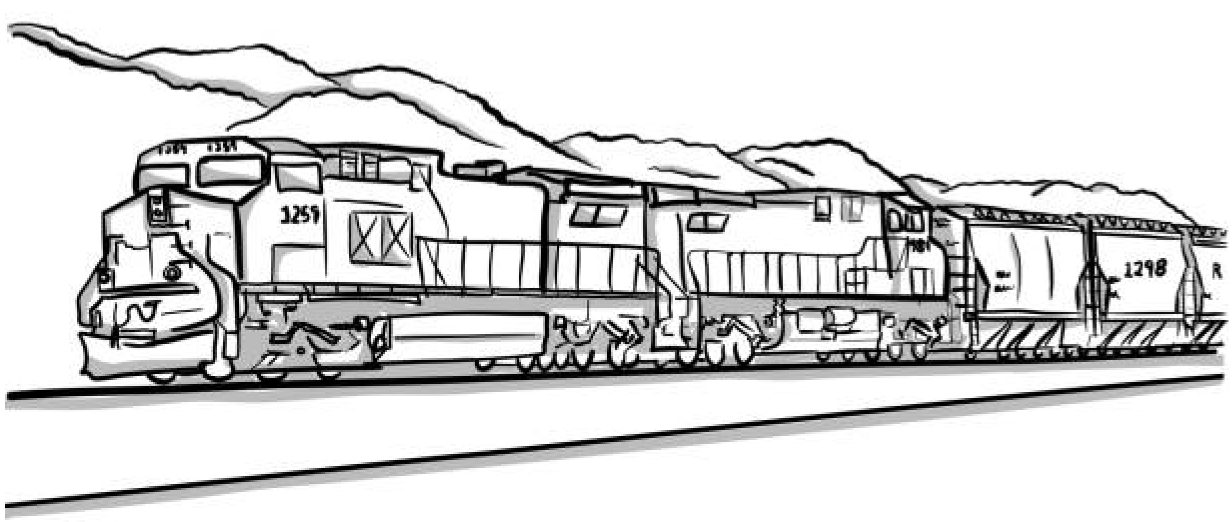
Ciaran Van Hoeserlande

21 mars 2022

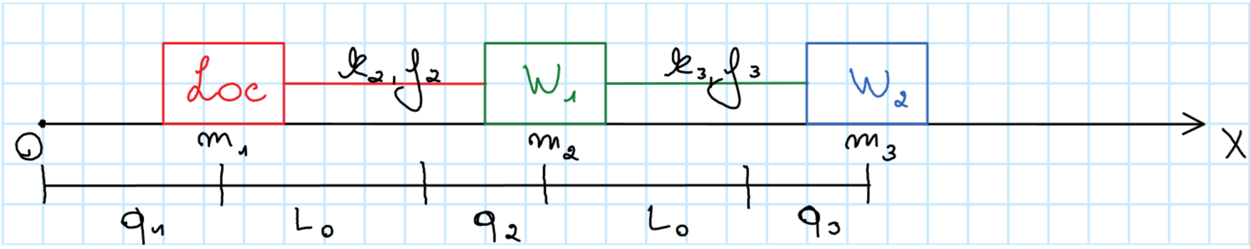
Polytech Montpellier

MODELISATION ET COMMANDE D'UN (PETIT) TRAIN DE MERCHANDISES

TP Automatique des systèmes linéaires multivariables



Le but de ce TP est de modéliser et de contrôler un (petit) train de marchandises. Pour le premier d'entre eux, la figure ci-dessous est utilisée.



Dans cette figure

- m_1, m_2 et m_3 sont les masses de la locomotive, du wagon W1 et du wagon W2 en kilogrammes respectivement,
- L_0 est la longueur d'équilibre constante de la barre considérée comme un ressort amorti en mètres,
- q_1, q_2 et q_3 sont respectivement la position absolue de la locomotive et la longueur variable que les premier et deuxième "ressorts" déforment par rapport à leur longueur d'équilibre, également en mètres,
- k_2 et k_3 sont la raideur de la barre décrite comme un ressort amorti en Newtons par mètre et
- f_2 et f_3 sont les coefficients d'amortissement de la barre considérée comme un ressort amorti en kilogrammes par seconde.

Le tableau ci-dessous donne un aperçu des différentes grandeurs, une très brève description de celles-ci et leurs unités (*Question 1*).

Grandeur	Description	Unité
m_1, m_2 et m_3	masse	[kg]
L_0	longueur constante	[m]
q_1, q_2 et q_3	longueur variable	[m]
k_2 et k_3	raideur	[N/m]
f_2 et f_3	coefficient d'amortissement	[kg/s]

La figure montre comment cette

- la position absolue de la locomotive par rapport au zéro de référence est égal à q_1,
- la position relative du wagon W1 par rapport à la locomotive est égale à $q_2 + L_0$ et
- la position relative du wagon W1 par rapport à la locomotive est égale à $q_2 + q_3 + 2L_0$.

La première étape pour obtenir les équations de la dynamique consiste à calculer l'énergie cinétique et potentielle du train dans le repère absolu. L'énergie cinétique totale de ce système est la somme de l'énergie globale de translation, de l'énergie cinétique "interne" de translation et d'un terme T_c permettant de prendre en compte le changement de repère absolu et le repère centré sur la locomotive. Ce dernier est déterminé par le calcul des centres de gravité des différents solides dans le repère centré sur la locomotive, ainsi que leur vitesse dans ce même repère, et enfin leur l'énergie cinétique. Pour la locomotive on a, en utilisant les positions trouvées précédemment :

$$G_0 = 0 \qquad \dot{G}_0 = 0 \qquad T_{Loc} = 0$$

Pour wagon W1 on a :

$$G_1 = L_0 + q_2 \qquad \dot{G}_1 = \dot{q}_2 \qquad T_{W1} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

Et pour wagon W2 on a :

$$G_2 = G_1 + L_0 + q_3 \qquad \dot{G}_2 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \qquad T_{W2} = \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2$$

Le centre de gravité collectif peut être trouvé en déterminant le centre de gravité séparément pour chaque solide le long de l'axe horizontal :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i}$$

Ainsi on trouve que le centre de gravité du train dans le repère centré sur la locomotive est donné par (*Question 2*) :

$$G = x_G = \frac{m_1 G_0 + m_2 G_1 + m_3 G_2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1}{m}(m_1 G_0 + m_2 G_1 + m_3 G_2) = \frac{m_2}{m} G_1 + \frac{m_3}{m} G_2$$

Une fois l'équation ci-dessus dérivée au temps, on obtient :

$$\dot{G} = \frac{m_2}{m} \dot{G}_1 + \frac{m_3}{m} \dot{G}_2 = \frac{m_2}{m} \dot{q}_2 + \frac{m_3}{m} \dot{q}_2 + \frac{m_3}{m} \dot{q}_3$$

En conséquence, le terme T_c tel que défini ci-dessous est égal à (*Question 3*)

$$T_c = m \dot{q}_1 \dot{G} = m \dot{q}_1 \left(\frac{m_2}{m} \dot{q}_2 + \frac{m_3}{m} \dot{q}_2 + \frac{m_3}{m} \dot{q}_3 \right) = \dot{q}_1 (m_2 \dot{q}_2 + m_3 \dot{q}_2 + m_3 \dot{q}_3)$$
$$= (m_2 + m_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3$$

L'énergie cinétique totale du système est maintenant égale à

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + \left[\frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \right] + (m_2 + m_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3$$

La seule énergie potentielle présente dans le système est l'énergie élastique due à la compression et à l'étirement des deux barres. L'énergie potentielle totale est donc la somme de ces deux éléments.

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} k_2 q_2^2 + \frac{1}{2} k_3 q_3^2$$

On est maintenant en mesure de trouver le Lagrangien du système, et par conséquent, ses équations de Lagrange. On obtene d'abord le Lagrangien en soustrayant l'énergie potentielle de l'énergie cinétique.

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + \left[\frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \right] + (m_2 + m_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - \frac{1}{2} k_2 q_2^2$$
$$- \frac{1}{2} k_3 q_3^2$$

Ensuite, on le dérive selon

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

pour arriver aux trois équations de Lagrange. Dans l'équation ci-dessus Q_i est la i[eme] force. Dans notre application, il y a quatre forces différentes :

1. une force horizontale F agissant sur la locomotive et servant de commande du système,
2. une force de frottement globale F_f (avec coefficient f_1) proportionnelle mais opposée à la vitesse de la locomotive,
3. une force d'amortissement du ressort $F_2 = -f_2\dot{q}_2$ et
4. une force d'amortissement du ressort $F_3 = -f_3\dot{q}_3$.

Avec toutes ces informations, on trouve que la première équation de Lagrange est égale à :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \left[\frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2\right] + (m_2+m_3)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_3\dot{q}_1\dot{q}_3 - \frac{1}{2}k_2q_2^2 - \frac{1}{2}k_3q_3^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \left[\frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2\right] + (m_2+m_3)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_3\dot{q}_1\dot{q}_3 - \frac{1}{2}k_2q_2^2 - \frac{1}{2}k_3q_3^2\right) = Q_1 = F - f_1\dot{q}_1$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}_1 + (m_2+m_3)\dot{q}_2 + m_3\dot{q}_3) = F - f_1\dot{q}_1$$

$$m\ddot{q}_1 + (m_2+m_3)\ddot{q}_2 + m_3\ddot{q}_3 = F - f_1\dot{q}_1$$

De manière analogue, pour la deuxième équation, on trouve :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \left[\frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2\right] + (m_2+m_3)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_3\dot{q}_1\dot{q}_3 - \frac{1}{2}k_2q_2^2 - \frac{1}{2}k_3q_3^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \left[\frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2\right] + (m_2+m_3)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_3\dot{q}_1\dot{q}_3 - \frac{1}{2}k_2q_2^2 - \frac{1}{2}k_3q_3^2\right) = Q_2 = -f_2\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left((m_2+m_3)\dot{q}_2 + m_3\dot{q}_3 + (m_2+m_3)\dot{q}_1\right) + k_2q_2 = -f_2\dot{q}_2$$

$$(m_2+m_3)\ddot{q}_1 + (m_2+m_3)\ddot{q}_2 + m_3\ddot{q}_3 + k_2q_2 = -f_2\dot{q}_2$$

Et pour la troisième (*Question 4*) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_3}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \left[\frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_2+\dot{q}_3)^2\right] + (m_2+m_3)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_3\dot{q}_1\dot{q}_3 - \frac{1}{2}k_2q_2^2 - \frac{1}{2}k_3q_3^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \left[\frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_2+\dot{q}_3)^2\right] + (m_2+m_3)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_3\dot{q}_1\dot{q}_3 - \frac{1}{2}k_2q_2^2 - \frac{1}{2}k_3q_3^2\right) = Q_1 = F - f_1\dot{q}_1$$

$$\frac{d}{dt}(m_3\dot{q}_2 + m_3\dot{q}_3 + m_3\dot{q}_1) + k_3q_3 = -f_3\dot{q}_3$$

$$m_3\ddot{q}_1 + m_3\ddot{q}_2 + m_3\ddot{q}_3 + k_3q_3 = -f_3\dot{q}_3$$

Les trois équations de Lagrange peuvent être écrites sous une seule forme en utilisant des matrices, à savoir :

$$M\ddot{q} + Kq + P\dot{q} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans l'équation ci-dessus, **M**, **K** et **P** sont des matrices de dimensions 3 x 3 avec les éléments suivants (*Question 5*) :

$$M = \begin{bmatrix} m & m_2+m_3 & m_3 \\ m_2+m_3 & m_2+m_3 & m_3 \\ m_3 & m_3 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix}$$

On est en mesure de réécrire l'équation sous la forme $\dot{x} = Ax + Bu$ et $y = Cx + Du$. Si on considère la force **F** comme l'entrée et la variable d'état q_1 comme la sortie, on peut commencer par :

$$M\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + P\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$M\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = -K\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - P\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix} = -M^{-1}K\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} - M^{-1}P\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} + M^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

On peut "compléter" le système en réalisant que

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} = \mathbb{I}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}$$

Si on regroupe les deux dernières équations, on obtient (*Question 6*) :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\\\dot{x}_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{I}\\-M^{-1}K & -M^{-1}P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} + M^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\\mathbb{O}\end{bmatrix}u$$

Puisque on a déclaré que la variable d'état q_1 est la sortie, la deuxième équation du système est simplement

$$y = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}u$$

Le train présente désormais les caractéristiques suivantes

Variable	Valeur
m_1	3
m_2 et m_3	1
k_2 et k_3	80
f_1	3
f_2 et f_3	5
L_0	2

Avec ces valeurs, on est maintenant en mesure de calculer les quatre matrices différentes, A, B, C, et D, du système. Pour faciliter les choses, on va d'abord calculer les matrices et les déterminants suivantes :

$$\det(M) = \begin{vmatrix}5 & 2 & 1\\2 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 3$$

$$adj(M) = adj\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\2 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 4 & -3\\0 & -3 & 6\end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} adj(M) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-M^{-1}K = -\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 80/3 & 0 \\ 0 & -320/3 & 80 \\ 0 & 80 & -160 \end{bmatrix}$$

$$-M^{-1}P = -\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5/3 & 0 \\ 1 & -20/3 & 5 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

Donc A est égal à (*Question 7*)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 80/3 & 0 & -1 & 5/3 & 0 \\ 0 & -320/3 & 80 & 1 & -20/3 & 5 \\ 0 & 80 & -160 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

On remarque que toute la première colonne de A est égale à 0, ce qui est normal puisqu'on a considéré que la position absolue de la locomotive par rapport à la référence était nulle. De même, B peut être calculé par

$$B = M^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}$$

Cependant, comme on travaille avec un système d'ordre 6, il faut développer la matrice M avec une matrice zéro 3 x 3 pour tenir compte de ce fait. B est alors égal à (*Question 8*)

$$B = \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ M^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C est simplement égal à

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et enfin, D est égal à

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On peut maintenant implémenter le système déterminé ci-dessus dans un programme tel que MATLAB. En procédant ainsi, on peut percevoir visuellement et analyser facilement ledit système. Le programme principal ne sera pas discuté ici, mais peut être trouvé ci-joint comme fichiers séparés (*Question 9*)[1].

Après avoir implémenté le système, il est maintenant possible de travailler facilement sur plusieurs points d'intérêt. À partir de ce moment, tous les calculs seront effectués dans MATLAB. Cependant, les résultats et leur discussion seront toujours abordés ici. On commence par examiner les valeurs et vecteurs propres de la matrice A, qui sont les suivantes (*Question 10*) :

$$Valeurs\ propres\ de\ A = \begin{bmatrix} 0 \\ -6{,}8227 + 13{,}0791i \\ -6{,}8227 - 13{,}0791i \\ -1{,}7092 + 6{,}7725i \\ -1{,}7092 - 6{,}7725i \\ -0{,}6028 \end{bmatrix}$$

$$Vecteurs\ propres\ de\ A$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -0{,}0020 - 0{,}0046i & -0{,}0020 + 0{,}0046i & 0{,}0090 + 0{,}0574i & 0{,}0090 - 0{,}0574i & 0{,}8564 \\ 0 & 0{,}0179 + 0{,}0353i & 0{,}0179 - 0{,}0353i & -0{,}0256 - 0{,}1016i & -0{,}0256 + 0{,}1016i & -0{,}0080 \\ 0 & -0{,}0253 - 0{,}0484i & -0{,}0253 + 0{,}0484i & -0{,}0168 - 0{,}0738i & -0{,}0168 + 0{,}0738i & -0{,}0040 \\ 0 & 0{,}0734 + 0{,}0051i & 0{,}0734 - 0{,}0051i & -0{,}4039 - 0{,}0369i & -0{,}4039 + 0{,}0369i & -0{,}5162 \\ 0 & -0{,}5835 - 0{,}0059i & -0{,}5835 + 0{,}0059i & 0{,}7320 & 0{,}7320 & 0{,}0048 \\ 0 & 0{,}8059 & 0{,}8059 & 0{,}5287 + 0{,}0122i & 0{,}5287 - 0{,}0122i & 0{,}0024 \end{bmatrix}$$

Quand on regarde les valeurs propres de A, on remarque la présence d'une valeur propre nulle, de des deux valeurs propres complexes, de leurs conjuguées et d'une valeur propre réelle négative. A partir de là, on sait qu'il y a un élément du système dont la réponse sera constante en amplitude et définie par les conditions initiales, deux éléments dont la réponse subira une décroissance sinusoïdale, et un élément dont la réponse subira une décroissance exponentielle.

[1] Note éditoriale : Le programme est écrit et commenté en anglais, étant donné l'habitude de l'auteur de coder en anglais.

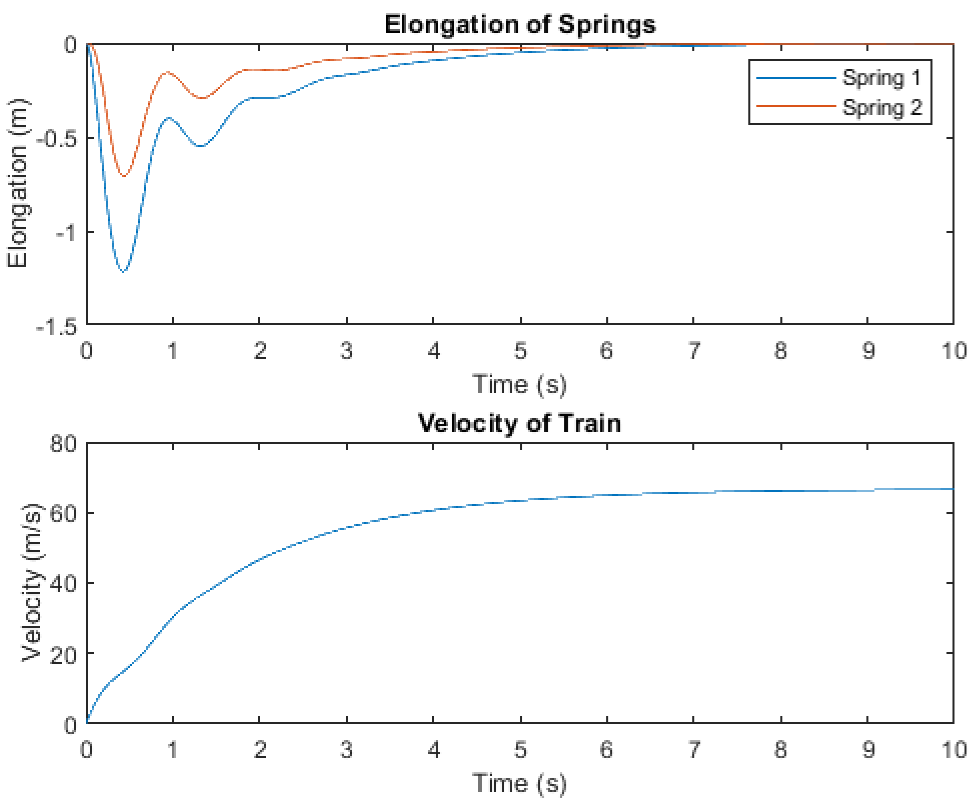
Ensuite, on peut trouver la fonction de transfert du système. Le résultat est donné ci-dessous (*Question 11*) :

$$H(p) = \frac{x_4(p)}{F(p)} = \frac{0{,}3333p^5 + 5p^4 + 88{,}33p^3 + 266{,}7p^2 + 2133p - 3{,}004 \times 10^{-28}}{p^6 + 17{,}67p^5 + 323{,}3p^4 + 1598p^3 + 1{,}147 \times 10^4 p^2 + 6400p}$$

La fonction de transfert ci-dessus modélise la sortie du système, dans ce cas la vitesse de la locomotive $x_4(p)$, pour chaque entrée possible, dans ce cas la force appliquée F(p).

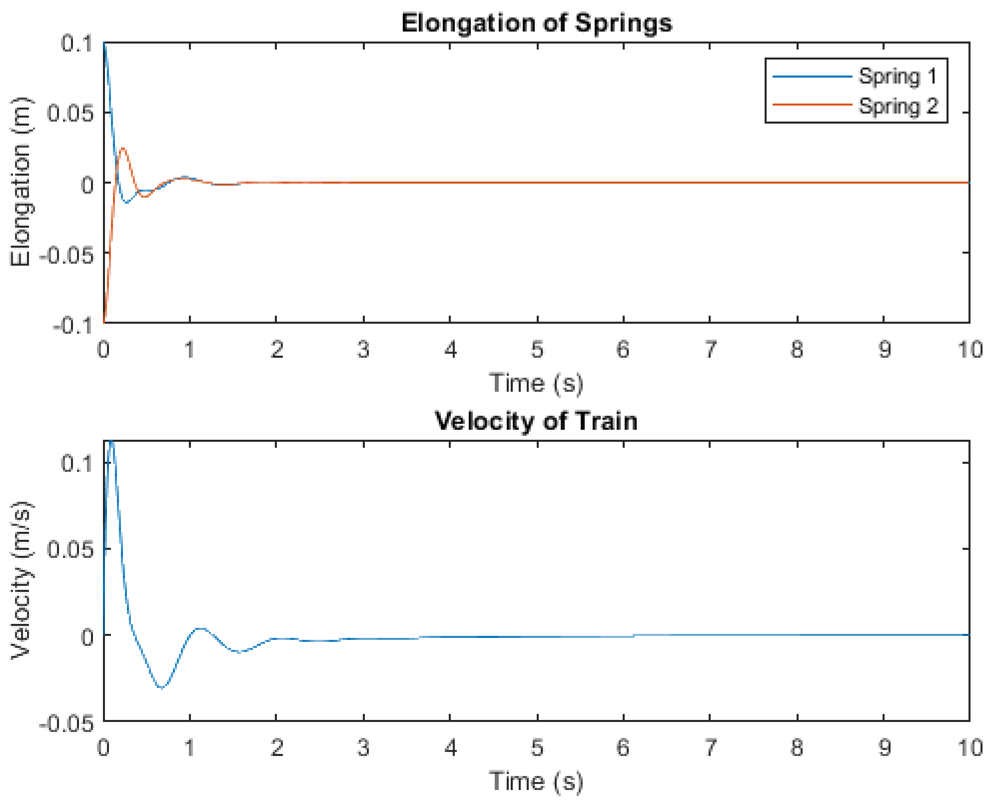
L'étape suivante consiste à vérifier si le système est observable et/ou commandable selon le critère de Kalman. Après avoir écrit quelques lignes de code supplémentaires, on découvre que le système est à la fois observable (*Question 12*) et commandable (*Question 13*).

Si l'on simule maintenant le train avec une force de 200 N, on obtient les réponses temporelles de la figure ci-dessous (*Question 14*) :



On remarque que les ressorts s'étirent (une élongation négative dans cette situation signifie un étirement, car les ressorts "bougent" dans le sens inverse du déplacement de la locomotive et des wagons), mais ne se compriment jamais au-delà de leur position de repos. Ils le font de manière oscillante, jusqu'à ce qu'ils atteignent leur position de repos après environ huit secondes. En outre, on s'attend à ce que le premier ressort ait une plus grande déflexion, étant donné que la locomotive a une plus grande masse que les wagons. On voit sur la figure que cette hypothèse se vérifie. Entre-temps, la vitesse va augmenter de manière exponentielle (ou plus exactement, de manière logarithmique) pour atteindre environ 66,5 m/s au bout de dix secondes, après quoi elle conservera cette vitesse. Sachant cela, il ne faut pas s'étonner que les ressorts oscillent plus fréquemment au début, puisque l'accélération est beaucoup plus forte pendant les premières secondes.

On est allé assez loin, mais on souhaite maintenant pouvoir contrôler la vitesse du train. L'une des façons d'y parvenir est de placer des pôles. Afin de vérifier la précision du retour d'état, on effectue une expérience de "lâcher". Les réponses temporelles peuvent être vues sur la figure ci-dessous. (*Question 15*).



On perçoit d'après le premier tracé que le premier ressort va initialement se comprimer, alors que le deuxième ressort va faire le contraire et s'étirer. Les deux ressorts vont osciller pendant moins de deux secondes, après quoi ils reviennent complètement à leur position de repos. Le train se déplacera un tout petit peu vers l'avant pendant ces deux premières secondes. Mais cette fois-ci, comme on peut le voir sur le deuxième tracé, la vitesse va également osciller. Tout ceci est assez logique, puisqu'il n'y a pas de forces externes appliquées et que la seule force "motrice" du système est le déplacement des deux wagons, qui sont repris par les ressorts.

Après notre petite expérience, on possède suffisamment d'informations pour implémenter le retour d'état par le placement de pôles. On choisit arbitrairement de placer les pôles suivants :

$$P_{Des} = [-2 \quad -2{,}4 \quad -2{,}6 \quad -2{,}8 \quad -3 \quad -3{,}2]$$

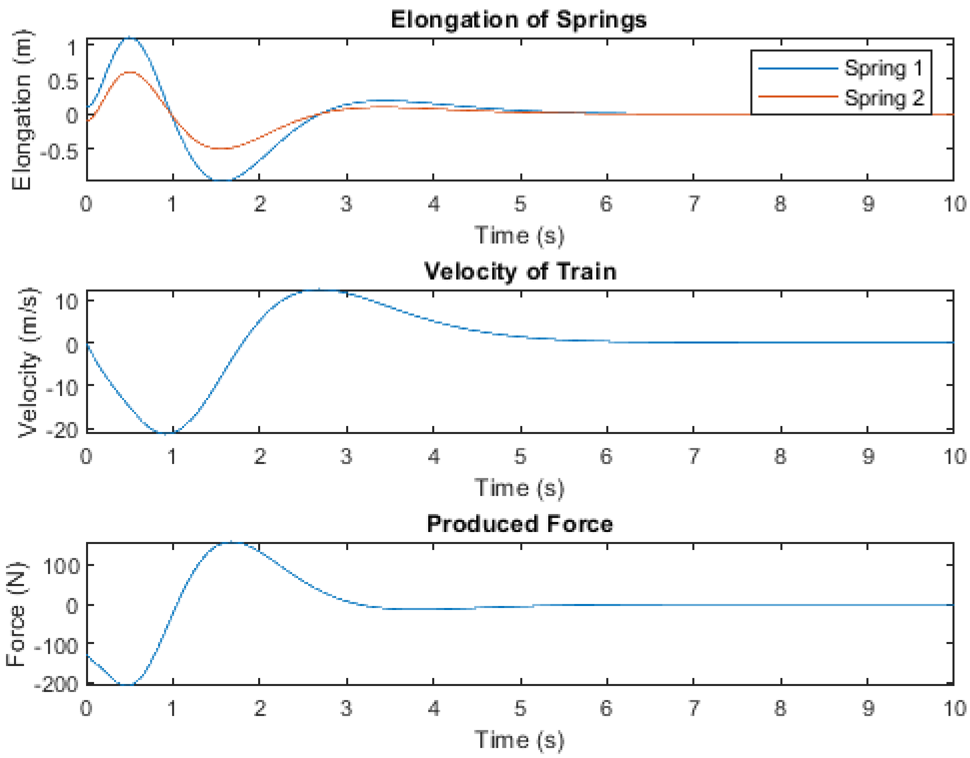
En calculant la matrice de retour d'état R, on obtient (*Question 16*) :

$$R = [0{,}1572 \quad 543{,}6260 \quad -710{,}9909 \quad -2{,}6573 \quad 2{,}3427 \quad 8{,}9289]$$

Si l'on multiplie cette matrice par la matrice B, que l'on soustrait le produit de la matrice A et que l'on trouve les valeurs propres de la matrice résultante, on devrait se retrouver avec une matrice contenant les pôles souhaités.

$$P_{Des} = eig(A - BR)$$
$$= eig\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & {}^{80}/_{3} & 0 & -1 & {}^{5}/_{3} & 0 \\ 0 & {}^{-320}/_{3} & 80 & 1 & {}^{-20}/_{3} & 5 \\ 0 & 80 & -160 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ {}^{1}/_{3} \\ {}^{-1}/_{3} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1572 & 543,6260 & -710,9909 & -2,6573 & 2,3427 & 8,9289 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} -3,2 \\ -3 \\ -2,8 \\ -2,6 \\ -2,4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

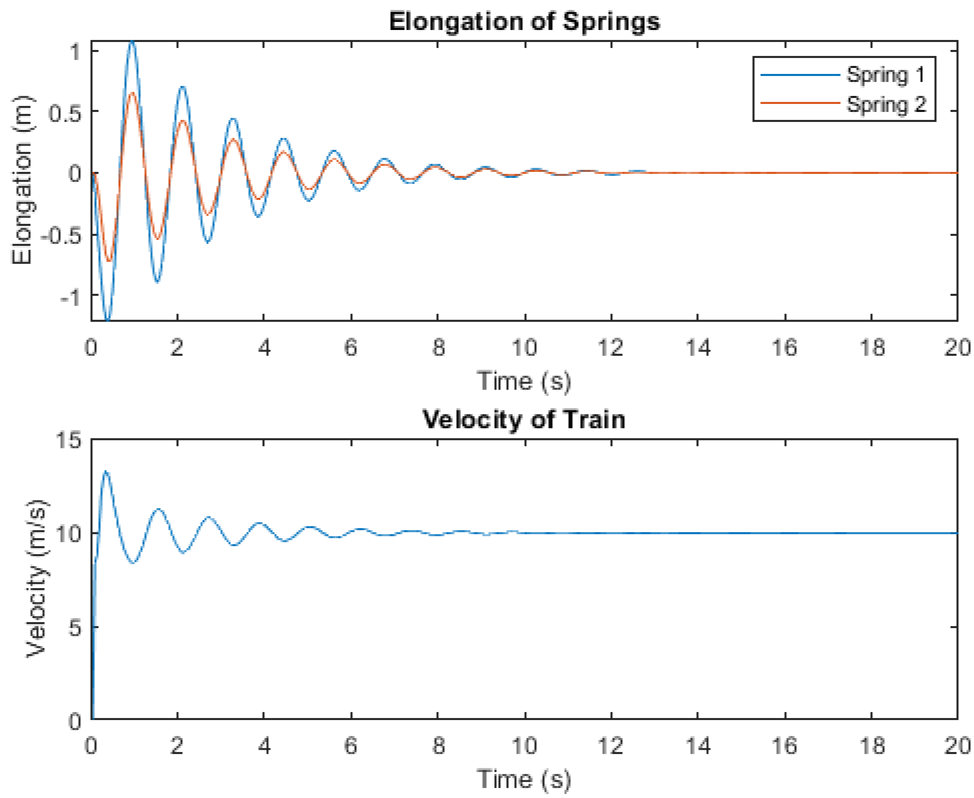
Cette fois, on peut refaire l'expérience de la "lâcher", mais sous contrôle. Si on fait cela, le programme produit les trois graphiques suivants pour les réponses temporelles (*Question 17*) :



Lorsque l'on regarde les différents graphiques, on constate que le système met plus de temps à revenir à un état d'équilibre. Une fois de plus, étant donné qu'aucune force externe n'est présente, les seules forces agissant au sein du système sont les forces du ressort. Celles-ci résultent du changement initial de position des wagons, qui les pousse à vouloir revenir à leur position de repos. Cependant, en essayant de le faire, les deux ressorts oscillent et produisent une force nette qui met le train en mouvement. Ce n'est qu'après environ six secondes que les deux ressorts parviendront à revenir à leur position de repos et que la vitesse et la force produite deviendront nulles.

Pour pouvoir mettre en œuvre un système de retour d'état complet, il faut connaître la vitesse du train à tout moment. Pour cette raison, un observateur qui peut observer la vitesse doit être synthétisé. Comme cet observateur est implémenté en temps discret, il est important de faire la transition entre le système en temps continu et le système en temps discret. Par conséquent, les pôles choisis utilisés dans la méthode de placement des pôles devront également être mis à jour. Tout ceci est réalisé en MATLAB (*Question 18*).

Le dernier obstacle consiste à modéliser le comportement complet du train. Le schéma bloc comprend le système en boucle ouverte, un observateur d'état, un retour d'état, un comparateur d'erreurs et un contrôleur PID. Les valeurs des variables de tous ces éléments sont soigneusement testées et choisies (*Question 19*). Une fois que tout est configuré, le comportement du train peut être simulé pour différentes valeurs souhaitées de la vitesse. Les réponses temporelles pour une vitesse désirée de 10 m/s sont représentées ci-dessous (*Question 20*) :



Il y a plusieurs choses à retenir ici. Tout d'abord, comme précédemment, on s'attend à ce que les deux ressorts s'étirent d'abord, ce qu'ils font. Deuxièmement, les ressorts ne devraient pas se comprimer plus que leur longueur initiale, ce qu'ils ne font pas. Troisièmement, en raison de la présence d'un contrôleur PID dans cette application, il n'est possible d'atteindre la vitesse souhaitée que si le gain intégral est considéré comme infini. Ce n'est pas souhaité, cependant, car cela introduira beaucoup d'oscillations de vitesse physiquement irréalistes dans les premières secondes pendant lesquelles le train commence à se déplacer.

Dans une expérience ultérieure, on cherche à faire en sorte que le train s'arrête de manière naturelle dès qu'il a atteint la vitesse souhaitée. Si la compression des ressorts due au freinage du train semble irréaliste, on peut introduire une loi de freinage pour corriger cette irrégularité. Les réponses temporelles pour une situation donnée sont les suivantes (*Question 21*) :