СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

очень краткий справочник

А. Ринчино *

2025

Случайные величины

Под *случайной величиной* понимают величину, которая в результате испытания со случайным исходом принимает то или иное числовое значение, причём заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины (кратко СВ) обычно обозначают прописными латинскими буквами $X, Y, \ldots$ (иногда используются «греческие» обозначения $\xi, \theta, \zeta, \ldots$), а принимаемые ими значения – малыми буквами $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$.

Дискретные случайные величины

Если множество возможных значений СВ X конечно или счётно (это значит, что его элементы могут быть перенумерованы натуральными числами), т. е. дискретно, то СВ X называется *дискретной* (коротко ДСВ X).

Закон распределения ДСВ X удобно задавать с помощью следующей таблицы

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

называемой *рядом распределения*. При этом возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ СВ X в верхней строке этой таблицы располагаются в определённом порядке, а в нижней – соответствующие вероятности: $p_i = \mathsf{P}\{X = x_i\}$ $\left(\sum_i p_i = 1\right)$.

Функция вероятности (probability mass function, PMF)

Функция вероятности – дискретная функция $p(x)$ дискретного аргумента, возвращающая вероятность того, что ДСВ X примет определённое значение:

$$p(x_i) = \mathsf{P}\{X = x_i\}.$$

*МГТУ им. Н. Э. Баумана

Функция распределения (интегральная, кумулятивная) (cumulative distribution function, CDF)

Кумулятивной функцией распределения (просто *функцией распределения, интегральной функцией распределения*) СВ X называется функция $F_X(x)$ (коротко $F(x)$), которая для любого числа $x \in \mathbb{R}$ равна вероятности события $\{X \leqslant x\}$ (что случайная величина X примет значение, не превышающее число x), т. е.

$$F(x) \overset{def}{=} \mathsf{P}\{X \leqslant x\} \ \forall x.$$

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$, если $x_1 \leqslant x_2$;

3. $F(-\infty) = 0$;

   $F(+\infty) = 1$;

4. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x, т. е. $F(x - 0) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

5. $\mathsf{P}\{\alpha \leqslant X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha)$.

   В последнем соотношении неравенства могут быть как строгими, так и нестрогими: $\mathsf{P}\{\alpha < X < \beta\} = \mathsf{P}\{\alpha \leqslant X \leqslant \beta\} = F(\beta) - F(\alpha)$.

Функция распределения ДСВ имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

где суммирование ведётся по всем индексам i, для которых $x_i < x$.

Математическое ожидание дискретных величин

По определению $\mathsf{E}\,(x) \overset{def}{=} \sum_i x_i p_i$.
Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $\mathsf{E}(c) = c$, $c = \text{const}$ (в общем случае c – неслучайная величина);

2. $\mathsf{E}\,(c \cdot X) = c \cdot \mathsf{E}\,(X)$;

3. $\mathsf{E}\,(X + Y) = \mathsf{E}\,(X) + \mathsf{E}\,(Y)$;

   $\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,(X)$;

4. Если X и Y – независимы (некоррелированы), то $\mathsf{E}\,(X \cdot Y) = \mathsf{E}\,(X) \cdot \mathsf{E}\,(Y)$;

   $\mathsf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,(X_i)$;

5. $\mathsf{E}\left[L\left(X\right)\right]=\sum\limits_{i}L\left(x_i\right)p_i$, где L – линейная функция;

6. Если X и Y – зависимы (коррелированы), то $\mathsf{E}\left(X\cdot Y\right)=\mathsf{E}\left(X\right)\cdot\mathsf{E}\left(Y\right)+\operatorname{cov}\left(X{,}Y\right)$.

Дисперсия дискретных величин

По определению

$$\operatorname{Var}\left(X\right)\overset{def}{=}\mathsf{E}\left[\left(X-\mathsf{E}(X)\right)^2\right],$$

но чаще используется такая формула:

$$\operatorname{Var}\left(X\right)=\mathsf{E}\left(X^2\right)-\mathsf{E}^2\left(X\right).$$

Из последнего можно вывести следующие соотношения:

$$\mathsf{E}\left(X^2\right)=\operatorname{Var}\left(X\right)+\mathsf{E}^2\left(X\right);$$

$$\mathsf{E}^2\left(X\right)=\operatorname{Var}\left(X\right)+\mathsf{E}\left(X^2\right).$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. $\operatorname{Var}\left(c\right)=0,\ c=\mathrm{const}$ (в общем случае c – неслучайная величина);

2. $\operatorname{Var}\left(c\cdot X\right)=c^2\cdot\operatorname{Var}\left(X\right);$

3. $\operatorname{Var}\left(X\pm Y\right)=\operatorname{Var}\left(X\right)+\operatorname{Var}\left(Y\right)\pm 2\operatorname{cov}\left(X{,}Y\right);$

4. Если X и Y – независимы (некоррелированы), то

$$\operatorname{Var}\left(X+Y\right)=\operatorname{Var}\left(X\right)+\operatorname{Var}\left(Y\right)$$

и

$$\operatorname{Var}\left(X-Y\right)=\operatorname{Var}\left(X\right)+\operatorname{Var}\left(Y\right).$$

5. $\operatorname{Var}\left(c+X\right)=\operatorname{Var}\left(X\right)$

6. $\operatorname{Var}\left(X\cdot Y\right)=\operatorname{Var}X\cdot\operatorname{Var}Y+\operatorname{Var}X\cdot\mathsf{E}\left(Y^2\right)+\operatorname{Var}Y\cdot\mathsf{E}\left(X^2\right).$

Данное свойство может быть достаточно просто доказано:

$$\operatorname{Var}\left(X\cdot Y\right)=\left[\mathsf{E}(XY)\right]^2-\mathsf{E}\left[\left(XY\right)^2\right]=\mathsf{E}^2(X)\cdot\mathsf{E}^2(Y)-\mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}\left(Y^2\right)=$$

$$=\left[\operatorname{Var}X+\mathsf{E}\left(X^2\right)\right]\left[\operatorname{Var}Y+\mathsf{E}\left(Y^2\right)\right]-\mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}\left(Y^2\right)=$$

$$=\operatorname{Var}X\cdot\operatorname{Var}Y+\operatorname{Var}X\cdot\mathsf{E}\left(Y^2\right)+\operatorname{Var}Y\cdot\mathsf{E}\left(X^2\right)+\cancel{\mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}\left(Y^2\right)}-\cancel{\mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}\left(Y^2\right)}=$$

$$=\operatorname{Var}X\cdot\operatorname{Var}Y+\operatorname{Var}X\cdot\mathsf{E}\left(Y^2\right)+\operatorname{Var}Y\cdot\mathsf{E}\left(X^2\right).$$

Окончательно получаем:

$$\operatorname{Var}\left(X\cdot Y\right)=\operatorname{Var}X\cdot\operatorname{Var}Y+\operatorname{Var}X\cdot\mathsf{E}\left(Y^2\right)+\operatorname{Var}Y\cdot\mathsf{E}\left(X^2\right).$$

Стандартное отклонение дискретных величин

$$\sigma(X)\overset{def}{=}\sqrt{\operatorname{Var}(X)}.$$

Заметим, что в научной и учебной литературе дисперсия часто обозначается как σ^2. В этой связи логично, что $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$.

Ковариация (корреляционный момент) дискретных величин

$$\operatorname{cov}(X,Y) \stackrel{def}{=} \mathsf{E}\left[(X - \mathsf{E}(X) \cdot (Y - \mathsf{E}(Y)\right] = \mathsf{E}(X \cdot Y) - \mathsf{E}(X) \cdot \mathsf{E}(Y)$$

Свойства:

1. $\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{Var}(X)$;
2. Если X и Y – независимы, то $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$;
3. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$;
4. $\operatorname{cov}(c \cdot X,Y) = c \cdot \operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X, c \cdot Y)$;
5. $\operatorname{cov}(X+Y,Z) = \operatorname{cov}(X,Z) + \operatorname{cov}(Y,Z)$;
6. $\operatorname{cov}(X,Y+Z) = \operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{cov}(X,Z)$.

Корреляция дискретных величин

Корреляция (*линейный коэффициент корреляции* или *коэффициент корреляции Пирсона*) двух СВ X и Y определяется как

$$\rho_{X,Y} \stackrel{def}{=} \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

Зная корреляцию и дисперсии, можно отыскать ковариацию:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \rho_{X,Y} \cdot \sigma(X) \cdot \sigma(Y) = \rho_{X,Y} \sqrt{\operatorname{Var} X} \cdot \sqrt{\operatorname{Var} Y}.$$

Свойства:

1. $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$;
2. $-1 \leqslant \rho_{X,Y} \leqslant 1$;
3. Коэффициент корреляции равен ± 1 тогда и только тогда, когда X и Y линейно зависимы (исключая события нулевой вероятности, когда несколько точек «выбиваются» из прямой, отражающей линейную зависимость случайных величин):

   $$\rho_{X,Y} = \pm 1 \Leftrightarrow Y = kX + b, k \neq 0, \text{ где } k, b \in \mathbb{R}.$$

   Более того в этом случае знаки $\rho_{X,Y}$ и k совпадают: $\operatorname{sgn} \rho_{X,Y} = \operatorname{sgn} k$.

Непрерывные случайные величины

Случайная величина X называется *непрерывной*, если в результате испытания она может принять любое значение из некоторого числового промежутка $[a,b]$. Таким образом, множество возможных значений СВ X заполняет (непрерывно) конечный или бесконечный промежуток на числовой оси. Говорят, что НСВ X распределена на $[a,b]$:

$$X \sim [a,b] \, .$$

Функция распределения $F\left(x\right)$ непрерывной случайной величины непрерывна на всей числовой оси (иногда этот факт берут в качестве определения НСВ).

Количество возможных значений НСВ бесконечно. Поэтому, в отличие от дискретных случайных величин, вероятность отдельного значения для непрерывной случайной величины равна нулю:

$$\mathsf{P}\left\{X = x\right\} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Плотность вероятности (плотность распределения, функция плотности, probability density function, PDF)

Если существует такая функция $f(x) \geqslant 0$, что для произвольных $\alpha < \beta$

$$\mathsf{P}\left(\alpha \leqslant X \leqslant \beta\right) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

то говорят, что случайная величина X (или её распределение вероятностей) имеет *плотность* $f(x)$.

Часто *плотность распределения* определяют как производную функции распределения:

$$f\left(x\right) = F'\left(x\right).$$

График плотности распределения $f\left(x\right)$ называется *кривой распределения.*

Свойства плотности:

1. $\mathsf{P}\left(\alpha \leqslant X \leqslant \beta\right) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx;$
2. $f\left(x\right) \geqslant 0;$
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx = 1;$
4. $F\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} f\left(t\right)dt;$
5. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$

Математическое ожидание непрерывных величин

$$\mathsf{E}\left(X\right) \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f\left(x\right) dx.$$

Дисперсия непрерывных величин

$$\mathrm{Var}\left(X\right) \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mathsf{E}(X)\right)^2 \cdot f\left(x\right) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f\left(x\right) dx - \mathsf{E}^2(X).$$

Стандартное отклонение непрерывных величин

$$\sigma(X) \overset{def}{=} \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Квантили

Квантилем уровня α СВ X называется число q_α, удовлетворяющее уравнению

$$\mathsf{P}\left\{X \leqslant q_\alpha\right\} = \alpha.$$

Таким образом, q_α является решением уравнения

$$F\left(q_\alpha\right) = \alpha.$$

В частности, $q_{0,5} = \mathrm{Me}\left(X\right)$ – *медиана*.

Дискретные вероятностные распределения

Биномиальное

$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$\mathrm{PMF}: \ p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, где $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$\mathsf{E} = np$

$\mathrm{Var} = npq$

$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \mathsf{E}^2(X) + \mathrm{Var}\,X = (np)^2 + npq = np\,(np+q)$

$\mathrm{CDF}: F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Пуассона

$X \sim \mathrm{Pois}(\lambda = np)$

$\mathrm{PMF}: p\,(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

$\mathsf{E} = \lambda$

$\mathrm{Var} = \lambda$

Геометрическое

$X \sim \mathrm{Geom}(p)$

$\mathrm{PMF}: p\,(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p^k = q^{k-1} \cdot p^k$

$\mathsf{E} = \dfrac{1}{p}$

$\mathrm{Var} = \dfrac{1-p}{p^2}$

Непрерывные вероятностные распределения

Непрерывное равномерное

$X \sim \mathrm{U}\,(a,b)$

$\mathrm{PDF}: \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\,, & x \in [a,b]\,; \\ 0, & x \notin [a,b]\,. \end{cases}$

$\mathrm{CDF}: \ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$

$\mathsf{E} = \dfrac{a+b}{2}$

$\mathrm{Var} = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

$\mathsf{P}\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$

Экспоненциальное (показательное)

$X \sim \mathrm{Exp}\left(\lambda\right)$
PDF: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
CDF: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$\mathsf{E} = \dfrac{1}{\lambda}$
$\mathrm{Var} = \dfrac{1}{\lambda^2}$
$\mathsf{P}\left(\alpha \leqslant X \leqslant \beta\right) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$

Нормальное

$X \sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma\right)$
PDF : $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ x \in \mathbb{R}$
CDF: $F\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$
$\mathsf{E} = \mu$
$\mathrm{Var} = \sigma^2$
$\mathsf{P}\left(\alpha \leqslant X \leqslant \beta\right) = \Phi\left(\dfrac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$
$\mathsf{P}\left(|X - \mu| \leqslant \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)$, где $\Phi\left(z\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция *стандартного* нормального распределения.

	PMF, PDF	CDF	E	Var	$\mathsf{P}\left(\alpha \leqslant X \leqslant \beta\right)$
Bin	$\binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$	$\sum\limits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	
Geom	$\left(1-p\right)^{k-1} \cdot p^k$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	
Pois	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$		λ	λ	
U	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{\left(b-a\right)^2}{12}$	$\frac{\beta-\alpha}{b-a}$
Exp	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$
N	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$	μ	σ^2	$\Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \\ -\Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$