Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

«Теория вероятностей»
Домашняя работа № 1

Вариант 12

Студент Ильченко Е. А.

Группа ИУ7-54Б

Преподаватели Ринчино А. Л.

Москва, 2025

Содержание

Задание 1

Условие: Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле и сделать поясняющий рисунок:

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy$$

Решение:

Исходная область задана следующим образом: $x \in [0,2]$, $y \in \left[-\sqrt{4x-x^2}, 0\right]$.

Построим график исходной области интегрирования (рис. 1).

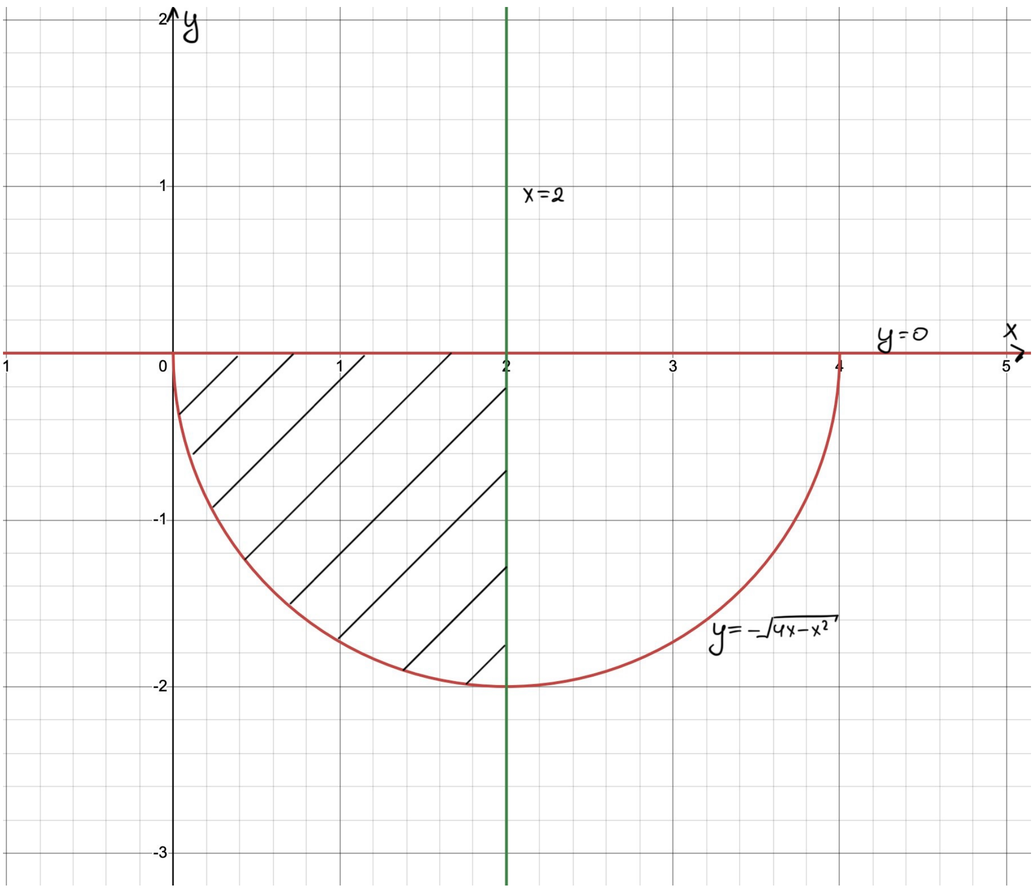

Рисунок 1 — Исходная область интегрирования

Преобразуем выражение для границы области, чтобы выразить x через y:

$$y = -\sqrt{4x - x^2}$$
$$y^2 = 4x - x^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$
$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$
$$(x-2)^2 = 4 - y^2$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{4 - y^2}$$
$$x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}$$

Поскольку в исходных пределах $x \in [0, 2]$, и $y \leq 0$, выбираем левую ветвь окружности: $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$. Произведем преобразование области: поворот на 90° против часовой стрелки относительно точки $(0, 0)$ с последующей симметрией относительно оси X. Получим измененную область интегрирования: $y \in [-2, 0]$, $x \in \left[2 - \sqrt{4 - y^2}, 2\right]$ (рис. 2).

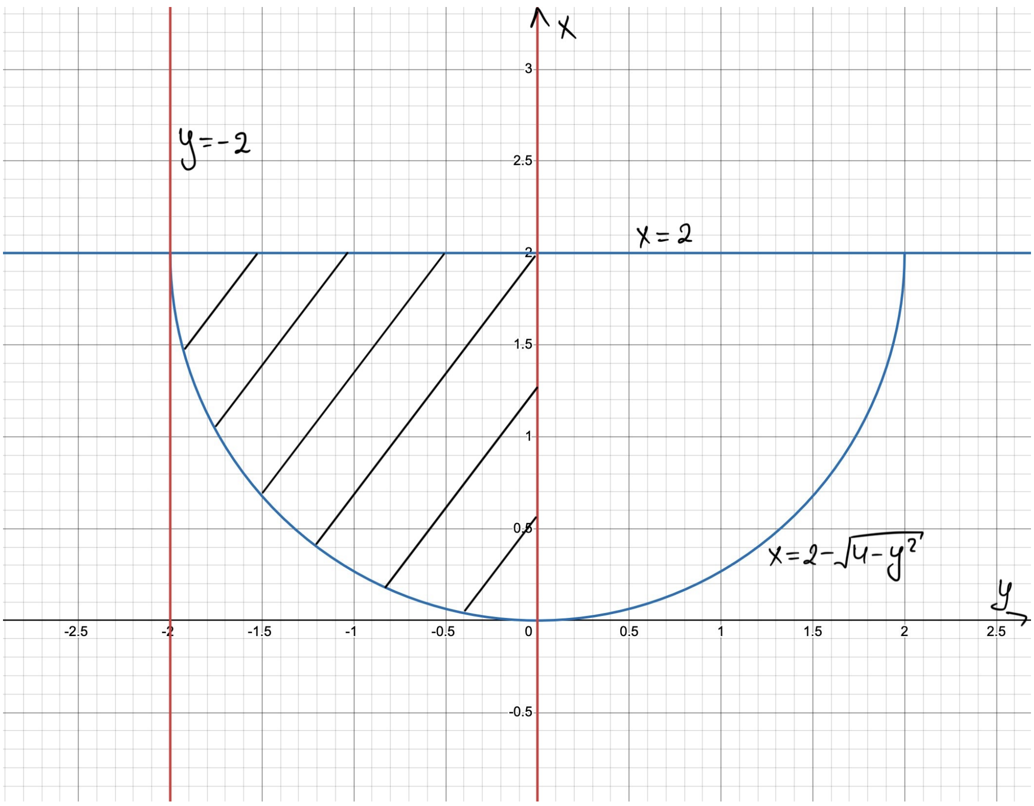

Рисунок 2 — Исходная область интегрирования

Тогда новые пределы интегрирования:

$$\boxed{\int_{-2}^{0} dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2} f(x, y)\, dx.}$$

Задание 2

Условие: Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2$, $z = 1 - y^2$.

Решение:

Дано:

— $z = x^2$ — параболический цилиндр с образующей, параллельной оси Oy, направляющей которого служит парабола в плоскости xOz;

— $z = 1 - y^2$ — параболический цилиндр с образующей, параллельной оси Ox, , направляющей которого служит парабола в плоскости yOz.

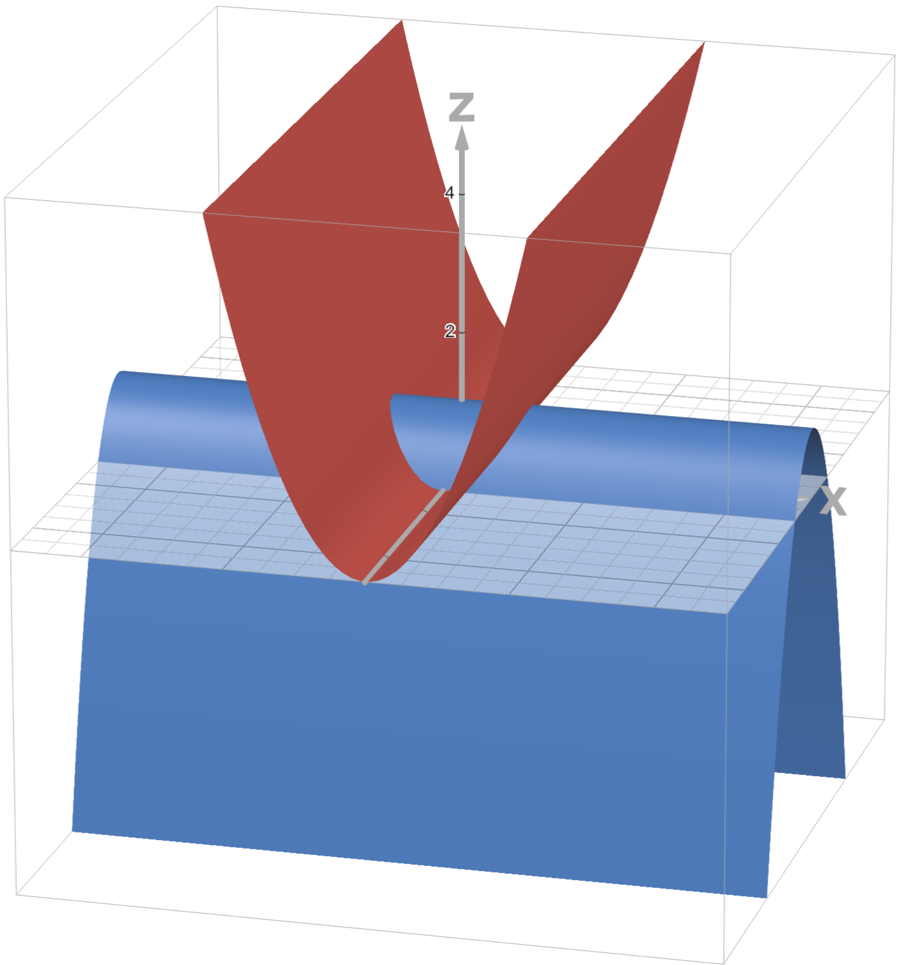

Рисунок 3 — Область тела, ограниченная $z = x^2$, $z = 1 - y^2$

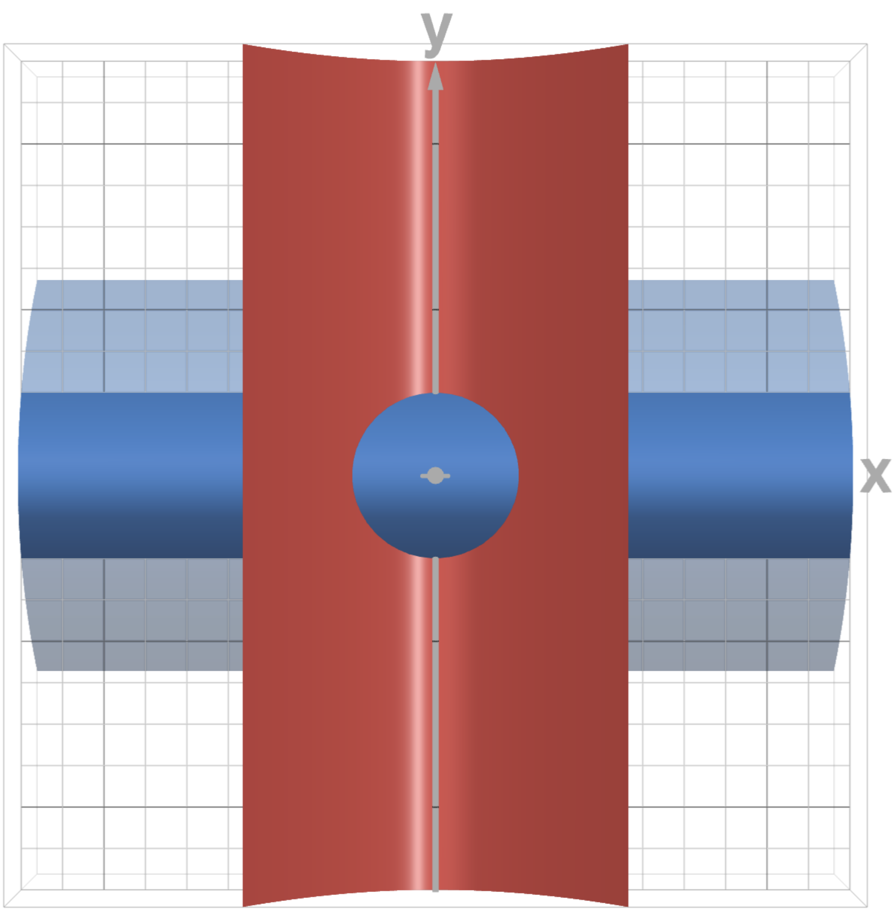

Рисунок 4 — Область тела, ограниченная $z = x^2$, $z = 1 - y^2$. Вид сверху

Объем тела находим по формуле:

$$V = \iint_D (z_{\text{верх}}(x, y) - z_{\text{нижн}}(x, y))\, dx\, dy$$

В нашем случае:

— Верхняя поверхность: $z_{\text{верх}} = 1-y^2$ (параболический цилиндр, ветвями направленный вниз)

— Нижняя поверхность: $z_{\text{нижн}} = x^2$ (параболический цилиндр, ветвями направленный вверх)

Следовательно:

$$V = \iint_D ((1 - y^2) - x^2)\, dx\, dy = \iint_D (1 - (x^2 + y^2))\, dx\, dy$$

Найдем область интегрирования D — проекцию тела на плоскость xOy. Для этого найдем линию пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} z = x^2 \\ z = 1 - y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Получили уравнение окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Таким образом, область D — это круг (рис. 5):

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

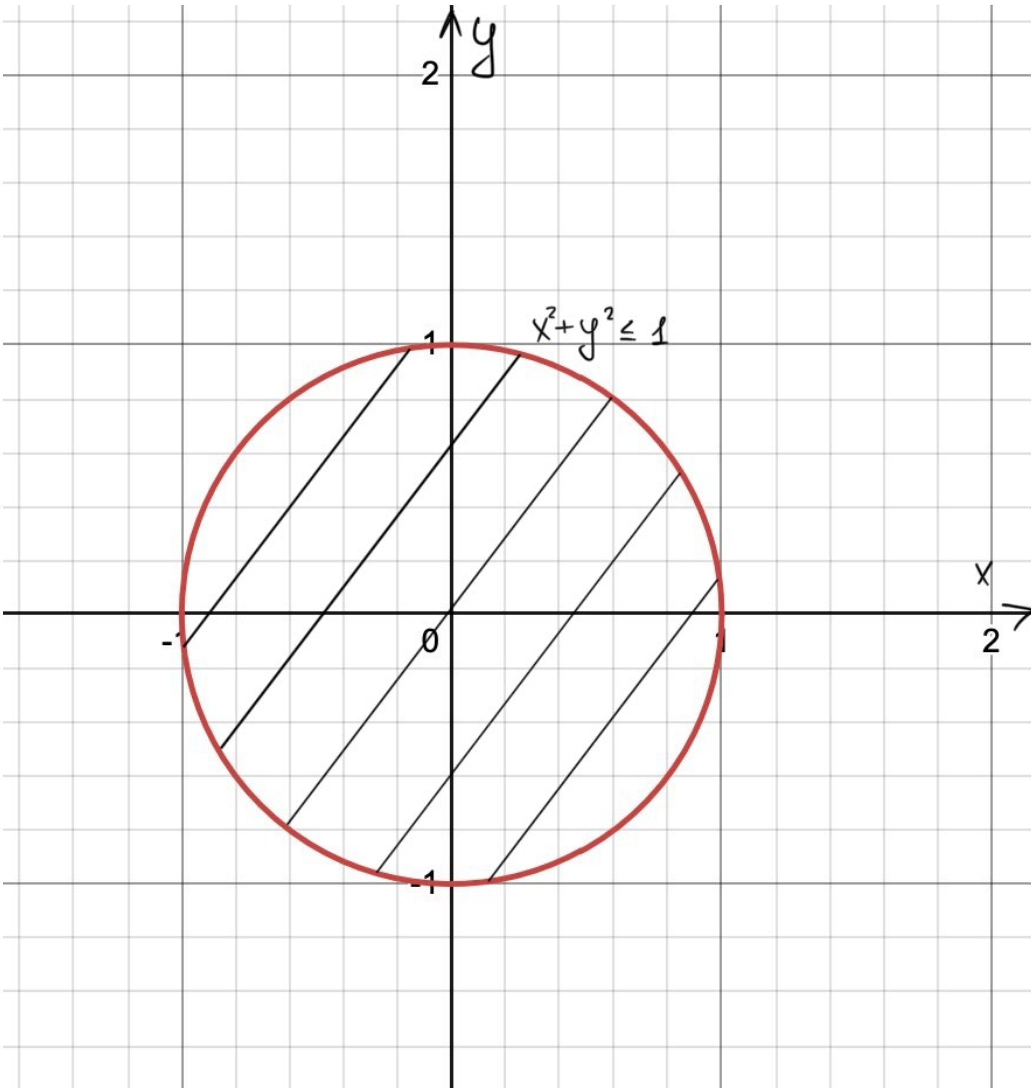

Рисунок 5 — Проекция на плоскость xOy

Для вычисления интеграла по круговой области удобно перейти к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

Границы интегрирования в полярных координатах:

$$\begin{cases} 0 & \le r \le & 1 \\ 0 & \le \phi \le & 2\pi \end{cases}$$

Подставляем в интеграл:

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (r - r^3)\, dr$$

Вычисляем внутренний интеграл по r:

$$\int_0^1 (r - r^3)\, dr = \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Теперь вычисляем внешний интеграл по ϕ:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\phi = \frac{1}{4} \cdot \phi\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\textbf{Ответ: } \frac{\pi}{2}}$$

Задание 3

Условие: Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = 0,\ z = 0,\ x+y+z = 4,\ 2x+z = 4$

Решение:

Дано:

— $y = 0$ – координатная плоскость xOz;

— $z = 0$ – координатная плоскость xOy;

— $x + y + z = 4$ – плоскость, отсекающая на осях координат отрезки $x = 4$, $y = 4$, $z = 4$;

— $2x + z = 4$ – плоскость, параллельная оси Oy.

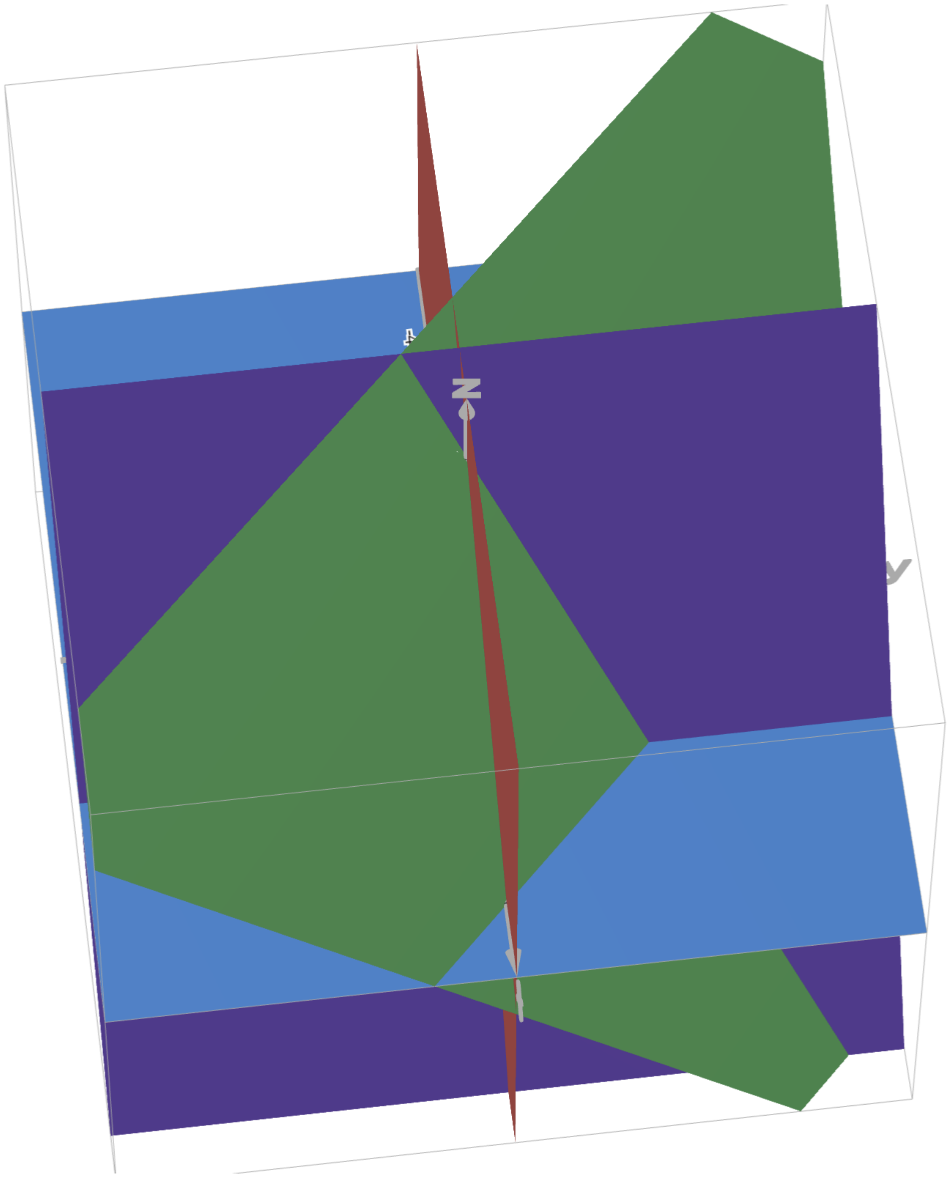

Рисунок 6 — Область тела, ограниченная $y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 4,\ 2x + z = 4$

Объем тела будем вычислять как сумму двух объемов, поскольку тело состоит из двух частей, разделенных линией пересечения плоскостей $x + y + z = 4$ и $2x + z = 4$.

Найдем линию пересечения этих плоскостей:

$$\begin{cases} x + y + z &= 4 \\ 2x + z &= 4 \end{cases} \Rightarrow y = x$$

Таким образом, тело разделяется на две части плоскостью $y = x$.

Сначала вычислим объем для фигуры, где $x \in [2, 4]$.

В этой области верхней поверхностью является плоскость $z = 4 - x - y$, а нижней – плоскость $z = 0$.

Найдем границы области D_1 – проекции на плоскость xOy(рис. 7):

— Пересечение плоскости $x + y + z = 4$ с плоскостью $z = 0$: $y = 4 - x$

— Граница $y = 0$ (координатная плоскость)

— Граница $x = 2$ (из пересечения с другой частью тела)

— Граница $x = 4$ (из пересечения с плоскостью $x + y + z = 4$ при $y = 0$, $z = 0$)

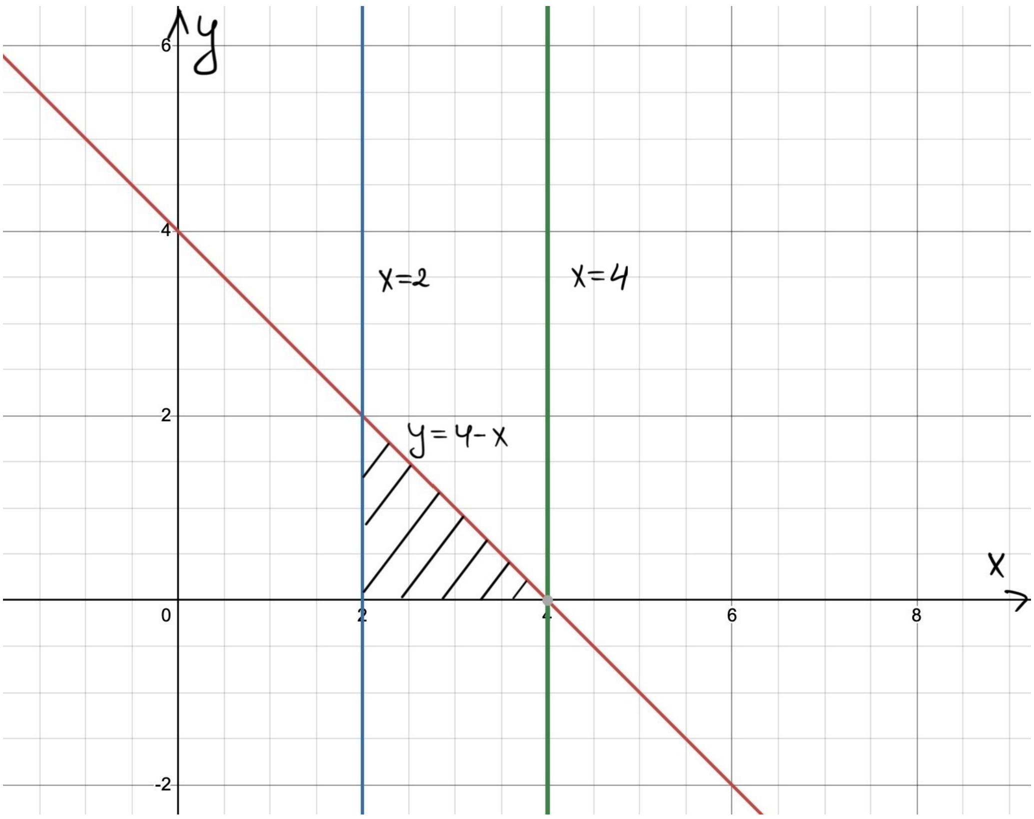

Рисунок 7 — Проекция на плоскость xOy при $x \in [2, 4]$

Таким образом:

$$V_1 = \iint\limits_{D_1} z\,dx\,dy = \int_2^4 dx \int_0^{4-x} (4 - x - y)\,dy$$

Вычисляем внутренний интеграл по y:

$$\int_0^{4-x} (4-x-y)\,dy = \left[4y - xy - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^{4-x} = 4(4-x) - x(4-x) - \frac{(4-x)^2}{2}$$

Упрощаем выражение:

$$4(4-x) - x(4-x) - \frac{(4-x)^2}{2}$$

$$= 16 - 4x - 4x + x^2 - \frac{(16-8x+x^2)}{2} = 16 - 8x + x^2 - 8 + 4x - \frac{x^2}{2}$$

$$= 8 - 4x + \frac{x^2}{2}$$

Теперь вычисляем внешний интеграл по x:

$$V_1 = \int_2^4 \left(8 - 4x + \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[8x - 2x^2 + \frac{x^3}{6}\right]\Bigg|_2^4$$

Подставляем пределы:

$$\left(32 - 32 + \frac{64}{6}\right) - \left(16 - 8 + \frac{8}{6}\right) = \frac{64}{6} - \left(8 + \frac{8}{6}\right) = \frac{64}{6} - \frac{56}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Теперь вычислим объем для фигуры, где $x \in [0,2]$.

В этой области тело ограничено сверху плоскостью $z = 4 - x - y$, а снизу – плоскостью $z = 4 - 2x$.

Найдем границы области D_2 – проекции на плоскость xOy(рис. 8):

— Граница $y = 0$ (координатная плоскость)

— Граница $y = x$ (линия пересечения плоскостей)

— Граница $x = 0$ (координатная плоскость)

— Граница $x = 2$ (из пересечения с первой частью тела)

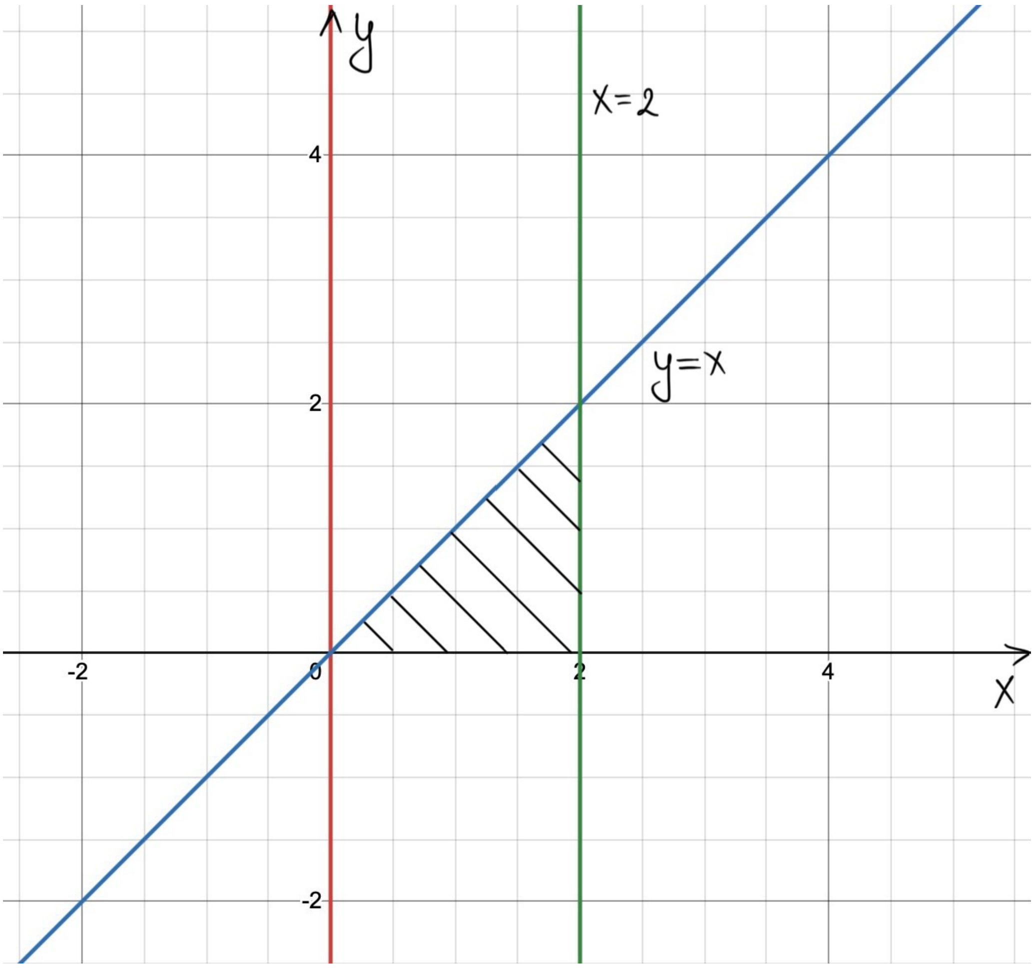

Рисунок 8 — Проекция на плоскость xOy при $x \in [0, 2]$

Таким образом:

$$V_2 = \iint\limits_{D_2} (z_{\text{верх}} - z_{\text{нижн}})\, dx\, dy = \int_0^2 dx \int_0^x [(4 - x - y) - (4 - 2x)]\, dy$$

Упрощаем подынтегральное выражение:

$$(4 - x - y) - (4 - 2x) = x - y$$

Следовательно:

$$V_2 = \int_0^2 dx \int_0^x (x - y)\, dy$$

Вычисляем внутренний интеграл по y:

$$\int_0^x (x - y)\, dy = \left[xy - \frac{y^2}{2} \right] \Bigg|_0^x = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Теперь вычисляем внешний интеграл по x:

$$V_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_0^2 = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$$

Суммируем объемы обеих частей:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{\textbf{Ответ: } \frac{8}{3}}$$