Problem 8.1
对下列问题CLIQUE、KNAPSACK、INDEPENDENT-SET、VERTEX-COVER：

1. 请写出其优化问题和判定问题；
2. 请对每个问题证明：其优化问题多项式时间可解，当且仅当其判定问题多项式时间可解。

Problem 8.2
请证明多项式时间规约关系($\leq_P$)是一个传递关系。

Problem 8.3
假设$A \leq_P B$，规约可以在$O(n^2)$时间内完成，B可以在$O(n^4)$时间内解决。请计算解决A问题所需的时间；

Problem 8.4
给定“排序”与“选择”这两个问题，请从两个方向给出它们相互之间的规约。规约的过程是否使你想起某个排序算法？

Problem 8.5
给定下列两个问题：

- 问题1：找出集合S中所有数的中位数；
- 问题2：找出集合S的所有数中阶为k(第k小)的数；

请给出问题1到问题2的规约和问题2到问题1的规约。

Problem 8.6
技术先进的外星人来到地球声称一些已知的NP难问题不可能在少于$O(n^{100})$的时间内解决。请简要说明这是否解决了P是否和NP相等的问题；

Problem 8.7 (伪最大团问题(tutorial))
给定一个正整数常数k。问题的输入为一个包含n个顶点的无向图G，问题为判断G中是否有大小为k的团。

1. 请给出一个多项式时间的算法，判定图中是否存在大小为k的团；
2. 你所提出的多项式时间的算法，是否证明了NP完全问题CLIQUE是P问题，因而证明了P=NP？请解释你的结论。

Problem 8.8 (DNF-SAT问题(tutorial))
我们考虑若干布尔变量组成的逻辑表达式的可满足性问题(SAT)。我们知道布尔表达式可以写成合取范式(Conjunctive Normal Form, CNF)，例如：

$$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b)$$

此时我们考虑是否可以为表达式中的每个变量赋一个布尔值(TRUE或FALSE)，使得整个表达式的值为TRUE。我们称该问题为CNF-SAT问题。同时我们知道，每一个CNF范式的逻辑表达式可以等价地写成一个析取范式(Disjunctive Normal Form, DNF)，例如：

$$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

我们称判定析取范式的逻辑表达式是否可以满足的问题为DNF-SAT问题。请基于上述知识回答下列问题：

1. 请证明DNF-SAT问题是一个P问题；

2. 下面的推理声称证明了“P=NP”，请找出它的错误：

   “我们知道同一个布尔表达式，它即可以写成合取范式，也可以写成析取范式，并且这两种范式在逻辑上是等价的。由上面的证明已知DNF-SAT多项式时间可解。基于这两点，我们可以基于下面的规约来证明CNF-SAT 问题是NPC 问题：将CNF-SAT的输入首先转成等价的DNF形式，再调用多项式时间的DNF-SAT算法来求解。由DNF和CNF的等价性可知上述规约是正确的。由DNF-SAT多项式时间可解可知CNF-SAT多项式时间可解。因为CNF-SAT 是NPC 问题，所以我们就为一个NPC问题找到了多项式时间的解。基于NPC的定义，我们证明了P=NP。”

Problem 8.9 (稠密子图问题(tutorial))
给定一个无向图G，我们定义稠密子图问题：

DENSE-SUBGRAPH：G中是否包含一个子图H，它有k个顶点，且至少有y条边

已知CLIQUE问题为NP完全问题，请证明DENSE-SUBGRAPH问题为NP完全问题。

Problem 8.10 (独立集问题与点覆盖问题(tutorial))
我们有最大独立集问题和最小顶点覆盖问题的判定形式：
INDSET：G中是否存在大小为k的独立集[1]。
VERTEX-COVER：G中是否存在大小为k的点覆盖[2]。

1. 已知INDSET是NPC问题，请证明VERTEX-COVER问题是NPC问题。

2. 已知VERTEX-COVER是NPC问题，请证明INDSET问题是NPC问题。

Problem 8.11 (支配集问题和集合覆盖问题(tutorial))
我们定义最小支配集问题与最小集合覆盖问题的判定问题：

DOMINATION-SET：对于无向图G，其中是否有大小为k的支配集[3]

SET-COVER：给定全集U以及U的n个子集$S_1, S_2, \cdots, S_n$满足$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = U$。问是否存在大小为$k$的集合覆盖[4]

已知DOMINATION-SET是NP完全问题，请证明SET-COVER是NP完全问题。

[1]独立集是一个顶点集合，其中任意两个点之间不存在边相连。
[2]点集$C \subseteq V$是一个点覆盖的定义是：G中的任意一条边e，它均以C中的某个点为顶点。点覆盖的大小定义为集合C的大小。
[3]图$G = (V, E)$的支配集D的定义为对于任意$V \setminus D$中的点均和D中的某个点有边相连。
[4]集合覆盖是若干给定的子集组成的子集族，其中所有子集的并为全集。集合覆盖的大小为其中子集的个数。