

扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

线性代数的考试基本情况

- **一、满分34分；2个选择+1个填空+2个解答；**
- **二、数一数二数三考试内容基本统一**
(数一：向量空间)
- **三、一个核心——秩，一个方法——初等变换.**





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

第1章 行列式

- **主要内容**
- **1.行列式的定义及性质；**
- **2.行列式的展开公式**



一、行列式的定义

■ 1. 排列和逆序

排列 由 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列, n 级排列共有 $n!$ 个.

逆序 在一个排列中, 如果一个大的数排在了一个小的数前面,
就称这两个数构成了一个逆序.

逆序数 在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 逆序的总数称为该排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

如 $\tau(32514) = \underline{\hspace{2cm}}$



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



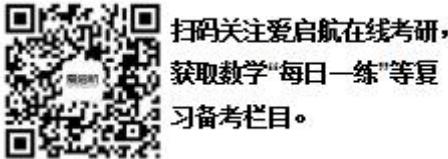


2. 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$





$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

注：对于行列式的定义把握以下两点

1. n 阶行列式每一项是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，共有 $n!$ 项
2. 当行下标顺排时，每一项的正负号由列下标 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 决定。
如：写出四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项



二、行列式的性质



性质1 行列互换, 其值不变.

性质2 两行(列)互换, 行列式的值变号.

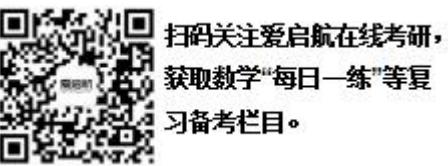
特别地: 两行(列)相同, 行列式的值为0.

性质3 某行(列)有公因子 k , 则可把 k 提到行列式外面.

特别地: (1) 某行(列)全为0, 行列式的值为0;

(2) 某行(列)元素对应成比例, 行列式的值为0.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复习备考栏目。

性质4

某行(列)是两个元素之和,则可拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} + b_2 & a_{13} + b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质5

某行(列)元素的 k 倍加到外一行(列)对应元素上,行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{12} + a_{22} & ka_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$



三、行列式的展开公式

1.余子式

在行列式中,去掉元素 a_{ij} 所在的第*i*行,第*j*列元素,由剩余的元素按照原来的位置与顺序组成的*n*-1阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij} .

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.代数余子式

称 $(-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij} ;于是 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

显然也有 $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

■ 3. 行列式按行(列)展开公式

行列式的值等于等于它的任一行(列)元素与其对应的代数余子式乘积之和.

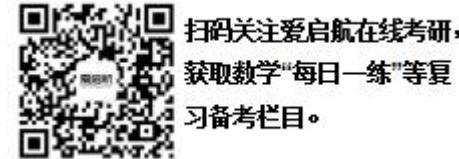
$$|A| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} & (i=1, 2, \dots, n) \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

注：行列式“串行(列)展开”值为0

$$0 = \begin{cases} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} & (i \neq j) \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} & (i \neq j) \end{cases}$$



四、几个重要的行列式



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

1.上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2.关于副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

3.两个特殊的拉普拉斯展开式

如果 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|,$$

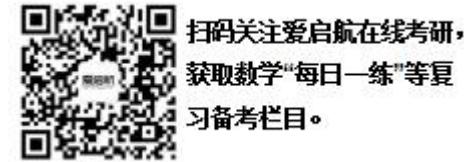
$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|.$$

4.范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料





第2章 矩阵及其运算

主要内容：

- 1. 矩阵的基本运算
- 2. 幂、转置、伴随、逆
- 3. 初等变换与初等矩阵
- 4. 秩





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

一、矩阵的定义及其基本运算

1. 矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数,排成的 m 行 n 列的表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ 称为一个 } m \times n \text{ 的矩阵,记为 } A.$$

若 $m = n$,则称为 n 阶方阵;

若 A 与 B 都是 $m \times n$ 的矩阵,则称 A 与 B 是同型矩阵;

若 A 与 B 是同型矩阵且对应元素 $a_{ij} = b_{ij}$,则 $A = B$.



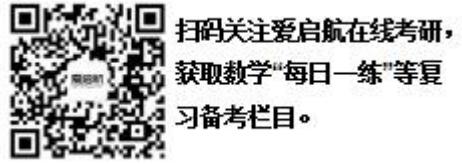


扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

特殊的几个矩阵

- (1) 零矩阵 每个元素都是0的矩阵；记为0
- (2) 行向量 只有一行的矩阵称为行矩阵，也叫行向量
列向量 只有一列的矩阵称为列矩阵，也叫列向量
- (3) 单位阵 主对角元素均为1，其余元素全为0的n阶方阵
- (4) 数量阵 主对角元素均为k，其余元素全为0的n阶方阵
- (5) 对角阵 主对角以外的元素全为0
- (6) 上(下)三角阵 主对角以下(以上)元素全为0





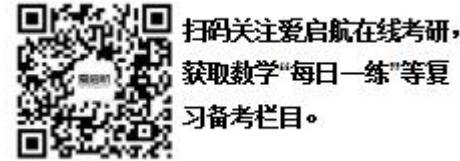
扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

■ 2. 矩阵的基本运算

■ (1) 加法运算【同型且对应运算相加】

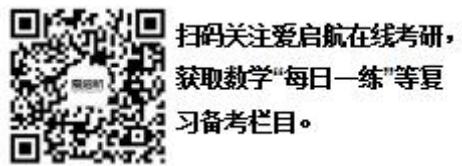


■ (2) 数乘运算【数k乘每一个元素】



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

（3）乘法运算【A的列等于B的行且对应元素相乘再相加】

【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料





【例1】设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$, 求 AB 与 BA .





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

|| [例2] 设 $A = [1, 2, 3]^T$, $B = [3, 2, 1]^T$, 计算 AB^T 和 $B^T A$.



【例3】设 $A = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix}$, 计算 AB 和 BA .



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



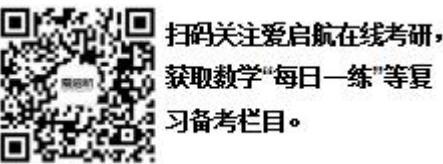
■ (4) 方阵的幂



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复习备考栏目。

（5）转置运算

将 $m \times n$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的行列互换

得到的 $n \times m$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 称为 A 的转置矩阵，记为 A^T .

称满足 $A^T = A$ 的矩阵 A 为对称矩阵；满足 $A^T = -A$ 的矩阵 A 为反对称矩阵.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

性质：

$$1. \left(A^T \right)^T = A;$$

$$2. \left(kA \right)^T = kA^T;$$

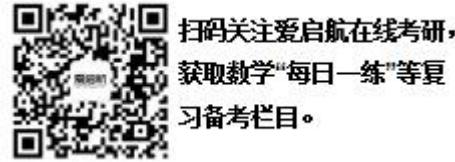
$$3. \left(AB \right)^T = B^T A^T;$$

$$4. \left(A + B \right)^T = A^T + B^T.$$



例4] 设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 满足 $X^T X = 1$, $H = E - 2XX^T$, 证明 H 是对称矩阵, 且 $HH^T = E$.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

■ (6) 方阵的行列式

■ n 阶矩阵 A 的元素构成的行列式称为方阵 A 的行列式, 记为 $|A|$.

性质 :

1. $|A^T| = |A|$;

2. $|kA| = k^n |A|$;

3. $|AB| = |A||B|$.

特别注意: $|A + B|$ 没有公式, 常利用单位阵 E 作恒等变形.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

二、伴随矩阵

1. 定义

用 $|A|$ 的代数余子式按如下形式拼成的矩阵称为 A 的伴随矩阵, 记为 A^*

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{且有 } AA^* = A^*A = |A|E.$$

注: 对于 A^* 注意以下两点

1. A^* 的元素是 A 的代数余子式, 故在计算代数余子式 A_{ij} 时, 不要丢掉"+","-"号;
2. 拼成 A^* 时, 不要把 A_{ij} 排错队.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

2.性质： $AA^* = A^*A = |A|E$.

1. $(A^*)^* = |A|^{n-2} A; (n \geq 2)$

2. $(kA)^* = k^{n-1} A^*$;

3. $(AB)^* = B^*A^*; (A, B \text{ 可逆})$

4. $|A^*| = |A|^{n-1}$.

特别注意： $(A + B)^* \neq A^* + B^*$.



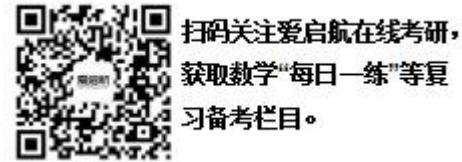
3. 求法：

方法一：定义法

先求 A_{ij} , 然后拼成 A^* .

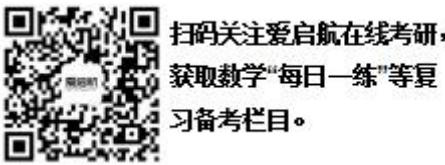
方法二：公式法

若 $|A| \neq 0$ (即 A 可逆), 则 $A^* = |A| A^{-1}$.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

|| [例5](1) 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则伴随矩阵 $A^* = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, 则伴随矩阵 $A^* = \underline{\hspace{2cm}}$.



三、逆矩阵

1. 定义

A 、 B 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位阵,

若 $AB = BA = E$, 则称 A 可逆, 且 B 是 A 的逆矩阵, 记为 $A^{-1} = B$.

定理 :

1. 若 A 可逆, 则 A 的逆矩阵唯一;

2. A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

推论 :

A 、 B 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位阵,

若 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 $A^{-1} = B$.



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

2.性质：

$$1.\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;$$

$$2.\left(kA\right)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} (k \neq 0);$$

$$3.\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

$$4.\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1};$$

特别注意： $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$.

最后， $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$, $\left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$, $\left(A^T\right)^* = \left(A^*\right)^T$.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

3.求法

方法一：用定义

A, B 都是 n 阶矩阵, $AB = E$, 则 $A^{-1} = B$.

方法二：用伴随 $AA^* = A^*A = |A|E$

若 $|A| \neq 0$, 则 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$, $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$.

方法三：用初等变换

$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1})$



|| [例6](1) 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则逆矩阵 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, 则逆矩阵 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复习备考栏目。



〔例7〕设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$, 证明 A 和 $A + 2E$ 都可逆, 并求出其逆矩阵.



【例8】设 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, 则 $A^{100} = \underline{\hspace{2cm}}$.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



|| [例9] 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 则 $A^4 = \underline{\hspace{2cm}}$.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



【例10】设 $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $AP = P\Lambda$, 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



【例11】设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^k = \underline{\hspace{2cm}}$.

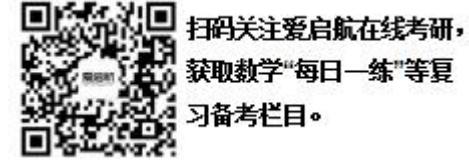


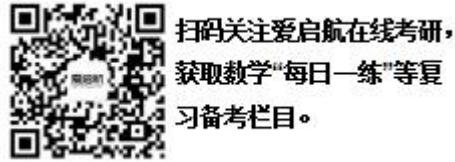
扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



四、分块矩阵

1. 矩阵的分块





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

■ 2. 分块矩阵的运算

(1) 加法

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

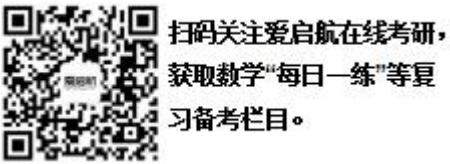
(2) 数乘

$$k \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}$$

(3) 乘法

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$





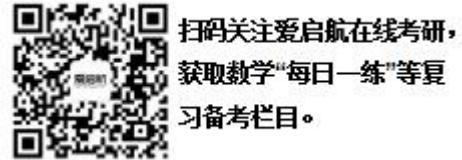
(4) 分块矩阵的性质

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

五、初等变换与初等矩阵

1.初等变换

- 1) 用一个非零常数 k 乘矩阵A的某一行(列)；
- 2) 互换矩阵A的某两行(列)；
- 3) 将A的某行(列) k 倍加到另一行(列).





扫码关注爱启航在线考研，
获取教学“每日一练”等复
习备考栏目。

2.初等矩阵

- 由单位阵E经过一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

3.初等矩阵的性质

- 1) 初等矩阵都是可逆矩阵 , 且其逆矩阵仍是同一类型的初等矩阵 ;



2) A左乘(右乘)初等矩阵，相当于对A作一次同类型的初等行(列)变换；



[例12]已知3阶矩阵A可逆,将A的第1列与第2列交换得B,再把B的第3列的-3倍加到第2列得C,
则满足 $PA^{-1} = C^{-1}$ 的P是_____

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

3.用初等变换求逆

【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料





六、矩阵等价

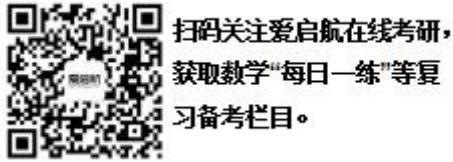
1. 矩阵等价的定义

A 经过有限次初等变换变到 B , 称 A 与 B 等价, 记为 $A \cong B$.

2. 矩阵等价的充要条件

$$A \cong B \Leftrightarrow \exists \text{可逆矩阵 } P, Q \text{使得 } PAQ = B \Leftrightarrow r(A) = r(B).$$





七、矩阵的秩

1. 矩阵秩的定义

$A_{m \times n}$ 中非零子式的最高阶数称为 A 的秩, 记为 $r(A)$.

定理1: 矩阵 A 的秩等于它对应的行阶梯形矩阵非零行的行数.

注: 零行元素 (若有) 在最下行, 且每行左起第一个非零元素所在的列下方元素全是0, 这种矩阵称为行阶梯形矩阵.

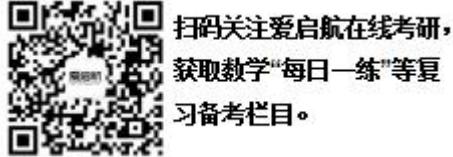


【例13】设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{bmatrix}$, 已知 $r(A)=2$, 则 $\lambda=$ _____, $\mu=$ _____.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

2. 矩阵的性质

- 1) $r(A) = r(A^T)$;
- 2) $r(kA) = r(A)(k \neq 0)$;
- 3) $r(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$;
- 4) A 可逆，则 $r(AB) = r(B)$, B 可逆，则 $r(AB) = r(A)$;
- 5) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$;
- 6) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$;
- 7) $A_{m \times n}B_{n \times s} = 0$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$;
- 8) $r(A) = r(A^T A) = r(AA^T) = r(A^T)$.



【例14】设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, B 是 3×4 的非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 $r(B) \underline{\hspace{2cm}}$.



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

第3章 线性方程组

- 主要内容
 - 1.齐次方程组
 - 2.非齐次方程组；
 - 3.公共解、同解.



一、齐次线性方程组

■ 1. 齐次线性方程组的三种表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

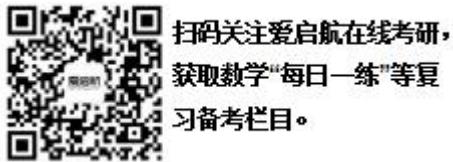
$$A_{m \times n}x = 0 \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \quad \alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T$$



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

■ 2. 有解的条件

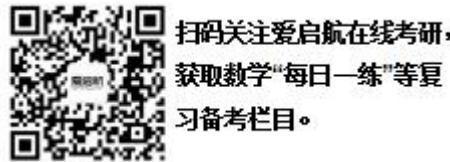
$A_{m \times n}x = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A_{m \times n}) = n;$

$A_{m \times n}x = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A_{m \times n}) < n;$

特别地 若 $m < n$ (方程少未知数多) , 则 $A_{m \times n}x = 0$ 有非零解.

若 $A_{m \times n}x = 0$ 有非零解, 则其线性无关的解有 $n - r(A)$ 个.





扫码关注爱自航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

■ 3.解的性质

若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 都是 $Ax = 0$ 的解，则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_t\xi_t$ 仍是 $Ax = 0$ 的解。

■ 4.基础解系

$Ax = 0$ 的基础解系

- 1) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 是 $Ax = 0$ 的解；
- 2) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 线性无关；
- 3) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 可以表示 $Ax = 0$ 的任一解或 $n - r(A) = t$.

称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

|| [例1] 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解.



|| [例2]求齐次线性方程组 $nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$ 的通解.

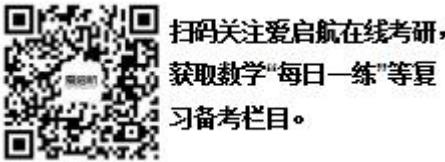


扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复习备考栏目。



|| [例3]写出一个以 $x = c_1(2, -3, 1, 0)^T + c_2(-2, 4, 0, 1)^T$ 为通解的齐次线性方程组.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

二、非齐次线性方程组

1. 非齐次线性方程组的三种表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A_{m \times n}x = 0 \quad (A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b \quad \alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

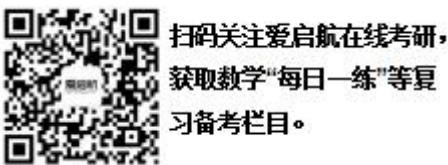
2.有解的条件

$A_{m \times n}x = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) \neq r(A|b)$;

$A_{m \times n}x = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b) = n$;

$A_{m \times n}x = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b) < n$





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复习备考栏目。

■ 3.解的性质

设 η_1, η_2, η 是 $A_{m \times n}x = b$ 的解, ξ 是 $A_{m \times n}x = 0$ 的解, 则

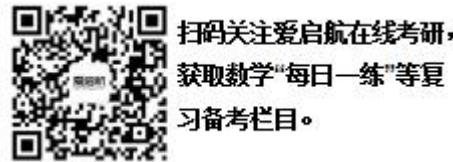
- 1) $\eta_1 - \eta_2$ 是 $A_{m \times n}x = 0$ 的解;
- 2) $\eta + \xi$ 是 $A_{m \times n}x = b$ 的解.

■ 4.解的结构

$A_{m \times n}x = b$, 当 $r(A) = r(A|b) = r < n$ 有无穷多解

通解: $\alpha + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$.





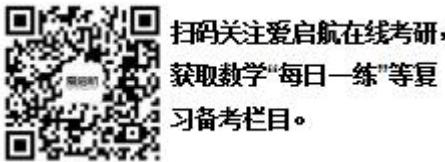
扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

|| [例4] 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解.



〔例5〕设设4元非齐次方程组的系数矩阵的秩为3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解,
且 $\eta_1 = (2, 3, 4, 5)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$, 求它的通解.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

三、克拉默法则

n 个方程 n 个未知数的方程组 $Ax = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵的行列式 $|A| \neq 0$, 则方程组有唯一解, 且 $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1, 2, \dots, n.$

其中 $|A_i|$ 是 $|A|$ 中第*i*列元素替换为 $(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n)^T$.

推论: 对 n 个方程 n 个未知数的齐次方程组 $Ax = 0$,

若 $|A| \neq 0$, 则齐次方程组只有零解; 若齐次方程组有非零解, 则 $|A| = 0$.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

|| [例6] 设有线性方程组
$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时, 此方程组有唯一解; 无解; 有无穷多解, 并求此时的通解.





四、公共解、同解

■ 1. 公共解

若 α 是 $Ax = 0$ 的解, 也是 $Bx = 0$ 的解, 称 α 是 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 公共解.



$$\| [\text{例7}] (\text{I}) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}; (\text{II}) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

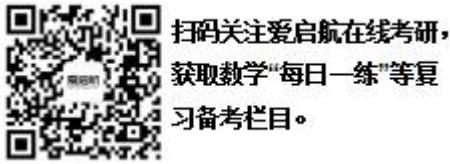
(1) 分别求方程组(I)和(II)的基础解系;

(2) 求方程组(I)和(II)的公共解.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

■ 2. 同解

$Ax = 0$ 的解是 $Bx = 0$ 的解, 且 $Bx = 0$ 的解也是 $Ax = 0$ 的解; 称 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 是同解.

$Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解 $\Rightarrow r(A) = r(B)$.



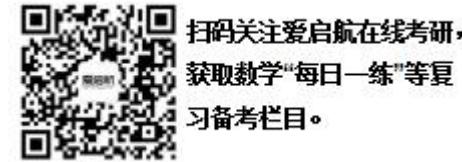
〔例8〕证明 $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 是同解方程组.



扫码关注爱启航在线考研，
获取教学“每日一练”等复
习备考栏目。

【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料



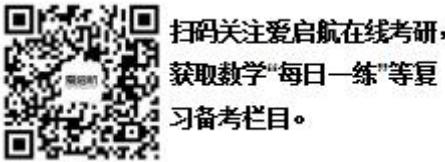


第4章 向量

■ 主要内容

- 1. 相关、无关；
- 2. 线性标出；
- 3. 秩、极大无关组.





一、向量的概念及其运算

■ 1. 向量的概念

n维行向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

n维列向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

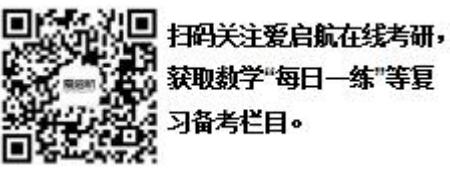
■ 2. 向量的运算

相等 $\alpha = \beta \Leftrightarrow a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n.$

加法 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

数乘 $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$

内积 $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

正交 $\alpha^T \beta = 0$, 称 α 与 β 正交;

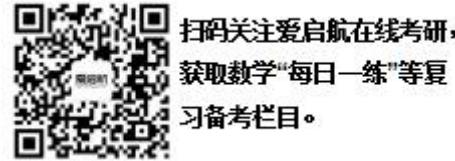
$$\alpha^T \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

模 $\|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

单位向量 $\|\alpha\| = 1$, 称 α 为单位向量



二、线性表出



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

定义1：对 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及一组数 k_1, k_2, \dots, k_m ，
称 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的**线性组合**.

定义2：若 β 能表示为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合的形式，
即存在一组数 k_1, k_2, \dots, k_m ，使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ ，
则称 β 能被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ **线性表出**.



定义3：若向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的每个向量都可由向量组II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出，则称**向量组I可由向量组II线性表出.**

定理1：若向量组I可由向量组II线性表出，则 $r(I) \leq r(II)$.

定理2：向量组I可由向量组II线性表出 $\Leftrightarrow r(I) = r(I, II)$.

定义4：若向量组I可由向量组II线性表出且向量组II也可由向量组I线性表出，则称**向量组I与向量组II等价.**

定理3：若向量组I与向量组II等价，则 $r(I) = r(II)$.

定理4：向量组I与向量组II等价 $\Leftrightarrow r(I) = r(II) = r(I, II)$.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

β 能被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示

\Leftrightarrow 存在一组数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$

\Leftrightarrow 存在一组数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使得 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \beta$

\Leftrightarrow 存在一组数 x_1, x_2, \dots, x_m , 使得 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \beta$

\Leftrightarrow 非齐次方程 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)x = \beta$ 有解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$



【例1】设 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 2)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 4, 0)^T$, $\beta = (1, 0, 3, 1)^T$

证明 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，并求出表示式。



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



〔例2〕设 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 4)^T$, $\beta = (1, b, -1)^T$. 问 a, b 取何值

- (1) β 不可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出;
- (2) β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表达式唯一;
- (3) β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表达式不唯一, 并求出一般表达式.



〔例3〕设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (1, a, 1)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组
 $\beta_1 = (1, 1, a)^T$, $\beta_2 = (-2, a, 4)^T$, $\beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表出, 向量组
 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 求 a 的值.



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





三、相关、无关

定义5：对 m 个 n 维向量组： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ；若存在一组不全为0的数 k_1, k_2, \dots, k_m ，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ ，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关；否则称线性无关。

线性无关：不存在一组不全为0的数 k_1, k_2, \dots, k_m ，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ ；只要有一个 $k_i \neq 0$ ，就有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \neq 0$ ；当且仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ ，才有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ 。

特别地 含有零向量的向量组必相关；

含有成比例的向量的向量组必相关。

一个向量不为0，则无关；

两个向量不成比例，则无关；

三个向量不共面，则无关。



【例4】向量组 $\alpha_1 = (a, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, a, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a)^T$ 线性相关, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.



定理5：向量组： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关

\Leftrightarrow 存在一组不全为0的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$

\Leftrightarrow 存在一组不全为0的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使得 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$

\Leftrightarrow 存在一组不全为0的数 x_1, x_2, \dots, x_m , 使得 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$

\Leftrightarrow 齐次方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)x = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < m.$

推论

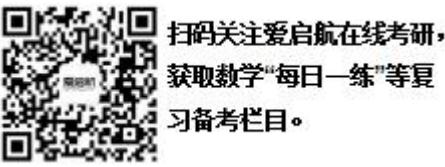
(1) 对 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

(2) $n+1$ 个 n 维向量必相关.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

|| 定理5'：

向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关

\Leftrightarrow 齐次方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)x = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m.$



定理6：

向量组： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关 \Rightarrow 增加向量个数后的向量组： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_s$ 仍相关；

向量组： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关 \Rightarrow 对应减少向量维数后的向量组： $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_m'$ 仍相关。

向量组： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关 \Rightarrow 减少向量个数后的向量组： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-r}$ 仍相关；

向量组： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关 \Rightarrow 对应增加向量维数后的向量组： $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_m'$ 仍无关。





定理7: 向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 相关,
则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 且表出系数唯一.



定理8:(以少表多,则多必相关)

若向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且 $s > t$,
则向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

推论:若向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出,
且向量组I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则且 $s \leq t$.



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



〔向量组： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关的证明〕

1. 定义法：设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$

2. 用秩： $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m$.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



〔例5〕设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$, 证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 无关.

||



〔例6〕设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关, 判断向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性相关性:

1) $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_3 = 5\alpha_1 + 3\alpha_2;$

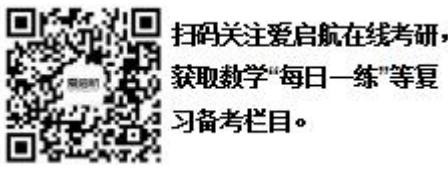
(2) $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \beta_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3;$

(3) $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





【例7】设矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 其中 α, β 是 n 维列向量, 证明:

(1) $r(A) \leq 2$; (2) 当 α, β 相关时, $r(A) \leq 1$.



〔例8〕设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 无关, 证明:

- (1) α_1 能由 α_2, α_3 线性表出;
- (2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



【例9】设 A 是 n 阶矩阵,若存在正整数 k ,使得 $A^k x = 0$ 有解向量 α ,且 $A^{k-1}\alpha \neq 0$,

证明: $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 无关.



三、秩、极大无关组



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

定义6：在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, 若存在部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 满足:

- (1) 线性无关; (2) 可以表示向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的任一向量 α_i ;

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的极大线性无关组;

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的极大线性无关组所含的向量个数 r 称为

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的秩, 记为 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r$.

特别地

只有一个零向量的向量组不存在极大无关组;

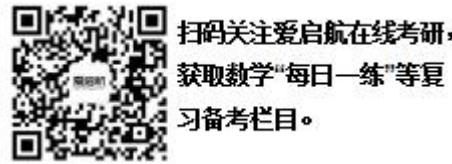
一个线性无关向量组的极大无关组就是其本身;

一个向量组的极大无关组一般不唯一, 但每个极大无关组所含的向量个数是相同的 (就是秩) 且他们都是等价向量组.

定理9: $r(A)$ = A 的列秩 = A 的行秩

【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

设向量组 $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的秩为2，则 $a=$ _____, $b=$ _____.



〔例11〕求向量组 $\alpha_1 = (2, 1, 4, 3)$, $\alpha_2 = (-1, 1, -6, 6)$, $\alpha_3 = (-1, -2, 2, -9)$, $\alpha_4 = (1, 1, -2, 7)$,
 $\alpha_5 = (2, 4, 4, 9)$ 的秩及一个极大无关组并用极大无关组表示其余的向量.





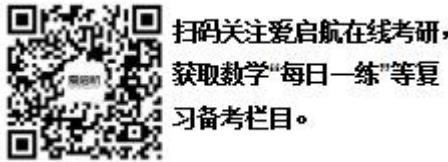
扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

第5章 相似

■ 主要内容

- 1. 特征值与特征向量
- 2. 相似对角化
- 3. 实对称矩阵





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

二、特征值、特征向量

1. 特征值、特征向量定义及求法

$A - n$ 阶矩阵, λ 是一个数, α 是 n 维非零列向量, 若

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0),$$

则称 λ 是 A 的特征值, α 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \alpha \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda E - A)\alpha = 0 \quad \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda E - A)x = 0 \text{ 有非零解 } \alpha$$

由 $|\lambda E - A| = 0$, 得特征值 λ ;

由 $(\lambda E - A)x = 0$, 得特征向量 α .





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

2. 特征值、特征向量的性质

(1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii};$

(2) $\prod \lambda_i = |A|;$

(3) i 重特征值 λ_i 至多只有 i 个无关的特征向量；

(4) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 A 的属于同一特征值 λ 的特征向量，

则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$ (非0) 仍是 A 的属于特征值 λ 的特征向量；

若 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量，

则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 不再是 A 的特征向量；

(5) α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量，则 α_1, α_2 线性无关。



[例1]求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



【例2】求 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



[与A有关的矩阵的特征值与特征向量]



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



〔例3〕设 $A^2 - 3A + 2E = 0$, 证明 A 的特征值只能取1或2.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料



二、相似及相似对角化



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

1. 定义

A 、 B — n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称 A 相似于 B , 记为 $A \sim B$.

2. 性质

$$A \sim B$$

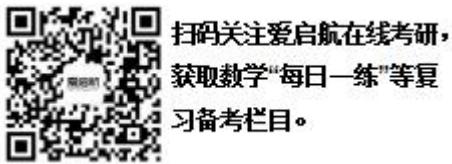
$$\Rightarrow |A| = |B|;$$

$$\Rightarrow r(A) = r(B);$$

$$\Rightarrow |\lambda E - A| = |\lambda E - B|, \text{即 } \lambda_A = \lambda_B;$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii}.$$





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

||3.相似对角化

$$A \sim \Lambda$$

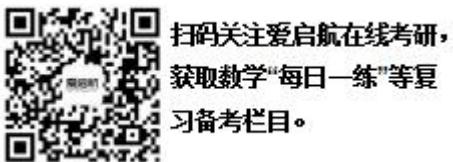
$\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量；

$\Leftrightarrow A$ 的 i 重特征值 λ_i 由 i 个无关的特征向量，即 $n - r(\lambda_i E - A) = i$ ？

$\Leftarrow A$ 有 n 个无关的特征值；

$\Leftarrow A$ 是对称阵。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

|| [例4]下列矩阵中不能相似对角化的是

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复习备考栏目。

二、求相似对角化时的可逆矩阵P

$P^{-1}AP = \Lambda$, 这里的可逆 P 就是 A 的特征向量拼成的, Λ 就是的特征值.
注意, Λ 与 P 在写的时候要对应.



|| [例5] 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 能对角化, 求 x .



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



|| [例6] 设 $\lambda = 0$ 是 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & 1 & k \\ 4 & k & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值, 求 k .



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



【例7】设 $\alpha = [1, 1, -1]^T$ 是 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量, 求 a, b 的值.



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



【例8】设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{bmatrix}$ 相似, 求 x, y 的值.



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



【例9】设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



四、实对称

- (1) 特征值都是实数;
- (2) 不同特征值对应的特征向量相互正交;
- (3) 必能相似对角化且能正交对角化,

即存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda$.

这里的正交矩阵 Q 是由 A 的单位正交特征向量拼成的, 同样注意 Q 与 Λ 要对应.



扫码关注爱启航在线考研,
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

正交矩阵 Q

(1) 定义: $QQ^T = Q^TQ = E$

(2) 几何意义: 每一列 (行) 长度为1, 任两列 (行) 相互正交.

施密特正交化

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关但不正交, 令

$$\beta_1 = \alpha_1;$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1;$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_1, \alpha_3)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 - \frac{(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2, \alpha_2)} \alpha_2.$$

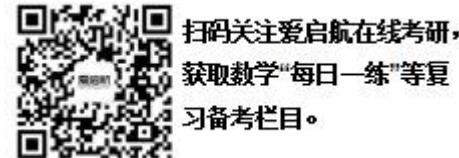


【例10】设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

五、相似的应用

一、反求矩阵A

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1}$$

需要知道A的全部特征值,全部特征向量.



〔例11〕设3阶矩阵A的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$, 对应的特征向量依次为

$$\alpha_1 = [0, 1, 1]^T, \alpha_2 = [1, 1, 1]^T, \alpha_3 = [1, 1, 0]^T \text{ 求} A.$$





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

二、求 A^n 、 $A^n\beta$

$$\left[A^n \right] 1. P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A^n = P\Lambda^n P^{-1};$$

$\left[A^n \beta \right]$ 2. 先处理 β , 将 β 表示成 A 的特征向量的线性组合形式, 再求 $A^n\beta$.



例12] 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, 求 A^{100} .

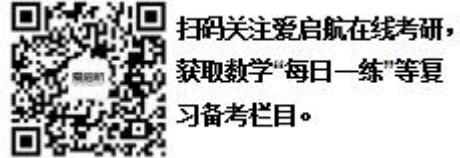


扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。



例13 设 A 是3阶矩阵, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ 是 A 的特征值, 对应的特征向量分别是
 $\xi_1 = [2, 2, -1]^T, \xi_2 = [-1, 2, 2]^T, \xi_3 = [2, -1, 2]^T, \beta = [1, 2, 3]^T$, 求 $A^n\beta$.



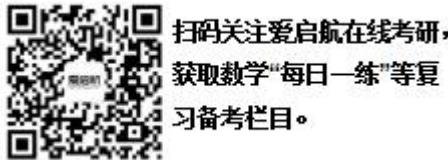


第6章 二次型

■ 主要内容

1. 正交变化法化二次型为标准型；
2. 合同；
3. 正定.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

二、二次型及其矩阵表示

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$.

其中 A 是二次型的矩阵, $A^T = A$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 二次型 f 与 A 是一一对应的.

对称阵 A 的秩 $r(A)$ 称为二次型 $f = x^T A x$ 的秩.

若二次型中只有平方项, 没有交叉项,

即形如 $d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$ 的二次型称为标准形;

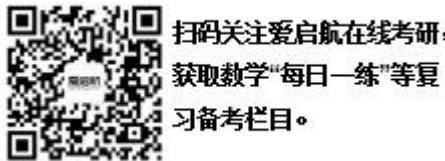
若二次型的标准形中平方项的系数只是 $1, -1, 0$, 则称为规范性.



【例1】(1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3$ 的矩阵 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 的矩阵 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

F、合同变换

1. 坐标变换

若令 $\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$, 即 $x = Cy$, 其中 $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$ 可逆,

则称 $x = Cy$ 称为坐标变换, 若 C 是正交矩阵, 则称为正交变换.



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

2. 合同

若存在可逆矩阵 C , 使得 $C^T AC = B$, 称 A 合同于 B , 记为 $A \sim B$.

二次型 $x^T Ax$ 经坐标变换 $x = Cy$ 有, $x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T C^T ACy = y^T By$,

其中 $B = C^T AC$, 且 $B^T = (C^T AC)^T = C^T AC = B$.

以 x 为变量的二次型 $x^T Ax$ 经坐标变换 $x = Cy$ 变成了以 y 为变量的二次型 $y^T By$.

二次型 $x^T Ax$ 合同于二次型 $y^T By$

特别地, 若 $x = Cy$ 是正交变换, 则此时 $C^T AC = C^{-1}AC = B$, 即经正交变换

二次型矩阵不但合同, 而且相似.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

三、用正交变换化二次型为标准形

定理1：任何二次型 $x^T Ax$ 都可以通过（配方法）坐标变换 $x = Cy$ 化为标准形

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$$

用矩阵语言描述是：任何实对称矩阵 A 一定存在可逆矩阵 C ,使得 $C^T AC = \Lambda$.

定理2：任何二次型 $x^T Ax$ 都可以正交变换 $x = Qy$ 化为标准形

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$$

用矩阵语言描述是：任何实对称矩阵 A 一定存在正交矩阵 Q ,

使得 $Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \Lambda$.

定理3[惯性定理]：用坐标变换化二次型为标准形,所作的坐标变换不唯一,

对应的标准形也不唯一,但标准形中正平方项的个数 p ,

负平方项的个数 q 都是不变的. p 称为正惯性指数, q 称为负惯性指数.



〔例2〕求一个正交变换 $x = Qy$, 化二次型 $f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 为标准形.



四、正定

1. 定义

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$, 若对任意的 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \neq 0$, 均有 $x^T A x > 0$, 则称 f 为正定二次型, 对应的矩阵 A 称为正定矩阵.

2. 正定的充要条件

n 元二次型 $f = x^T A x$ 正定

\Leftrightarrow 对任意的 $x \neq 0$, 均有 $x^T A x > 0 \Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 $p = n$

$\Leftrightarrow A \simeq E$, 即存在可逆 C , 使得 $C^T A C = E \Leftrightarrow$ 存在可逆 D , 使得 $A = D^T D$

$\Leftrightarrow A$ 的特征值 λ_i 全大于 0 $\Leftrightarrow A$ 的全部顺序主子式大于 0

3. 正定的必要条件

(1) $a_{ii} > 0$; (2) $|A| > 0$

【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

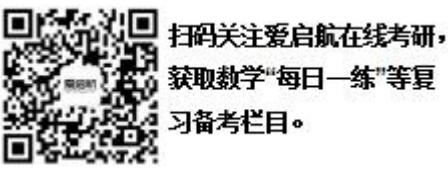




|| [例3]下列矩阵中,正定的是

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

〔例4〕设 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - ax_2)^2 + (x_2 - bx_3)^2 + (x_3 - cx_2)^2$,

其中 $abc \neq 1$, 证明 f 是正定二次型.



例5] A 正定 $\Rightarrow A^T, A^*, A^{-1}, A^k, kA (k > 0)$, 及他们之间的正系数线性组合仍正定.



|| [例6] 设 B 是 n 阶反对称阵, E 是 n 阶单位阵, $\lambda > 0$, 证明: $\lambda E - B$ 是正定矩阵.



五、等价、相似、合同



扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

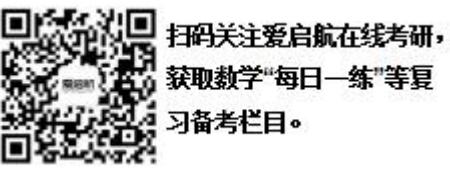
【微信公众号：给力考研资料 免费分享】关注获取更多考研资料



【例7】设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 问: t 取何值

- (1) A 正定; (2) A 与 B 等价; (3) A 与 C 相似; (4) A 与 D 合同.





扫码关注爱启航在线考研，
获取数学“每日一练”等复
习备考栏目。

|| 可行列变换混用的情形：

求行列式，求秩。

只能用行变换的情形：

$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1})$ 求逆，线性表出，解方程，求特征向量。

