

学校代码：10246
学 号：20210860011

復旦大學

硕 士 学 位 论 文
(学术学位)

基于粒子群算法的双频激光干涉仪环境误差的
软硬件补偿方法

**Software and hardware compensation method for
environmental error of dual frequency laser interferometer
based on particle swarm optimization algorithm**

院 系：工程与应用技术研究院
专 业：微电子学与固体电子学
姓 名： 廖永超
指 导 教 师： 张志平 青年研究员
完 成 日 期： 2022 年 11 月 30 日

指导小组成员

张 三 教 授

李 四 教 授

王五六 研究员

目 录

插图目录	iii
摘 要	v
Abstract	vii
符号表	ix
第 1 章 双频激光干涉仪的环境误差及 Edlen 公式补偿方法	1
1.1 激光位移测量理论基础	1
1.1.1 多普勒频移	1
1.1.2 拍频现象	2
1.2 激光干涉仪原理	3
1.2.1 单频激光干涉仪	3
1.2.2 双频激光干涉仪	3
1.3 双频激光干涉仪的环境误差及其成因	4
1.4 基于 Edlen 公式的补偿方法及其局限性	5
1.4.1 Edlen 公式补偿方法	5
1.4.2 局限性	6
1.5 本章小结	6
第 2 章 双频激光干涉仪的环境误差补偿实验系统	7
2.1 双频激光干涉仪测量系统光路设计与分析	7
2.2 基于 PT100 的八通道温度测量系统	7
第 3 章 基于粒子群算法的软件补偿方法及算法硬化	9
3.1 粒子群算法	9
3.1.1 粒子群算法基本原理	9
3.1.2 线性惯性权值递减策略	10
3.2 基于粒子群算法优化后的 Edlen 公式补偿方法	10
3.2.1 数据预处理	10
第 4 章 222222	11
4.1 研究对象	11
4.2 研究方法	11

第 5 章 数学基础	13
5.1 基础公设	13
5.2 量子态与量子算符	14
5.3 动力学演化	14
第 6 章 总结与展望	15

插图目录

1-1	多普勒频移示意图	1
1-2	多普勒频测速示意图	2
1-3	拍频波形示意图 ^[2]	3
1-4	单频激光干涉仪原理图	3
1-5	双频激光干涉仪原理图	4
1-6	折射率变化图	5
3-1	粒子群算法流程图	9
5-1	施特恩—格拉赫实验	14

摘 要

中文摘要

关键字： 不确定关系；量子力学；理论物理

中图分类号： O413.1

Abstract

English abstract

Keywords: Uncertainty principle; quantum mechanics; theoretical physics

CLC code: O413.1

符号表

x	坐标
p	动量
$\psi(x)$	波函数
$\langle x $	左矢 (bra)
$ x\rangle$	右矢 (ket)
$\langle \alpha \beta \rangle$	内积

第 1 章 双频激光干涉仪的环境误差及 Edlen 公式补偿方法

1.1 激光位移测量理论基础

目前许多常见的激光位移测量方法，其原理大多基于多普勒频移，将位移/速度变化转变为信号的相位变化进行测量；同时为了提高测量精度，并且减小低频噪声的干扰，往往利用拍频现象，将测量信息挂载在两个波叠加产生的拍上，其幅值是随着时间周期变化的，从而将测量信号从直流量转变为交流量。

1.1.1 多普勒频移

多普勒频移 (Doppler Shift) 是由奥地利科学家 Christian Johann Doppler 于 19 世纪发现提出的^[2]，该效应指的是当接收体与波源之间存在相对运动时，接收体接收到的波的频率与波源发出的频率不相同，并在波源本身频率的基础上发生了一定的频移，即为多普勒频移。

多普勒频移的产生是由于运动导致波的传播路程差发生了变化，使得波对于接收体而言在空间中不是均匀分布了，如图 1-1 所示，当波源位置从 $S1$ 变为 $S2$ 时，接收体所在的 P 点单位时间内接受到的波的个数增加，即接收体处的波的频率增加，反之则频率减小。一般性的，当波源和接收体相互靠近时，波被压缩，接收体单位时间内接收到的波的个数增加，即频率变高；当波源和接收体相互远离时，波被拓展，接收体单位时间内接收到的波的个数减少，即频率变低。

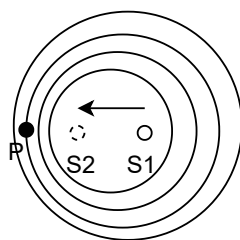


图 1-1 多普勒频移示意图

由于波源和接收体之间的相对运动而产生的频率变化值的大小与相对运动的速度之间存在定量推导关系，从而使得多普勒频移广泛应用于激光速度/位移测量领域。如图 1-2 所示，接收体处在 P 点，波源从点 $S1$ 以速度 v 朝着点 $S2$ 运动时，有：

$$\Delta L = d \cos \theta = v \Delta t \cos \theta. \quad (1.1)$$

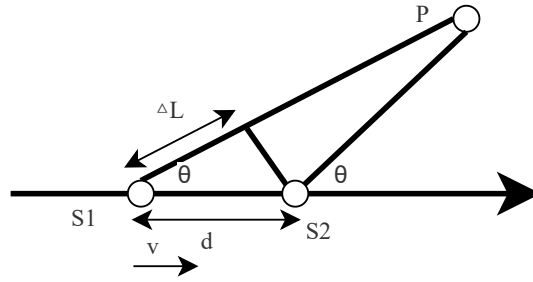


图 1-2 多普勒频测速示意图

式(1.1)中 θ 是 $S1$ 和 $S2$ 处出射波的夹角, ΔL 两处位置的波程差, Δt 为运动所需的时间。由于在实际测量中, 波源或者接收体在单位时间内运动距离相比于波源和接收体之间的距离很小, 所以可以近似认为 $S1$ 和 $S2$ 两处的 θ 是相同的^[2], 由于波的传播路程差导致的相位变化值为:

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda} = \frac{2\pi v\Delta t}{\lambda} \cos\theta. \quad (1.2)$$

对式(1.2)左边进行变换, 即可得到多普勒频移与运动速度 v 之间的关系:

$$\varphi_d = \frac{\Delta\varphi}{2\pi\Delta t} = \frac{v}{\lambda} \cos\theta. \quad (1.3)$$

1.1.2 拍频现象

对于两个振动方向相同、振动频率相同并且相位差恒定的简谐波叠加, 会在空间中产生强弱相间的固定分布, 这种现象称为干涉。如若两个简谐波的振动频率略有差异, 其叠加时会在空间中产生幅值随时间变化的周期性分布, 这种现象则称为拍^[2], 拍频则定义为单位时间内合振幅周期性强弱变化的次数。

假设两个振动方向相同的简谐波的方程为

$$x_1 = A_1 \cos\omega_1 t. \quad (1.4)$$

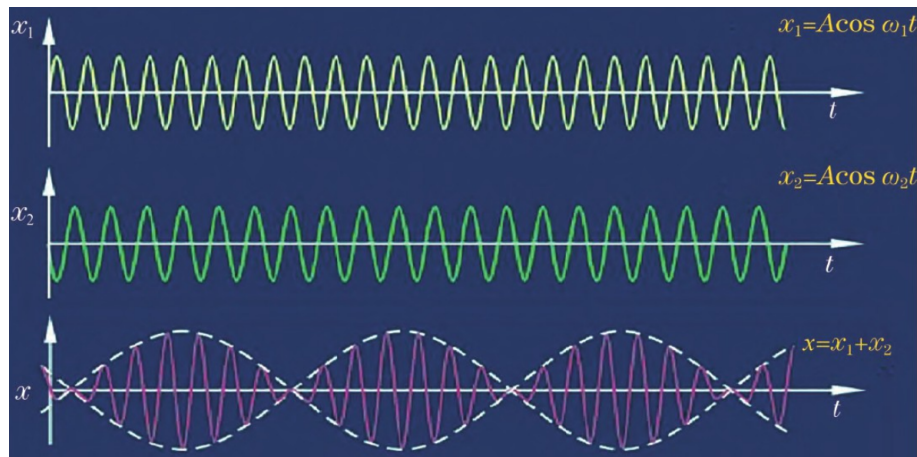
$$x_2 = A_2 \cos\omega_2 t. \quad (1.5)$$

上式中 $A_1 = A_2$, 并且 $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$, 那么 x_1 和 x_2 在空间中相遇叠加产生的拍的方程为:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right). \quad (1.6)$$

上式中 $|2A \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t)|$ 为 x_1 和 x_2 在空间中叠加后拍的幅值, 可以看出这是一个随时间周期性变化的值, 而 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ 则为拍的角频率, 这也是一个随着时间周期性变化的值, 两者共同导致了拍在波形上表现为周期性变化的形式, 如图1-3所示。

并且由式(1.6)可以看出, 拍的频率为两个简谐波的原始频率之差, 虽然当前激光的频率通常很高 (约为 10^{14} Hz 量级), 这使得目前的光电探测器无法响应^[2], 但通过拍频现象, 即可将高频的信息转变为低频信息, 便于光电探测器响应。

图 1-3 拍频波形示意图^[2]

1.2 激光干涉仪原理

1.2.1 单频激光干涉仪

单频激光干涉仪，也可以称为零差干涉仪，具有精度高、稳定可靠，且相对成本较低等特点^[2]。其示意图如图1-4所示。

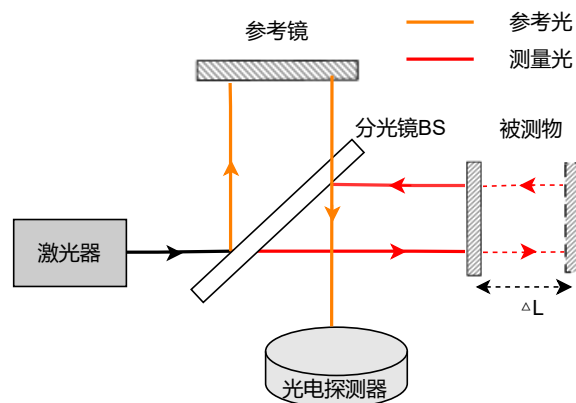


图 1-4 单频激光干涉仪原理图

激光器出射的激光经过分光镜 BS 后产生两束光：一束进入参考臂，并被参考镜反射，另一束进入测量臂，并被被测物体反射，当被测物体位移为 ΔL 时，测量光会携带上对应的多普勒频移 f_d ，两束光分别经参考镜和被测物体反射后会再次汇聚，随后射入光电探测器，根据相位的变化即可反推被测物体的位移。

1.2.2 双频激光干涉仪

双频激光干涉仪结构如图1-5所示，激光出射的含有 f_1 和 f_2 两个频率成分的激光经过偏振分光棱镜 (polarization beam splitter, PBS) 分为测量光 f_1 和参考光 f_2 ，测量光 f_1 进入测量臂之后，携带上被测物体位移 ΔL 的多普勒频移 Δf 。由于测量臂和参考臂上各放置了一块四分之一波片 (Quarter Wave Plate, QWP)，测量光和参考光在返回 PBS 之前都经过两次 QWP，使得其偏振态发生改变，原本透射的测量光再次返回 PBS 时变为反射，原本反射的

参考光再次返回 PBS 时变为透射，参考光和测量光汇聚，耦合进光纤，由采集板卡从多普勒频移 Δf 解调出被测物体的位移 ΔL 。

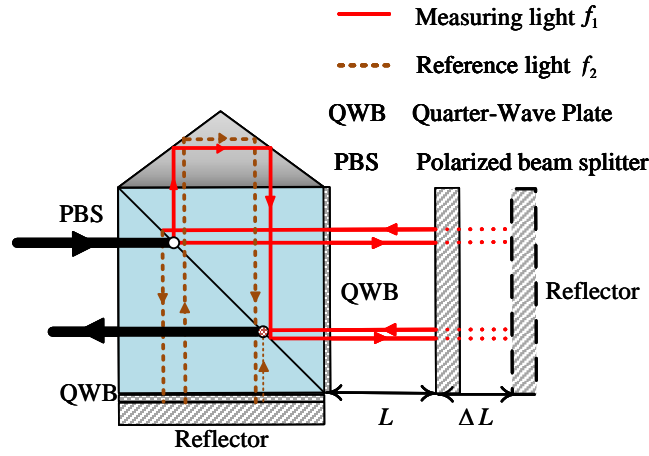


图 1-5 双频激光干涉仪原理图

1.3 双频激光干涉仪的环境误差及其成因

在真实的测量场景中，双频激光干涉仪的测量值 D 是指干涉仪系统实际输出的位移值。是由条纹数 N 乘上干涉仪系统的分辨率 R_{es} 得到的，而条纹数 N 与光程的变化有关，即：

$$D = R_{es} \times N = R_{es} \times \frac{\Delta L \times n_0 \times M_o}{\lambda \div M_e} = \Delta L \times n_0. \quad (1.7)$$

式(1.7)中， n_0 为真空中的空气折射率，近似可认为 1，干涉仪的分辨率 R_{es} 与激光的实际波长 λ 、电子细分 M_e 和光学细分 M_o 有关。电子细分 M_e 由干涉仪系统的采集板卡决定，常见的有 32、64、128、256……2048 等，而光学细分 M_o 只与干涉仪的设计结构有关，对于采用角锥镜为被测对象的干涉仪，光学细分一般为 2，采用平面镜为被测对象的干涉仪，光学细分一般为 4，干涉仪的分辨率具体计算公式如下：

$$R_{es} = \frac{\lambda}{M_o \times M_e}. \quad (1.8)$$

电子细分和光学细分在测量过程中一般不会引入太大的误差，但是激光的波长跟测量环境中的空气折射率有关，而外界环境因素（温度、气压等）的变化也会导致空气折射率变化 Δn ，此时，干涉仪系统测量值 D 不仅包括被测物体的位移 ΔL ，还包括由于折射率变化引起的光程变化 Δl ，即：

$$D = \Delta L(\Delta n + n_0) + L\Delta n. \quad (1.9)$$

但由于测量臂长度 L 一般远大于被测物体位移 ΔL ，由式(1.7)和式(1.9)可得，由于外界环境因素（温度、气压等）引起的误差为：

$$D = [\Delta L(\Delta n + n_0) + L\Delta n] - \Delta L n_0 = \Delta n(\Delta L + L) \approx \Delta n \Delta L. \quad (1.10)$$

根据相关文献的描述^[2]，在对上述环境因素不进行任何控制或补偿的情况，空气折射率的变化可能会达到 50ppm，如果仅对测量环境温度进行控制，其余因素的变化也可能导致空

气折射率变化 20ppm 以上。放在双频激光干涉仪领域,根据式(1.10)可知,空气折射率变化需要乘上测量臂长度才是双频激光干涉仪的环境误差,这就导致当测量臂长度较小时,这部分的误差是可以忽略不计的,但随着测量臂长度的增加,双频激光干涉仪的环境误差也随着增大。以 10mm 的测量臂长度为例,当温度变化超过 0.1℃ 时,这部分的误差就可能已经超过 1nm 了,所以需要对上述的环境误差进行补偿。

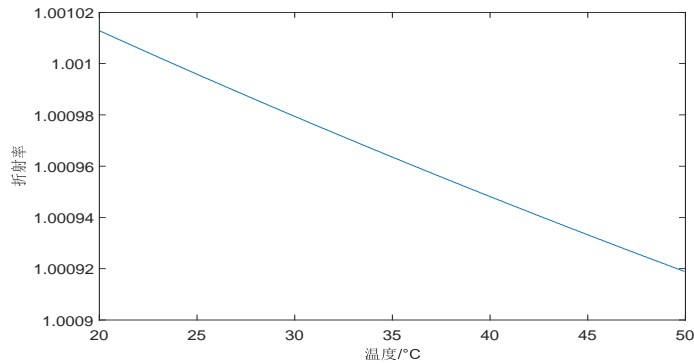
1.4 基于 Edlen 公式的补偿方法及其局限性

1.4.1 Edlen 公式补偿方法

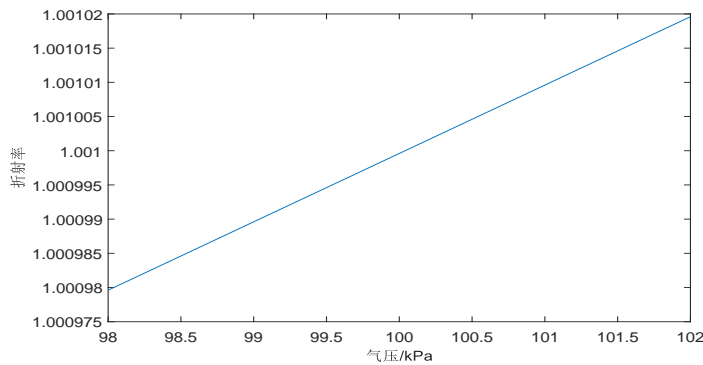
1965 年,Edlén 基于洛伦兹方程和空气密度方程推导出了空气密度因子,并基于空气密度因子提出 Edlen 公式用于空气折射率的修正^[2]。最近一次广泛承认的修正是 Boensch 等^[2]于 1998 年优化的 Edlen 公式,其中关于空气折射率与温度和气压的关系如式(1.11)所示。

$$(n - 1)_{ip} = \frac{Pn_0}{93214.60} \frac{[1 + 10^{-8}(0.5953 - 0.009876T)]}{1 + 0.0036610T}. \quad (1.11)$$

式(1.11)中 $(n - 1)_{ip}$ 为考虑温度与气压时的空气折射率, n_0 为理想情况下空气折射率, P 为环境气压, T 为环境温度。当气压 P 取一个标准大气压 (101.325kPa), 温度 T 从 20℃ 变化到 30℃ 时, 折射率随温度的变化如图 1-6(a)所示; 当温度 T 取 20℃, 而气压 P 在一个标准大气压附近变化时, 折射率随着气压的变化如图 1-6(b)所示。



(a) 折射率随温度变化



(b) 折射率随气压变化

图 1-6 折射率变化图

可以看出,在上述范围内,空气折射率和温度/气压变化呈近似线性^[2]。对式(1.11)中各因子求偏导数,可以得到空气折射率变化 10^{-8} 时温度和气压的变化因子分别为 $3.73 Pa$ 和 $0.01^{\circ}C$ ^[2]。通过仿真分析,可得出温度和气压对空气折射率的影响呈线性或近线性关系,(1.11)可简化如下^[2]:

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial n}{\partial P} \Delta P = -9.36 * 10^{-7} \Delta T + 2.68 * 10^{-9} \Delta P. \quad (1.12)$$

式(1.12)中 Δn 为空气折射率的变化值, ΔT 为温度变化值,单位为 $^{\circ}C$, ΔP 为气压变化值,单位为 Pa 。由温度传感器和压力传感器测量出对应的温度值和压力值,带入式(1.12)计算出空气折射率变化值,再由式(1.10)即可求出干涉仪的环境误差。

1.4.2 局限性

现有的 Edlen 公式用于干涉仪环境补偿有着如下局限性:

1. 波长不匹配: 现有的 Edlen 公式是根据 644.0nm、508.7nm、480.1nm 和 467.9nm 四个波长段的测量数据得出的,而干涉仪由于对光束横模模式和频率稳定性的高要求,所用的激光光源多为波长段为 633nm 的氦氖激光器,两者在波长段上并不匹配。
2. 温度不匹配: 现有的 Edlen 公式的适用温度位标准条件下温度 $20^{\circ}C$ ^[2],而干涉仪广泛使用于光刻机中或其它超精密测量领域,其工作环境温度大多为 $22^{\circ}C$ 或常温范围 ($24^{\circ}C$ - $26^{\circ}C$)。
3. 主观性强: 有的 Edlen 公式是根据实验数据人为总结的,带有很大的主观性。

1.5 本章小结

本章主要介绍了激光位移测量的基本理论和干涉仪环境误差的成因及 Edlen 公式补偿方法。首先阐述了激光位移测量领域广泛利用的两个原理:多普勒频移和拍频。随后介绍了单频激光干涉仪和双频激光干涉仪结构和光路,并从双频激光干涉仪一些参数值说起,其中包括分辨率、电子细分、光学细分等,详细分析了环境误差的成因以及影响大小。最后介绍了目前广泛应用于双频激光干涉仪环境误差补偿的 Edlen 公式,并说明当前 Edlen 公式存在着波长不匹配、温度不匹配、主观性强三个局限性,为后文的工作提供了基础。

第 2 章 双频激光干涉仪的环境误差补偿 实验系统

- 2.1 双频激光干涉仪测量系统光路设计与分析
- 2.2 基于 PT100 的八通道温度测量系统

第3章 基于粒子群算法的软件补偿方法及算法硬化

3.1 粒子群算法

3.1.1 粒子群算法基本原理

粒子群算法 (Particle Swarm optimization, PSO) 是一种启发于鸟群协同捕食行为的智能算法, 利用种群与个体之间的信息交互来寻找问题的最优解, 具有较高的搜索效率和精度^[2], 已广泛应用于函数优化等领域^[2]。

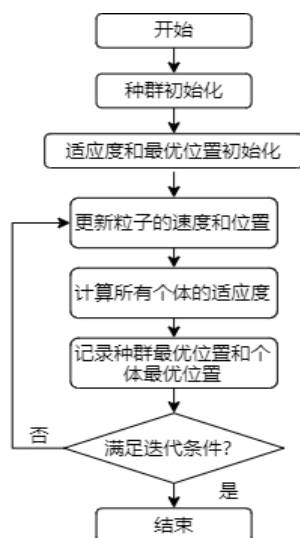


图 3-1 粒子群算法流程图

可以假设这样一个场景: 一群鸟在随机的搜寻食物, 并且搜寻空间里只有一块食物, 所有的鸟都不知道食物在哪里, 并且所有鸟的初始位置和搜寻方向都是随机的。在该场景下, 一个找寻食物的最优策略就是搜寻离食物最近的鸟的周围。距离食物的距离就代表着优化效果的好坏, 而鸟群每个时刻所处位置, 就代表着粒子群算法覆盖到的迭代值, 整个空间即为粒子群算法的搜索空间, 将该方式抽象成算法, 如图3-1所示。

由图3-1中可以看出, 粒子群算法的第一步是对种群进行初始化, 即设定优化对象的迭代起点, 并根据目标函数计算出与起点对应的适应度 (Fitness, 下文简称 fit), 并在所有个体的适应度中筛选出最优的, 用其对应的迭代起点作为整个种群目前的种群最优解 (Global best, 下文简称 gbest), 而所有个体的个体最优解 (Person best, 下文简称 pbest), 这样就完成了整个算法的初始化。随后使用 gbest、pbest 对粒子的速度和位置更新进行控制, 使迭代方向不断朝着最优的方向进行, 即上述“搜寻离食物最近的鸟的周围”的策略, 具体的速度更

新公式和位置更新公式如下式所示：

$$V_i^{k+1} = \omega V_i^k + c_p r_{and} (pbest_i - X_i^{(k)}) + c_g r_{and} (gbest - X_i^{(k)}). \quad (3.1)$$

$$X_i^{k+1} = X_i^{(k)} + V_i^{k+1}. \quad (3.2)$$

上式中 V_i^k 和 X_i^k 中分别表示粒子的速度和位置, 下标 i 表示种群中第 i 个粒子, 上标 $(k+1)$ 表示当前种群为第 $(k+1)$ 次迭代, ω 称为惯性因子, 是一个衡量全局寻优能力和局部寻优能力的非负参数; c_p 和 c_g 为非负常数, 通常设为 2; r_{and} 为 $[0,1]$ 范围内的随机数, $pbest_i$ 为第 i 个粒子的个体历史最优位置, $gbest$ 为整个种群的历史最优位置。

3.1.2 线性惯性权值递减策略

由式(3.1)可以看出惯性因子主要控制粒子的历史速度对当前速度的影响, 历史速度在当前速度中占比大, 则速度的更新将主要集中在历史速度附近, 此时粒子群算法的局部寻优能力较强, 并且收敛速度较快; 若历史速度在当前速度中占比小, 则速度的更新将在整个搜索域中进行, 此时粒子群算法的全局寻优能力较强, 使得搜索结果容易跳出局部优值。

为了在迭代初期, 能够有更好的全局寻优能力, 尽可能找到搜索域中所有可能的最优解, 在迭代后期拥有更好的局部寻优能力, 以便快速收敛, 在惯性因子的取值上采用线性递减策略^[2], 即惯性因子 ω 由下式更新。

$$\omega^k = \omega_e + \frac{(\omega_i - \omega_e)(k_{max} - k)}{k_{max}}. \quad (3.3)$$

其中 ω_i 和 ω_e 分别为迭代开始时的惯性因子和迭代结束时的惯性因子, k_{max} 为最大迭代次数, k 为当前的迭代次数。通过对惯性因子使用线性递减策略, 可以在迭代过程中不断调整全局寻优能力和局部寻优能力。

但是粒子群算法存在早熟收敛的问题, 即当粒子群到达局部最优解附近时, 粒子速度的更新主要由自身速度决定, 并且由于粒子群算法的惯性因子 ω^k 通常小于 1, 使得粒子速度的更新幅度将会越来越小, 难以跳出该局部最优解^[2]。

虽然 Edlen 公式的诞生方法使其补偿精度和使用条件受到一定影响, 但原始的 Edlen 公式为 PSO 算法提供了一个优秀的搜索起点, 相当于大幅压缩了 PSO 算法的搜索空间, 这能非常有效地避免早熟收敛问题的出现。

3.2 基于粒子群算法优化后的 Edlen 公式补偿方法

3.2.1 数据预处理

第 4 章 222222

4.1 研究对象

4.2 研究方法

第 5 章 数学基础

5.1 基础公设

整个量子力学的数学理论可以建立于五个基础公设。这些公设不能被严格推导出来的，而是从实验结果仔细分析归纳总结而得到的。从这五个公设，可以推导出整个量子力学。假若量子力学的理论结果不符合实验结果，则必须将这些基础公设加以修改，直到没有任何不符合之处。至今为止，量子力学已被实验核对至极高准确度，还没有找到任何与理论不符合的实验结果，虽然有些理论很难直觉地用经典物理的概念来理解，例如，波粒二象性、量子纠缠等等^[?? ?]。

1. 量子态公设：量子系统在任意时刻的状态（量子态）可以由希尔伯特空间 \mathcal{H} 中的态矢量 $|\psi\rangle$ 来设定，这态矢量完备地给出了这量子系统的所有信息。这公设意味着量子系统遵守态叠加原理，假若 $|\psi_1\rangle$ 、 $|\psi_2\rangle$ 属于希尔伯特空间 \mathcal{H} ，则 $c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle$ 也属于希尔伯特空间 \mathcal{H} 。

2. 时间演化公设：态矢量为 $|\psi(t)\rangle$ 的量子系统，其动力学演化可以用薛定谔方程表示：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (5.1)$$

其中，哈密顿算符 \hat{H} 对应于量子系统的总能量， \hbar 是约化普朗克常数。根据薛定谔方程，假设时间从 t_0 变化到 t ，则态矢量从 $|\psi(t_0)\rangle$ 演化到 $|\psi(t)\rangle$ ，该过程以方程表示为

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (5.2)$$

其中 $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}$ 是时间演化算符。

3. 可观察量公设：每个可观察量 A 都有其对应的厄米算符 \hat{A} ，而算符 \hat{A} 的所有本征矢量共同组成一个完备基底。
4. 坍缩公设：对于量子系统测量某个可观察量 A 的过程，可以数学表示为将对应的厄米算符 \hat{A} 作用于量子系统的态矢量 $|\psi\rangle$ ，测量值只能为厄米算符 \hat{A} 的本征值。在测量后，假设测量值为 a_i ，则量子系统的量子态立刻会坍缩为对应于本征值 a_i 的本征态 $|e_i\rangle$ 。
5. 波恩公设：对于这测量，获得本征值 a_i 的概率为量子态 $|\psi\rangle$ 处于本征态 $|e_i\rangle$ 的概率幅的绝对值平方。^①

① 使用可观察量 A 的基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ，量子态 $|\psi\rangle$ 可以表示为 $|\psi\rangle = \sum_j c_j |e_j\rangle$ ，其中 c_j 是量子态 $|\psi\rangle$ 处于本征态 $|e_j\rangle$ 的概率幅。根据波恩定则，对于此次测量，获得本征值 a_i 的概率为 $|\langle e_i | \psi \rangle|^2 = |c_i|^2$ 。

5.2 量子态与量子算符

量子态指的是量子系统的状态，态矢量可以用来抽象地表现量子态。采用狄拉克标记，态矢量表示为右矢 $|\psi\rangle$ ；其中，在符号内部的希腊字母 ψ 可以是任何符号、字母、数字，或单字。例如，沿着磁场方向测量电子的自旋，得到的结果可以是上旋或是下旋，分别标记为 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 。

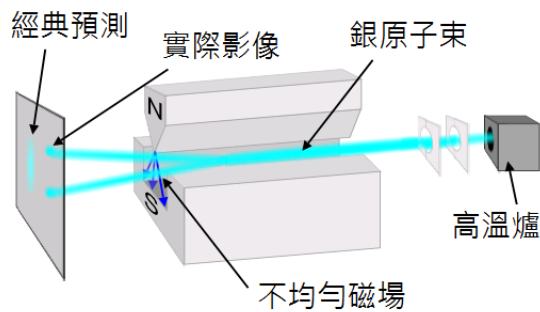


图 5-1 设定施特恩—格拉赫实验仪器的磁场方向为 z -轴，入射的银原子束可以被分裂成两道银原子束，每一道银原子束代表一种量子态，上旋 $|\uparrow\rangle$ 或下旋 $|\downarrow\rangle$ [2]。

对量子态做操作定义，量子态可以从一系列制备程序来辨认，即这程序所制成的量子系统拥有这量子态。例如，使用施特恩—格拉赫实验仪器，设定磁场朝着 z -轴方向，如图 5-1 所示，可以将入射的银原子束，依照自旋的 z -分量分裂成两道，一道为上旋，量子态为 $|\uparrow\rangle$ ；另一道为下旋，量子态为 $|\downarrow\rangle$ ，这样，可以制备成量子态为 $|\uparrow\rangle$ 的银原子束，或量子态为 $|\downarrow\rangle$ 的银原子束。原本银原子束的态矢量可以按照态叠加原理表示为

$$|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle. \quad (5.3)$$

其中， α 、 β 是复值系数， $|\alpha|^2$ 、 $|\beta|^2$ 分别为入射银原子束处于上旋、下旋的概率，且有

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (5.4)$$

5.3 动力学演化

第 6 章 总结与展望

复旦大学

学位论文独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。论文中除特别标注的内容外，不包含任何其他个人或机构已经发表或撰写过的研究成果。对本研究做出重要贡献的个人和集体，均已在论文中作了明确的声明并表示了谢意。本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：_____ 日期：_____

复旦大学

学位论文使用授权声明

本人完全了解复旦大学有关收藏和利用博士、硕士学位论文的规定，即：学校有权收藏、使用并向国家有关部门或机构送交论文的印刷本和电子版本；允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。涉密学位论文在解密后遵守此规定。

作者签名：_____ 导师签名：_____ 日期：_____