Notes for Tutorial One

一、 极限

1、 数学归纳法：当算法可能输入为可数无穷多时，只有归纳法可以工作；

2、 渐近

代数系统的封闭性：$\mathbb{N} \xrightarrow{+,-,\times} \mathbb{Z} \xrightarrow{\div} \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{对有理数列求极限}} \mathbb{R}$

二、 数学归纳法 :证明 p(n)对所有自然数都成立 【*Ref: Mathematics for computer science*】

1、 只有一种归纳法；

2、 良序公理： ∀自然数集合(非空)，它一定有最小元；

①若命题不成立，则反例集合非空，根据良序公理，则一定有最小反例(假定为 a)；

②$\mathrm{p}(1) \wedge \mathrm{p}(2) \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}(\text{a-1}) \wedge \neg\mathrm{p}(a) = TRUE$

$\mathrm{P} \xrightarrow{\text{蕴含}} Q = \neg P \vee Q = \neg(P \wedge \neg Q)$

$\Big\}\ \mathrm{p}(1) \wedge \mathrm{p}(2) \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}(\text{a-1}) \Rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{a})$

③若没有最小反例，则命题成立。

其中，①与②等价，①与③互为逆否命题。

3、 归纳法的运用（例）

a) 插入排序：已排序数列的增长过程始终有序；

b) 最小生成树的 Prim 算法：局部最小生成树的增长过程始终满足局部最小原则；

4、 数学归纳法的错误样例：马颜色问题→注意代表元的选取；

三、 从算法的角度审视数学的概念[抽象概念→离散现象]【*Ref:Sara Baase 教材*】

1、取整（$\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$）：对严格性的要求需要我们引入取整；

2、对数$\log n$：一般我们约定，在算法课中$\log n$表示以 2 为底的对数；

三类与对数有关的重要算法操作：

a) 一个 n 个节点的完美二叉树的高度为$\log n$；

b) 将规模为 n 的问题经过$\log n$次折半划分为规模为常数的情况；

c) 表示一个十进制数 n 需要约为$\log n$个比特；

3、n 的阶乘$\mathrm{n}!$：

Stirling 公式：$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{11n}\right) \quad \cdots n \geq 1$

近似式为：$\mathrm{n}! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

4、求和问题（常见的级数求和）：

a) 多项式级数：

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta\left(\frac{1}{k+1}\right) n^{k+1}$$

b) 几何级数：

$$\sum_{i=0}^{k} ar^i = \Theta(r^k)$$

c) 算术几何级数(可用错项相减法推导)：

$$\sum_{i=1}^{k} i2^i = (k-1)2^{k+1} + 2$$

d) 调和级数：

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \ln k + \gamma + \epsilon_k$$

其中，γ是欧拉常数，ϵ_k是一个近似于$\frac{1}{2k}$的小量，随着 k 的增加趋近于 0；

e) 斐波那契数列：

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2$$
$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1$$

解为：

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

5、期望

a) 指标随机变量：$X_i = I\{事件e_i\} = \begin{cases} 0, 事件e_i发生 \\ 1, 事件e_i不发生 \end{cases}$

b) 期望的线性特征

四、 几个蛮力求解的例子

1、求将数列 1 2 3 4 5 6 7 前后半部分调换顺序的算法（换为 5 6 7 1 2 3 4）：

时间复杂度	空间复杂度
n^2	1
n	n
n	1

蛮力解

⬇

最优解

2、最大和子串问题：效率为$O(n)$的算法分析【*Ref: LADA-L2-p24*】；

3、微博名人问题；