

Notes for Tutorial Four

一、 BFS 算法简介

1. 形象理解

算法的运行过程类似于水波的扩散，是一种层层推进的过程；

2. 变量定义

对于图中每一个顶点 v ，我们定义 $v.dis$ 为：源点到点 v 的最短路径的长度。

由此我们定义，图中所有 dis 值相同的顶点为一层，外层节点 dis 的值为它内层节点的 dis 值加 1；

3. BFS 在无权最短路径中的运用【Ref: 算法导论】

在图中，两点之间的最短路径的长度即为它们 dis 值的差

如何证明 $v.dis$ 即为从根节点出发至 v 的最短路径？

定义 $\delta(s, v)$ 为源点 s 至节点 v 的最短路径：

- 1) 先证 $v.dis \geq \delta(s, v)$ ；
- 2) 再证 $v.dis > \delta(s, v)$ 不存在；

4. 引理：在一个 BFSQueue（记为 $[v_1, v_2, \dots, v_l]$ ）中：

$$\begin{cases} v_i.dis \leq v_{i+1}.dis \Rightarrow \text{队列中的} dis \text{值严格非递减} \\ v_r.dis \leq v_1.dis + 1 \end{cases}$$

Hint：谈数学、谈形象的时候，我们可以关注 dis 值的变化，谈算法、谈分析的时候，我们可以关注 Queue 的变化；

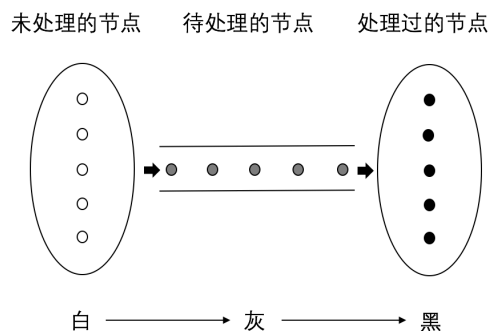
5. 用归纳法对 BFS 算法的正确性进行证明

对 Queue Operation 进行归纳：仅有入队和出队操作

归纳时需要证明，当处于某个状态时，对队列进行合法操作后，原先的性质得以保留 \Rightarrow 基于归纳法证明不变性。

二、 在 BFS 算法中的染色问题

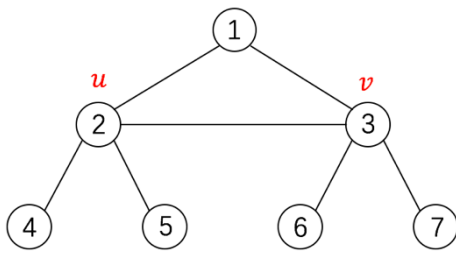
1. 结合 Queue 进行理解点染色



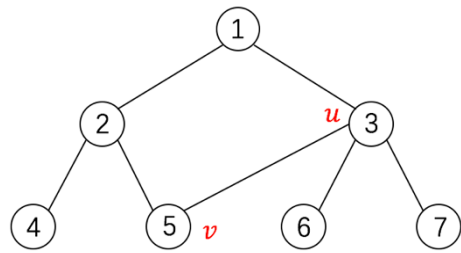
2. 结合图理解边染色

有向图的有向边 uv (由 u 指向 v)	无向图的无向边 uv (由 u 发现 v)
TE : $u.dis = v.dis + 1$	TE : $u.dis = v.dis + 1$
BE : $v.dis < u.dis$	BE : 不存在
FE : 不存在	FE : 不存在
CE : $v.dis \leq u.dis + 1$	CE : $v.dis = u.dis$ 或 $v.dis = u.dis + 1$

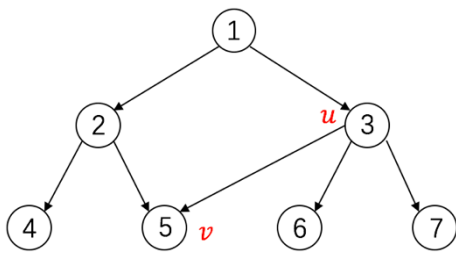
无向图中 CE 的例子①：



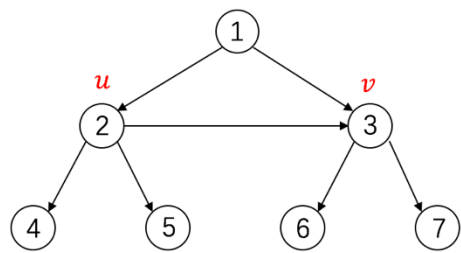
无向图中 CE 的例子②：



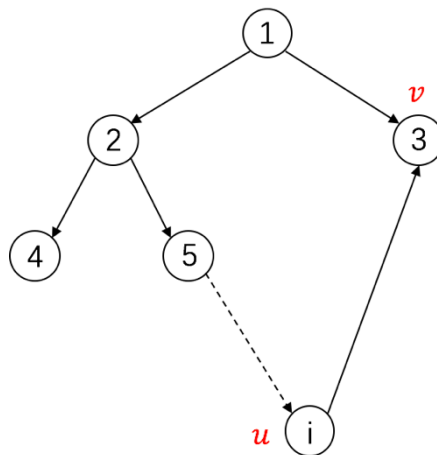
有向图中 CE 的例子①：



有向图中 CE 的例子②：



有向图中 CE 的例子③：



三、 与 BFS 相关的问题

1. 二部图

遍历的两种思路：

$\begin{cases} \text{假设是二部图} \rightarrow \text{遍历过程中找它不是的证据} \rightarrow \text{找不到这样的证据, return 是} \\ \text{假设不是二部图} \rightarrow \text{遍历过程中找它是证据} \rightarrow \text{找不到这样的证据, return 不是} \end{cases}$

在判断二部图问题中，我们采用第一种遍历思路，具体如下：

- 1) 假设是二部图 \rightarrow 进行二染色；
- 2) 边遍历边找不是的证据 \rightarrow 是否发现某条边的两端颜色相同；
- 3) 如果找不到任意一条边的两端同色，返回该图是二部图的结论；

在这样的应用中，我们发现 BFS 天然地适合用于判断二部图的问题，因为 BFS 遍历的过程决定了在染色一个顶点后，它的邻居的颜色也能瞬间确定。

2. k 度子图

定义：

在子图中，任意顶点的度数都大于等于 k ，则我们称这样的子图为一个 k 度子图。

性质：

若一个点的度数小于 k ，则它一定不在任意一个 k 度子图中。

思路：

考虑用队列辅助判断，在队中存度小于 k 的点。

四、 与 DFS 相关的问题

1. s-t 图

有向图的强连通片和收缩图的定义：

如果一个有向图中的两个点互相可达，则我们称这两个顶点是强连通的。如果一个有向图中的任意两个顶点之间互相可达，则我们定义该有向图是强连通的。

有向图的强连通片是其极大强连通子图。如果我们把图 G 中的每个强连通片收缩成一个点，强连通片之间的边收缩成一条有向边，则我们得到有向图 G 的收缩图(Condensation Graph) $G \downarrow$ 。

2. 有向图中点的影响力

Hint: 在答题过程中涉及到可达不可达的问题，可以考虑先将图压缩，在此之后原图就变为有向无环图，所以很多性质就可以利用了。