. Voronoi-Diagramm)
- Sichtgraphen
- Zellzerlegungsmethoden

Suche im Wegnetz mit z.B.

- A*-Algorithmus (Baumsuche)
- euklidischer Abstand
- Potentialfeld

Retraktion: Sei X eine Menge und $Y \subset X$. Eine surjektive Abbildung

$$p : X \to Y$$

heisst Retraktion genau dann, wenn p stetig ist und $p(y) = y$ für alle $y \in Y$ gilt.
D.h. die Abbildung der Menge X auf ihre Teilmenge Y, wobei die Menge Y auf sich selbst abgebildet wird. Für die Bahnplanung gilt:

- Y ist ein Netz von eindimensionalen Kurven (Wegenetz).
- Retraktionsmethoden unterscheiden sich in Wahl von p.

Sichtgraphen

Konstruktion:

- Verbinde jedes Paar von Eckpunkten auf dem Rand von F_R durch gerades Liniensegment, wenn das Segment kein Hindernis schneidet.
- Verbinde k_{start} mit k_{ziel} analog dazu.

Anmerkungen:

1. Wege sind nur "halbfrei" (nicht kollisionsfrei), da Hinderniskanten auch Wegsegmente sein können.
   Abhilfe: Erweiterung der Hindernisse
2. Wenn ein Weg gefunden ist, ist es auch der kürzeste Weg.
3. Methode ist exakt, wenn Roboter nur 2 translatorische Freiheitsgrade hat und sowohl Roboter als auch Hindernisse durch Polygone dargestellt werden können.
4. Methoden auch im R^3 anwendbar, jedoch sind die gefundenen Wege i.A. keine kürzesten Wege mehr.

Kürzester Pfad im Graphen

vom Startknoten ausgehend:

- wähle Nachbarknoten N_k so, dass Evaluationsfunktion $f(N_k)$ minimal
- suche von N_k ausgehend weiter
- wenn $f(N_k)$ nicht mehr kleiner wird, mache weiter oben im Baum weiter
- Problem: $f(N_k)$ darf nicht vom Teilbaum an N_k abhängen!
  (Würden wir den kennen, bräuchten wir nicht suchen.)
- Lösung: verwende Heuristik $h(N_k)$
- beliebt für die Heuristikfunktion in 2D: euklidischer Abstand

$$h(N_k) = ||N_k - N_{ziel}||$$

- rein heuristikbasierte Suche ist nicht optimal und führt nur unter Einschränkungen zum Ziel
- A*-Algorithmus:
  mit $g(N_k)$ Kosten zum Erreichen von N_k
- beweisbar optimal

$$f(N_k) = g(N_k) + h(N_k)$$

Kapitel 8

Wiederholungsfragen

8.1 Signalverarbeitung

1. Wenn im Frequenzbereich eine Faltung durchgeführt wird, welche Operation tritt dann im Zeitbereich auf?
2. Welche Eigenschaft muss ein Signal haben, damit eine Fourierreihenzerlegung für das Signal durchgeführt werden kann?
3. In der Spracherkennung wird häufig das Spektrum eines kurzen Intervalls berechnet. Leider wird dadurch eine Annahme verletzt und es tritt ein Effekt auf. Was ist die Annahme und welcher Effekt tritt auf?
4. Was besagt das Abtasttheorem?
5. Welches Problem entsteht wenn es nicht beachtet wird?
6. Mit welchen zwei Methoden kann diesem Problem entgegengewirkt werden? Welche Nachteile haben diese Methoden?
7. Skizzieren Sie den Unterschied zwischen einer Rechteck-Fensterfunktion und einer Fensterfunktion die den Leck-Effekt vermindert.

8.1.1 Fähigkeitencheck für die Klausur

- Bestimmung der Faltung grafisch
- Bestimmung der Faltung rechnerisch
- Digitalisierung von Signalen, Abtastung, Tritt Aliasing auf?
- Filtern mit Filter (Fourietransformation)
- Berechnung von Samplingrate, Grenzfrequenz, Frequenzauflösung, Zeitauflösung für DFT

8.2 Bildverarbeitung

1. Geben Sie die Formeln für die Umrechnung von RGB nach HSI an
   - falls $R = G = B$, dann ist H undefiniert
   - falls $R = G = B = 0$, dann ist S undefiniert
   - $c = arccos \frac{2R-G-B}{2\sqrt{(R-G)^2+(R-B)(G-B)}}$
   - $H = \begin{cases} c & \text{falls } B < G \\ 360^\circ - c & \text{sonst} \end{cases}$

- $S = 1 - \frac{3}{R+G+B} \min(R, G, B)$
- $I = \frac{1}{3}(R + G + B)$

2. Gebe die besonderen Werte für den arccos an.

-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

3. Wie berechnet man das Grauwerthistogramm?

$$H(x) = \begin{cases} Anzahl x = Wert \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{8.1}$$

4. Wie berechnet man beliebige Quantile?

   - AnzahlWerte*Quantil
   - Schauen welcher Wert ist in dieses Intervall von links nach rechts eingeschlossen

5. Wie berechnet man eine Histogrammdehnung? Welche Auswirkung hat eine Histogrammdehnung?

   - $f(x) = 0$ für linkes Quantil
   - $f(x) = 255$ für rechtes Quantil
   - $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \text{linkes Quantil} \\ 255 & \text{falls} x > \text{rechtes Quantil} \\ \frac{255}{rQ-lQ}x - \frac{255 \cdot lQ}{rQ-lQ} & \text{sonst} \end{cases}$

   Verbesserung der Spreizung. Anstatt der minimalen bzw. maximalen Intensität werden Quantile verwendet, um tatsächliche Maxima im Histogramm zu erkennen. Ist eine affine Punktoperation.

6. Wie berechnet man ein Histogrammausgleich? Welche Auswirkung hat ein Histogrammausgleich?
   Beim Histogrammausgleich werden Intensitäten erhöht die im Histogramm oft vorkommen. Dadurch werden stark vertretene Grauwerte besser sichtbar. Ist eine homogene Punktoperation aber keine affine Punktoperation. Kann in manchen Fällen auch zu einer Verminderung des Kontrast führen (siehe Übung).

7. Wie führt man Region-Growing durch?

   - Wähle einen Startpunkt
   - Initialisiere eine Liste mit diesem Punkt
   - Wähle eine Schwelle ϵ
   - Nehme aus der Liste einen Punkt für den noch nicht geschaut wurde (also nie für eine Punkt mehr als einmal schauen)
   - Ist der Unterschied der Grauwerte eines der direkten 4 Nachbarn kleiner als die Schwelle ϵ dann nehme diesen Punkt in die Liste auf.
   - Mache dies solange bis die Liste nicht mehr wächst.

8. Was ist der maximale Korrelationswert, den die Zero Mean Normalized Cross Correlation (ZNCC) liefern kann?

9. Warum kann man mit Hilfe der Epipolargeometrie das Sterokorrespondenzproblem schneller lösen?

10. Bennen Sie alle affinen Punktoperationen die in der Vorlesung behandelt wurden!

11. Was versteht man unter Non-Maximum Surpression?

8.2.1 Fähigkeitencheck für die Klausur

- Eine Sprzeiung durchführen
- Berechnung eines Histogramms, akummuliertes Histogramm
- Beweis das Filtermatrix eine Approximation des Gauß-Filters ist
- Anwendung des Morphologischen Schließen und Öffnen Operators
- Anwendung der Hough-Transformation
- Berechnung von Korrelation und Autokorrelation

8.3 Klassifikation

1. Erklären Sie den Unterschied zwischen Supervised - Unsupervised
2. Erklären Sie den Unterschied zwischen Parametrisch - Nicht-parametrisch

8.4 Spracherkennung

1. Welche Rolle spielt das Sprachmodell in der Automatischen Spracherkennung? Beschreiben Sie die zwei verschiedenen Ansätze, die in der Vorlesung behandelt wurden und nennen Sie je einen Vor- und einen Nachteil.
2. Benennen Sie alle wichtigen und in der Vorlesung dargestellten Komponenten eines modernen Spracherkenners (grobes Blockschaltbild). Kennzeichnen Sie auch in welcher Form die Datenströme vor und nach den jeweiligen Schritten vorliegen.
3. Wofür werden HMMs in der Spracherkennung eingesetzt? Welche Annahme wird in der Praxis für die Länge der Markov Ketten getroffen, wenn Sprache mit HMMs modelliert wird?
4. Stimmhafte Phoneme können in unterschiedlichen Tonhöhen produziert werden. Aus anatomischer Sicht ist dies für ein und dasselbe Phonem möglich, da die drei prinzipiellen Komponenten der Sprachproduktion unabhängig voneinander gesteuert werden können. Wie heißen diese, was ist deren Aufgabe und warum genau können Phoneme in unterschiedlichen Tonhöhen produziert werden?
5. Was ist ein Formant? Was ist das Vokaldreieck?

8.5 Maschinelles Lernen

8.6 3D-Bildverarbeitung

8.6.1 Geometrische 3D-Transformationen

1. Welche zwei Vorgehensweisen haben sich für die geometrische 3D-Transformation durchgesetzt?

   - Homogene Geometrie
   - Quaternionen

2. Nennen Sie drei Anforderungen an geometrische 3D-Transformationen:

   - Geschlossene Ausdrücke
   - Invertierbarkeit

- Interpolation

3. Wie lautet die Rotationsmatrix für eine Rotation um die x-Achse?
4. Wie lautet die Rotationsmatrix für eine Rotation um die y-Achse?
5. Wie lautet die Rotationsmatrix für eine Rotation um die z-Achse?
6. Der Vektor a soll um 180 um die x-Achse gedreht werden. Stellen Sie das entsprechende Quaternion auf.
7. Wie lautet die Formel für die Umrechnung von Quaternion zu Rotationsmatrix?
8. Wie lautet die Formel für die Umrechnung von Rotationsmatrix zu Quaternion?
9. Wie lautet die Formel zur numerischen Berechnung der SLERP zwischen q und r?
10. Berechnen Sie SLERP(q,r,0) und SLERP(q,r,1).
11. Gegeben sei das Quaternion $q_1 = (s, (x, y, z)) = (2, (4, -3, 0))$. Berechnen Sie das multiplikativ inverse Quaternion q_1^{-1}.
12. Rotieren Sie den Punkt $\vec{x} = (0, 0, 3)$ mit dem Quaternion $q_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0))$.
13. Wie lautet die Formel zur analytischen Berechnung der SLERP zwischen q und r, die in der Vorlesung vorgestellt wurde?

8.6.2 Erweitertes Kameramodell

1. Wenn man das in der Vorlesung behandelte Erweiterte Kameramodell mit dem Lochkameramodell vergleicht, welche vier Vereinfachungen werden beim Lochkameramodell gemacht?
2. Wie lautet die Formel für die Kalibriermatrix K?

$$K = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

3. Wie kommt man auf die Kalibriermatrix K?

$$\begin{pmatrix} u \cdot w \\ v \cdot w \\ w \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

4. Wie kommt man von einem Punkt in Weltkoordinaten A_w in die Bildkoordinaten A_B

$$A_B = K \cdot T \cdot W \cdot A_w \tag{8.4}$$

   T optional je nach dem ob linke oder rechte Kamera.

5. Formel für die Berechnung der Linie L die in einem bestimmten Bildpunkt B resultiert

$$L = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \frac{u - c_x}{f_x} \\ \frac{v - c_y}{f_y} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

6. Wie berechnet man den Schnittpunkt S zweier Linien L_L und L_R?
   - Translation in ein Koordinatensystem
   - Gleichsetzen, Z-Wert berechnen
   - Schnittpunt S aus berechnetem Z-Wert berechnen

8.6.3 Fähigkeitencheck für die Klausur

- Umgang mit Stereokameramodell
- Umgang mit Epipolargeometrie
- Bildpunkte ausrechnen

8.7 Visuelle Wahrnehmung

8.8 Wissen und Planung

8.8.1 Wissen

1. Aus was besteht eine Logik?
2. Was ist eine:
   (a) Symbolmenge
   (b) Belegungsmenge
   (c) Syntax
   (d) Semantik
   (e) Folgerungsoperator
3. Was ist eine Wissensbasis?
4. Was ist Deduktion?
5. Was ist ein Literal?
6. Beschreiben Sie die Resolutionsregel
7. Was ist eine Klausel?
8. Wann ist ein Deduktionsalgorithmus korrekt?
9. Wann ist ein Deduktionsalgorithmus vollständig?
10. Gegeben ist die folgende Klauselnmenge $WB = \{\{Q, \neg V, W\}, \{\neg W, X\}, \{\neg Q, W\}, \{\neg X, Y\}, \{V, \neg Y\}, \{\neg W, \neg Y\}$
    Zeigen Sie mit dem Resolutionsalgorithmus das $V \Leftrightarrow Y$ ableitbar ist.
11. Der Resolutionsalgorithmus hat welches Problem?
12. In welcher Zeit lässt sich mit den Horn-Formeln die Ableitbarkeit beantworten?
13. Wie lauten die drei Horn-Klauseln?
14. Wozu dienen Integritätseinschränkungen?
15. Nennen Sie den wesentlichen Nachteil von Horn-Formel im Vergleich zu prädikatenlogischen Formeln allgemein!
16. Gegeben ist folgende Wissensbasis $K = (P \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg P \vee Q) \wedge (\neg C \vee R \vee \neg Q) \wedge A \wedge B$
    (a) Erstellen Sie den Und-/Oder-Graphen
    (b) Überprüfen Sie mittels Rückwärtsverkettung, ob sich Aussage R aus der Wissensbasis folgern lässt
    (c) Was könnte eine Frage für eine Vorwärtsverkettung sein?

17. Prüfen Sie mithilfe des DPLL-Algorithmus, ob die prädikatenlogische Formel: $A \wedge (\neg A \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg A \vee D \vee E) \wedge (\neg D \vee E \vee F) \wedge (D \vee \neg F)$ erfüllbar ist. Geben Sie in jedem Schritt an, warum Sie eine Variable mit einem bestimmten Wert belegen.

18. Durch welche Maßnahme kann ein Roboter als Punkt behandelt werden.

19. Was sind die Nachteile der Potentialfeldmethode?

20. Wieso ist der Einsatz einer Heuristik bei vielen Planungsproblemen sinnvoll oder notwendig?

21. Auch beim A*-Algorithmus wird eine Heuristik verwendet. An welcher Stelle im Algorithmus kommt eine Heuristik zum Einsatz?

22. Welche Eigenschaften muss sie hierbei erfüllen, damit der A*-Algorithmus den kürzesten Weg zum Ziel tatsächlich finden kann?

Literaturverzeichnis

[DBR00] J. Deutscher, A. Blake, and I. Reid. Articulated body motion capture by annealed particle filtering. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 2000. Proceedings. IEEE Conference on*, volume 2, pages 126–133, 2000. 66

Index