1.1. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое), следствие события, невозможное и достоверное событие, примеры. Операции над событиями. Сформулировать классическое определение вероятности и доказать его следствия.

Множество Ω всех возможных исходов случайного эксперимента будем называть пространством элементарных исходов.

Примеры

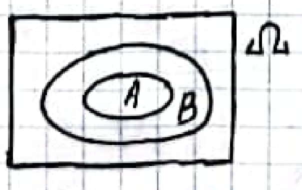
1) Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки, т.е. $\Omega = \{$"Герб", "Решка"$\}$, $|\Omega| = 2$.

2) Происходит выстрел по плоской мишени. Наблюдаемый результат: пара (x, y) - координаты точки попадания пули, т.е. $\Omega = \mathbb{R}^2$.

3) Бросают монету до первого появления герба. Наблюдаемый результат - число бросков, т.е. $\Omega = \{1, 2, \dots\}$, $|\Omega| = \aleph_0$

Событием называется (любое) подмножество множества элементарных исходов Ω.

Событие B называется следствием события A, если наступление события A в результате эксперимента влечёт и наступление события B, т.е. $A \subseteq B$



Любое множество Ω содержит 2 подмножества: $\varnothing$, Ω. Соответствующие события называются несобственными, а все остальные события называются собственными. При этом

$\varnothing$ называется невозможным событием

Ω называется достоверным событием.

Примеры

1) Подкидывают 2 игральных кубика. Наблюдаемый результат: сумма чисел на верхних гранях. Рассмотрим события:

A = "сумма не превосходит 12" $= \Omega$ – достоверное событие

B = "сумма равна 1" $= \varnothing$ – невозможное событие.

2) Из урны, содержащей 2 белых и 3 чёрных шара, случайным образом извлекают один шар. Рассмотрим события:

A = "шар белого или чёрного цвета" $= \Omega$ – достоверное событие

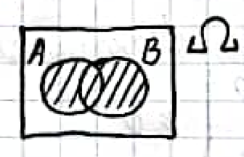
B = "шар красного цвета" $= \varnothing$ – невозможное событие.

Операции над событиями

События являются множествами (подмножествами в Ω), поэтому над ними определены все те же операции, что и над множествами:

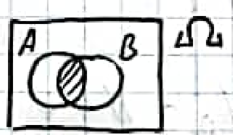
1) Сумма событий

$A \cup B = A + B$



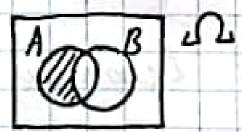
2) Произведение событий

$A \cap B = A \cdot B$



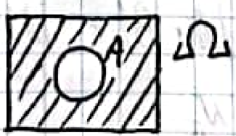
3) Разность событий

$A \setminus B$



4) Дополнение события

$\bar{A} = \Omega \setminus A$



Классическое определение вероятности

Пусть 1) $|\Omega| = N < \infty$

2) По условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход остальным (т.е. все исходы равновозможны)

Тогда вероятностью осуществления события A называется число $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$, где N_A - число исходов, вошедших в A, т.е $N_A = |A|$.

Следствия (свойства):

1° $\forall A \ \ P(A) \geqslant 0$

2° $P(\Omega) = 1$

3° Если A и B несовместны $(A \cdot B = \varnothing)$, то

$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\}$

Доказательство:

1° $P\{A\} = \frac{N_A}{N} = \left\{ \begin{matrix} N_A \geqslant 0 \\ N > 0 \end{matrix} \right\} \geqslant 0$

2° $P\{\Omega\} = \frac{N_\Omega}{N} = \left\{ N_\Omega = N \right\} = \frac{N}{N} = 1.$

3° Используя формулу включений и исключений:

$|A+B| = |A| + |B| - |A \cdot B| = |A| + |B| - |\varnothing| = |A| + |B|$

Т.е. $N_{A+B} = N_A + N_B$

$P\{A+B\} = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P\{A\} + P\{B\}$

1.2. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое). Сформулировать геометрическое и статистическое определения вероятности. Достоинства и недостатки этих определений.

Смотреть 1.1.

Геометрическое определение обобщает классическое определение на случай $|\Omega| = c$ (континуум)

Пусть 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ - мера $\begin{cases} n=1 - \text{длина} \\ n=2 - \text{площадь} \\ n=3 - \text{объём} \\ \dots \end{cases}$

3) возможность принадлежности исхода некоторому событию $A \subseteq \Omega$ не зависит ни от формы A, ни от расположения A внутри Ω, а пропорциональна мере события A.

Тогда вероятностью осуществления события A называется число:

$$P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Достоинства:

Обобщает классическое определение на случай $|\Omega| = c$

Недостатки:

Геометрическое определение не учитывает, что отдельные области внутри Ω могут быть более предпочтительными, чем другие.

Статистическое определение вероятности

Пусть случайный эксперимент произведён n раз, в результате чего событие A наступило n_A раз.

Вероятностью осуществления события A называется эмпирический предел (т.е. известный из опыта) предел:

$$P\{A\} = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Недостатки

1) Никакой эксперимент нельзя произвести бесконечное число раз.

2) С точки зрения современной математики статистическое определение является архаизмом, т.к. не даёт базы для построения теории.

Достоинства

Достоинством статистического определения является его приближённость к практике.

Сканировано с CamScanner

1.3. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать простейшие свойства сигма-алгебры. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности.

Смотреть 1.1.

Пусть 1) Ω – некоторое пространство элементарных исходов

2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ – набор подмножеств множества Ω

Тогда $\mathcal{B}$ называется сигма-алгеброй событий, если:

1) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$

2) $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \mathcal{B}$

Простейшие свойства сигма-алгебры:

1°. $\Omega \in \mathcal{B}$

2°. $\emptyset \in \mathcal{B}$

3°. Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$

4°. Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$

Доказательство:

1°. $\mathcal{B} \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in \mathcal{B} \Rightarrow \{\text{аксиома } 1\} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$

Таким образом $A \in \mathcal{B}, \overline{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \{\text{аксиома } 2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A + \overline{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{B}$

2°. $\Omega \in \mathcal{B}$ (см. св-во 1°) $\Rightarrow \{\text{аксиома } 1\} \Rightarrow \overline{\Omega} \in \mathcal{B} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}$

3°. $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \{\text{аксиома } 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \{\text{аксиома } 2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} + \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \{\text{аксиома } 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} + \ldots} \in \mathcal{B} \Rightarrow \{\text{закон де Моргана}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\overline{A_1}} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{A_n}} \cdot \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$

4°. $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \{\text{аксиома } 1\} \Rightarrow A, \overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow \{\text{свойство } 3°\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A\overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{B}$ ■

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть 1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента

2) $\mathcal{B}$ – сигма-алгебра событий на Ω

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение $P: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, обладающее свойствами:

1°. $\forall A \in \mathcal{B} \quad P\{A\} \geq 0$ (аксиома неотрицательности)

2°. $P\{\Omega\} = 1$ (аксиома нормированности)

3°. Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B}$ – попарно несовместные события (т.е. $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$), то $P\{A_1 + \ldots + A_n + \ldots\} = P\{A_1\} + \ldots + P\{A_n\} + \ldots$ (расширенная аксиома сложения)

Тройка $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ называется вероятностным пространством.

1.4. Определение пространства элементарных исходов; примеры. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности и доказать простейшие свойства вероятности.

Смотреть 1.1, 1.3.

Свойства вероятности.

1° $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$

2° $P\{\varnothing\} = 0$

3° Если $A \subseteq B$, то $P\{A\} \leq P\{B\}$

4° $\forall A \in \mathcal{B}: \quad 0 \leq P\{A\} \leq 1$

5° $P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$

6° $$P\{A_1 + \ldots + A_n\} = \sum_{i_1=1}^{n} P\{A_{i_1}\} - \sum_{i_1<i_2} P\{A_{i_1}A_{i_2}\} + \sum_{i_1<i_2<i_3} P\{A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\} - \ldots + (-1)^{n+1} P\{A_1 \cdot \ldots \cdot A_n\}$$

Доказательство:

1° $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$

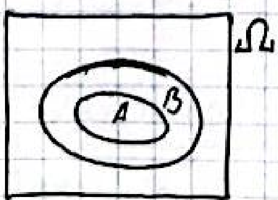
При этом $A\bar{A} = \varnothing \Rightarrow \{\text{аксиома } 3\} \Rightarrow P\{A + \bar{A}\} = P\{A\} + P\{\bar{A}\}$

Но $A + \bar{A} = \Omega \Rightarrow \{\text{аксиома } 2\} \Rightarrow P\{A + \bar{A}\} = 1$

Т.е. $P\{A\} + P\{\bar{A}\} = 1 \Rightarrow P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$

2° $P\{\varnothing\} = P\{\bar{\Omega}\} = \{\text{свойство } 1°\} = 1 - P\{\Omega\} = \{\text{аксиома } 2\} = 1 - 1 = 0$

3°



$B = (B \setminus A) + A$, при этом

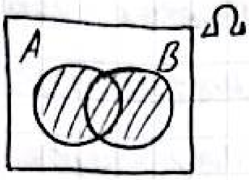
$(B \setminus A) A = \varnothing \Rightarrow \{\text{аксиома } 3°\} \Rightarrow$

$\Rightarrow P\{B\} = \underbrace{P\{B \setminus A\}}_{\geq 0 \text{ (аксиома } 1°)} + P\{A\} \Rightarrow P\{B\} \geq P\{A\}$

4° $P\{A\} \geq 0$ следует из аксиомы 1°. Осталось доказать $P\{A\} \leq 1$

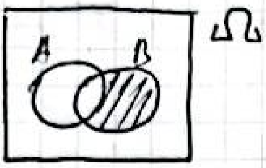
$A \subseteq \Omega \Rightarrow \{\text{свойство } 3°\} \Rightarrow P\{A\} \leq P\{\Omega\} = \{\text{аксиома } 2°\} = 1$

5°.



1) $A+B = \underbrace{A + B\backslash A}_{\text{несовместны}}$

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\backslash A\} \qquad (1)$$



2) $B = \underbrace{(B\backslash A) + AB}_{\text{несовместны}}$

$$P\{B\} = P\{B\backslash A\} + P\{AB\} \Rightarrow P\{B\backslash A\} = P\{B\} - P\{AB\} \quad (2)$$

3) Из (1) и (2) имеем:

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$$

6°. Является обобщением свойства 5°. и может быть доказано аналогично формуле включений и исключений.

1.5. Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что при фиксированном событии B условная вероятность $P\{A|B\}$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Пусть 1) $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – вероятностное пространство

2) $A, B \in \mathcal{B}$ – 2 события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

3) дополнительно известно, что в результате эксперимента произошло событие B.

Тогда условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число

$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}, \text{ где } P\{B\} > 0.$$

Теорема

Условная вероятность $P\{A|B\}$ удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности.

Доказательство:

1°. Аксиома неотрицательности

$$\forall A: P\{A|B\} = \{\text{определение}\} = \frac{\overset{1^\circ}{\overset{\shortparallel}{P\{AB\}}}}{\underset{>0}{P\{B\}}} \geq 0$$

2°. Аксиома нормированности

$$P\{\Omega|B\} = \{\text{определение}\} = \frac{P\{\Omega B\}}{P\{B\}} = \frac{P\{B\}}{P\{B\}} = 1$$

3°. Расширенная аксиома сложения

Пусть $A_1, \dots, A_n, \dots$ – попарно несовместные события, тогда

$$P\{A_1 + \dots + A_n + \dots | B\} = \frac{P\{(A_1 + \dots + A_n + \dots)B\}}{P\{B\}} = \left\{\begin{matrix}\text{счётная дистри-}\\ \text{бутивность } \cap \\ \text{относительно } \cup\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{P\{B\}} P\{A_1B + \dots + A_nB + \dots\} = \left\{\begin{matrix} A_iB \subseteq A_i \Rightarrow A_1B, \dots, A_nB, \dots - \\ \text{попарно несовместны} \Rightarrow \text{это} \\ \text{аксиома } 3^\circ \text{ для безусловной вер.}\end{matrix}\right\} =$$

Сканировано с CamScanner

$$= \frac{1}{P\{B\}}\left[P\{A_1B\}+\ldots+P\{A_nB\}+\ldots\right] = \frac{P\{A_1B\}}{P\{B\}}+\ldots+\frac{P\{A_nB\}}{P\{B\}}+\ldots =$$

$$= P\{A_1|B\}+\ldots+P\{A_n|B\}+\ldots$$

Следствие. Условная вероятность обладает всеми свойствами безусловной:

1° $P\{\bar{A}|B\} = 1 - P\{A|B\}$

2° $P\{\varnothing|B\} = 0$

3° Если $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P\{A_1|B\} \leq P\{A_2|B\}$

4° $0 \leq P\{A|B\} \leq 1$

5° $P\{A_1 + A_2|B\} = P\{A_1|B\} + P\{A_2|B\} - P\{A_1A_2|B\}$

6° $P\{A_1 + A_2 + \ldots + A_n|B\} = \sum\limits_{i_1=1}^{n} P\{A_{i_1}|B\} - \sum\limits_{i_1<i_2} P\{A_{i_1}A_{i_2}|B\} + \ldots +$

$$+ (-1)^{n+1} P\{A_1 \cdot \ldots \cdot A_n|B\}$$

Доказательство:

1° $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$

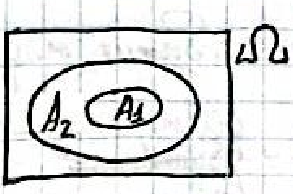
При этом $A\bar{A} = \varnothing \Rightarrow \{\text{аксиома } 3\} \Rightarrow P\{A+\bar{A}|B\} = P\{A|B\} + P\{\bar{A}|B\}$

Но $A + \bar{A} = \Omega \Rightarrow \{\text{аксиома } 2\} \Rightarrow P\{A+\bar{A}|B\} = 1$

Т.е. $P\{A|B\} + P\{\bar{A}|B\} = 1 \Rightarrow P\{\bar{A}|B\} = 1 - P\{A|B\}$

2° $P\{\varnothing|B\} = P\{\bar{\Omega}|B\} = \{\text{свойство } 1°\} = 1 - P\{\Omega|B\} =$

$$= \{\text{аксиома } 2°\} = 1 - 1 = 0$$

3° 

$A_2 = (A_2 \setminus A_1) + A_1$

При этом $(A_2 \setminus A_1)A_1 = \varnothing \Rightarrow \{\text{аксиома } 3\} \Rightarrow$

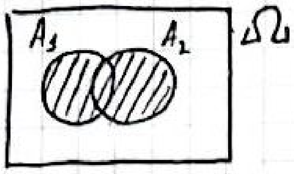
$$\Rightarrow P\{A_2|B\} = \underbrace{P\{A_2 \setminus A_1|B\}}_{\geq 0 \ \{\text{аксиома } 1\}} + P\{A_1|B\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{A_2|B\} \geq P\{A_1|B\}$$

4°. $P\{A|B\} \geq 0$ следует из аксиомы 1. Осталось доказать $P\{A|B\} \leq 1$

$A \subseteq \Omega \Rightarrow \{\text{свойство } 3°\} \Rightarrow P\{A|B\} \leq P\{\Omega|B\} = \{\text{аксиома } 2°\} = 1.$

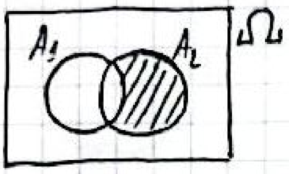
5°.



1) $A_1 + A_2 = A_1 + A_2 \setminus A_1$

несовместны

$$P\{A_1 + A_2|B\} = P\{A_1|B\} + P\{A_2 \setminus A_1|B\} \quad (1)$$



2) $A_2 = (A_2 \setminus A_1) + A_1 A_2$

несовместны

$$P\{A_2|B\} = P\{A_2 \setminus A_1|B\} + P\{A_1 A_2|B\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{A_2 \setminus A_1|B\} = P\{A_2|B\} - P\{A_1 A_2|B\} \quad (2)$$

3) Из (1) и (2) имеем:

$$P\{A_1 + A_2|B\} = P\{A_1|B\} + P\{A_2|B\} - P\{A_1 A_2|B\}$$

6°. является обобщением свойства 5° и может быть доказано аналогично формуле включений и исключений.

1.6. Сформулировать определение условной вероятности. Доказать теорему (формулу) умножения вероятностей. Привести пример использования этой формулы.

Смотреть 1.5.

Формула умножения вероятностей для двух событий.

Пусть $P\{A\} > 0$, тогда:

$$P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B|A\}$$

Доказательство:

Т.к. $P\{A\} > 0$, то определена условная вероятность:

$$P\{B|A\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}} \Rightarrow P\{AB\} = P\{A\} P\{B|A\}$$

Формула умножения вероятностей для произвольного числа событий

Пусть 1) $A_1, \dots, A_n$ – события, связанные с некоторым случайным экспериментом

2) $P\{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}\} > 0$

Тогда:

$$P\{A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2|A_1\} P\{A_3|A_1 A_2\} \cdot \ldots \cdot P\{A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}\}$$

Доказательство:

1) Рассмотрим $A_1, \dots, A_k$, где $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \supseteq A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \Rightarrow P\{A_1 \cdot \ldots \cdot A_k\} \geq P\{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}\} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ все условные вероятности, входящие в правую часть формулы умножения, определены.

2) $P\{\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}_{A} \cdot \underbrace{A_n}_{B}\} = \left\{ \begin{matrix} \text{формула умножения} \\ \text{для двух событий} \end{matrix} \right\} =$

$= P\{\underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}}_{A} \cdot \underbrace{A_{n-1}}_{B}\} \cdot P\{A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}\} = \left\{ \begin{matrix} \text{формула умножения} \\ \text{для двух событий} \end{matrix} \right\} =$

$= P\{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}\} \cdot P\{A_{n-1} | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}\} \cdot P\{A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}\} = \ldots =$

$$= P\{A_1\} \cdot P\{A_2|A_1\} \cdot P\{A_3|A_1A_2\} \cdot \ldots \cdot P\{A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}\}$$

Пример

На 7 карточках написаны буквы слова ШОКОЛАД. Карточки перемешиваются случайным образом и извлекают последовательность $3^{ех}$ карточек. Найти вероятность события:

$A = \{$в порядке появления, извлечённые карточки образуют слово ШОК$\}$

Решение:

1) Пусть $A_1 = \{$при 1-м извлечении появилась буква "ш"$\}$

$A_2 = \{$при 2-м ~~изв~~ — // — "о"$\}$

$A_3 = \{$при 3-м — // — "к"$\}$

Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$:

$$P\{A\} = P\{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3\} = \left\{ \begin{matrix} \text{формула} \\ \text{умножения} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \underbrace{P\{A_1\}}_{1/7} \cdot \underbrace{P\{A_2|A_1\}}_{2/6} \cdot \underbrace{P\{A_3|A_2A_1\}}_{1/5} = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105}$$

1.7. Сформулировать определение пары независимых событий. Доказать критерий независимости двух событий. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Обосновать связь этих св-в.

Пусть A и B – события, связанные с некоторым случайным экспериментом

События A и B называются независимыми, если

$$P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}$$

Теорема

1) Если $P\{B\} > 0$, то A и B независимы $\Leftrightarrow$ $P\{A|B\} = P\{A\}$

2) Если $P\{A\} > 0$, то A и B независимы $\Leftrightarrow$ $P\{B|A\} = P\{B\}$

Доказательство

1) Докажем (1)

I. Необходимость $(\Rightarrow)$

Пусть известно, что $P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}$, тогда:

$$P\{A|B\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{по определению} \\ P\{B\} > 0 \end{array} \right\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} = \frac{P\{A\}P\{B\}}{P\{B\}} = P\{A\}$$

II. Достаточность $(\Leftarrow)$

Пусть $P\{A|B\} = P\{A\}$

Тогда $P\{AB\} = \left\{ \begin{array}{l} P\{B\} > 0, \text{ по} \\ \text{теореме умножения} \end{array} \right\} = P\{B\}P\{A|B\} =$

$$= P\{B\}P\{A\}$$

2) Утверждение (2) доказывается аналогично

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если $\forall k \in \{2, \ldots, n\}$ и $\forall$ набора $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ такого, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ выполняется условие:

$$P\{A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}\} = P\{A_{i_1}\} \cdot \ldots \cdot P\{A_{i_k}\}$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ таких, что $i_1 < i_2$ выполняется условие $P\{A_{i_1} A_{i_2}\} = P\{A_{i_1}\} \cdot P\{A_{i_2}\}$

$A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности $\Longrightarrow$ $A_1, \ldots, A_n$ независимы попарно

Из независимости в совокупности событий $A_1, \ldots, A_n$ следуют следующие равенства: $P\{A_1 \cdot A_2\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2\}, \ldots,$ $P\{A_{n-1} \cdot A_n\} = P\{A_{n-1}\} \cdot P\{A_n\}$, что означает независимость этих событий попарно. Но из попарной независимости не следует независимость в совокупности (пример Бернштейна).

Рассмотрим правильный тетраэдр, на гранях которого написаны числа "1", "2", "3" и "123". Тетраэдр подбрасывают. Рассмотрим следующее событие:

$$A_i = \{\text{на нижней грани есть цифра } i\}, \quad i = 1, 2, 3$$

Покажем, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

1) $P\{A_1\} = P\{A_2\} = P\{A_3\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$P\{A_1 A_2\} = \left\{ \begin{array}{l} A_1 A_2 - \text{на нижней} \\ \text{грани есть и} \\ \text{"1" и "2"} \end{array} \right\} = \frac{1}{4}$$

$P\{A_2 A_3\} = P\{A_1 A_3\} = \frac{1}{4}$ (аналогично)

Таким образом: $\begin{cases} P\{A_1 A_2\} = P\{A_1\} P\{A_2\} \\ P\{A_1 A_3\} = P\{A_1\} P\{A_3\} \\ P\{A_2 A_3\} = P\{A_2\} P\{A_3\} \end{cases} \Rightarrow$ A_1, A_2, A_3 – попарно независимы

2) $\underbrace{P\{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3\}}_{1/4} \neq \underbrace{P\{A_1\} \cdot P\{A_2\} \cdot P\{A_3\}}_{(1/2)^3 = 1/8} \Rightarrow$ A_1, A_2, A_3 не являются независимыми в совокупности

1.8. Сформулировать определение полной группы событий. Доказать теоремы о формуле полной вероятности и о формуле Байеса. Понятия априорной и апостериорной вероятности.

Пусть 1) $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – вероятностное пространство

2) $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{B}$

Говорят, что события $H_1, \dots, H_n$ образуют полную группу событий, если: 1) $H_i H_j = \emptyset$ при $i \neq j$

2) $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

Теорема о формуле полной вероятности

Пусть 1) $A \in \mathcal{B}$ – некоторое событие

2) $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{B}$ – ПГС (полная группа событий)

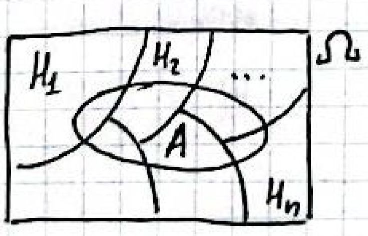
3) $P\{H_i\} > 0$, $i = \overline{1,n}$

Тогда $P\{A\} = P\{A|H_1\}P\{H_1\} + \dots + P\{A|H_n\}P\{H_n\}$ – формула полной вероятности

Доказательство:

1) $P\{H_i\} > 0$, $i = \overline{1,n}$ => все условные вероятности, входящие в правую часть, определены.

2)



Рассмотрим $P\{A\} = P\{A\Omega\} = P\{A(H_1 + \dots + H_n)\} =$

$= P\{AH_1 + \dots + AH_n\} =$

$=$ 

$H_i H_j = \emptyset$ при $i \neq j$,

а $AH_i \subseteq H_i$, $i = \overline{1,n}$,

то и $(AH_i) \cdot (AH_j) = \emptyset$ =>

=> используем аксиому сложения

$=$

$$= P\{AH_1\} + \ldots + P\{AH_n\} = \left\{ \begin{array}{l} P\{H_i\} > 0 \Rightarrow \text{используя} \\ \text{теорему умножения} \end{array} \right\} =$$

$$= P\{H_1\} P\{A|H_1\} + \ldots + P\{H_n\} P\{A|H_n\}$$

Теорема о формуле Байеса

Пусть 1) выполнены условия о теореме полной вероятности

2) $P\{A\} > 0$

Тогда $$P\{H_i|A\} = \frac{P\{A|H_i\} P\{H_i\}}{P\{A|H_1\}P\{H_1\} + \ldots + P\{A|H_n\}P\{H_n\}}, \quad i = \overline{1,n}$$ –

формула Байеса

Доказательство

1) Т.к. $P\{A\} > 0$, то

$$P\{H_i|A\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{определение} \\ \text{условной} \\ \text{вероятности} \end{array} \right\} = \frac{\overbrace{P\{AH_i\}}^{\text{формула умножения}}}{\underbrace{P\{A\}}_{\text{формула полной вероятности}}} =$$

$$= \frac{P\{AH_i\} \cdot P\{H_i\}}{P\{A|H_1\} P\{H_1\} + \ldots + P\{A|H_n\} P\{H_n\}}, \quad i = \overline{1,n}$$

Вероятности $P\{H_i\}$, $i = \overline{1,n}$, называются априорными (т.е. известными до опыта, а вероятности $P\{H_i|A\}$ называются апостериорными (т.е. известными после опыта).

1.9. Сформулировать определение схемы испытаний Бернулли. Доказать формулу для вычисления вероятности реализации ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Доказать следствия этой формулы

Испытанием будем называть случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух возможных исходов, т.е $|\Omega_u| = 2$. Один из исходов испытания условно называется успехом, а его вероятность обозначается символом p. Второй исход испытания называется неудачей, а его вероятность обозначается $q = 1-p$.

Схемой испытаний Бернулли называют серию последовательных однотипных независимых в совокупности испытаний

Теорема Бернулли

Пусть 1) проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0,1)$ в испытании

2) $q = 1-p$

Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$, где $P_n(k)$ — вероятность реализации ровно k успехов в серии из n испытаний

Доказательство:

1) Исход эксперимента:

$$(x_1, \ldots, x_n), \qquad (*)$$

где $x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом испытании произошёл успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

2) $A = \{$в серии из n испытаний произошло ровно k успехов$\}$;

Сканировано с CamScanner

Событие A будет состоять из тех и только тех кортежей вида (*), в которых содержится ровно k единиц.

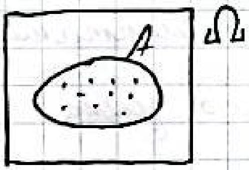
3) Рассмотрим исход $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$

$$P\{x\} = P\{(x_1, \dots, x_n)\} =$$

$$= P\left\{\begin{Bmatrix}\text{в 1-м испытании} \\ \text{произошло} \\ x_1 \text{ успехов}\end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix}\text{в } n\text{-м испытании} \\ \text{произошло} \\ x_n \text{ успехов}\end{Bmatrix}\right\} =$$

$$= \begin{Bmatrix}\text{отдельные испыт.} \\ \text{независимы в} \\ \text{совокупности}\end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix}\text{в 1-м испыт.} \\ \text{произошло} \\ x_1 \text{ успехов}\end{Bmatrix} \cdot \ldots \cdot P\begin{Bmatrix}\text{в } n\text{-м испыт.} \\ \text{произошло} \\ x_n \text{ успехов}\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix}x \in A \Rightarrow \text{в } x \\ \text{ровно } k \text{ успехов} \\ \text{и } n-k \text{ неудач}\end{Bmatrix} = p^k q^{n-k}$$ — вероятность осуществления любого исхода из A.

4) 

Каждый кортеж однозначно определяется номерами k позиций в которых стоят единицы, т.е. однозначно определяется набором:

$$\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Это число сочетаний без повторений из n по k.

Число таких сочетаний и, следовательно, исходов в A: C_n^k

Т.е. $|A| = C_n^k$

5) Т.к. все исходы в A равновероятны, то

$$\underbrace{P\{A\}}_{P_n\{k\}} = |A| \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Следствие 1°.

Вероятность того, что в серии из n испытаний по схеме Бернулли число успехов заключено между k_1 и k_2:

$$P_n\{k_1 \le k \le k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

Доказательство:

Пусть $A = \{$ число успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли заключено между k_1 и $k_2\}$

Обозначим $A_i = \{$ число успехов в серии равно $i\}$

Тогда:

$$A = A_{k_1} + \ldots + A_{k_2}, \text{ причём}$$

$$A_i,\ i = \overline{k_1, k_2} \text{ - попарно несовместны}$$

Поэтому в соответствии с аксиомой сложения:

$$P\{A\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} P\{A_i\} = \left\{ P\{A_i\} = C_n^i p^i q^{n-i} \right\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

Следствие 2°.

Вероятность того, что в серии из n испытаний по схеме Бернулли не произойдёт ни одного успеха

$$P_n\{0\} = q^n$$

Доказательство

$$P_n\{0\} = P_n\{k\}\Big|_{k=0} = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n$$

Следствие 3°.

Вероятность того, что в серии из n испытаний по схеме Бернулли произойдёт хотя бы 1 успех:

$$P_n\{k \geq 1\} = 1 - q^n$$

Доказательство:

$$P_n\{k \geq 1\} = 1 - P_n\{\overline{k \geq 1}\} = 1 - P_n\{0\} = 1 - P_n\{0\} = 1 - q^n$$

Сканировано с CamScanner

2.1. Сформулировать определение случайной величины и функции распределения вероятностей случайной величины. Доказать свойства функции распределения.

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.

Функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если $\forall x \in \mathbb{R}$ множество $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ является событием, т.е. $(\forall x \in \mathbb{R})(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{B})$

Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется отображение:

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

определённое правилом:

$$F_X(x) = P\{X < x\}$$

Свойства функции распределения:

1° $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \le F_X(x) \le 1$

2° Если $x_1 < x_2$, то $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$, т.е. F_X является неубывающей функцией

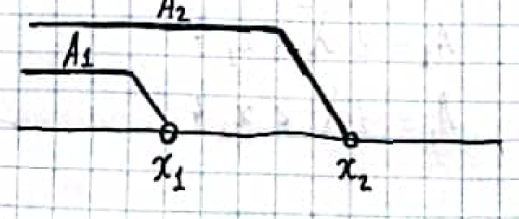
3° $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

4° $P\{x_1 \le X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$, где F_X – функция распределения случайной величины X

5° $\lim\limits_{x \to x_0 -} F_X(x) = F_X(x_0)$ – функция распределения в каждой точке непрерывна слева.

Доказательство:

1° По определению $F_X(x) = P\{\ldots\} \Rightarrow 0 \le F_X(x) \le 1$

2° 

$A_1 = \{X < x_1\} \qquad A_2 = \{X < x_2\}$

$A_2 = \underbrace{A_1 + \{X \in [x_1; x_2)\}}_{\text{несовместны}}$

Тогда $F_X(x_2) = P\{A_2\} = P\{A_1 + \{X \in [x_1; x_2)\}\} =$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{аксиома} \\ \text{сложения} \end{matrix} \right\} = P\{A_1\} + \underbrace{P\{X \in [x_1; x_2)\}}_{\geqslant 0} \geqslant P\{A_1\} = F_X(x_1),$$

т.е. $F_X(x_2) \geqslant F_X(x_1)$

3°. а) Докажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Рассмотрим неубывающую последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$,

где 1) $x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

Тогда последовательность событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, где

$$A_i = \{X < x_i\},\ i = N,$$ будет

неубывающей => применим к ней аксиому непрерывности

$$\left\{ \lim_{n \to \infty} P\{A_n\} = P\{\sum_{i=1}^{\infty} A_i\} \right\}$$

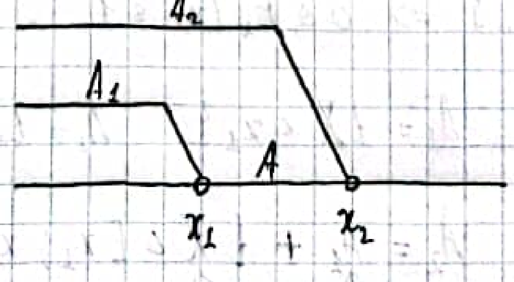
$$1 = P\{X < +\infty\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \{X < +\infty\} \right\} = P\{\sum_{i=1}^{\infty} A_i\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{аксиома} \\ \text{непрерывности} \end{matrix} \right\} = \lim_{n \to \infty} P\{A_n\} = \lim_{n \to \infty} \{X < x_n\} = \lim_{n \to \infty} F_X(x_n)$$

Т.к. (x_n) - произвольная последовательность, стремящаяся в $+\infty$, то в соответствии с определением предела функции по Гейне заключаем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ - доказывается аналогично

4°.



$A = \{x_1 \leq X < x_2\}$

$A_1 = \{X < x_1\}$

$A_2 = \{X < x_2\}$

Тогда $\underbrace{A_2 = A_1 + A}_{\text{несовместные}}$

$$P\{A_2\} = P\{A_1 + A\} = \left\{ \begin{matrix} \text{аксиома} \\ \text{сложения} \end{matrix} \right\} = P\{A_1\} + P\{A\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{A\} = P\{A_2\} - P\{A_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{x_1 \leq X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

5°. Рассмотрим последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, которая

1) неубывающая, т.е. $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$

2) $x_n \to x_0-$, $n \to \infty$

Рассмотрим $A_i = \{X < x_i\}$, $i \in N$

$$F_X(x_0) = P\{X < x_0\} = P\{\sum_{i=1}^{\infty} A_i\} = \left\{ \begin{matrix} \text{аксиома} \\ \text{непрерывности} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\{A_n\} = \lim_{n \to \infty} F_X(x_n)$$

Т.к. $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ – произвольная последовательность, которая стремится к x_0 слева, то в соответствии с определением предела функции по Гейне получаем

$$\lim_{x \to x_0-} F_X(x) = F_X(x_0)$$

2.2. Сформулировать определения случайной величины и функции распределения случайной величины. Сформулировать определения дискретной и непрерывной случайной величины. Доказать свойства плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Смотреть 2.1

Случайная величина X называется дискретной, если множество её возможных значений конечно или счётно.

Случайная величина X называется непрерывной, если $\exists$ функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что:

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right), \text{ где}$$

F_X - функция распределения случайной величины X. При этом функция f называется функцией плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X.

Свойства:

1°. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$

2°. Если X непрерывная случайная величина, то

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt, \text{ где}$$

f - функция плотности распределения случайной величины X

3°. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ (условие нормировки

4°. Если 1) X - непрерывная случайная величина

2) f - функция плотности случайной величины X

3) f непрерывна в точке x_0

4) $\Delta x > 0$ мало,

то $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$

5°. Если X непрерывная случайная величина, то для любого наперёд заданного $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$P\{X = x_0\} = 0$$

Доказательство:

1°. $f(x) = F'(x)$, т.к. F – неубывающая функция, то $F'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

2°. $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \left\{\begin{matrix}\text{по свойству} \\ \text{функции} \\ \text{распределения}\end{matrix}\right\} = F(x_2) - F(x_1) =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{формула} \\ \text{Ньютона -} \\ \text{Лейбница}\end{matrix}\right\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$, т.к. $F' = f$

3°. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 \to +\infty}} \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \left\{\begin{matrix}\text{формула} \\ \text{Ньютона -} \\ \text{Лейбница}\end{matrix}\right\} =$

$= \lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 \to +\infty}} [F(x_2) - F(x_1)] = \overset{1}{F(\cancel{+\infty})} - \overset{0}{F(\cancel{-\infty})} =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{свойство } 3° \\ \text{функции} \\ \text{распределения}\end{matrix}\right\} = 1 - 0 = 1$

4°. $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} = \left\{\begin{matrix}\text{свойство} \\ \text{функции} \\ \text{распределения}\end{matrix}\right\} = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) =$

$= \left\{\begin{matrix}f = F' \text{ и } f \text{ непрерывна в окрестности} \\ \text{точки } x_0 \Rightarrow \text{в окрестности точки } x_0 \text{ выполняется} \\ \text{теорема Лагранжа, т.е. } \exists \xi \in (x_0; x_0 + \Delta x)\end{matrix}\right\} = F'(\xi)\Delta x =$

$= f(\xi)\Delta x = \left\{\begin{matrix}\Delta x \text{ - мало, а} \\ f \text{ - непрерывна} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(\xi) \approx f(x_0)\end{matrix}\right\} \approx f(x_0)\Delta x$

5°. $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} = \left\{\begin{matrix}\text{свойство} \\ \text{функции} \\ \text{распределения}\end{matrix}\right\} = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$.

Т.к. X непрерывная случайная величина $\Rightarrow f$ – кусочно-непрерывная $\Rightarrow F$ является непрерывной $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} F(x_0 + \Delta x) = F(x_0)$

Тогда $P\{X = x_0\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P\{x_0 \le X < x_0 + \Delta x\} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} [F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) =$

$= F(x_0) - F(x_0) = 0$ ∎

Сканировано с CamScanner

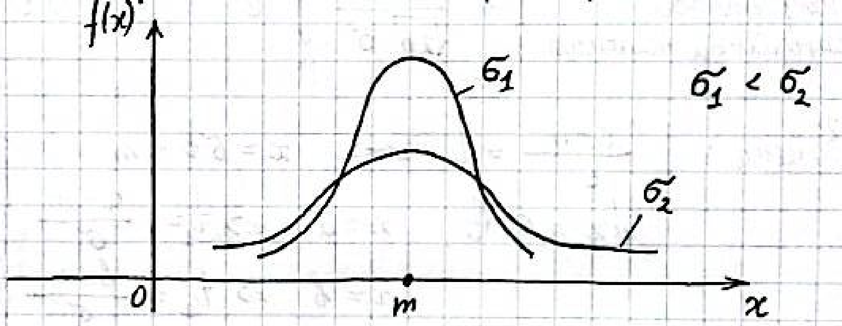
2.3. Сформулировать определение нормальной случайной величины, указать геометрический смысл параметров. Понятие стандартного нормального закона. Доказать формулу для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал.

Непрерывная случайная величина X называется нормальной или нормально-распределённой с параметрами $m \in \mathbb{R}$ и σ^2, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, если её функция плотности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Обозначается $X \sim N(m, \sigma^2)$.

Геометрический смысл параметров m и σ^2



Параметр m характеризует положение точки максимума функции плотности. Параметр σ характеризует разброс вероятностной массы относительно точки максимума плотности: чем больше σ, тем больше разброс.

Если параметры принимают значения $m=0$ и $\sigma^2=1$, то такая случайная величина X распределена по стандартному нормальному закону, т.е. функция плотности этого распределения имеет вид:

$$f_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Функция распределения случайной величины $X \sim N(0, 1)$:

интеграл Пуассона

функция Лапласа

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{0,1}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Свойства функций Φ, Φ_0

1°. $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$

2°. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ – нечётная функция

3°. $\Phi_0(0) = 0$

4°. $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi_0(x) = -\frac{1}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_0(x) = \frac{1}{2}$

Формула для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал.

Рассмотрим случайную величину $X \sim N(m, \sigma^2)$. Найдём:

$$P\{a \leq X \leq b\} = \left\{\begin{matrix}\text{свойство}\\ \text{функции}\\ \text{распределения}\end{matrix}\right\} = F_X(b) - F_X(a) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{свойство}\\ \text{непрерывной}\\ \text{случайной величины}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Замена: } \frac{x-m}{\sigma} = t \iff x = \sigma t + m\\ dx = \sigma dt; \quad x = a \Rightarrow t_1 = \frac{a-m}{\sigma}\\ x = b \Rightarrow t_2 = \frac{b-m}{\sigma}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\sigma \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} f_{0,1}(t)\,dt = \left\{\text{Если } Y \sim N(0,1)\right\} =$$

$$= P\left\{\frac{a-m}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-m}{\sigma}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{свойство функции распределения}\\ \Phi\text{ – функция распределения для } Y\end{matrix}\right\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \left\{\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)\right\} = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Т.е. для произвольной нормальной случайной величины $X \sim N(m, \sigma^2)$:

$$P\{a \leq X \leq b\} = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

2.4. Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Доказать предельные свойства.

Пусть 1) $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ - вероятностное пространство

2) $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ - случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

n-мерным случайным вектором называется кортеж $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$; при этом случайная величина X_i, $i = \overline{1,n}$, называется i-ой координатой (компонентой) случайного вектора $\vec{X}$.

Функцией распределения вероятностей случайного вектора $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ называется отображение

$$F_{\vec{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

определённое правилом:

$$F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$$

Свойства функции распределения двумерного случайного вектора:

1° $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$

2° При фиксированном x_2 $F(x_1, x_2)$ как функция от x_1 является неубывающей; при фиксированном x_1 $F(x_1, x_2)$ как функция от x_2 является неубывающей.

3° $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0 \qquad \lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$

4° $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1$

5° $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = const}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2) \qquad \lim\limits_{\substack{x_1 = const \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$

6°. $P\{a_1 \le X_1 < b_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\} =$
$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$

7°. При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменной x_1 является непрерывной слева в каждой точке; при фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменной x_2 является непрерывной слева в каждой точке.

Доказательство предельных свойств:

3°. $$\lim_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = \{\text{определение}\} = \lim_{x_1 \to -\infty} P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{аксиома}\\ \text{непрерывности}\end{matrix}\right\} = P\{X_1 < -\infty, X_2 < x_2\} =$$

$$= P\{\underbrace{\boxed{\{X_1 < -\infty\}}}_{\text{невозможное событие}} \cdot \{X_2 < x_2\}\} = \{\varnothing \cdot A = \varnothing\} = P\{\varnothing\} = 0$$

$\lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2)$ - доказывается аналогично.

4°. $$\lim_{\substack{x_1 \to +\infty\\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = \{\text{определение}\} = \lim_{\substack{x_1 \to +\infty\\ x_2 \to +\infty}} P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{аксиома}\\ \text{непрерывности}\end{matrix}\right\} = P\{X_1 < +\infty, X_2 < +\infty\} =$$

$$= P\{\underbrace{\boxed{\{X_1 < +\infty\}} \cdot \boxed{\{X_2 < +\infty\}}}_{\text{достоверные события}}\} = \{\Omega \cdot \Omega = \Omega\} = P\{\Omega\} = 1.$$

5°. $$\lim_{\substack{x_1 \to +\infty\\ x_2 = const}} F(x_1, x_2) = \{\text{определение}\} = \lim_{\substack{x_1 \to +\infty\\ x_2 = const}} P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{аксиома}\\ \text{непрерывности}\end{matrix}\right\} = P\{X_1 < +\infty, X_2 < x_2\} =$$

$$= P\{\underbrace{\boxed{\{X_1 < +\infty\}}}_{\text{достоверное событие}} \{X_2 < x_2\}\} = \{\Omega \cdot A = A\} = P\{X_2 < x_2\} = F_{X_2}(x_2)$$

$\lim\limits_{\substack{x_1 = const\\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$ - доказывается аналогично.

Сканировано с CamScanner

Вдруг спросят ¿

Аксиома непрерывности и $+\infty$

или почему $P\{X < +\infty\} = \lim\limits_{x \to +\infty} P\{X < x\} = 1$?

Рассмотрим неубывающую последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, где

1) $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

Тогда последовательность событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, где

$A_i = \{X < x_i\}$, $i \in N$, будет

неубывающей $\Rightarrow$ применим <u>аксиому непрерывности</u>:

$$1 = P\{X < +\infty\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \{X < +\infty\} \right\} = P\{\sum_{i=1}^{\infty} A_i\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{аксиома} \\ \text{непрерывности} \end{matrix} \right\} = \lim_{n \to \infty} P\{A_n\} = \lim_{n \to \infty} P\{X < x_n\}$$

Т.к. (x_n) – произвольная последовательность, стремящаяся в $+\infty$, то в соответствии с определением предела по Гейне заключаем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} P\{X < x\} = P\{X < +\infty\} = 1$

Почему $P\{X < -\infty\} = \lim\limits_{x \to -\infty} P\{X < x\} = 0$?

Рассмотрим невозрастающую последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, где

1) $x_1 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$ 2) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$

Тогда последовательность событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, где $A_i = \{X \geq x_i\}$, $i \in N$, будет неубывающей $\Rightarrow$ применим аксиому непрерывности:

$$1 = P\{X > -\infty\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \{X > -\infty\} \right\} = P\{\sum_{i=1}^{\infty} A_i\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{аксиома} \\ \text{непрерывности} \end{matrix} \right\} = \lim_{n \to \infty} P\{A_n\} = \lim_{n \to \infty} P\{X \geq x_n\}$$

Аналогично рассуждениям выше $P\{X > -\infty\} = \lim\limits_{x \to -\infty} P\{X \geq x\} = 1$

В таком случае $\lim\limits_{x \to -\infty} P\{X < x\} = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - P\{X \geq x\}) =$

$= 1 - \lim\limits_{x \to -\infty} P\{X \geq x\} = 1 - 1 = 0$ ч.т.д.

Сканировано с CamScanner

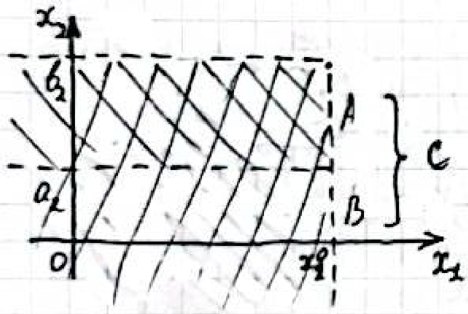
2.5. Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения двумерного случайного вектора. Доказать формулу для вычисления $P\{a_1 \le X_1 < b_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\}$.

Смотреть 2.4.

Доказательство

а) Докажем, что

$$P\{\overbrace{X_1 < x_1^0,\ a_2 \le X < b_2}^{A}\} = F(x_1^0, b_2) - F(x_1^0, a_2)$$



Рассмотрим события

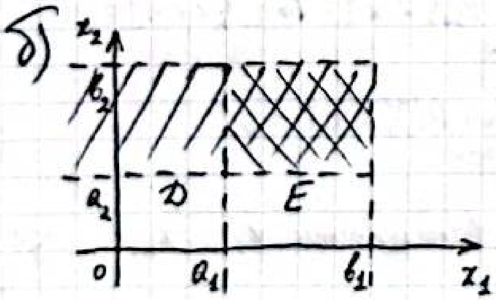
$B = \{X_1 < x_1^0,\ X_2 < a_2\}$

$C = \{X_1 < x_1^0,\ X_2 < b_2\}$

Тогда $C = \underbrace{A + B}_{\text{несовместные}} \Rightarrow P(C) = P\{A\} + P\{B\} \Rightarrow$

$\Rightarrow P\{A\} = P\{C\} - P\{B\} = F(x_1^0, b_2) - F(x_1^0, a_2)$

б)



Пусть $E = \{a_1 \le X_1 < b_1,\ a_2 \le X < b_2\}$

$D = \{X_1 < a_1,\ a_2 \le X_2 < b_2\}$

A - смотреть выше

Т.е. $A = \underbrace{E + D}_{\text{несовместные}} \Rightarrow P\{A\} = P\{E\} + P\{D\} \Rightarrow$

$\Rightarrow P\{E\} = P\{A\} - P\{D\} = \left\{\begin{matrix}\text{результат} \\ \text{из пункта а)}\end{matrix}\right\} =$

$= [F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2)] - [F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2)] =$

$= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$

2.6. Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать определение непрерывного случайного вектора и доказать свойства плотности распределения вероятностей для двумерного случайного вектора.

Смотреть 2.4.

Случайный вектор $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ называется непрерывным, если $\exists$ функция $f(t_1, \dots, t_n)$ такая, что в любой точке $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ справедливо

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dt_1 \dots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n)\, dt_n$$

При этом функция f называется функцией плотности распределения вероятностей случайного вектора X

Свойства плотности распределения вероятностей для двумерного случайного вектора

1°. $f(x_1, x_2) \geq 0$

2°. $P\{a_1 \leq X_1 < b_1,\ a_2 \leq X < b_2\} = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$

3°. $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$ (условие нормировки)

4°. Если 1) (x_1^0, x_2^0) – точка непрерывности $f(x_1, x_2)$,
2) $\Delta x_1, \Delta x_2$ – малы,

то

$$P\{x_1^0 \leq X_1 < x_1^0 + \Delta x_1,\ x_2^0 \leq X_2 < x_2^0 + \Delta x_2\} \approx f(x_1^0, x_2^0)\Delta x_1 \Delta x_2$$

5°. Если 1) (X_1, X_2) – непрерывный случайный вектор,
2) (x_1^0, x_2^0) – произвольное наперёд заданное значение,

то

$$P\{(X_1, X_2) = (x_1^0, x_2^0)\} = 0$$

6°. $P\{(X_1, X_2) \in D\} = \iint\limits_D f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$

7°. $f_{X_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2 \qquad f_{X_2}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1$

Доказательство:

1°. $f(x_1, x_2) = \dfrac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \Rightarrow$ существуют односторонние пределы!

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial_+}{\partial x_2}\left(\frac{\partial_+ F(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial_+}{\partial x_2}\left(\lim_{\Delta x_1 \to 0+} \frac{F(x_1+\Delta x_1, x_2) - F(x_1, x_2)}{\Delta x_1}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0+ \\ \Delta x_2 \to 0+}} \frac{\dfrac{F(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - F(x_1+\Delta x_1, x_2)}{\Delta x_2} - \dfrac{F(x_1, x_2+\Delta x_2) - F(x_1, x_2)}{\Delta x_2}}{\Delta x_1} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0+ \\ \Delta x_2 \to 0+}} \frac{F(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - F(x_1, x_2+\Delta x_2) - F(x_1+\Delta x_1, x_2) + F(x_1, x_2)}{\Delta x_1 \Delta x_2} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{свойство} \\ \text{функции} \\ \text{распределения}\end{matrix}\right\} = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0+ \\ \Delta x_2 \to 0+}} \frac{\overbrace{P\{x_1 \le X < x_1+\Delta x_1,\ x_2 \le X < x_2+\Delta x_2\}}^{\geq 0}}{\underbrace{\Delta x_1 \Delta x_2}_{>0}} \geq 0 \Rightarrow$$

$f(x_1, x_2) \geq 0$

2°. $P\{a_1 \le X < b_1,\ a_2 \le X < b_2\} = \left|\begin{matrix}\text{свойства} \\ \text{функции} \\ \text{распределения}\end{matrix}\right| =$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = \left\{\begin{matrix}\text{определение} \\ \text{непрерывной} \\ \text{случ. величины}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{b_1} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{b_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 - \int\limits_{-\infty}^{a_1} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{b_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{b_1} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{a_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 + \int\limits_{-\infty}^{a_1} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{a_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 =$$

$$= \left[\int\limits_{-\infty}^{b_1} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{b_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 - \int\limits_{-\infty}^{b_1} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{a_2} f(x_1, x_2)\,dx_2\right] -$$

$$- \left[\int\limits_{-\infty}^{a_1} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{b_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 - \int\limits_{-\infty}^{a_1} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{a_2} f(x_1, x_2)\,dx_2\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 - \int_{-\infty}^{a_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$$

3°. $$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \lim_{\substack{t_1 \to +\infty \\ t_2 \to +\infty}} \int_{-\infty}^{t_1} dx_1 \int_{-\infty}^{t_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 = \left\{ \text{определение} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{t_1 \to +\infty \\ t_2 \to +\infty}} F(t_1, t_2) = \left\{ \begin{matrix} \text{свойство} \\ \text{функции} \\ \text{распределения} \end{matrix} \right\} = 1$$

4°. $$P\{ x_1^0 \le X_1 < x_1^0 + \Delta x_1,\ x_2^0 \le X_2 < x_2^0 + \Delta x_2 \} = \left\{ \begin{matrix} \text{свойство} \\ \text{функции} \\ \text{распределения} \end{matrix} \right\} =$$

$$= F(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - F(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - F(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) + F(x_1^0, x_2^0) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} f = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \text{ и } f \text{ непрерывна в окрестности} \\ \text{точки } (x_1^0, x_2^0) \Rightarrow \exists\, \xi_1 \in (x_1^0, x_1^0 + \Delta x_1) \text{ и} \\ \exists\, \xi_2 \in (x_2^0, x_2^0 + \Delta x_2) \end{matrix} \right\} = \frac{\partial^2 F(\xi_1, \xi_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 =$$

$$= f(\xi_1, \xi_2) \Delta x_1 \Delta x_2 \approx \left\{ \begin{matrix} \Delta x_1,\ \Delta x_2 - \text{малы}, \\ \text{а } f \text{ непрерывна} \Rightarrow \\ f(\xi_1, \xi_2) \approx f(x_1^0, x_2^0) \end{matrix} \right\} \approx f(x_1^0, x_2^0) \Delta x_1 \Delta x_2$$

5°. Т.к. (X_1, X_2) – непрерывный случайный вектор $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ – кусочно-непрерывная $\Rightarrow$ F – является непрерывной $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} F(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) = F(x_1^0, x_2^0), \quad \lim_{\Delta x_1 \to 0} F(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) = F(x_1^0, x_2^0)$$

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} F(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) = F(x_1^0, x_2^0)$$

Тогда $$P\{(X_1, X_2) = (x_1^0, x_2^0)\} = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} P\{ x_1^0 \le X_1 < x_1^0 + \Delta x_1,\ x_2^0 \le X_2 < x_2^0 + \Delta x_2 \} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{свойство} \\ \text{функции} \\ \text{распределения} \end{matrix} \right\} = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} [F(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - F(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - F(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) +$$

$$+ F(x_1^0, x_2^0)] = F(x_1^0, x_2^0) - F(x_1^0, x_2^0) - F(x_1^0, x_2^0) + F(x_1^0, x_2^0) = 0$$

6°. Является обобщением свойства 2° на случай произвольной области

7°. Докажем первое соотношение, второе доказывается аналогично

По св-ву двумерной функции распределения

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \overset{x_2}{+\infty}) = \left\{ \begin{matrix} \text{определение} \\ \text{непрерывного} \\ \text{вектора} \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)\, dt_2$$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{d}{dx_1} F_{X_1}(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)\, dt_2 \right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{теорема о производной} \\ \text{интеграла с переменным} \\ \text{верхним пределом} \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t_2)\, dt_2$$

Сканировано с CamScanner

2.7. Сформулировать определение пары независимых случайных величин. Доказать свойства независимых случайных величин. Понятия попарно независимых случайных величин и случайных величин, независимых в совокупности.

Случайные величины X и Y называются независимыми, если

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

где F - функция распределения случайного вектора (X,Y), а F_X, F_Y - маргинальные функции распределения случайных величин X и Y.

Свойства независимых случайных величин:

1°. Случайные величины X и Y являются независимыми $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ являются независимыми.

2°. Случайные величины X и Y являются независимыми $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(\forall\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R})$ события $\{x_1 \le X < x_2\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2\}$ являются независимыми

3°. Случайные величины X и Y являются независимыми $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall\forall M_1, M_2$ события $\{X \in M_1\}$ и $\{Y \in M_2\}$ являются независимыми, где M_1 и M_2 - промежутки или объединения промежутков в $\mathbb{R}$.

4°. Если X, Y - дискретные случайные величины, то X, Y - независимые $\Leftrightarrow$ $p_{i_j} = p_{X_i} \cdot p_{Y_j}$, где $p_{i_j} = P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\}$, $p_{X_i} = P\{X = x_i\}$, $p_{Y_j} = P\{Y = y_j\}$.

5°. Если X, Y - непрерывные случайные величины, то X, Y - независимые $\Leftrightarrow$ $f(x,y) \equiv f_X(x) \cdot f_Y(y)$, где f - функция плотности распределения вектора (X, Y), а f_X и f_Y - маргинальные функции плотности распределения случайных величин X и Y соответственно.

Доказательство:

1°. Непосредственно вытекает из определения.

2°. а) $\Longrightarrow$ (необходимость)

Пусть X, Y независимые случайные величины. Рассмотрим:

$$P\{x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2\} = \left\{\begin{matrix}\text{свойство функции}\\ \text{распределения}\\ \text{случайного вектора}\end{matrix}\right\} =$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) =$$

$$= \{X, Y \text{ - независимые}\} = F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) -$$

$$- F_X(x_2)F_Y(y_1) + F_X(x_1)F_Y(y_1) =$$

$$= F_X(x_2)\big(F_Y(y_2) - F_Y(y_1)\big) - F_X(x_1)\big(F_Y(y_2) - F_Y(y_1)\big) =$$

$$= [F_X(x_2) - F_X(x_1)][F_Y(y_2) - F_Y(y_1)] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{свойства функции}\\ \text{распределения}\\ \text{случайной величины}\end{matrix}\right\} = P\{x_1 \le X < x_2\}\,P\{y_1 \le Y < y_2\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ события $\{x_1 \le X < x_2\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2\}$ независимые

б) $\Longleftarrow$ (достаточность)

Пусть любые события рассматриваемого вида независимы, т.е. $\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2$:

$$P\{x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2\} = P\{x_1 \le X < x_2\}\cdot P\{y_1 \le Y < y_2\} \qquad (*)$$

Покажем, что $F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$, т.е. докажем независимость случайных величин X и Y:

$$F(x,y) = P\{X < x,\ Y < y\} = P\{-\infty < X < x,\ -\infty < Y < y\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{используем } (*) \text{ для}\\ x_1 = y_1 = -\infty\\ x_2 = x,\quad y_2 = y\end{matrix}\right\} = P\{X < x\}P\{Y < y\} = F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

3°. Является обобщением свойств 1° и 2°.

4°. а) $\Leftarrow$ (достаточность)

Пусть любые события рассматриваемого вида независимы, т.е. $\forall\ i, j \quad p_{ij} = P_{X_i} \cdot P_{Y_j}$

Докажем, что $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, т.е. докажем независимость случайных величин X и Y:

$$F(x,y) = P\{X < x,\ Y < y\} = \left\{\begin{matrix} X, Y \text{ - дискретные} \\ \text{случайные} \\ \text{величины} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\{X \in \{x_1, \dots, x_k\},\ Y \in \{y_1, \dots, y_l\}\} =$$

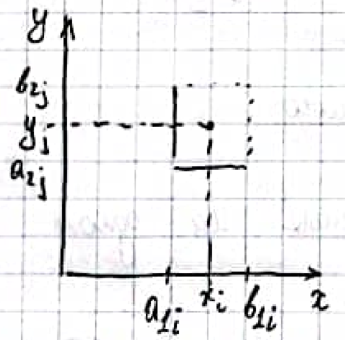
$$= \left\{\begin{matrix} x_k = \max\{x_i : x_i < x\} \\ y_l = \max\{y_j : y_j < y\} \end{matrix}\right\} = P\Big\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \underbrace{\{(X,Y) = (x_i, y_j)\}}_{\text{попарно несовместны}}\Big\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{аксиома} \\ \text{сложения} \end{matrix}\right\} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = \left\{ p_{ij} = P_{X_i} \cdot P_{Y_j} \right\} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} P\{X = x_i\}\right)\left(\sum_{j=1}^{l} P\{Y = y_j\}\right) = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\} = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

б) $\Rightarrow$ (необходимость)

Пусть X, Y - независимые дискретные случайные величины



Для каждой возможной пары значений x_i и y_j выберем такие $a_{1i}, b_{1i}, a_{2j}, b_{2j}$, чтобы область $\{a_{1i} \le x_i < b_{1i},\ a_{2j} \le y_j < b_{2j}\}$ содержала бы только одну точку случайного вектора (X, Y) - (x_i, y_j)

Тогда $P\{a_{1i} \le X < b_{1i},\ a_{2j} \le Y < b_{2j}\} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$ (1)

$$P\{a_{1i} \le X < b_{1i},\ a_{2j} \le Y < b_{2j}\} = \left\{\begin{matrix} \text{свойство } 2^\circ \\ \text{независимых} \\ \text{случайных величин} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\{a_{1i} \le X < b_{1i}\} \cdot P\{a_{2j} \le Y < b_{2j}\} = \left\{\begin{matrix} \text{из построения} \\ \text{в области} \\ \text{только одна точка} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} = P_{X_i} \cdot P_{Y_j}$$

5. а) $\Rightarrow$ (необходимость)

Пусть X, Y - независимые непрерывные случайные величины, тогда $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Продифференцируем по x:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[F_X(x) \cdot F_Y(y)\right] = \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot F_Y(y) = f_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Продифференцируем по y:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[f_X(x) \cdot F_Y(y)\right] = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Т.е. $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

б) $\Leftarrow$ (достаточность)

Пусть $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Тогда: $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} du \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\, dv = \left\{ f(u,v) = f_X(u) f_Y(v) \right\} =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} du \int\limits_{-\infty}^{y} f_X(u) f_Y(v)\, dv = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du}_{F_X(x)} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(v)\, dv}_{F_Y(y)} =$$

$= F_X(x) \cdot F_Y(y) \Rightarrow X, Y$ - независимые

Случайные величины $X_1, \dots, X_n$, заданные на одном вероятностном пространстве, называются:

- попарно независимыми, если случайные величины X_i и X_j для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, независимы;
- независимыми в совокупности, если

$$F(x_1, \dots, x_n) \equiv F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n),$$

где F - функция распределения случайного вектора $(X_1, \dots, X_n)$, а F_{X_i}, $i = \overline{1,n}$ - маргинальная функция распределения случайной величины X_i

2.8. Понятие функции скалярной случайной величины. Доказать теорему о формуле для вычисления плотности $f_Y(y)$ случайной величины $Y = \varphi(X)$, если X - непрерывная случайная величина, а φ - монотонная непрерывно дифференцируемая функция. Сформулировать аналогичную теорему для кусочно-монотонной функции φ.

Пусть 1) X - некоторая случайная величина

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - некоторая функция

Тогда $Y = \varphi(X)$ также будет одномерной случайной величиной; при этом φ называется функцией скалярной случайной величины.

Теорема

Пусть 1) X - непрерывная случайная величина

2) $f_X(x)$ - плотность распределения случайной величины X

3) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - монотонная непрерывно-дифференцируемая функция

4) ψ - функция, обратная к φ

5) $Y = \varphi(X)$

Тогда Y - непрерывная случайная величина, плотность распределения которой можно найти по формуле

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y)) \, |\psi'(y)|$$

Доказательство

1) $F_Y(y) = \{\text{определение}\} = P\{Y < y\} = \{Y = \varphi(X)\} = P\{\varphi(X) < y\} =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ - монотонная} \Rightarrow \\ \exists\, \varphi^{-1} = \psi \text{ - обратная} \\ \text{функция к } \varphi \end{array} \right\} = \begin{cases} P\{X < \psi(Y)\}, \text{ если } \varphi \text{ - возрастающая} \\ P\{X > \psi(Y)\}, \text{ если } \varphi \text{ - убывающая} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} F_X(\psi(y)) & \text{, если } \varphi \text{ - возрастающая} \\ 1 - P\{X \le \psi(y)\} & \text{, если } \varphi \text{ - убывающая} \end{cases} = \left\{ \begin{matrix} \text{свойство непрерывной} \\ \text{случайной величины} \\ P\{X = x_0\} = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{cases} F_X(\psi(y)) & \text{, если } \varphi \text{ - возрастающая} \\ 1 - P\{X < \psi(y)\} & \text{, если } \varphi \text{ - убывающая} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} F_X(\psi(y)) & \text{, если } \varphi \text{ - возрастающая} \\ 1 - F_X(\psi(y)) & \text{, если } \varphi \text{ - убывающая} \end{cases}$$

2) $$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} F_X'(\psi(y)) \cdot \psi'(y), & \text{если } \varphi \text{ - возрастающая} \\ -F_X'(\psi(y)) \cdot \psi'(y), & \text{если } \varphi \text{ - убывающая} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f_X(\psi(y)) \cdot \overbrace{\psi'(y)}^{\geq 0} & \text{, если } \varphi \text{ - возрастающая} \\ -f_X(\psi(y)) \cdot \underbrace{\psi'(y)}_{\substack{\le 0, \text{ т.к. } \psi \text{ - убывающая,} \\ \text{т.е. } |\psi'(y)| = -\psi'(y)}} & \text{, если } \varphi \text{ - убывающая} \end{cases} =$$

$$= f_X(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|.$$

Теорема

Пусть 1) X - непрерывная случайная величина

2) $f_X(x)$ - плотность распределения случайной величины X

3) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет n интервалов монотонности (т.е. является кусочно-монотонной функцией)

4) φ дифференцируема

5) Для данного $y \in \mathbb{R}$: $x_1 = x_1(y), \dots, x_k = x_k(y)$ все решения уравнения $\varphi(x) = y$; при этом $x_i \in I_i$ (i-му интервалу монотонности), $k \le n$

6) $\psi_1(y), \dots, \psi_k(y)$ - функции, обратные к φ на интервалах $I_1, \dots, I_k$ соответственно

Тогда для данного y:

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^{k} f_X(\psi_i(y)) \cdot |\psi_i'(y)|$$

2.9. Понятие скалярной функции случайного вектора. Обосновать формулу для вычисления функции распределения случайной величины Y, функционально зависящей от случайных величин X_1 и X_2, если (X_1, X_2) — непрерывный случайный вектор. Доказать теорему о формуле свёртки.

Пусть 1) (X_1, X_2) — случайный вектор

2) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция двух переменных

Тогда $Y = \varphi(X_1, X_2)$ — тоже случайная величина (скалярная); при этом φ называется скалярной функцией случайного вектора.

Теорема

Пусть 1) (X_1, X_2) — непрерывный случайный вектор

2) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция двух переменных

Тогда функцию распределения случайной величины $Y = \varphi(X_1, X_2)$ можно найти по формуле:

$$F_Y(y) = \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2,$$

где $f(x_1, x_2)$ — совместная плотность распределения случайных величин X_1, X_2; $D(y) = \{(x_1, x_2) : \varphi(x_1, x_2) < y\}$.

Доказательство

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = \left\{ \underset{\text{эквивалентны}}{\text{события } \{Y<y\} \text{ и } \{(X_1, X_2) \in D(y)\}} \right\} =$$

$$= P\{(X_1, X_2) \in D(y)\} = \left\{ \begin{matrix} \text{свойство непрерывного} \\ \text{случайного вектора} \end{matrix} \right\} = \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

Формула свёртки

Пусть 1) (X_1, X_2) — непрерывный случайный вектор

2) X_1, X_2 — независимые случайные величины

3) $Y = X_1 + X_2$

Тогда:

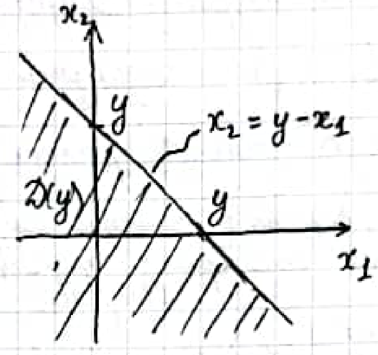
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$$

Доказательство

1) $F_Y(y) = \left\{ \text{по формуле распределения } Y, \text{ зависящей от } X_1 \text{ и } X_2 \right\} =$

$$= \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \left\{ \begin{array}{l} X_1, X_2 \text{ - независимые} \Rightarrow \\ f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \end{array} \right\} =$$

$$= \iint\limits_{D(y)} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 = \left| \begin{array}{l} \varphi(x_1, x_2) < y \\ x_1 + x_2 < y \\ x_2 < y - x_1 \end{array} \right| =$$



$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} \underbrace{f_{X_1}(x_1)}_{\text{не зависит от } x_2} f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) dx_1 \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2) dx_2$$

2) $f_Y(y) = \dfrac{d}{dy} F_Y(y) = \dfrac{d}{dy} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) dx_1 \left[\int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2) dx_2 \right] =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) dx_1 \left[\frac{d}{dy} \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2) dx_2 \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{производная интеграла} \\ \text{с переменным верхним} \\ \text{пределом} \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$$

2.10. Сформулировать определение математического ожидания для дискретной и непрерывной случайных величин. Механический смысл математического ожидания. Доказать свойства математического ожидания. Записать формулы для вычисления математического ожидания функции случайной величины и случайного вектора

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число:

$$M[X] = \sum_{i \in I} p_i x_i ,$$

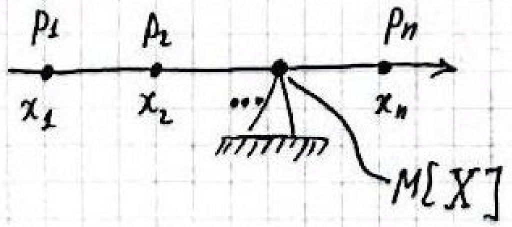
где $\{x_i : i \in I\}$ — все возможные значения случайной величины X; $p_i = P\{X = x_i\}$, $i \in I$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx ,$$

где f — функция плотности случайной величины X.

Механическая интерпретация математического ожидания дискретной случайной величины — центр тяжести вероятностной массы.



$$x_{ц.т.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}_{\text{условие нормировки}}} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M[X]$$

Механическая аналогия математического ожидания непрерывной случайной величины — центр тяжести стержня, линейная плотность которого задаётся функцией f.

Свойства математического ожидания.

1°. Если $P\{X = x_0\} = 1$, то есть $X = x_0$ – детерминированная величина, то $MX = x_0$

X	x_0
p	1

2°. $M[aX+b] = aMX + b$, где $a, b = const$

3°. $M[X_1 + X_2] = MX_1 + MX_2$

4°. Если X_1, X_2 – независимые случайные величины, то

$$M[X_1 \cdot X_2] = MX_1 \cdot MX_2$$

Доказательство:

1°. $MX = \{\text{определение}\} = \sum p_i x_i = 1 \cdot x_0 = x_0$

2°. а) Для непрерывной случайной величины

$$M[aX+b] = \{\varphi(t) = at+b\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f(x)\,dx =$$

$$= a \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx}_{MX} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{усл. нормировки} = 1} = aMX + b$$

б) Для дискретной случайной величины

Пусть $X \in \{x_i : i \in I\}$, $p_i = P\{X = x_i\}$, тогда:

$$M[aX+b] = \{\varphi(t) = at+b\} = \sum_{i \in I} (ax_i + b)p_i = \sum_{i \in I} (ax_i p_i + bp_i) =$$

$$= a \underbrace{\sum_{i \in I} x_i p_i}_{= MX} + b \underbrace{\sum_{i \in I} p_i}_{=1 \text{ по условию нормировки}} = aMX + b$$

3°. а) Для непрерывной случайной величины:

$$M[X_1 + X_2] = \{\varphi(u,v) = u+v\} = \iint_{\mathbb{R}^2} (x_1 + x_2) f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 + \iint_{\mathbb{R}^2} x_2 f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

Сканировано с CamScanner

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2\right]}_{f_{X_1}(x_1)} dx_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_1\right]}_{f_{X_2}(x_2)} dx_2 =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{свойства}\\ \text{плотности}\\ \text{распределения}\end{matrix}\right\} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\,dx_1}_{MX_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\,dx_2}_{MX_2} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{определение}\\ \text{математического}\\ \text{ожидания}\end{matrix}\right\} = MX_1 + MX_2$$

б) Для дискретной случайной величины

Пусть $X_1 \in \{x_{1i} : i \in I\}$, $X_2 \in \{x_{2j} : j \in J\}$, $p_{ij} = P\{(X_1, X_2) = (x_{1i}, x_{2j})\}$

Тогда:

$$M[X_1 + X_2] = \{\varphi(u,v) = u + v\} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} (x_{1i} + x_{2j}) p_{ij} =$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} \cdot x_{1i} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij}\, x_{2j} =$$

$$= \sum_{i\in I} x_{1i} \underbrace{\sum_{j\in J} p_{ij}}_{= P\{X_1 = x_{1i}\} = P_{X_{1i}}} + \sum_{j\in J} x_{2j} \underbrace{\sum_{i\in I} p_{ij}}_{= P\{X_2 = x_{2j}\} = P_{X_{2j}}} \ominus$$

$$\ominus \sum_{i\in I} x_{1i} \cdot P_{X_{1i}} + \sum_{j\in J} x_{2j} \cdot P_{X_{2j}} = \left\{\begin{matrix}\text{определение}\\ \text{математического}\\ \text{ожидания}\end{matrix}\right\} = MX_1 + MX_2$$

4°. а) Для непрерывной случайной величины

$$M[X_1 \cdot X_2] = \{\varphi(u,v) = u \cdot v\} = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \left\{\begin{matrix}X_1, X_2 \text{ - независимые} \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\end{matrix}\right\} = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot f_{X_1}(x_1)\,dx_1\right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\,dx_2\right] = \left\{\begin{matrix}\text{определение}\\ \text{математического}\\ \text{ожидания}\end{matrix}\right\} = MX_1 \cdot MX_2$$

б) Для дискретной случайной величины

Пусть $X_1 \in \{x_{1i} : i \in I\}$, $X_2 \in \{x_{2j} : j \in J\}$

$$P_{X_{1i}} = P\{X_1 = x_{1i}\}, \quad P_{X_{2j}} = P\{X_2 = x_{2j}\},$$

$$p_{ij} = P\{(X_1, X_2) = (x_{1i}, x_{2j})\}$$

Тогда:

$$M[X_1 \cdot X_2] = \{\varphi(u,v) = u \cdot v\} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{1i} \cdot x_{2j} \cdot p_{ij} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} X_1, X_2 \text{ - независимые} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p_{ij} = P_{X_{1i}} \cdot P_{X_{2j}} \end{array} \right\} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{1i} x_{2j} P_{X_{1i}} \cdot P_{X_{2j}} =$$

$$= \left[\sum_{i \in I} x_{1i} \cdot P_{X_{1i}} \right] \left[\sum_{j \in J} x_{2j} P_{X_{2j}} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{определение} \\ \text{математического} \\ \text{ожидания} \end{array} \right\} = MX_1 \cdot MX_2$$

Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - некоторая функция,

X - случайная величина, тогда:

$$M[\varphi(X)] = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) p_i, \text{ если } X \text{ - дискретная случайная величина}$$

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx, \text{ если } X \text{ - непрерывная случайная величина}$$

Если $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - некоторая функция двух переменных, (X, Y) - случайный вектор, то

$$M[\varphi(X, Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij},$$

где (x_i, y_j) пробегает множество всех возможных значений случайного вектора (X, Y), $p_{ij} \equiv P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$, если (X, Y) - дискретный случайный вектор;

$$M[\varphi(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy,$$

где f - функция плотности вектора (X, Y), если (X, Y) - непрерывный случайный вектор.

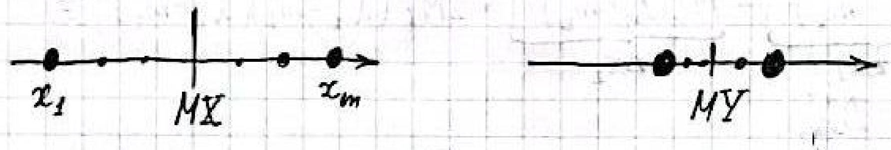
2.11. Сформулировать определение дисперсии случайной величины. Механический смысл дисперсии. Доказать свойства дисперсии. Понятие среднеквадратичного отклонения случайной величины.

Дисперсией случайной величины X называется число:

$$D[X] = M[(X-m)^2],$$

где $m = MX$

Механическая интерпретация дисперсии: момент инерции вероятностной массы относительно математического ожидания. Дисперсия характеризует разброс массы относительно центра тяжести: чем больше дисперсия, тем больше разброс



$$DX > DY$$

Свойства дисперсии

1°. Если $P\{X = x_0\} = 1$, то есть $X = x_0$ – детерминированная величина, то $DX = 0$

2°. Для любой случайной величины X: $DX \geq 0$

3°. $D[aX + b] = a^2 DX$

4°. Если X_1, X_2 – независимые случайные величины, то

$$D[X_1 + X_2] = DX_1 + DX_2$$

5°. $DX = M[X^2] - (MX)^2$

Доказательство:

1°. $DX = \{\text{определение}\} = \sum_i p_i (x_i - m)^2 = \{m = MX = x_0\} =$

$= (x_0 - x_0)^2 \cdot 1 = 0$

2°. По определению $DX = MY$, где $Y = (X-m)^2 \geq 0 \Rightarrow MY \geq 0$

3°. $D[aX+b] = \left\{ \begin{array}{l} \text{по определению} \\ DY = M[(Y-MY)^2] \end{array} \right\} = M\left\{\left[\underbrace{(aX+b)}_{Y} - \underbrace{(aMX+b)}_{MY}\right]^2\right\} =$

$= \{m = MX\} = M\{[aX + \cancel{b} - am - \cancel{b}]^2\} = M\{[a(X-m)]^2\} =$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{свойство} \\ \text{математического} \\ \text{ожидания} \end{array} \right\} = a^2 \cdot \underbrace{M[(X-m)^2]}_{DX} = a^2 \cdot DX$

4°. Обозначим $MX_i = m_i$, $i = \overline{1,2}$

$D[X_1 + X_2] = \left\{ \begin{array}{l} \text{по определению} \\ DY = M[(Y-m)^2], \\ MY = m_1 + m_2 \end{array} \right\} = M\{[(X_1+X_2) - (m_1+m_2)]^2\} =$

$= M\{[(X_1 - m_1) + (X_2 - m_2)]^2\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{раскроем} \\ \text{квадрат} \end{array} \right\} =$

$= M[(X_1 - m_1)^2 + (X_2 - m_2)^2 + 2(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{свойство} \\ \text{математического} \\ \text{ожидания} \end{array} \right\} =$

$= \underbrace{M[(X_1 - m_1)^2]}_{DX_1} + \underbrace{M[(X_2 - m_2)^2]}_{DX_2} + 2\overset{0}{\cancel{M[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]}} =$

$= DX_1 + DX_2$

Так как

$M[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)] = M[X_1 X_2] - m_1 MX_2 - m_2 MX_1 + m_1 m_2 =$

$= \left\{ \begin{array}{l} X_1, X_2 \text{ - независимые} \Rightarrow \\ \Rightarrow M[X_1 X_2] = MX_1 \cdot MX_2 = m_1 m_2 \end{array} \right\} = m_1 m_2 - m_1 m_2 - m_1 m_2 + m_1 m_2 = 0$

5°. $DX = \{\text{определение}\} = M[(X-m)^2] = M[X^2 + m^2 - 2mX] =$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{свойства} \\ \text{математического} \\ \text{ожидания} \end{array} \right\} = M[X^2] + m^2 - \overbrace{2m \underbrace{MX}_{m}}^{2m^2} = M[X^2] - m^2 = M[X^2] - (MX)^2$

DX имеет размерность квадрата случайной величины, что не очень удобно, поэтому часто рассматривают числовую характеристику:

$$\sigma(X) = \sqrt{DX},$$

которая называется среднеквадратичным отклонением случайной величины X и имеет ту же размерность, что и X

2.12. Сформулировать определение математического ожидания и дисперсии. Записать законы распределения биномиальной, пуассоновской, равномерной, экспоненциальной и нормальной случайной величин. Найти математические ожидания и дисперсии этих случайных величин

Смотреть 2.10, 2.11.

Биномиальное распределение

Говорят, что случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in N$ и $p \in (0,1)$, если она может принимать значения $0, 1, \ldots, n$ с вероятностями:

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}$$

Обозначается $X \sim B(n,p)$.

Рассмотрим случайную величину:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом испытании имеет место успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad i = \overline{1,n}$$

Очевидно, что:

1) $X_i \sim B(1,p)$

$$MX_i = \sum_{i=1}^{2} p_i x_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$DX_i = \sum_{i=1}^{2} (x_i - m)^2 p_i = \{ m_i = MX_i = p \} = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p =$$

$$= p^2(1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p(1-p)(p+1-p) = p(1-p) = \{ q = 1-p \} = pq$$

2) $X_i, i = \overline{1,n}$ - независимы в совокупности, так как испытания в схеме Бернулли независимы

3) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где $X \sim B(n,p)$ - биномиальная случайная величина

Таким образом: $MX = M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left\{\begin{matrix}\text{свойство} \\ \text{мат.} \\ \text{ожидания}\end{matrix}\right\} = \sum_{i=1}^{n} MX_i = \sum_{i=1}^{n} p = np$

$$DX = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left\{\begin{matrix}X_i - \text{независимы в} \\ \text{совокупности} \Rightarrow \\ \text{независимы попарно}\end{matrix}\right\} = \sum_{i=1}^{n} DX_i = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

Пуассоновское распределение

Говорят, что случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если X может принимать значения $0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями:

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in N$$

Обозначается $X \sim \Pi(\lambda)$

Мат. ожидание пуассоновской нормальной величины:

1) $$MX = \left\{ \begin{matrix} X \text{ - дискретная} \\ \text{случайная величина} \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \left\{ \begin{matrix} i = k-1 \Leftrightarrow k = i+1 \\ k=1 \Leftrightarrow i = 0 \end{matrix} \right\} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{e^{\lambda}} = \left\{ \begin{matrix} \text{ряд} \\ \text{Маклорена} \end{matrix} \right\} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

Дисперсия пуассоновской нормальной величины:

1) $$M[X^2] = \left\{ \begin{matrix} X \text{ - дискретная} \\ \text{случайная величина} \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \left\{ \begin{matrix} i = k-1 \Leftrightarrow k = i+1 \\ k=1 \Rightarrow i = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \frac{\lambda^{i+1}}{i!} = e^{-\lambda} \cdot \left[\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{\lambda^{i+1}}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} \right] = \left\{ \begin{matrix} j = i-1 \Leftrightarrow i = j+1 \\ i=1 \Rightarrow j = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \left[\lambda^2 \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} + \lambda \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{e^{\lambda}} \right] = \left\{ \begin{matrix} \text{ряд} \\ \text{Маклорена} \end{matrix} \right\} = e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} (\lambda^2 + \lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

2) $$DX = M[X^2] - (MX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Сканировано с CamScanner

Равномерное распределение

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[a, b]$ распределение, если её функция плотности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $c = \frac{1}{b-a} = const$.

Обозначается $X \sim R(a, b)$.

Математическое ожидание равномерной случайной величины:

1) $$M[X] = \left\{ \begin{matrix} X \text{ - непрерывная} \\ \text{случайная} \\ \text{величина} \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \left\{ \begin{matrix} f \equiv 0 \\ \text{вне } [a, b] \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(a+b)\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a+b}{2}$$

Дисперсия равномерной случайной величины:

1) $$D[X] = \left\{ \begin{matrix} \text{по опр.} \\ \text{дисперсии} \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x) dx = \left\{ \begin{matrix} f \equiv 0 \\ \text{вне } [a, b] \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 d\left(x - \frac{a+b}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \Big|_a^b = \frac{1}{3(b-a)} \left(\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3 \right) =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)} \left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \right) = \frac{1}{3(b-a)} \left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \right) =$$

$$= \frac{1}{3\cancel{(b-a)}} \cdot \cancel{2}^{1} \cdot \frac{(b-a)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{8}_4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Экспоненциальное распределение

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если функция плотности этой случайной величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Обозначается $X \sim exp(\lambda)$

Математическое ожидание экспоненциальной случайной величины

1) $M[X] = \left\{ \begin{matrix} X\text{ - непрерывная} \\ \text{случайная} \\ \text{величина} \end{matrix} \right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \left\{ \begin{matrix} f \equiv 0, \\ x<0 \end{matrix} \right\} =$

$= \int\limits_{0}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} x\, d e^{-\lambda x} = -\left[\cancel{x e^{-\lambda x}}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right] =$

$= \left\{ \begin{matrix} \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-\lambda x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{+\lambda x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \\ = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0 \end{matrix} \right\} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} =$

$= -\frac{1}{\lambda}(0-1) = \frac{1}{\lambda}$

Дисперсия экспоненциальной случайной величины:

1) $M[X^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \left\{ \begin{matrix} f \equiv 0, \\ x<0 \end{matrix} \right\} = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 d e^{-\lambda x} =$

$= -\left[\cancel{x^2 e^{-\lambda x}}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_{0}^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx \right] = 2\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx}_{MX} =$

$= \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$

2) $DX = \left\{ \begin{matrix} \text{свойства} \\ \text{дисперсии} \end{matrix} \right\} = M[X^2] - (MX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Нормальное распределение

Говорят, что непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами m и σ^2, если её функция плотности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

Обозначается $X \sim N(m, \sigma^2)$

Математическое ожидание нормальной случайной величины

1) $MX = \left\{ \begin{matrix} X\text{ - непрерывная} \\ \text{случайная} \\ \text{величина} \end{matrix} \right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$

Сканировано с CamScanner

$$= \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x-m}{\sigma} \Leftrightarrow x = \sigma y + m \\ dx = \sigma\, dy \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma y + m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{0 \text{ в силу нечётности}} + m \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{1 \text{ в силу условия нормировки}} = m$$

Дисперсия нормальной случайной величины

1) $$DX = \{\text{определение}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x-m}{\sigma} \Leftrightarrow x = \sigma y + m \\ dx = \sigma\, dy \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y, \quad v = -e^{-\frac{y^2}{2}} \\ du = dy, \quad dv = y e^{-\frac{y^2}{2}} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \Big[\underbrace{-y e^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\frac{y^2}{2}} dy \Big] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \sigma^2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{1 \text{ в силу условия нормировки}} = \sigma^2$$

2.13. Сформулировать определение ковариации и записать формулы для её вычисления в случае дискретного и непрерывного случайных векторов. Доказать свойства ковариации.

Пусть (X, Y) - двумерный случайный вектор.

Ковариацией случайных величин X и Y называется число

$$cov(X, Y) = M[(X - m_X)(Y - m_Y)],$$

где $m_X = MX$, $m_Y = MY$

Формула из определения принимает вид:

— в случае дискретного случайного вектора

$$cov(X, Y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (x_i - m_X)(y_j - m_Y) p_{ij},$$

где $\{(x_i, y_j) : i \in I, j \in J\}$ - все значения вектора (X, Y),

$p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$

— в случае непрерывного случайного вектора

$$cov(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - m_X)(y - m_Y) f(x, y) \, dx \, dy,$$

где f - функция плотности случайного вектора (X, Y)

Свойства ковариации:

1° $D[X + Y] = DX + DY + 2cov(X, Y)$

2° $cov(X, X) = DX$

3° Если X и Y независимы, то $cov(X, Y) = 0$

4° $cov(a_1 X + b_1, a_2 Y + b_2) = a_1 a_2 cov(X, Y)$

5° $|cov(X, Y)| \leq \sqrt{DXDY}$, причём $|cov(X, Y)| = \sqrt{DXDY} \iff$ X и Y связаны линейной зависимостью, то есть, например, $Y = aX + b$

6° $cov(X, Y) = M[XY] - MX \cdot MY$.

Сканировано с CamScanner

Доказательство:

1°. $D[X+Y] = \{\text{определение}\} = M\{[(X+Y) - M[X+Y]]^2\} =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{свойство}\\ \text{математического}\\ \text{ожидания}\end{matrix}\right\} = M\{[(X+Y) - (MX+MY)]^2\} =$

$= M\{[(X-MX) + (Y-MY)]^2\} =$

$= M\{(X-MX)^2 + (Y-MY)^2 + 2(X-MX)(Y-MY)\} =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{свойство}\\ \text{мат.}\\ \text{ожидания}\end{matrix}\right\} = \underbrace{M[(X-MX)^2]}_{DX} + \underbrace{M[(Y-MY)^2]}_{DY} + 2\underbrace{M[(X-MX)(Y-MY)]}_{cov(X,Y)} =$

$= DX + DY + 2\,cov(X,Y)$

2°. $cov(X,X) = \{\text{определение}\} = M[(X-MX)(X-MX)] =$

$= M[(X-MX)^2] = \{\text{определение дисперсии}\} = DX$

3°. $cov(X,Y) = \{\text{свойство } 6°\} = M[XY] - MX \cdot MY = \left\{\begin{matrix}X \text{ и } Y \text{ независимы}\\ \Rightarrow\\ M[X \cdot Y] = MX \cdot MY\end{matrix}\right\} = 0$

4°. $cov(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = \{\text{определение}\} = \{U = a_1X + b_1,\ V = a_2Y + b_2\} =$

$= M[(U-MU)(V-MV)] = \left\{\begin{matrix}\text{по свойствам мат. ожидания:}\\ MU = a_1MX + b_1,\ MV = a_2Y + b_2\end{matrix}\right\} =$

$= \left\{\begin{matrix}U - MU = (a_1X + b_1) - (a_1MX + b_1) = a_1(X - MX)\\ V - MV = (a_2Y + b_2) - (a_2MY + b_2) = a_2(Y - MY)\end{matrix}\right\} =$

$= M[a_1(X-MX)\,a_2(Y-MY)] = \left\{\begin{matrix}\text{свойства}\\ \text{мат.}\\ \text{ожидания}\end{matrix}\right\} = a_1a_2\underbrace{M[(X-MX)(Y-MY)]}_{cov(X,Y)} =$

$= a_1a_2\,cov(X,Y)$

5°. 1) Рассмотрим семейство случайных величин:

$$Z(t) = tX - Y,\ t \in R$$

Дисперсия этой величины

$$D[Z(t)] = D[tX - Y] = \{\text{свойство } 1\} =$$

$$= D[tX] + D[-Y] + 2cov(tX, -Y) = \left\{\begin{matrix}\text{свойства}\\ \text{дисперсии}\\ \text{и ковариации}\end{matrix}\right\} =$$

$= t^2 DX - 2t\,cov(X,Y) + DY$, $t \in R$ – квадратный трёхчлен относительно t

Т.к. $D[Z(t)] \geq 0$, $t \in R$ – по свойству дисперсии $\Rightarrow$ квадратный трёхчлен имеет не более одного корня $\Rightarrow$ дискриминант ≤ 0;

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$4cov^2(X,Y) - 4DXDY \leq 0 \quad |:4$$

$$cov^2(X,Y) - DXDY \leq 0$$

$$cov^2(X,Y) \leq DXDY$$

$\{DXDY \geq 0$ по свойствам дисперсии$\}$

$$|cov(X,Y)| \leq \sqrt{DXDY}$$

2) Необходимость $\Rightarrow$

Если $|cov(X,Y)| = \sqrt{DXDY} \Rightarrow$ дискриминант $=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow D[Z(t)]$ имеет единственный корень. Обозначим его $t=a \Rightarrow Z(a) = aX - Y$ принимает единственное значение, обозначим его как $-b \Rightarrow Z(a) = aX - Y = -b \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y = aX + b$$

3) Достаточность $\Leftarrow$

Если $Y = aX + b \Rightarrow Z(a) = -b \Rightarrow D[Z(a)] = 0 \Rightarrow$ дискриминант $=0 \Rightarrow |cov(X,Y)| = \sqrt{DXDY}$.

6°. $cov(X,Y) = \{$определение$\} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] =$
$= M[XY - m_x Y - m_y X + m_x m_y] = \{$свойства мат. ожидания$\} =$
$= M[XY] - m_x MY - m_y MX + m_x m_y = M[XY] - MXMY.$

2.14. Сформулировать определения ковариации и коэффициента корреляции случайных величин. Сформулировать свойства коэффициента корреляции. Сформулировать определения независимых и некоррелированных случайных величин, указать связь между этими свойствами. Понятия ковариационной и корреляционной матриц. Записать свойства ковариационной матриц.

Смотреть 2.13, независимость в 2.7.

Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называют число

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX DY}}$$

(предполагается, что $DX \cdot DY > 0$).

Свойства коэффициента корреляции

1°. $\rho(X,X) = 1$

2°. Если случайные величины X и Y независимы $\Rightarrow \rho(X,Y) = 0$

3°. $\rho(a_1 X + b_1, a_2 Y + b_2) = \pm\rho(X,Y)$, причём $\pm$ заменяется на
+, если a_1, a_2 имеют одинаковые знаки
−, иначе

4°. $|\rho(X,Y)| \leq 1$, причём:

$$\rho_{XY} = \begin{cases} 1, \text{ когда } Y = aX + b, \text{ где } a > 0 \\ -1, \text{ когда } Y = aX + b, \text{ где } a < 0 \end{cases}$$

Случайные величины X и Y называют некоррелированными, если $cov(X,Y) = 0$. Из свойства 3° следует, что если X и Y независимы, то они некоррелированы. Обратное неверно.

Ковариационной матрицей вектора $\vec{X}$ называется матрица:

$$\Sigma_{\vec{X}} = (\sigma_{ij}) \quad , \quad i,j = \overline{1,n},$$

где $\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$.

Корреляционной матрицей вектора $\vec{X}$ называется матрица:

$$P_{\vec{X}} = (\rho_{ij}), \quad i,j = \overline{1,n},$$

где $\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j)$

Свойства ковариационной матрицы.

1°. $\sigma_{ii} = DX_i$

2°. $\Sigma_{\vec{X}} = \Sigma_{\vec{X}}^T$ – симметричная матрица

3°. Если $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$,

где $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$,

$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$,

$B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, (т.е. $\vec{Y}$ является линейной комбинацией от вектора $\vec{X}$),

то $\Sigma_{\vec{Y}} = B^T \Sigma_{\vec{X}} B$

4°. Матрица $\Sigma_{\vec{X}}$ является неотрицательно определённой, т.е.

$$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n : \ \vec{b}^T \Sigma_{\vec{X}} \vec{b} \geq 0$$

5°. Если все компоненты вектора $\vec{X}$ попарно независимы, то $\Sigma_{\vec{X}}$ – диагональная матрица.