Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

«Теория вероятностей»
Домашняя работа № 3

Вариант 12

Студент Ильченко Е. А.

Группа ИУ7-54Б

Преподаватели Ринчино А. Л.

Москва, 2025

Содержание

Задание 1

Условие: Прочность X некоторого образца имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием $m_1 = 9$ МПа и дисперсией $\sigma_1^2 = 1$ МПа^2. На образец действует случайная нагрузка Y, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $m_2 = 4$ МПа и дисперсией $\sigma_2^2 = 4$ МПа^2. Найти вероятность неразрушения образца, то есть вероятность события $\{X > Y\}$.

Решение:

По условию: $X = \mathcal{N}(9, 1), Y = \mathcal{N}(4, 4)$

Переход к разности $Z = X - Y$

Так как X и Y независимы и нормальны, разность $Z = X - Y$ также распределена нормально.

Математическое ожидание:

$$m_Z = m_1 - m_2 = 9 - 4 = 5 \text{ МПа}.$$

Дисперсия:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1 + 4 = 5 \text{ МПа}^2.$$

Таким образом,

$$Z \sim \mathcal{N}(5, 5).$$

Событие $\{X > Y\}$ равносильно $\{Z > 0\}$.

Стандартизация

Введём стандартную нормальную величину:

$$U = \frac{Z - m_Z}{\sigma_Z} = \frac{Z - 5}{\sqrt{5}},$$

$$U \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Тогда

$$P(Z > 0) = P\left(U > \frac{0 - 5}{\sqrt{5}}\right) = P\left(U > -\sqrt{5}\right).$$

Вычисление вероятности

Из симметрии стандартного нормального распределения:

$$P(U > -a) = P(U < a) = \Phi(a),$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения.

Здесь $a = \sqrt{5} \approx 2.236$.

По таблицам функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(2.23) \approx 0.9871,$$
$$\Phi(2.24) \approx 0.9875.$$

Интерполяция для $x = 2.236$:

$$\Phi(2.236) \approx 0.9871 + 0.6 \cdot (0.9875 - 0.9871) = 0.9871 + 0.00024 = 0.98734.$$

Таким образом,

$$P(Z > 0) = \Phi(\sqrt{5}) \approx 0.98734.$$

$$\boxed{\textbf{Ответ: } P(X > Y) \approx 0.98734}$$

Задание 2

Условие: Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (6, 10), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Введем случайную величину

Обозначим $Z = X_2 - 2X_1$. Тогда событие $\{X_2 > 2X_1\}$ равносильно $\{Z > 0\}$.

Поскольку (X_1, X_2) имеет совместное нормальное распределение, любая линейная комбинация компонент распределена нормально. Следовательно, $Z \sim \mathcal{N}(m_Z, \sigma_Z^2)$.

Математическое ожидание Z

$$m_Z = \mathcal{M}(Z) = \mathcal{M}(X_2 - 2X_1) = \mathcal{M}(X_2) - 2\mathcal{M}(X_1) = 10 - 2 \cdot 6 = 10 - 12 = -2.$$

Дисперсия Z

Используем формулу дисперсии линейной комбинации:

$$D(Z) = D(X_2) + 4D(X_1) - 4\operatorname{cov}(X_1, X_2).$$

Из матрицы Σ:

$$D(X_1) = 0.5, \quad D(X_2) = 1, \quad \operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0.5.$$

Подставляем:

$$D(Z) = 1 + 4 \cdot 0.5 - 4 \cdot 0.5 = 1 + 2 - 2 = 1.$$

Таким образом, $\sigma_Z^2 = 1$.

Распределение $Z \sim \mathcal{N}(-2,\ 1)$.

Вероятность $P(Z > 0)$

$$P(Z > 0) = 1 - P(Z \le 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - (-2)}{1}\right) = 1 - \Phi(2),$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения.

Из таблицы $\Phi(2) \approx 0.9772$, поэтому

$$P(Z > 0) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

Ответ: $P(X_2 > 2X_1) \approx 0.0228$