ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Домашнее задание №3 (модуль 2),
специальность ИУ7, 3-й курс, 5-й семестр

Правила оформления домашних заданий

1. Домашние задания выполняются строго на отдельных листах (тетрадных или формата А4), которые обязательно должны быть скреплены степлером или канцелярской скрепкой. Лучше всего выполнять работу на тонких листах, исписанных с обеих сторон и скрепленных скрепкой. Разрозненные листы, а также листы, скрепленные путем загибания уголка, не принимаются;
2. каждая работа должна иметь титульный лист, на котором указаны фамилия автора, индекс его группы и номер выполненного варианта.

ВАРИАНТ 1.

1. Случайная величина X распределена по закону Релея:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \ln X$.

2. Найти $P(X_1 - X_2 > -1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\, 2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.5 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 2.

1. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = \operatorname{arctg} X$.

2. Найти $P(X_1 - X_2 > 1.1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (3,\, 1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.45 \\ 0.45 & 0.71 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 3.

1. Значения острого угла ромба со стороной a распределены равномерно в интервале $(0,\, \pi/2)$. Найти плотность распределения вероятностей площади ромба.

2. Найти $P(X_1 - X_2 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (-0.15,\, 0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 4.

1. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^3$.

2. Найти $P\left(X_1 - X_2 > 2\sqrt{6}\right)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0.5,\, 0.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 5.

1. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4a}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = b^2 - X^2$, если $b > a$.

2. Найти $P(X_1 - X_2 > -1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\, 5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 6.

1. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(0,\, 1)$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по экспоненциальному закону с параметром $\lambda > 0$?

2. Найти $P(0 < X_1 < 2\,|X_2 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\, 3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 7.

1. Измеренное значение радиуса круга распределено по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 50$ и дисперсией $\sigma^2 = 0.25$. Найти плотность распределения площади круга и его среднюю площадь.

2. Найти $P(0 < X_1 < 2\,|X_2 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1.5,\, 1.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 8.

1. Найти функцию плотности распределения объема шара, если его радиус является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 10$ и дисперсией $\sigma^2 = 0.25$.

2. Найти $P(1 < X_1 < 2\,|X_2 = 0.5)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\, 1.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 5/3 & 25 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 9.

1. Найти плотность распределения вероятностей объема куба, длина ребра которого является случайной величиной, распределенной равномерно в интервале $(0,\,a)$.

2. Найти $P(-1 < X_1 < 1\,|X_2 = \sqrt{3})$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\,0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4/\sqrt{3} \\ -4/\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 10.

1. Пусть X и Y — независимые случайные величины, причем $X \sim \mathrm{Exp}(1/2)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(1/3)$. Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

2. Найти $P(0 < X_1 < 9\,|X_2 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\,0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 11.

1. Диаметр цилиндрического вала имеет погрешность изготовления, поэтому его измеренное значение является случайной величиной, распределенной равномерно на интервале $(a,\,b)$. Найти плотность распределения вероятностей площади поперечного сечения вала.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (2,\,1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ -3/4 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 12.

1. Прочность X некоторого образца имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием $m_1 = 9$ МПа и дисперсией $\sigma_1^2 = 1$ МПа^2. На образец действует случайная нагрузка Y, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $m_2 = 4$ МПа и дисперсией $\sigma_2^2 = 4$ МПа^2. Найти вероятность неразрушения образца, то есть вероятность события $\{X > Y\}$.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (6,\,10), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 13.

1. На окружность радиуса R случайным образом брошены две точки. Считая, что длина хорды, соединяющей эти точки, является равномерно распределенной случайной величиной, найти плотность распределения вероятностей длины кратчайшей дуги между брошенными точками.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0.6,\,0.3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.81 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 14.

1. Угол λ сноса самолета вычисляется по формуле

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{u}{v}\sin\varepsilon\right),$$

где ε – угол действия ветра, u — скорость ветра, v — скорость самолета в воздухе (u и v измеряются в одинаковых единицах). Считая, что значения угла действия ветра распределены равномерно в интервале $(-\pi,\,\pi)$, найти плотность распределения вероятностей угла сноса при $u = 20$ м/с, $v = 720$ км/ч.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (2,\,1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 15.

1. У центробежного регулятора стороны равны и составляют так называемый "параллелограмм" регулятора, острый угол φ которого является случайной величиой, распределенной равномерно в интервале $(\pi/6,\,\pi/4)$. Найти закон распределения длин диагоналей параллелограмма регулятора, если его сторона равна a.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (2,\,7), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 16.

1. Найти функцию распределения случайной величины $Y = kX$, $k > 0$, если $X \sim \mathrm{Exp}(2)$.

2. Найти $P(|X_2| < 3\,|X_1 = 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\,2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 17.

1. Найти функциональное преобразование, которому надо подвергнуть случайную величину $X \sim R\,(0,\,\pi)$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по закону Коши:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\,(1 + y^2)}.$$

2. Найти $P(|X_2| < 5.5\,|X_1 = 1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (5,\,2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 18.

1. Измеренное значение X стороны квадрата является случайной величиной, плотность распределения которой

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin x, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей площади квадрата.

2. Найти $P(|X_2| < 8\sqrt{2}/3 \,|X_1 = 10)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (10,\, 0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 40 & -8\sqrt{10} \\ -8\sqrt{10} & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 19.

1. Случайная величина V — скорость молекул газа массы m — при абсолютной температуре T распределено по закону Максвелла-Больцмана:

$$f_V(v) = \lambda v^2 \exp\left(-\beta v^2\right), \qquad v > 0,$$

где $\beta = m/(2kT)$, k — постоянная Больцмана, а λ – нормирующий множитель. Найти значение λ и плотность распределения случайной величины $E = mV^2/2$ — кинетической энергии газа массы m при температуре T.

2. Найти $P(|X_2| < 0.6 \,|X_1 = 4)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\, 1.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0.54 \\ -0.54 & 1.08 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 20.

1. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, 2)$. Найти значения математического ожидания и дисперсии случайных величин

$$Y = -4X, \quad Z = X - Y, \quad V = X + 2Y - 3Z - 1.$$

2. Найти $P(|X_2| < 1 \,|X_1 = 3)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\, 0.2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 21.

1. Пусть $X \sim R(0, 20)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(1/2)$, $\rho(X, Y) = -0.8$. Найти вектор средних и корреляционную матрицу случайного вектоа (U, V), если $U = 2X - 3Y + 5$, $V = -3X + Y + 1$.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (3,\, 3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 22.

1. По сторонам прямого угла xOy скользит линейка длины 1, занимая случайное положение, причем случайная величина X — абсцисса точки опоры линейки на ось Ox — равномерно распределена в интервале $(0, 1)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины R — расстояния от начала координат до линейки.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\, 1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1/3 \\ -1/3 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 23.

1. Время T безотказной работы приборов некоторого типа является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2. Считая, что затраты C на обслуживание прибора обратно пропорциональны времени их безотказной работы, то есть $C = a/T$, $a > 0$, найти закон распределения случайной величины C.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\, -0.3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 1/6 & 0.09 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 24.

1. Найти вектор средних, ковариационную и корреляционную матрицы случайного вектора (X, Y), если $X \sim R(-1, 3)$, $Y = 4 - 3X$.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\, 2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 4/3 \\ 4/3 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 25.

1. Найти вектор средних, ковариационную и корреляционную матрицы случайного вектора (U, V), если $U = X + 3Y - 2$, $V = 2X - Y + 1$, $M[X] = 1$, $D[X] = 5$, $M[Y] = -2$, $D[Y] = 4$, $\mathrm{cov}(X, Y) = 3$.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\, 1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2/3 \\ -2/3 & 16/9 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 26.

1. На положительную часть оси абсцисс прямоугольной декартовой системы координат xOy случайным образом бросают точку M_x, а на положительную часть оси ординат – точку M_y. Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата расстояния между этими точками, если $|OM_x| \sim R(0, a)$, $|OM_y| \sim R(0, b)$.

2. Найти $P(5 < X_1 < 14 \,|X_2 = 1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\, -3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 27.

1. На отрезок $[0,\,a]$ случайным образом бросают 2 точки. Найти закон распределения расстояния между ними, если их координаты являются случайными величинами, которые независимы и равномерно распределены на $[0,\,a]$.

2. Найти $P(1 < X_1 < 3\,|X_2 = 0.5)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\,4.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 5/3 & 5 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 28.

1. На окружность радиуса a с центром в начале декартовой системы Oxy случайным образом бросают точку M. Радиус-вектор точки M проецируется на ось абсцисс и на этой проекции (как на стороне) строится квадрат. Найти математическое ожидание и дисперсию площади этого квадрата, если значение полярного угла точки M равномерно распределено в интервале $(0,\,2\pi)$.

2. Найти $P(0 < X_1 < 2\,|X_2 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1.5,\,1.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 29.

1. Прямая l располагается на плоскости Oxy, проходя через точку O и образуя угол в 30° с осью абсцисс. Пусть (X, Y) — случайный вектор, компоненты которого равны соответствующим координатам точки M, случайным образом брошенной на эту плоскость. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки O до проекции точки M на прямую l, если известно, что $M[X] = 2$, $D[X] = 16$, $M[Y] = 4$, $D[Y] = 64$, $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

2. Найти $P(-1 < X_2 < 1\,|X_1 = \sqrt{3})$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\,0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4/\sqrt{3} \\ -4/\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 30.

1. Через точку $B(0,\,b)$ проводится прямая l под углом φ к оси ординат. Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины X — абсциссы точки пересечения прямой l с осью абсцисс, — если $\varphi \sim R(-\pi/2,\,\pi/2)$.

2. Найти $P(0 < X_2 < 9\,|X_1 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\,0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3