MUSTERLÖSUNG

1. Klausur Q12

Teil A

Auf. 1 a) $AC: \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

damit g die Mittelsenkrechte von AC muss

g ① $g \perp AC \Leftrightarrow \vec{u}_g \perp \vec{u}_{AC} \Leftrightarrow \vec{u}_g \circ \vec{u}_{AC} = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 + -3 \cdot 3 + (-4) \cdot 4 = 0 \checkmark$$

✓✓

② g verläuft durch $M \rightarrow$ Mittelpunkt der Strecke [AC]

$$M\left(\frac{5+0}{2} \middle| \frac{3+0}{2} \middle| \frac{4+0}{2}\right) = M(2{,}5 \mid 1{,}5 \mid 2)$$

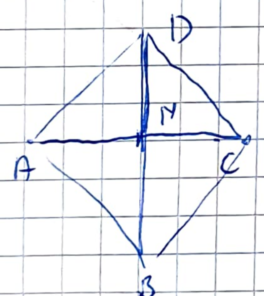
✓✓

$M \in g$? $\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu = 0{,}5 \checkmark$

4

somit g ist Mittelsenkrechte von AC

b)



weil $|\vec{u}_g| = |\vec{u}_{AC}|$ ✓

dann $M(2{,}5 \mid 1{,}5 \mid 2) + \frac{1}{2}(\vec{v}_g) = \vec{D}$

$$\vec{M} \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow D(5 \mid 0 \mid 0)$ ✓

$$M \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3

$\Rightarrow B(0 \mid 3 \mid 4)$ ✓

Σ Auf 1

7/7

Auf. 2

a) $\int \frac{2x^2}{3x^3-3}\,dx$ $\qquad (3x^3-3)' \; 9x$

Formel $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

2 $\quad \frac{2}{9}\int \frac{9x^2}{3x^3-3}\,dx = \frac{2}{9}\ln|3x^3-3| + c$

b) $\int -4x\,e^{x^2+5}\,dx$ $\qquad (x^2+5)' = 2x$

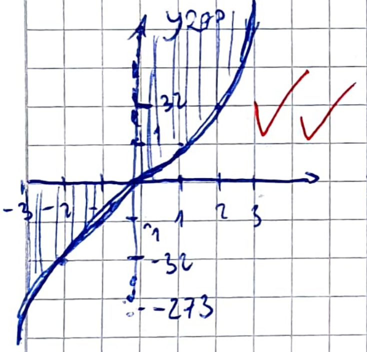
Formel $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$

2 $\quad -2\int 2x\,e^{x^2+5}\,dx = -2\,e^{x^2+5} + c$

Σ Auf 2 4BE

Auf. 3

$\int_{-3}^{b} x^5\,dx = 0$



y-Achse ist nicht skaliert

Funktion x^5 ist punktsymmetisch
Im symmetischen Intervall wird das Integral von x^5 den Wert 0 annehmen

=> $b = 3$

(Möglichkeit $b = -3$ ist auch als Lösung zugelassen => Erklärung muss trotzdem graphisch sowie schriftlich erfolgen)

4BE

Teil B

Auf. 4

Funktion 4 ist die Stammfunktion $F(x)$ von der Funktion $2 = f(x)$.

Extrema der $F(x)$ liegen bei $x = -1$ und $x = 1$, genau dort nimmt die $f(x)$ ihre Nullstellen an. $F(x)$ steigt für $x \in]-1; 1[$ genau dort hat die $f(x)$ positive Werte.

Für $x \in]-\infty; -1[\cup]+1; +\infty[$ ist $F(x)$ streng monoton fallend und $f(x)$ nimmt die negative Werte an.

(Zuordnung 3 BE Erklärung 3 BE) Fachbegriffe!

Funktion 1 ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

$f(x)$ hat ihre Extrema bei $x \approx -2,4$
$x \approx 0,5$

dort hat die $f'(x)$ ihre Nullstellen.

$f(x)$ steigt für $x \in]-2,5; 0,5[$ genau dort nimmt die $f'(x)$ positive Werte an. $f(x)$ fällt sonst und $f'(x)$ hat im übrigen Bereich negative Werte.

6/6

Auf. 5

a) Schnittpunkt $f(x) = g(x)$

$$x + 6 - \frac{32}{x^2} = x + 4$$

$$2x^2 = 32$$

$$x^2 = 16$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$$

$S_1(4|8)$ $S_2(-4|0)$

Integralgrenze $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

$$x^{3} + 6x^{2} - \frac{32}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$x^3 + 6x^2 - 32 = 0 \qquad \text{für } x = 2 \text{ (Punktprobe)}$$

$$A = \int_{-4}^{2} (x+4)\,dx + \int_{2}^{4} \left(x+6-\frac{32}{x^2} - x - 4\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-4}^{2} + \left[2x + \frac{32}{x}\right]_{2}^{4}$$

6 BE

$$= 10 + 8 + |8 + 8 - (4+16)|$$

$$= 18 + 4 = \underline{\underline{22\,[m^2]}}$$

b) Schnittpunkt bereits im a) berechnet und bewertet

Hochpunkt $f(x)$ gesucht

$$f(x) = x + 6 - \frac{32}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{64}{x^3}$$

$$1 + 64x^{-3} = 0$$

$$64x^{-3} = -1$$

$$x^{-3} = -64$$

$$\Rightarrow x = -4$$

2 BE

Hochpunkt bei $(-4/0)$

= Schnittpunkt mit der x-Achse der Geraden g.

Das Segel erfüllt der Bedingung.

siehe 2. Blatt

1 Klausur Q12 Musterlösung

Auf. 6

a) $N: \vec{x} = \vec{D} + \mu \vec{DA} + \lambda \vec{DC} \quad \lambda; \mu \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_N = \vec{DA} \times \vec{DC} = \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 576 \\ 0 \\ 1728 \end{pmatrix} = 576 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$N: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$x_1 + 3x_3 - 36 = 0$$

4/4

b) $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle (\vec{n}_N ; \vec{n}_{x_1x_2})$ $\quad x_1x_2$-Ebene: $x_3 = 0$

$$\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 18{,}43^\circ$$

oder:

C, 12, B, 36, D

$$\tan \alpha = \frac{12}{36}$$

$$\alpha \approx 18{,}43^\circ$$

3/3

c) $G \subset E \iff G \perp$ über B

$G(\overset{x_1}{36} | \overset{x_2}{48} | \overset{x_3}{z})$ muss die Ebenengleichung E erfüllen

$$E: x_1 - 6x_3 + 96 = 0$$

$$36 - 6 \cdot z + 96 = 0$$

$$z = 22 \Rightarrow G(36 | 48 | 22)$$

4/4

(oder über die Abstand von B zur N)
viel komplizierter

d) Abstand zwischen G und Ebene N

$N: x_1 + 3x_3 = 36$

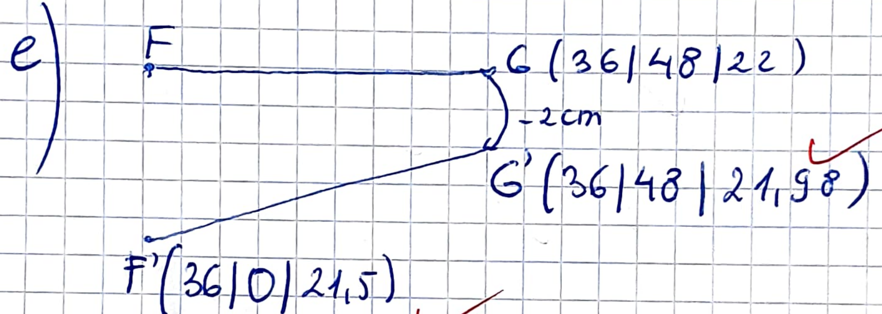
$d(N;G) = \frac{|36 \cdot 1 + 48 \cdot 0 + 3 \cdot 22 - 36|}{\sqrt{1^2+3^2}}$

$= \frac{|36 + 66 - 30|}{\sqrt{10}} \approx 20{,}87\ [m]$

4/4

die Stange mit 20m Länge reicht nicht aus. Es fehlen noch ca. 87 cm.

e)



$48\,m : 2\,m = 24 \qquad 24 \cdot 2\,mm = 48\,mm$

$21{,}98 - 0{,}48 = 21{,}5$

3/3

Gerade durch $G'F'$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 36 \\ 48 \\ 21{,}98 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \\ -0{,}48 \end{pmatrix}$

$G' + \lambda\, \overrightarrow{G'F'}$

wegen Richtung westen.