

Progetto Aerodinamico
Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali
Politecnico di Milano

XBOOM

Lorenzo Ciuti
Carlo Cordini
Simone Cruciani
Francesco Negroni
Raffaele Tirodda



Anno Accademico 2021/2022

Indice

| | |
|---|-----------|
| List of Symbols | 3 |
| 1 Abstract | 4 |
| 2 Introduzione | 4 |
| 3 Sistemi di riferimento | 6 |
| 3.1 Cambi di coordinate e rotazioni | 6 |
| 3.2 Sistema in assi corpo | 7 |
| 3.3 Sistema di riferimento pala j-esima | 8 |
| 4 Simulatore | 10 |
| 4.1 Modello Geometrico | 10 |
| 4.1.1 Parametrizzazione Geometrica | 10 |
| 4.1.2 Posizionamento dei Profili alari | 11 |
| 4.1.3 Calcolo dei parametri inerziali: massa, volume, inerzia | 14 |
| 4.1.4 Verifica del modello geometrico | 15 |
| 4.2 Modello Aerodinamico | 15 |
| 4.2.1 Calcolo forze aerodinamiche | 16 |
| 4.2.2 Convergenza calcolo aerodinamico | 17 |
| 4.2.3 Stima dei coefficienti aerodinamici | 19 |
| 4.3 Verifica dell'estrapolatore per i profili | 21 |
| 4.4 Comportamenti oscillatori: forze, momenti | 21 |
| 4.5 Modello dinamico: equazioni di moto | 22 |
| 5 Condizioni iniziali e lancio del boomerang | 24 |
| 5.1 Parametrizzazione delle condizioni iniziali | 26 |
| 6 Fisica del problema | 29 |
| 6.1 Effetti Giroscopici | 29 |
| 6.2 Autorotazione | 32 |
| 7 Profili alari | 34 |
| 7.1 Impatto delle forze aerodinamiche sulla traiettoria | 34 |
| 7.2 Ottimizzazione del profilo | 37 |
| 7.3 Scelta del profilo | 37 |
| 8 Ottimizzazione forma in pianta | 39 |
| 8.1 Funzione Fitness | 39 |
| 8.2 Metodo di Ottimizzazione | 41 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| A | Implementazione ed unione dei modelli | 42 |
| A.1 | Come utilizzare il codice XBOOM | 42 |
| A.2 | Algoritmi | 45 |
| B | Verifica Profili Aerodinamici | 47 |
| B.1 | Confronto f_polar_360 vs QBlade | 47 |
| C | Profili | 49 |

List of Symbols

| | |
|---|---|
| (X, Y, Z) | Sistema di riferimento inerziale |
| (x, y, z) | Sistema di riferimento body |
| (ξ_j, η_j, ζ_j) | Sistema di riferimento pala j-esima |
| $(x_{GEOM}, y_{GEOM}, z_{GEOM})$ | Sistema di riferimento provvisorio per la costruzione della geometria |
| ψ, θ, ϕ | Angoli di Eulero 321 (Yaw, Pitch e Roll) |
| \mathbf{q} | Quaternioni |
| Λ_j | Angolo di sweep pala j-esima |
| Δ | Angolo di freccia |
| β_j | Angolo di coning pala j-esima |
| θ_j | Angolo di pitch pala j-esima |
| \mathbf{T}_0 | Matrice di rotazione da body ad inerziale |
| \mathbf{T}_j | Matrice di rotazione da pala a body |
| m | Massa del boomerang |
| \mathbf{I} | Tensore delle inerzie |
| l | Lunghezza pala |
| c | Corda del profilo |
| PARA | Parametro per il raccordo delle pale |
| $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ | Velocità in assi body |
| $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$ | Velocità angolari in assi body |
| χ | Parametro adimensionale (rapporto di avanzamento) |
| $\boldsymbol{\nu} = (\nu_{\xi,j}, \nu_{\eta,j}, \nu_{\zeta,j})$ | Velocità della pala in ogni sezione d'apertura in assi pala |
| \mathbf{v} | Velocità indotta |
| $\mathbf{w}_j = (w_{\xi,j}, w_{\eta,j}, w_{\zeta,j})^T$ | Velocità relativa dell'aria in assi pala |
| $\mathbf{F}_j^A, \mathbf{M}_j^A$ | Forza e momento pala j-esima in assi pala |
| $\mathbf{F}^A, \mathbf{M}^A$ | Forza e momento aerodinamico in assi body |
| $\mathbf{r}_{ac,j}$ | Origine sistema di riferimento pala j-esima in assi body |
| \mathbf{r}_j^A | Posizione sezione pala in sistema in assi body |
| \mathbf{u}_{tip} | Velocità della tip tenuta in mano al momento del lancio in assi inerziali |
| \mathbf{u}_0 | Velocità iniziale in assi inerziali del baricentro |
| V_t | Modulo velocità della tip in mano al momento del lancio |
| r_0 | Spin iniziale |
| Θ | Angolo tra la velocità della tip ed il terreno all'istante iniziale |
| n | Numero profili per la costruzione della geometria |
| num | Numero profili per ogni pala per la costruzione della geometria |
| $2p_c$ | Numero profili per la zona di raccordo per la costruzione della geometria |
| n_{pale} | Numero di pale |

1 Abstract

Il boomerang è un oggetto estremamente affascinante, il cui funzionamento è frutto dell'unione tra fenomeni aerodinamici e meccanici. Tuttavia, lanciare un boomerang e ottenere che torni al punto iniziale è estremamente complesso. Il progetto consiste nella costruzione di un nuovo modello di boomerang a doppia pala tale che esso sia il più possibile facile da lanciare anche per i meno esperti: si vuole dunque un oggetto che ritorni al punto di lancio per un ampio spettro di condizioni iniziali. Per raggiungere questo obbiettivo, è stato scelto di lavorare sul design del profilo alare e sulla progettazione della forma tridimensionale del boomerang. L'approccio usato è stato quello di costruire un simulatore in cui le equazioni per il calcolo della traiettoria del boomerang sono accoppiate con un codice per il calcolo delle proprietà di massa del corpo e con un modello aerodinamico per il calcolo delle forze esercitate dall'aria sull'oggetto. In seguito, un metodo di ottimizzazione è stato applicato al simulatore, in modo da ricavare il profilo e la forma migliori per un boomerang, tale che ritorni in prossimità del punto iniziale per una vasta gamma di condizioni di lancio .

2 Introduzione

Al giorno d'oggi, il boomerang è un oggetto diffuso nel mondo e che viene venduto sul mercato in molteplici configurazioni differenti: per esempio, con due, tre o più pale dalle più svariate forme. Storicamente però, questo oggetto nasce con solamente due bracci: la sua invenzione viene attribuita agli Aborigeni australiani. Sebbene altri popoli avevano oggetti simili per la caccia, loro furono i primi a sfruttare, per motivi sia di caccia sia ludici, le caratteristiche che permettono a questo oggetto di percorrere una traiettoria circolare [22]. L'approccio di costruzione tipicamente era il risultato di un processo del tipo *trial and error*: la geometria del pezzo di legno veniva modificata dopo un primo lancio e, in seguito, testata nuovamente e rimodellata. Questa sequenza continuava fino a raggiungere la geometria finale, la quale permetteva di ottenere il risultato desiderato: che il boomerang tornasse al punto di lancio con una traiettoria circolare, figura 1. Questo approccio non è del tutto scomparso: infatti, esistono in commercio numerose guide, come [5] e [21], che presentano metodi per un progetto personale di un nuovo boomerang, fornendo indicazioni e consigli sugli interventi da fare per correggere eventuali errori. Per esempio, è possibile l'aggiunta di masse concentrate o fori in alcune zone, modifiche al profilo alare o correzioni per le condizioni di lancio. Solo recentemente l'attenzione si sta concentrando sull'utilizzo di metodi numerici per il progetto di un boomerang e la simulazione della sua traiettoria [22] [10] tramite l'integrazione delle equazioni di moto. Una semplificazione che viene utilizzata da alcuni autori [22] [10] è quella di trascurare le dinamiche veloci e considerare le proprietà di massa del boomerang mediate su una rotazione, mettendo in luce le similitudini del boomerang con un giroscopio ed evidenziando l'importanza degli effetti giroscopici nel corretto funzionamento dell'oggetto. Altri autori [1] però, non adottano questa semplificazione e nel progetto si è deciso di non implementarla per limitare il più possibile le differenze rispetto al caso reale. Siccome l'aerodinamica di questo oggetto è piuttosto complicata a causa sia di un flusso tridimensionale sia della presenza di zone nella pala in cui il flusso relativo inverte la sua direzione [8], è necessario un approccio che semplifichi la trattazione, per permettere un progetto iniziale dell'oggetto. Il modello aerodinamico che viene solitamente utilizzato è quello della teoria delle strisce (TDS) [8] [3] che consiste nel suddividere l'apertura alare in sezioni e nel valutare le forze agenti su ogni sezione. Questo modello trascura l'impatto della tridimensionalità del flusso e l'effetto che ha la scia di una pala sull'altra pala. In rari casi, come in [22], è stato effettuato un calcolo CFD della traiettoria completa; tuttavia, considerando l'onerosità computazionale che un calcolo di questo tipo unito ad un processo di ottimizzazione di forma richiederebbero, è preferibile sfruttare metodi *Low Fidelity*, come il TDS, che permettano di mantenere il costo computazionale e i tempi limitati.

Dopo una presentazione dei sistemi di riferimento, sezione 3, il report si articola come segue: nella sezione 4, si spiega la struttura del simulatore in parte che identifica le proprietà geometriche, parte che calcola l'aerodinamico e parte relativa alle equazioni del moto. Successivamente, si trovano le sezioni 5 e 6: rispettivamente,

la prima tratta dell'impatto delle condizioni iniziali sul lancio, la seconda sintetizza i principali fenomeni fisici che caratterizzano la traiettoria del boomerang. Nella sezione 7 si discute la scelta di un profilo alare tra alcuni profili già esistenti e profili frutto di un'ottimizzazione. Infine, nella sezione 8, un metodo di ottimizzazione è applicato alla forma in pianta in modo da soddisfare l'obiettivo del progetto: estendere il range di condizioni iniziali del boomerang.

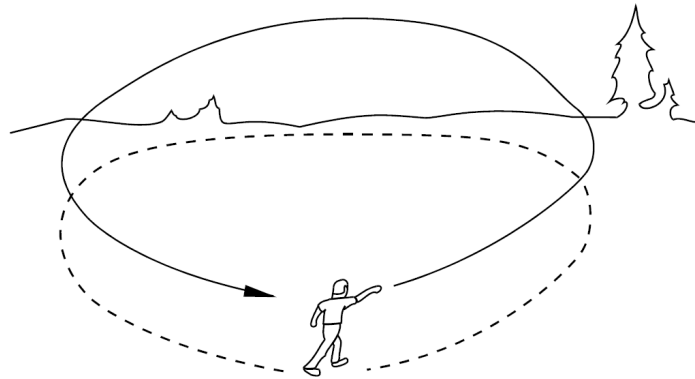


Figura 1: Traiettoria di un boomerang

3 Sistemi di riferimento

In questo paragrafo verranno spiegati con dettaglio tutti i sistemi di riferimento che verranno utilizzati anche nei capitoli successivi.

3.1 Cambi di coordinate e rotazioni

Si considerino due sistemi di riferimento generici T_B ($\{X, Y, Z\}$) e T_0 ($\{X_0, Y_0, Z_0\}$) orientati l'uno rispetto all'altro in modo arbitrario ma centrati nello stesso punto, come in figura 2.

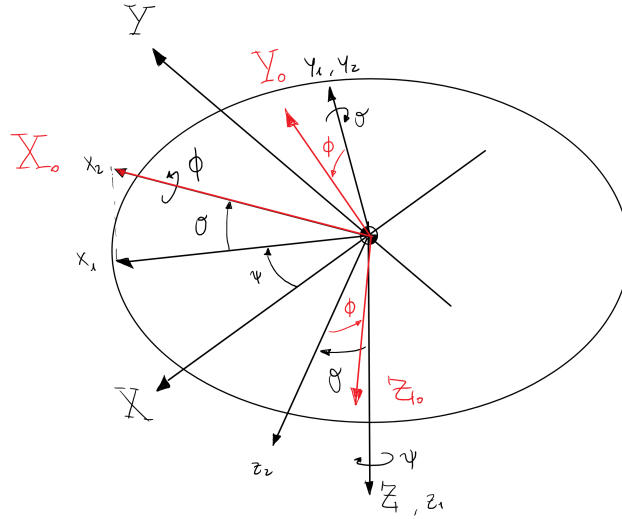


Figura 2: Cambio di coordinate

La terna di vettori T_B può essere ruotata a sovrapporsi alla terna T_0 attraverso tre successive rotazioni: in ordine, R_1 , R_2 , R_3 . Dove

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Combinando queste tre rotazioni, si ottiene la matrice T_{B-0} :

$$T_{B-0} = R_3 R_2 R_1 \quad (4)$$

$$T_{B-0} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Il significato della matrice T_{B-0} è duplice: se un vettore inizialmente rappresentato nel sistema T_B viene pre-moltiplicato da tale matrice, si ottiene la sua rappresentazione nel sistema T_0 (cambio di coordinate) ; in alternativa, la rotazione del sistema di riferimento T_B nel sistema T_0 è rappresentato dalla matrice T_{B-0} . Per esempio, si consideri la terna di vettori T_B^B , dove

$$T_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

è la rappresentazione del sistema di riferimento T_B in coordinate B . Pre-moltiplicando T_B^B per la matrice T_{B-0} si ottiene:

$$T_B^0 = T_{B-0} T_B^B \quad (7)$$

T_B^0 è la rappresentazione della terna che rappresenta T_B in coordinate 0. Gli angoli ψ , θ e ϕ sono gli angoli di Eulero.

3.2 Sistema in assi corpo

Consideriamo due sistemi di riferimento: il sistema in assi corpo (x, y, z) in Figura 3, il quale si orienta seguendo il moto del boomerang, ed il sistema inerziale (X, Y, Z) , il quale è fisso a terra e mantiene costante la sua orientazione nello spazio. Il sistema di riferimento body è centrato nel baricentro del corpo a cui è solidale mentre l'origine del sistema inerziale coincide con un punto fisso a terra.

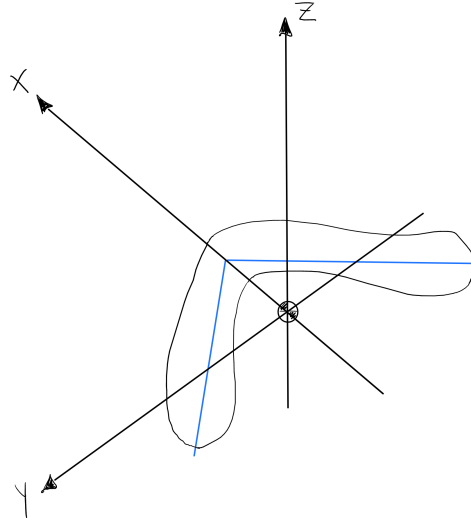


Figura 3: Sistema di riferimento in assi corpo

Il passaggio da coordinate in assi corpo a coordinate in assi inerziali è dettato da tre successive rotazioni attraverso gli angoli di Eulero: lo yaw ψ , il pitch θ e il roll ϕ . Seguendo il ragionamento spiegato nel capitolo precedente, la matrice di rotazione corrisponde a T_{B-0} (nel codice verrà denominata \mathbf{T}_0).

I due sistemi di riferimento sono rappresentati insieme in Figura 4, dove per semplicità di rappresentazione l'angolo $\phi = 0$. Nella figura 4, la linea blu è una semplificazione della geometria del boomerang che rappresenta il suo posizionamento, coerentemente con il sistema di riferimento *Body*.

Conoscendo il vettore posizione di un qualsiasi punto del boomerang espresso in assi body, e pre-moltiplicando tale vettore per questa matrice si ottiene la sua posizione espressa rispetto al sistema di riferimento inerziale.

3.3 Sistema di riferimento pala j-esima

Per comodità nel calcolo aerodinamico è stato introdotto un nuovo sistema di riferimento definito: sistema di riferimento della pala j-esima. In particolare vengono definiti 3 nuovi assi (ξ_j, η_j, ζ_j) per ogni pala centrati nel centro aerodinamico del profilo di radice della pala j-esima. Questo permette di descrivere facilmente le variabili in apertura pala necessarie al calcolo aerodinamico.

Nella figura 5 si può osservare la sequenza di traslazione e successive rotazioni che definiscono il sistema pala, mentre nella figura 6 viene messa in evidenza l'ultima delle tre rotazioni corrispondente al calettamento della j-esima pala.

I dettagli su questo sistema di riferimento sono presenti nel capitolo del modello aerodinamico.

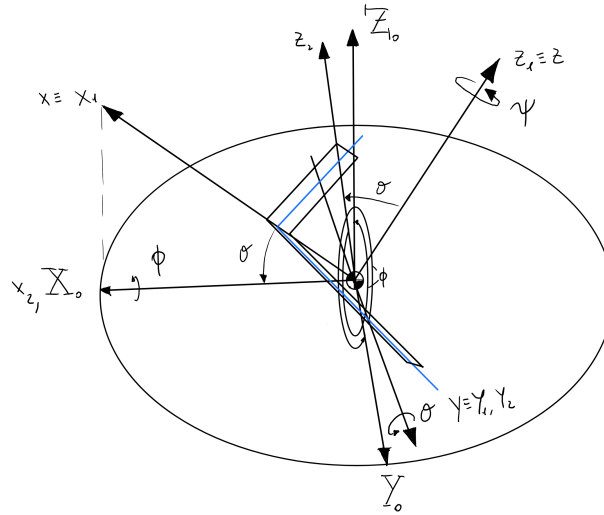


Figura 4: Passaggio da assi corpo ad assi inerziali

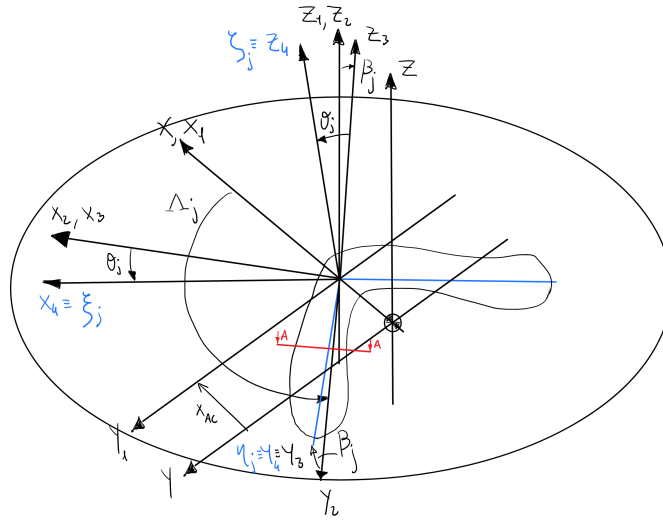


Figura 5: Rotazione da sistema pala a sistema in assi corpo

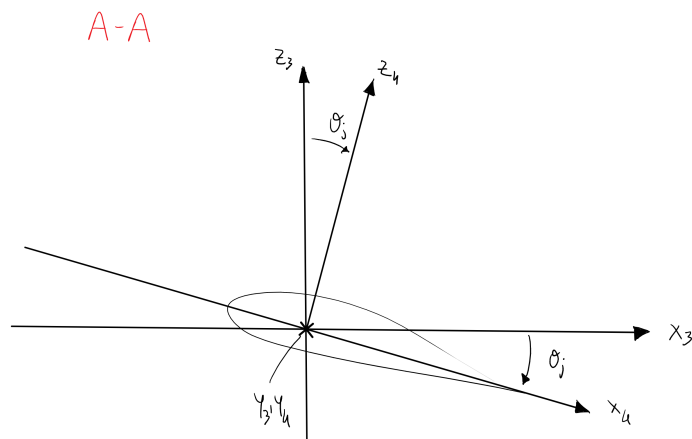


Figura 6: Rotazione da sistema pala a sistema in assi corpo, pitch

4 Simulatore

Come descritto in precedente la traiettoria del boomerang può essere calcolata utilizzando tre modelli diversi. Definendo dei parametri iniziali viene costruito il modello geometrico, descritto al capitolo 4.1 che permette di calcolare alcune variabili fondamentali per il modello aerodinamico e dinamico, descritti rispettivamente al capitolo 4.2,4.5. Infine l'implementazione numerica e la spiegazione dell'algoritmo di funzionamento del codice viene presentata all'appendice A

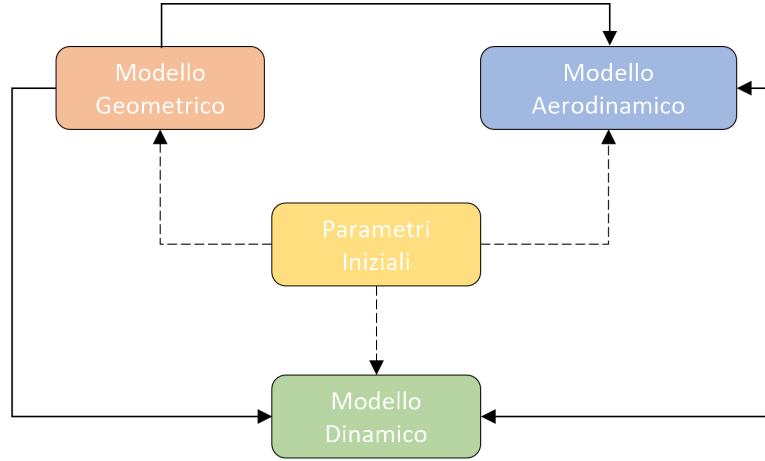


Figura 7: Interazione tra il modello geometrico, aerodinamico e dinamico del simulatore

4.1 Modello Geometrico

4.1.1 Parametrizzazione Geometrica

Il boomerang può avere diverse forme, per questo progetto abbiamo deciso di optare per una geometria composta da 6 parametri fondamentali, una simile parametrizzazione è presente anche in letteratura [1]:

- Δ : angolo di freccia
- θ_j : angolo di pitch della pala j
- β_j : angolo di diedro della pala j
- l : Lunghezza aerodinamica effettiva della pala del boomerang
- c : Lunghezza della corda aerodinamica
- $PARA$: Parametro che permette di modificare la curvatura centrale del boomerang, se è pari ad 1 il boomerang avrà una conformazione a V, se tende all'infinito le pale saranno sempre più distanti dal centro del boomerang stesso.
- $X_{sx}, Z_{sx}, X_{dx}, Z_{dx}$: Profili 2D della pala sinistra e destra. I profili devono necessariamente seguire la seguente orientazione: il bordo d'attacco deve coincidere con l'origine, ed il bordo d'uscita deve avere ascisse negative.

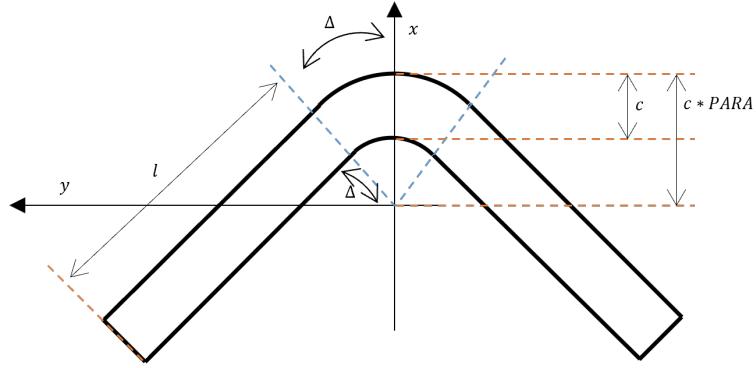


Figura 8: Pianta del boomerang rispetto al piano xy ed in coordinate baricentrali

La figura 8 mostra i parametri principali rispetto al piano xy. Come si può notare il parametro PARA permette di allungare il boomerang senza cambiare la dimensione della pala "portante". L'angolo di freccia è definito rispetto all'asse Z, tale scelta pur non essendo classica, è molto comoda per andare a sviluppare tutta la geometria del boomerang. Infatti la costruzione del boomerang dal punto di vista tridimensionale non è facile, e soprattutto non può essere trascurata perché è essenziale avere una stima delle inerzie il più precisa possibile per evitare delle approssimazioni troppo forti durante il calcolo della traiettoria.

4.1.2 Posizionamento dei Profili alari

La geometria del boomerang è definita da un numero num di profili alari su ciascuna pala e da un numero $2p_c$ nella parte centrale, per un totale di n profili. Il sistema di riferimento provvisorio $(x_{GEOM}, y_{GEOM}, z_{GEOM})$, usato per la costruzione della geometria, non è centrato nel baricentro del boomerang (come il sistema body), poiché ovviamente non è ancora a disposizione, ma sulla sua punta. I profili vengono numerati per convenzione dall'estremità destra all'estremità sinistra definendo i come una variabile che va da 1 ad n che identifica in modo univoco ciascun profilo.

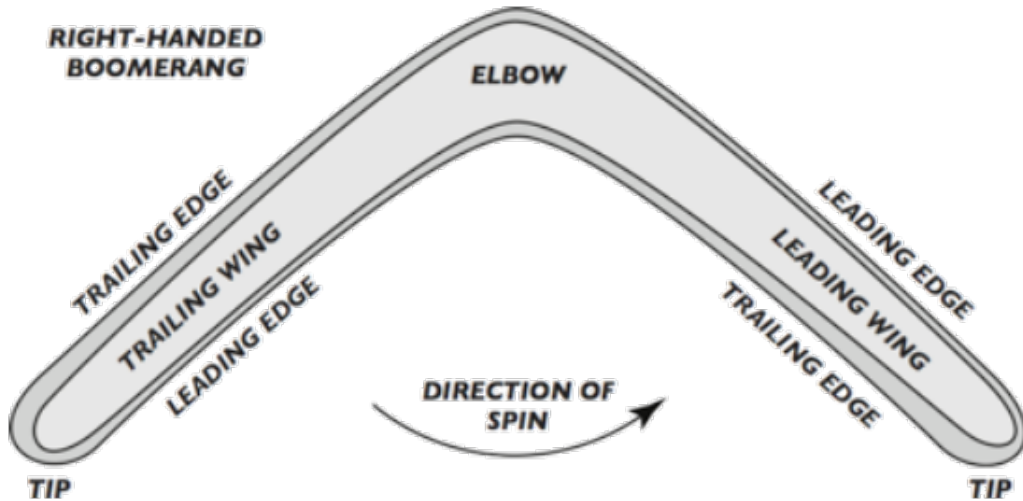


Figura 9: Right-Handed Boomerang

La prima fase è quella di andare a definire la forma di tutti i profili in funzione della variabile i . Il boomerang può essere suddiviso in tre zone: la pala destra in cui il profilo ha il bordo di attacco in direzione x , la pala sinistra in cui il profilo ha il bordo di uscita in direzione x , ed una parte centrale in cui il profilo alare deve necessariamente subire una fase di "transizione" (Figura 9). Questo è valido per un boomerang adatto ad un lanciatore destrorso, in caso di lanciatore mancino la geometria va specchiata. Nella zona di raccordo fra le due pale il profilo presente sulla pala sinistra deve essere trasformato nel profilo presente sulla pala dx. La Figura 10 mostra i profili di transizioni creati presenti nella sezione centrale del boomerang. In questa fase vengono create delle matrici $X_2d_i(i)$ e $Z_2d_i(i)$ di dimensione $n \times m$, dove m è il numero di punti che definiscono il profilo.

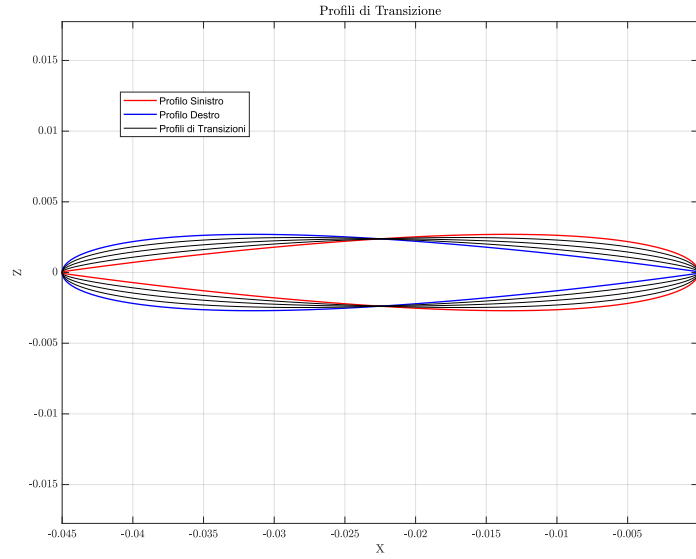


Figura 10: Profili di Transizione per un profilo NACA 0012

Il secondo passo per la realizzazione tridimensionale del boomerang si basa sul calcolare la posizione dei centri aerodinamici di ciascun profilo nella configurazione finale. Ciascun profilo deve essere ruotato rispetto al punto R di coordinate $(-PARA * c, 0, 0)$ e traslato in funzione del posizionamento all'interno del boomerang.

Possono essere costruiti dei vettori in funzione della coordinata libera i :

- $li = linspace(l, 0, num - 1)$
- $Tx = [-sin(\Delta)li \quad zeros(1, 2p_c - 1) \quad -sin(\Delta)fliplr(li)]$
- $Ty = [-cos(\Delta)li \quad zeros(1, 2p_c - 1) \quad -cos(\Delta)fliplr(li)]$
- $D_i = [-\Delta ones(1, num - 1) \quad linspace(\Delta, \Delta, 2 * p_c + 1) \quad -\Delta ones(1, num - 1)]$
- $D_{iaer} = [-\Delta ones(1, num + p_c - 1) \quad 0 \quad -\Delta ones(1, num + p_c - 1)]$
- $B_{iaer} = [-\beta ones(1, num + p_c - 1) \quad 0 \quad -\beta ones(1, num + p_c - 1)]$

Una volta definite queste quantità è possibile trovare la posizione finale di ciascun profilo come segue:

1. Il profilo viene ruotato di un angolo $D_i(i)$ rispetto al polo R e asse z_{GEOM}

2. Il profilo viene traslato di un vettore T definito come $(Tx(i), Ty(i), 0)$
3. Viene calcolato la posizione del centro aerodinamico di tale profilo $C_{aer}(i)$. Anche la posizione del centro aerodinamico è funzione di i , in particolare la pala dx avrà una posizione del centro aerodinamico a $c/4$, invece la pala di sinistra di $3c/4$, in mezzo ce sempre una zona di transizione. Per cui anche in questo caso è possibile definire un vettore $Fract(i)$ come $[1/4 \text{ones}(1, num) \quad linspace(1/4, 3/4, 2p_c - 1) \quad 3/4 \text{ones}(1, num)]$.
4. Il centro aerodinamico viene ruotato rispetto al versore x_{pala} , ottenuto ruotando il versore x_{GEOM} di un angolo $D_{iaer}(i)$, di un angolo $B_{iaer}(i)$.

La figura 11 mostra con più chiarezza la posizione dei centri aerodinamici dopo questa prima fase. Una volta

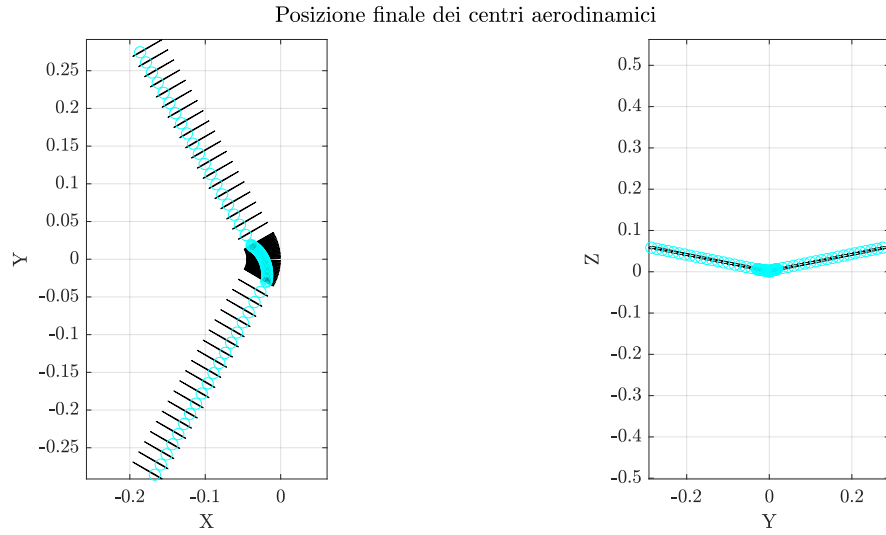


Figura 11: Posizione finale dei centri aerodinamici rispetto al piano xy_{GEOM}

nota la posizione di ciascun centro aerodinamico è possibile posizionare gli n i profili. Come in precedenza è importante definire due nuovi vettori in funzione della variabile i :

- $B_i = [-\beta \text{ones}(1, num - 1) \quad linspace(\beta, \beta, 2 * p_c + 1) \quad -\beta \text{ones}(1, num - 1)]$: Angolo di diedro del profilo i -esimo
- $P_i = [-\theta \text{ones}(1, num - 1) \quad linspace(\theta, \theta, 2 * p_c + 1) \quad -\theta \text{ones}(1, num - 1)]$: Angolo di pitch del profilo i -esimo

I profili devono essere ruotati rispetto al proprio centro aerodinamico che può essere trovato come $(-cFract(i), 0, 0)$ tramite tre rotazione successive:

1. $D_i(i)$ Rotazione rispetto all'asse z
2. $B_i(i)$ Rotazione rispetto al nuovo asse x_2
3. $P_i(i)$ Rotazione rispetto al nuovo asse y_3

Dopodiché le coordinate del profilo vengono centrate rispetto al proprio centro aerodinamico e successivamente traslate del vettore $C_{aer}(i)$ calcolato in precedenza. La figura 12 mostra il risultato finale dopo questa serie di passaggi, in questo caso l'angolo di diedro è pari a 10° ed è stato volutamente accentuato, nella realtà un angolo simile non viene normalmente utilizzato su di un boomerang.

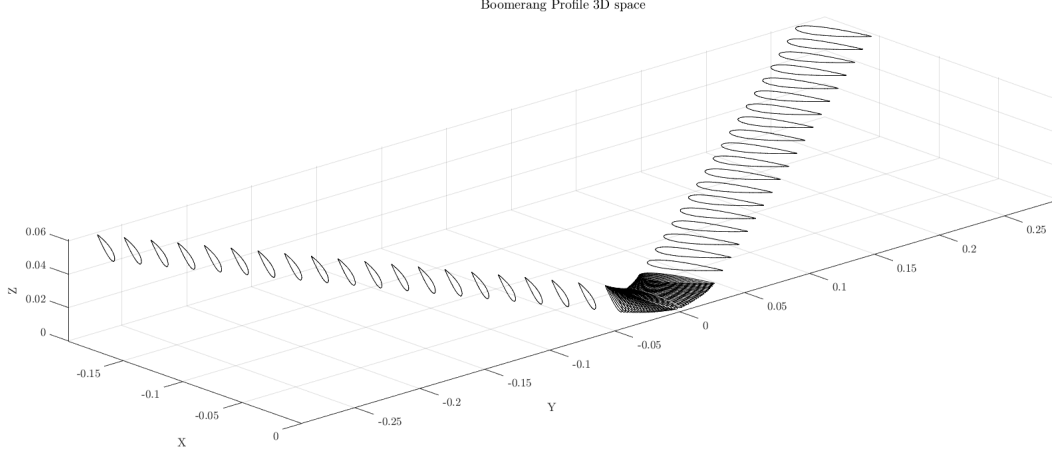


Figura 12: Posizione finale dei profili

4.1.3 Calcolo dei parametri inerziali: massa, volume, inerzia

Una volta noti la posizione dei profili aerodinamici è essenziale creare la geometria tridimensionale del boomerang, per andare a calcolare i parametri inerziali. Vengono costruiti $n - 1$ cassoni alari formati da due profili successivi mediante il comando matlab *alphaShape* ed il successivo *boundaryFacets*. Per ciascuno di questi profili sfruttando il programma sviluppato da Anton Semechko [20], è possibile calcolare il baricentro, volume ed inerzia di ogni cassone. La densità di ogni cassone può essere specificata in input dall'utente, e può variare tra i vari cassoni, ad esempio si può decidere di fare un boomerang più pesante agli estremi o al centro. Tra il cassone successivo ed il precedente viene stimato ogni volta il baricentro, inerzia, massa e volume utilizzando il seguente procedimento. Inizialmente viene calcolato il baricentro totale:

$$\vec{C}G_{succ} = \frac{m_{tot}\vec{C}G_{prec} + m(i)\vec{C}G_i}{m_{tot} + m_i} \quad (8)$$

Viene calcolata la distanza tra il baricentro totale calcolato in precedenza ed il baricentro totale successivo:

$$dX\vec{Y}Z_{succ} = (dX, dY, dZ) = \vec{C}G_{succ} - \vec{C}G_{prec} \quad (9)$$

Viene calcolata la distanza tra il cassone *iesimo* ed il baricentro totale successivo

$$dX\vec{Y}Z_i = (dX_i, dY_i, dZ_i) = \vec{C}G_{succ} - \vec{C}G_i \quad (10)$$

Le nuove inerzie possono essere calcolate utilizzando la regola del trasporto [9]:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_{xx} + I_{i_{xx}} + m_{tot}(dY^2 + dZ^2) + m_i(dY_i^2 + dZ_i^2) \\ I_{yy} &= I_{yy} + I_{i_{yy}} + m_{tot}(dX^2 + dZ^2) + m_i(dX_i^2 + dZ_i^2) \\ I_{zz} &= I_{zz} + I_{i_{zz}} + m_{tot}(dY^2 + dX^2) + m_i(dY_i^2 + dX_i^2) \\ I_{xy} &= I_{xy} + I_{i_{xy}} + m_{tot}dYdX + m_idY_idX_i \\ I_{yz} &= I_{yz} + I_{i_{yz}} + m_{tot}dYdZ + m_idY_idZ_i \\ I_{xz} &= I_{xz} + I_{i_{xz}} + m_{tot}dXdZ + m_idX_idZ_i \end{aligned} \quad (11)$$

Infine viene calcolato la massa ed il volume:

$$m_{tot} = m_{tot} + m_i \quad V_{tot} = V_{tot} + V_i \quad (12)$$

4.1.4 Verifica del modello geometrico

Come si può notare dalla figura 13 la matrice di inerzia e la massa calcolata tendono a convergenza per valori di n pari a 40, ma considerando che nella realizzazione pratica del boomerang ci saranno sempre delle differenze si può tenere anche un numero di sezioni pari a 20. Inoltre un sovraccarico eccessivo nella computazione non è adatto se si vuole inserire una parametrizzazione geometrica in un ciclo di ottimizzazione. Infine per creare un

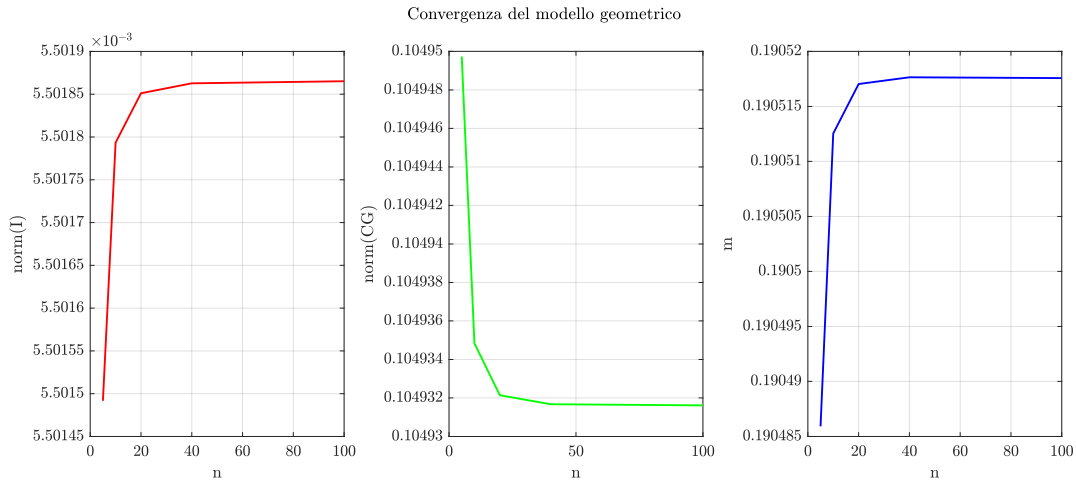


Figura 13: Convergenza della matrice di inerzia e dalla massa rispetto al numero di cassoni n

solido tridimensionale, per la visualizzazione e successiva è possibile esportare la triangolazione finale di tutti i cassoni alari mediante il comando MATLAB® *stlwrite* posizionando il boomerang con l'origine nel proprio baricentro. Il calcolo delle inerzie è stato confrontato con SolidWorks ed i risultati ottenuti con il nostro modello geometrico hanno un errore inferiore all'1%

4.2 Modello Aerodinamico

Il modello aerodinamico introdotto per il calcolo delle forze e momenti associati al movimento del boomerang in aria è riconducibile alla teoria dell'elemento di pala. E' stato assunto un modello di aerodinamica stazionaria. Ogni pala del boomerang, 2 nel caso standard, viene suddivisa in N sezioni uniformi. Il numero di sezioni per il calcolo aerodinamico è del tutto indipendente dal numero di cassoni utilizzato nella realizzazione della geometria 3D e nel calcolo delle inerzie.

Conoscendo dalle equazioni del moto le velocità lineari e angolari del centro di gravità del boomerang è possibile, sfruttando l'ipotesi di corpo rigido, calcolare la velocità in ogni punto del boomerang. Questo diventa necessario per conoscere la velocità relativa dell'aria vista da ogni sezione.

Per il calcolo aerodinamico è possibile assumere che:

- il boomerang è composto da n_{pale} pale
- ogni pala è rappresentata dalla linea dei centri aerodinamici

Per ogni pala j-esima la radice della linea dei centri aerodinamici in assi body è:

$$\mathbf{r}_{ac,j} = (x_{ac,j}, 0, 0)^T \quad (13)$$

Un nuovo sistema di riferimento fisso ad ogni pala j-esima viene introdotto, figure 5 6. Le nuove coordinate (ξ_j, η_j, ζ_j) sono tali che η_j coincide con la linea dei c.a. mentre ξ_j e ζ_j sono normali ad essa. L'origine del sistema di riferimento coincide con il punto (13).

Le tre rotazioni che descrivono la posizione della pala rispetto al centro aerodinamico sono nell'ordine:

- sweep angle $(\Lambda_j - \pi/2)$ attorno all'asse z-body
- coning angle β_j attorno all'asse x_2
- pitch angle θ_j attorno all'asse y_3

La trasformazione dagli assi body alla terna fissa alla pala è descrivibile da:

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \sin\Lambda_j \cos\theta_j + \cos\Lambda_j \sin\beta_j \sin\theta_j & -\cos\Lambda_j \cos\theta_j + \sin\Lambda_j \sin\beta_j \sin\theta_j & -\cos\beta_j \sin\theta_j \\ \cos\Lambda_j \sin\beta_j & \sin\Lambda_j \cos\beta_j & \sin\beta_j \\ \sin\Lambda_j \sin\theta_j - \cos\Lambda_j \sin\beta_j \cos\theta_j & -\cos\Lambda_j \sin\theta_j - \sin\Lambda_j \sin\beta_j \cos\theta_j & \cos\beta_j \cos\theta_j \end{bmatrix} \quad (14)$$

4.2.1 Calcolo forze aerodinamiche

Il punto di controllo per il calcolo della velocità in ogni sezione di ciascuna pala è stato scelto il centro aerodinamico a metà sezione. In particolare è possibile definire per ogni pala j-esima la posizione del c.a. in assi body lungo tutta l'apertura alare:

$$\mathbf{r}_j^A = (x_{ac,j}, 0, 0)^T + \mathbf{T}_j^{-1} \cdot (0, \eta_j, 0)^T \quad (15)$$

La velocità in questi punti è la composizione tra la velocità $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ in assi body e la velocità causata dalla rotazione $\omega = (p, q, r)^T$:

$$\nu_j = (\nu_{x,j}, \nu_{y,j}, \nu_{z,j})^T = \mathbf{u} + \omega \wedge \mathbf{r}_j^A \quad (16)$$

La velocità indotta per ipotesi è assunta omogenea in apertura e normale al piano (x, y) :

$$\mathbf{v} = (0, 0, -\bar{v})^T \quad (17)$$

La velocità relativa dell'aria nel sistema di riferimento della pala è quindi:

$$\mathbf{w}_j = (w_{\xi,j}, w_{\eta,j}, w_{\zeta,j})^T = \mathbf{T}_j(-\nu - \mathbf{v}) \quad (18)$$

Nota la velocità relativa vista da ciascuna sezione è possibile calcolare l'angolo di attacco come $\alpha = \tan^{-1}(w_\zeta/w_\xi) + \Delta\theta_t$, con $\Delta\theta_t(\eta)$ svergolamento della pala.

Sfruttando la teoria dell'elemento di pala è possibile ricavare le forze e i momenti aerodinamici che agiscono sulla pala j-esima con:

$$\mathbf{F}_j^A = \int_0^{l_j} [(-l \sin\alpha + d \cos\alpha), 0, (l \cos\alpha + d \sin\alpha)]^T d\eta \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_j^A = \int_0^{l_j} [(l \cos \alpha + d \sin \alpha) \eta, m_\eta, (l \sin \alpha - d \cos \alpha) \eta]^T d\eta \quad (20)$$

dove $l = \frac{1}{2} \rho w^2 c C_l(\alpha)$, $d = \frac{1}{2} \rho w^2 c C_d(\alpha)$ e $m_\eta = \frac{1}{2} \rho w^2 c^2 C_m(\alpha)$ e l_j è la lunghezza della pala j-esima.

I due integrali restituiscono forza e momento della pala j applicati nell'origine del sistema di riferimento della medesima pala ed espressi in assi pala.

Le forze e i momenti aerodinamici vengono ruotati nel sistema body, traslate nel centro di gravità e sommate alle altre pale:

$$\mathbf{F}^A = \sum_{j=1}^n (\mathbf{T}_j^{-1} \mathbf{F}_j^A) \quad (21)$$

$$\mathbf{M}^A = \sum_{j=1}^n (\mathbf{T}_j^{-1} \mathbf{M}_j^A + \mathbf{r}_{ac,j} \wedge (\mathbf{T}_j^{-1} \mathbf{F}_j^A)) \quad (22)$$

La velocità indotta viene calcolata dal bilancio di quantità di moto attraverso la forza aerodinamica attraverso una integrazione mediando su un ciclo di rotazione:

$$\bar{v} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{F_z^A}{2\rho S V'} \right\} d\psi \quad (23)$$

attraverso un processo iterativo con guess iniziale $v = 0$. Il criterio di stop è stato deciso attraverso una soglia di 10^{-3} sull'errore relativo tra la velocità indotta allo step precedente e quella allo step successivo.

Una differenza rispetto a [1] è stata la scelta della V' in (23). A seguito di errori e loop numerici è stato deciso di applicare una correzione al calcolo di (23) usando $V'^2 = (V \sin i - V)^2 + V^2 \cos^2 i$, con i angolo di incidenza del piano di rotazione del disco [7]. Il calcolo della velocità indotta è stato aggiunto per completare il modello aerodinamico tuttavia nell'ottimizzazione della forma le simulazioni sono effettuate senza tenerne conto sia poiché il suo effetto sulla traiettoria non è drammatico, sia perché rallenta eccessivamente il codice di calcolo.

4.2.2 Convergenza calcolo aerodinamico

IL calcolo aerodinamico come descritto effettua una integrazione discreta. Diventa necessario capire l'errore introdotto da questa discretizzazione e scegliere in modo adatto il tipo di discretizzazione tale da avere un risultato ritenuto ragionevole. Sono state fatte diverse prove per capire in primo luogo in quante sezioni ogni pala verrà suddivisa per poi calcolare le forze aerodinamiche ed inoltre è necessario capire come discretizzare l'integrale (23) per il calcolo della velocità indotta correttamente. L'obiettivo è quello di avere un codice che restituisca risultati ragionevoli, quindi indipendenti dalla griglia di discretizzazione ma che inoltre sia sufficientemente veloce senza inutili sovraccarichi che non migliorano la qualità della computazione. **I grafici sono da rifare con grid on e titoli in latex, se si riesce**

Le prove sono state effettuate su un boomerang con 2 pale ed un profilo NACA0012 con coefficienti aerodinamici disponibili in []:

- $\Lambda_1=120^\circ$ e $\Lambda_2=240^\circ$
- $\beta_1=\beta_2=0^\circ$
- $\theta_1=\theta_2=0^\circ$
- lunghezza pala $l=0.3\text{m}$

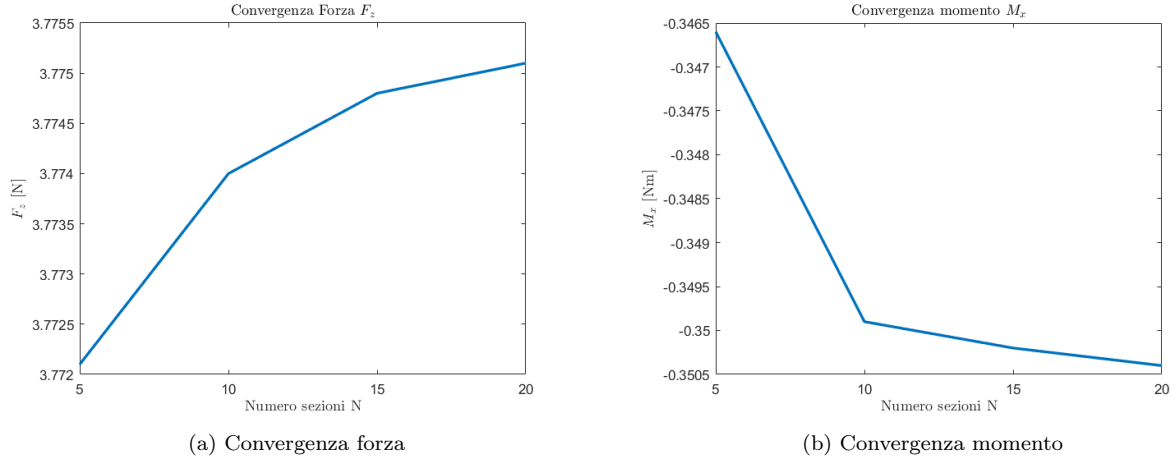


Figura 14: Convergenza nel calcolo del contributo aerodinamico

e velocità lineari ed angolari in assi body:

- $\mathbf{u} = (25\cos(5), 0, -25\sin(5))^T$
- $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 10Hz)^T$

Le configurazioni testate sono:

1. Modello aerodinamico senza velocità indotta, numero sezioni N per pala variabile in [5 10 15 20]
2. Modello aerodinamico con velocità indotta, numero sezioni fisso $N=20$ per pala, integrale in $d\psi$ da 0 a 360° suddiviso in [5 10 15 20 60] intervalli.

I risultati mostrano che la differenza di risultati andando su discretizzazioni molto fitte diventa trascurabile. Per il numero di sezioni per ogni pala è stato scelto di avere 10 suddivisioni di ampiezza costante mentre l'integrale per discretizzare il ciclo attorno all'asse z-body per il calcolo della velocità indotta è stato scelto di suddividerlo in 5 intervalli. Questa scelta, in linea con i risultati della convergenza sotto riportati permette di avere un calcolo che introduce un errore di discretizzazione trascurabile e un solutore piuttosto veloce.

Di seguito vengono riportati i grafici per la convergenza delle forze e dei momenti per il primo test e la convergenza della velocità indotta per il secondo test.

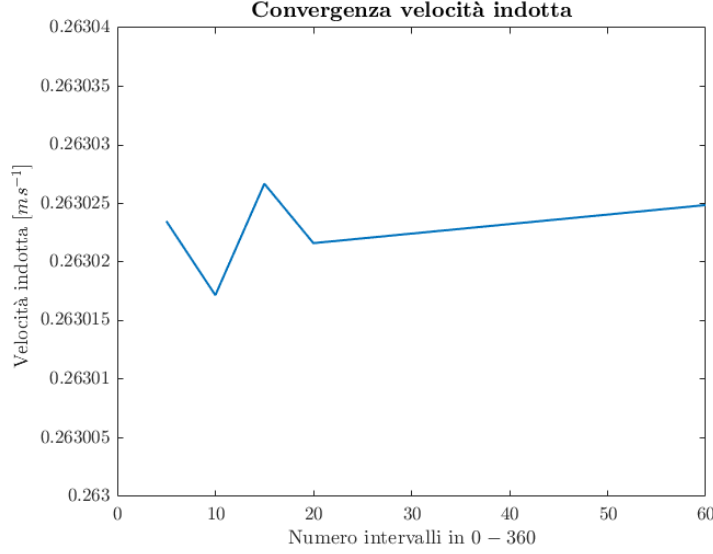


Figura 15: Convergenza velocità indotta

4.2.3 Stima dei coefficienti aerodinamici

Il calcolo dei coefficienti aerodinamici è effettuato dalla funzione Matlab© `f_polar_360`. Tale funzione consente un stima dei coefficienti aerodinamici C_l , C_d e C_m per angoli nel range di $(-180^\circ, 180^\circ)$. Per i profili ci si limita, di solito, ad impiego con piccoli angoli di incidenza, tuttavia, durante una rotazione su un ciclo, il profilo viene investito da un'incidenza molto elevata, anche oltre la regione di stallo profondo. Risulta necessario, dunque, per una predizione più accurata, studiare il comportamento del profilo al di fuori del suo regime di progetto. Questo problema in realtà è di grande interesse, in particolare nello studio delle VAWT (Vertical Axis Wind Turbine), per il quale esiste il programma *QBlade* [15], dell'Hermann Föttinger Institute della TU Berlin. L'idea del software è quella di utilizzare `xFoil` a piccole incidenze e poi estrapolare, con l'ausilio di tale risultato, il calcolo sul range più ampio. Il processo di estrapolazione si basa sull'analogia della lamina e costituisce un metodo efficace e rapido per la stima dei coefficienti.

`f_polar_360` funziona esattamente in questo modo, dove, per l'estrapolazione, si è implementato il metodo di Montgomerie [16]. In primo luogo `xFoil` viene richiamato tramite Matlab© su un vettore di angoli fornito in input tramite `xFoil` interface, disponibile su Matlab© File Exchange [6]. Come con `xFoil` è possibile fornire in input la sigla del profilo NACA a 4 o 5 cifre oppure un file `filename.dat` con le coordinate dei punti del profilo che si vuole analizzare. Noti C_l , C_d e C_m per piccoli angoli si passa successivamente all'estrapolazione. Per il C_l la relazione utilizzata è la seguente:

$$C_l = A \cdot C_{D90} \sin\left(\beta \frac{\pi}{180}\right) \cos\left(\beta \frac{\pi}{180}\right) \quad (24)$$

Dove C_{D90} è il coefficiente di drag per un profilo posto a 90° , mentre A e β (da fornire in gradi) possono essere calcolati come di seguito:

$$A = 1 + \frac{C_{l0}}{\sin \frac{\pi}{4}} \sin\left(\alpha \frac{\pi}{180}\right) \quad (25)$$

$$\beta = \alpha - \delta_1 - \delta_2 \quad (26)$$

α è l'incidenza del profilo, mentre δ_1 e δ_2 possono essere ricavati come in eq. 27-28. Si noti che in tale formulazione tutti gli angoli vadano specificati in gradi.

$$\delta_1 = 57.6 \cdot C_{L90} \cdot \sin\left(\alpha \frac{\pi}{180}\right) \quad (27)$$

$$\delta_2 = \alpha_0 \cos\left(\alpha \frac{\pi}{180}\right) \quad (28)$$

Dove C_{L90} è il coefficiente di portanza a 90° , fissato a 0.08, valore tipico individuato in letteratura.

Nelle precedenti espressioni sono presenti C_{l0} , il coefficiente di portanza per incidenza nulla, e α_0 , l'angolo per cui si ha portanza nulla. Questi valori sono stati ricavati tramite regressione lineare in un range di angoli molto piccoli, per cui la curva $C_l - \alpha$ si mantiene tutto sommato lineare.

Si noti come, nonostante sia un'analogia della lastra piana, effetti dovuti al camber siano effettivamente presenti nella derivazione.

Nella zona in cui gli angoli di attacco sono bassi i coefficienti aerodinamici calcolati sono quelli di xFoil, mentre al di fuori ci sono quelli dell'estrapolazione. Per raccordare al meglio le due parti sia stata introdotta una funzione di smooth f , tale per cui, il C_l estrapolato:

$$C_l = C_l(1 - f(\alpha)) + t \cdot (f(\alpha)) \quad (29)$$

La funzione t prende il valore del C_l allo stallo valutato da xFoil, mentre la funzione f viene espressa come:

$$f = \frac{1}{1 + k(\alpha - \alpha_{M1})^4} + \frac{1}{1 + k(\alpha - \alpha_{M2})^4} \quad (30)$$

Dove k , α_{M1} e α_{M2} sono parametri liberi, da modificare per avere una transizione più graduale possibile, tramite gli input ap , am e k . α_{M1} e α_{M2} vengono scelti in prossimità dello stallo per un buon risultato. Si noti come il C_l assuma il valore di t per $f = 1$ e il valore valutato mediante estrapolazione per $f = 0$. I valori valutati da xFoil non vengono modificati nè per il C_l nè per C_d e C_m .

La valutazione del C_d risulta essere ancora più semplice. Una volta assegnato il valore di C_{D90} , l'espressione utilizzata è la seguente:

$$C_d = C_{D90} \cdot \sin^2\left(\alpha \frac{\pi}{180}\right) \quad (31)$$

Il valore di C_{D90} può andare da 1.2, per la lamina quadrata, a 2, per la lamina di apertura infinita. Nel caso dei profili, si osserva, da prove sperimentali, un valore nell'intorno di 1.6.

La procedura per il C_m è data dalle seguenti correlazioni sperimentali:

$$offset = 0.5111 - 0.001337 \cdot \alpha \quad (32)$$

$$slope = 0.001653 + 0.00016 \cdot \alpha \quad (33)$$

$$armline = offset(\alpha) + slope(\alpha_0)(\alpha - 90) \quad (34)$$

$$C_m = (-C_l \cdot \cos\left(\alpha \frac{\pi}{180}\right) - C_d \cdot \sin\left(\alpha \frac{\pi}{180}\right) \cdot (armline - 0.25)) \quad (35)$$

Il punto cruciale della questione è la stima del braccio rispetto al centro aerodinamico $armline$. Per angoli di incidenza negativi la procedura da seguire è diversa, come si può notare in base a quanto di seguito riportato:

$$x_A = |\alpha_0| \quad (36)$$

$$y_A = offset(x_A) + slope(x_A)(x_A - 90) \quad (37)$$

$$x_B = -180 - x_A \quad (38)$$

$$y_B = offset(x_A) + slope(x_A) \cdot 90 \quad (39)$$

$$armline = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \alpha - x_A \quad (40)$$

In fig. 16 sono riportati i coefficienti aerodinamici ottenuti con questo metodo per il *fastcatch*, profilo di tipico impiego per boomerang a rapido ritorno [21], rappresentato in fig. 46.

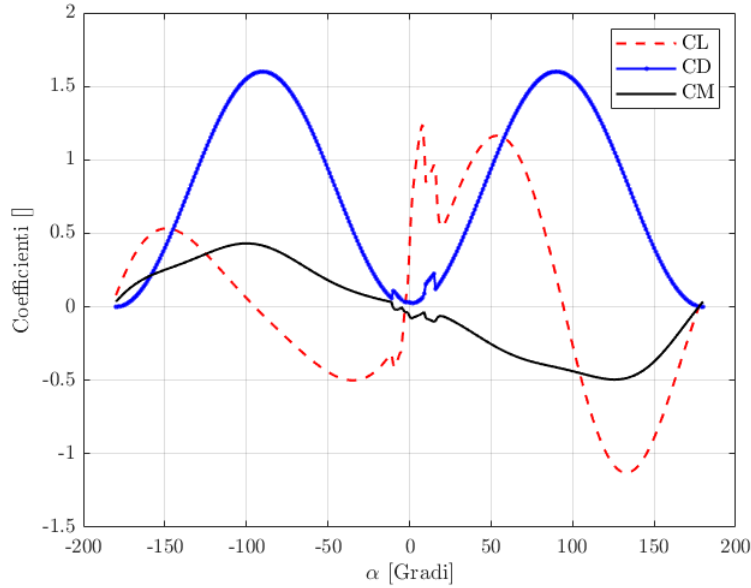


Figura 16: Coefficienti aerodinamici nel range esteso di $-180/180^\circ$

4.3 Verifica dell'estrapolatore per i profili

La verifica del codice che calcola i coefficienti aerodinamici di portanza e di resistenza è stata effettuata con il codice OpenSource QBlade, mentre la verifica del coefficiente di momento è stata effettuata con i dati disponibili da letteratura [1]. Si rimanda all'appendice B per ulteriori dettagli sulla verifica.

4.4 Comportamenti oscillatori: forze, momenti

Durante il moto del boomerang, le forze e i momenti che si generano hanno un comportamento oscillatorio [1] [2], dipendente dalla diversa velocità relativa all'aria che le pale vedono in ogni istante di tempo: questo fenomeno è catturato dal simulatore, figura 17. Le simulazioni sono state effettuate con i dati delle tabelle 1 e 2 e con un boomerang che ha come profilo il *fastcatch*, figura 46.

Tabella 1: Caratteristiche Geometriche

| Lunghezza pala [m] | corda [m] | freccia [degrees] | diedro [degrees] | pitch [degrees] |
|--------------------|-----------|-------------------|------------------|-----------------|
| 0.3 | 0.05 | 35 | 0 | 0 |

Tabella 2: Condizioni iniziali

| r [Hz] | θ [deg] | ϕ [deg] | V_{cg} [m/s] |
|----------|----------------|--------------|----------------|
| 9.4 | 20 | 78 | 21.51 |

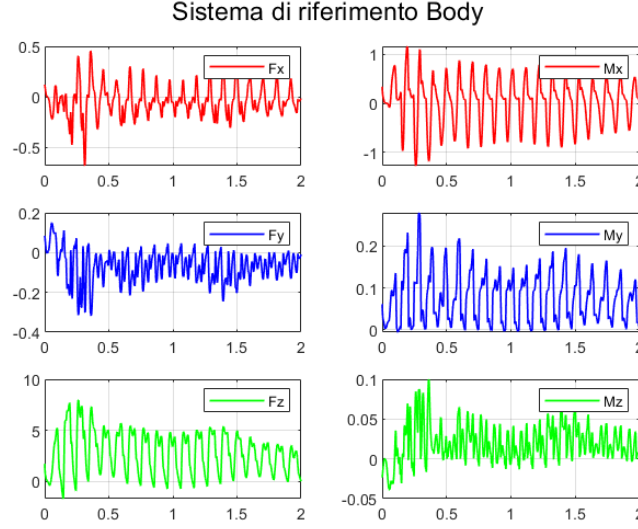


Figura 17: Comportamenti oscillatori forze e momenti aerodinamici

4.5 Modello dinamico: equazioni di moto

Il boomerang viene considerato come un corpo rigido, a 6 gradi di libertà, libero di muoversi nello spazio.

Tre rotazioni e posizioni sono quindi considerate nello spazio, facendo riferimento per le rotazioni agli angoli di Eulero 321.

Tuttavia, nel caso di traiettorie tridimensionali risulta preferibile utilizzare una parametrizzazione con 4 variabili. Il simulatore implementato si basa, quindi, sui quaternioni [12], il cui impiego permette di evitare l'insorgere del fenomeno di gimbal lock. Tale considerazione porta alla scrittura di 13 ODE (Ordinary Differential Equation), scritte per praticità in parte in sistema di riferimento Body e in altra parte in Inerziale. Una volta specificate le opportune condizioni iniziali, parametro chiave per un buon lancio, si ottiene la traiettoria a seguito di integrazione numerica.

Le equazioni di seguito descritte sono implementate nello script Matlab© `EquationOfMotionsQuaternion.m`, il cui input è `BoomInfo`. `BoomInfo` è una variabile *struct* che contiene parametri geometrici e inerziali del boomerang. Tra queste la massa e l'inerzia sono utilizzate nelle equazioni di moto.

Le 13 incognite che descrivono il sistema di ODE sono: $\mathbf{y} = (q_1, q_2, q_3, q_4, p, q, r, u_x, u_y, u_z, X, Y, Z)^T$. X, Y, Z sono le posizioni espresse in sistema di riferimento inerziale per ottenere la traiettoria osservata da un eventuale lanciatore solidale con il terreno. Le altre variabili u_x, u_y, u_z e p, q, r sono le velocità lineari e angolari del corpo rigido in sistema di riferimento Body.

Per l'evoluzione temporale delle rotazioni:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{1}{2} \Omega \mathbf{q} \quad (41)$$

Dove la matrice Ω è la matrice antisimmetrica delle velocità angolari in assi body, definita come [11]:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & r & -q & p \\ -r & 0 & p & q \\ q & -p & 0 & r \\ -p & -q & -r & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Per il bilancio del momento della quantità di moto, dove $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$ è il vettore delle velocità angolari:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{M}^A - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})) \quad (43)$$

Nell'eq. (43) \mathbf{I} è il tensore d'inerzia e \mathbf{M}^A è il momento risultante dalle forze aerodinamiche ad ogni istante calcolato nel cap. 4.2

Per il bilancio di quantità di moto:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{-mqu_z + mru_y + F_x^A + F_{Gx}}{m} \quad (44)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{-mru_x + mpu_z + F_y^A + F_{Gy}}{m} \quad (45)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{-mpu_y + +mqu_x + F_z^A + F_{Gz}}{m} \quad (46)$$

Qui m è la massa del boomerang, \mathbf{F}^A è la forza aerodinamica espressa in assi body (maggiori dettagli nella Sezione 4.2).

Per l'equazione differenziale relativa alla posizione, dove $\mathbf{r} = (X, Y, Z)^T$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{u} \quad (47)$$

Ruotando opportunamente la velocità da assi Body a inerziali, secondo la matrice di rotazione funzione dei quaternioni $\mathbf{T}_0(\mathbf{q})$.

Una volta imposte le condizioni iniziali il sistema viene integrato numericamente con `ode45`, fermando l'integrazione non appena il boomerang ritorna al punto iniziale con una distanza massima di 3 m, oppure tocca suolo. Quest'ultima possibilità può verificarsi ovviamente nel caso di una costruzione non ottimale dell'oggetto oppure nel caso di un pessimo lancio. Per verificare che il simulatore funzioni correttamente è possibile calcolare l'energia meccanica totale e assicurarsi che non abbia un andamento crescente:

$$E_{mecc} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^T m \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}) + mgZ \quad (48)$$

5 Condizioni iniziali e lancio del boomerang

Il lancio del boomerang è un aspetto di primaria importanza da tenere in considerazione nel caso si volesse ottenere una buona traiettoria con un ritorno del boomerang al punto iniziale.

Il lancio viene effettuato afferrando il boomerang all'estremità di una pala, ruotando il boomerang in modo tale da rivolgere la parte superiore verso di se e tenendo la punta del boomerang all'indietro.

Vengono solitamente definiti tre angoli di primaria importanza per ottenere un lancio corretto []:

- l'angolo relativo al vento
- l'angolo di tilt
- l'angolo relativo tra terreno e velocità iniziale

In caso di presenza di vento, comunque non eccessivo, è consigliabile lanciare in questo modo: ci si pone con il volto rivolto verso il vento e si fa una rotazione di 45° verso destra e si lancia in quella direzione (Figura 18). Nel progetto viene considerato il caso in aria ferma e quindi senza vento.

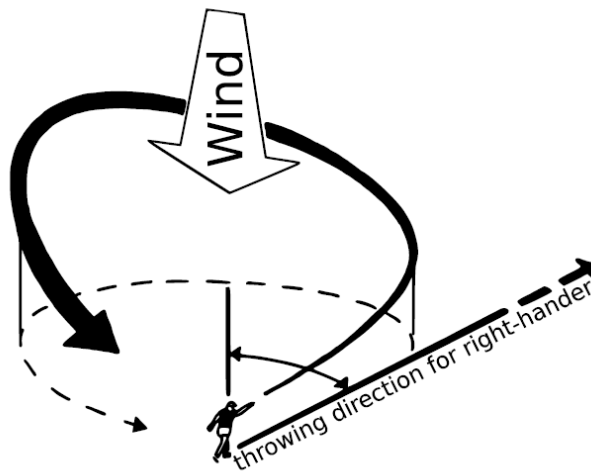


Figura 18: Angolo relativo al vento

L'angolo di tilt esprime l'inclinazione del piano immaginario di rotazione del boomerang rispetto alla verticale. Il lancio può avvenire con boomerang completamente verticale fino ad avere una inclinazione di 20° (Figura 19).

E' importante che il boomerang non venga lanciato con il proprio piano di rotazione parallelo al terreno perché comporterebbe una traiettoria che sale di quota inizialmente ma non riesca a completare correttamente il giro, come in Figura 20.

L'angolo relativo tra terreno e velocità iniziale descrive la direzione verso il quale si lancia il boomerang. Di solito il range è tra 0° , che corrisponde ad un lancio orizzontale rispetto al terreno, e i 20° che consiste in un lancio con una certa velocità del boomerang verso l'alto.

Nel caso di lancio troppo in verticale o addirittura verso il basso il boomerang difficilmente compirà traiettorie corrette rispettivamente guadagnando troppa quota inizialmente senza poter tornare indietro oppure non riuscendo a completare il giro cadendo prima a terra, come nella Figura 22.



Figura 19: Angolo di Tilt

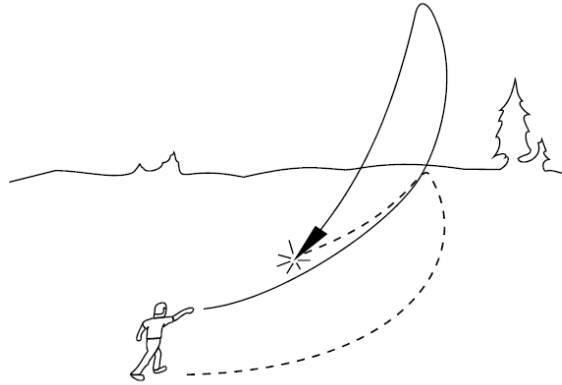


Figura 20: Lancio con angolo di tilt troppo elevato

Nelle simulazioni l'assetto viene correttamente imposto grazie all'angolo ϕ_0 che viene imposto tra i 70° e i 90° per avere un boomerang verticale, o quasi, al terreno.

Oltre ad un corretto assetto iniziale è però necessario tenere in considerazione la qualità del lancio intesa come velocità iniziale e spin corretti. In particolare è necessario che, affinché siano sfruttabili gli effetti giroscopici del boomerang, l'oggetto abbia un certo spin iniziale che sia corretto in relazione alla velocità iniziale imposta. Uno spin iniziale non sufficientemente elevato farà sì che la stabilità del boomerang venga compromessa ottenendo una traiettoria non desiderata che non riesce a curvare oppure riesca ad impostare una traiettoria circolare ma andando a terra troppo velocemente (Figure 23).

Tuttavia lo spin iniziale ottenibile da un lancio reale non è del tutto arbitrario ma ha dei limiti massimi imposti dalla fisica del lancio. E' possibile definire per questo un parametro adimensionale che relaziona lo spin iniziale alla velocità di avanzamento iniziale:

$$\chi = \frac{\omega_0 R}{V_0} \quad (49)$$

con $\omega_0 = r_0$ spin iniziale lungo l'asse z-body, R raggio del cerchio immaginario di rotazione del boomerang sul suo asse z-body e V_0 velocità iniziale del centro di massa del boomerang.

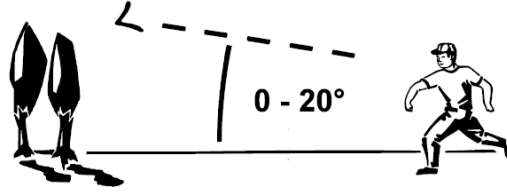


Figura 21: Angolo tra terreno e velocità iniziale



Figura 22: Angolo relativo tra terreno e velocità iniziale non corretto

Dovendo simulare una condizione realistica, è necessario che il parametro χ sia limitato ad un valore intorno allo 0.85 [], comunque inferiore ad 1. Questo è dovuto al fatto che il lancio viene effettuato con una mano su una tip che trasmette sia la velocità che la rotazione al boomerang. Il caso $\chi = 1$ è un caso ideale comunque non realizzabile con un oggetto come il boomerang in quanto esso viene saldamente tenuto fino al momento del lancio e non è libero di ruotare agevolmente fra le dita. Una $\chi > 1$ significherebbe che, nella condizione iniziale, una tip sia avanzante mentre l'altra retrocedente il che non rappresenta un lancio reale.

In una situazione di questo tipo le due tip, quella tenuta in mano e quella libera vedranno rispettivamente come velocità iniziale $0.15V_0$ e $1.85V_0$.

5.1 Parametrizzazione delle condizioni iniziali

Nel caso della simulazione numerica le condizioni iniziali sono arbitrarie e diventa quindi di fondamentale importanza rispettare questi vincoli in modo tale da avere un lancio realizzabile anche nella realtà.

Per fare ciò è stato creato uno script *HandInitial.m* che permette di definire le condizioni iniziali del boomerang ragionevoli a partire da due parametri per definire l'intensità del lancio:

- r_0 : Spin del boomerang in direzione z_{Body}
- V_t : Modulo della velocità della tip che è saldamente tenuta nella mano del lanciatore
- Θ : definisce l'angolo tra la velocità della tip ed il terreno (piano XY inerziale)
- D : Angolo della la velocità della tip rispetto all'asse X inerziale positivo nel piano XY inerziale

E altri parametri per definire l'assetto



Figura 23: Lancio con uno spin troppo basso

- ϕ : Angolo di Eulero che definisce l'inclinazione del boomerang
- ψ : Angolo di Eulero ottenuto da $\pi - D$, in questo modo il vettore velocità iniziale giace sul piano di rotazione del boomerang, cosa che è fisicamente ragionevole in un lancio reale.
- θ : Angolo di Eulero, considerato sempre nullo come condizione iniziale

Una volta definiti questi angoli di assetto si è definita la velocità della tip nel sistema di riferimento inerziale come:

$$\mathbf{u}_{tip} = (V_t \cos(\Theta) \cos(D), -V_t \cos(\Theta) \sin(D), V_t \sin(\Theta)) \quad (50)$$

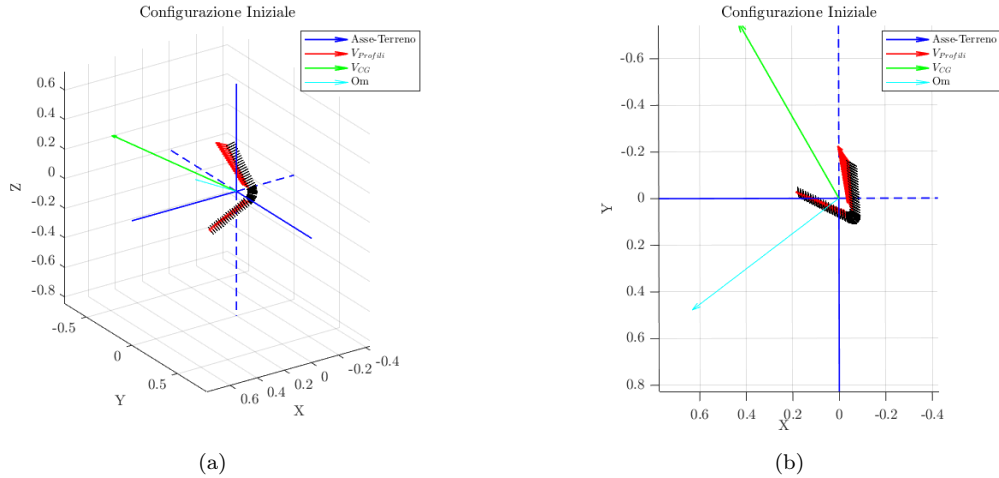
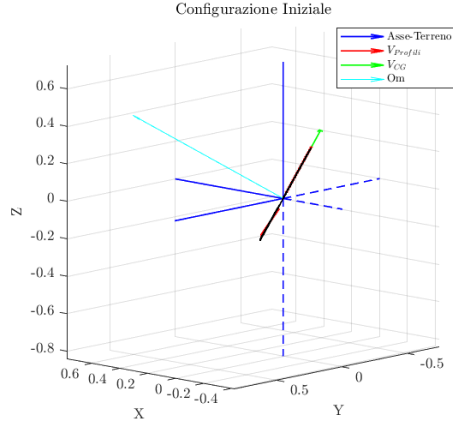


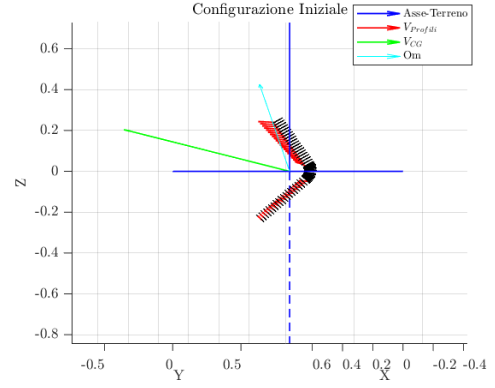
Figura 24: (a): Configurazione Iniziale (b): Angolo D

Questa parametrizzazione permette di assegnare condizioni iniziali ragionevoli e soprattutto di facile comprensione rispetto che assegnare la velocità del baricentro, come invece è fatto in letteratura [azuma2004flight]. La velocità della tip, insieme allo spin iniziale, viene poi usata per calcolare la velocità del baricentro all'istante iniziale dall'ipotesi di corpo rigido:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{tip} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_{CG} - \mathbf{r}_{tip}) \quad (51)$$



(a)



(b)

Figura 25: (a) Angolo di Eulero ϕ (b) Angolo Θ

La velocità iniziale del baricentro \mathbf{u}_0 e la velocità angolare del boomerang iniziale $[p_0, q_0, r_0]^T = [0, 0, r_0]^T$ sono necessarie per definire lo stato iniziale dell'ode45 che integra le equazioni del moto.

6 Fisica del problema

In questa sezione si vuole descrivere il funzionamento del boomerang dal punto di vista fisico. Supponendo che il boomerang venga lanciato in modo corretto, si può ottenere una traiettoria che gli permette di tornare indietro, come in figura 1. La forma circolare della traiettoria è dovuta alla presenza di uno squilibrio di forze aerodinamiche legato alla diversa velocità relativa all'aria che la pala vede quando è avanzante, rispetto a quando invece è retrocedente. Tale squilibrio genera un momento di rollio tangente alla traiettoria che, grazie al comportamento giroscopico [14] del boomerang, le fa assumere quella forma. La traiettoria è caratterizzata inoltre da una prima fase ascendente, in cui l'energia cinetica viene trasformata in energia potenziale e in cui lo spin del boomerang diminuisce a causa della resistenza con l'aria, e da una fase discendente, in cui l'energia potenziale viene riconvertita in energia cinetica e, sebbene la resistenza sia sempre presente, lo spin aumenta grazie al fenomeno dell'autorotazione [13] [2]. Nella parte seguente, vengono analizzati, con il supporto del simulatore, i due fenomeni principali che governano il comportamento del boomerang: gli effetti giroscopici e l'autorotazione.

6.1 Effetti Giroscopici

Il boomerang non è propriamente un giroscopio: infatti, non è caratterizzato da una simmetria geometrica. Esso, per sfruttare gli effetti giroscopici stabilizzanti, necessita che il suo momento di inerzia attorno all'asse y , J_{yy} , sia dello stesso ordine di grandezza del momento di inerzia attorno all'asse x , J_{xx} : questo requisito è soddisfatto regolando in modo appropriato l'angolo di freccia Λ . Le proprietà giroscopiche del boomerang dipendono dalle inerzie e queste ultime dunque hanno un'importanza notevole e richiedono di essere scelte in modo accurato: per esempio, questo problema non si presenta nel caso di boomerang a tre pale perchè, essendoci simmetria polare, l'effetto giroscopico è sempre presente e stabilizza in modo molto efficace l'oggetto. Un corpo è detto giroscopico se due dei momenti principali di inerzia sono uguali: tipicamente l'oggetto è rappresentabile come un disco omogeneo in cui i momenti principali di inerzia (per simmetria) sono $J_{yy} = J_{xx} = A \neq J_{zz} = C$. Nella figura 26 è rappresentato un boomerang che si sta muovendo con una certa velocità diretta come l'asse x_{DISCO} e che abbia uno spin attorno all'asse z pari ad r . In figura, gli assi x_{DISCO} , y_{DISCO} e z_{DISCO} rappresentano gli assi del disco che contiene il boomerang e, in particolare, x_{DISCO} e y_{DISCO} non sono in rotazione con velocità r ma rimangono rispettivamente parallelo e perpendicolare alla traiettoria del disco. L'asse z_{DISCO} coincide con l'asse di spin z e si chiama asse giroscopico.

Le forze agenti sul boomerang sono L , la risultante delle forze, e W , il peso. Si noti che la risultante L è posizionata in avanti e a destra rispetto al baricentro: a destra a causa dello squilibrio delle forze rispetto all'asse x_{DISCO} dovuto alla diversa velocità relativa all'aria che la pala in avanzamento vede rispetto a quando è retrocedente. In avanti perchè il boomerang non è simmetrico: quando la pala sinistra (valori positivi dell'asse y in asse corpo, figura 4) passa da retrocedente ad avanzante, la pala destra è retrocedente e sviluppa forze inferiori, mentre quando la pala destra diventa avanzante, la pala sinistra è ancora avanzante e complessivamente le forze sono superiori. Ciò causa l'asimmetria del carico rispetto all'asse y_{DISCO} e quindi il fatto che L sia in posizione avanzata rispetto al baricentro. L genera un momento rispetto al baricentro del boomerang, M_{tot} in figura, direzionato perpendicolarmente a L stessa e al suo braccio di applicazione. Se il boomerang ha caratteristiche inerziali tali da essere considerato un giroscopio, quello che si osserva è il fenomeno di parallelismo del moto dell'asse giroscopico z_{DISCO} : esso consiste nel fatto che quando un giroscopio è soggetto ad un momento generico M , si generi una forza che fa ruotare l'asse giroscopico ad allinearsi al momento M applicato. L'asse attorno a cui z_{DISCO} è messo in rotazione è definito asse di precessione ed è rappresentato dalla retta $P - P$ in figura. Lungo l'asse $P - P$ si può dunque rappresentare la velocità angolare Ω cui è soggetto l'asse z_{DISCO} : essa si può scomporre in Ω_x e Ω_y , rispettivamente le direzioni x_{DISCO} , parallela alla traiettoria, e y_{DISCO} , perpendicolare ad essa. La precessione del boomerang dunque porta a due conseguenze:

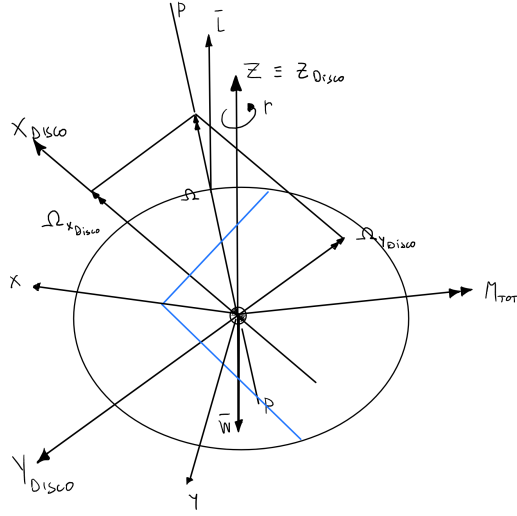


Figura 26: Effetti Giroscopici

- Ω_x ha come effetto quello di far abbassare la pala che si trova esternamente alla traiettoria, rendendo in questo modo il piano del boomerang parallelo al suolo. Bisogna prestare attenzione al fatto che ci sia una componente del momento M_{tot} che è antagonista a questa rotazione perchè agisce opponendosi ad essa: questa componente è legata allo squilibrio delle forze aerodinamiche tra parte destra (pala avanzante) e parte sinistra (pala retrocedente e quindi flusso inverso) del disco. La rotazione risultante attorno a x_{DISCO} sarà dunque legato alla parte preponderante tra le due.
- Ω_y è responsabile di fare assumere alla traiettoria del boomerang quella curvatura che gli permette di tornare al punto iniziale: nella figura 27 è rappresentata una traiettoria in cui Ω_y è perpendicolare al piano del foglio. In figura, si mette in evidenza, in diversi tratti della traiettoria, che z_{DISCO} , il quale punta verso il centro della traiettoria, tende, a causa della rotazione Ω_y , ad allinearsi al momento $M_{X-DISCO}$ legato allo squilibrio rispetto a x_{DISCO} delle forze.

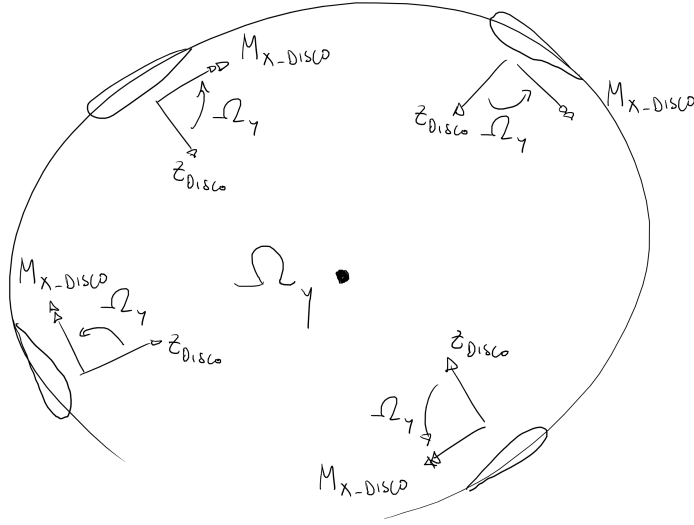


Figura 27: Effetto dello squilibrio delle forze che permette alla traiettoria di chiudersi su se stessa

Importante è ricordare che il giroscopio possiede una proprietà, la tenacità, che concerne la stabilità stessa del corpo rigido mentre si muove: infatti, la tenacità è la difficoltà che si incontra nel fare cambiare direzione all'asse giroscopico z_{DISCO} . La tenacità dipende in modo lineare dallo spin r e dal momento principale di inerzia in direzione z_{DISCO} , C . Tanto più è alto il valore dello spin o elevato il momento di inerzia C , tanto maggiori sono la tenacità, la stabilità del boomerang e la difficoltà di ottenere una traiettoria circolare.

Riassumendo tutte queste osservazioni, un boomerang deve possedere caratteristiche inerziali sufficienti, per renderlo stabile, ma allo stesso tempo limitate, per potergli permettere di percorrere una traiettoria curva, che lo faccia tornare al punto di lancio. Per regolare le inerzie si può agire in particolare sulla freccia Λ (così da rendere $J_{yy} = J_{xx}$) e sulla concentrazione più o meno grande di masse in estremità. Inoltre è molto importante anche la velocità angolare iniziale r_0 , la quale deve consentire al boomerang di sviluppare un comportamento giroscopico ma non deve essere troppo elevata per permettere la precessione dell'asse giroscopico (il valore di r_0 ha un'ulteriore limite che è dato dalla forza del lanciatore). Ulteriori approfondimenti sui fenomeni giroscopici e sui fenomeni giroscopici in relazione al boomerang possono essere trovati in [2], [18], [14].

Per quanto riguarda la freccia, viene proposto un esempio della sua influenza sulle caratteristiche inerziali del boomerang e di come variazioni relativamente piccole di queste ultime influenzino la stabilità del volo. Nella figura 28, viene mostrato come una freccia di 20, la cui caratteristiche inerziali sono $J_{xx} = 0.0018 \text{ kgm}^2$ e $J_{yy} = 0.0001 \text{ kgm}^2$, non sia sufficiente a stabilizzare il boomerang e a farlo tornare al punto di lancio, mentre con una freccia di 35° , a cui corrisponde la matrice di inerzia $J_{xx} = 0.0015 \text{ kgm}^2$ e $J_{yy} = 0.0002 \text{ kgm}^2$, il boomerang si stabilizza e torna indietro. Le simulazioni sono state effettuate con un boomerang che ha come profilo il fastcatch, figura 46, con caratteristiche geometriche della tabella 1 e con condizioni iniziali della tabella 2.

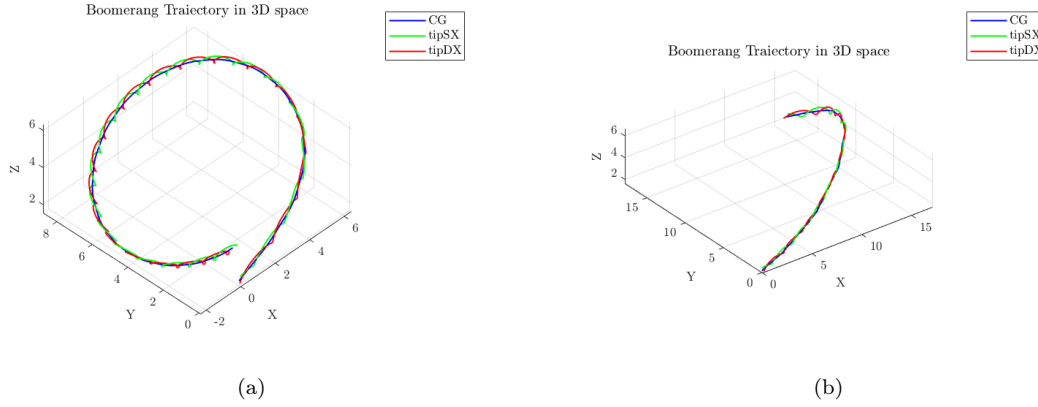


Figura 28: Effetto freccia: (a) freccia 35° (b) freccia 20°

6.2 Autorotazione

Il termine autorotazione è legato al campo elicotteristico e indica una condizione di volo in cui il rotore dell'elicottero non è azionato dal motore ma dal flusso di aria che lo attraversa: infatti, la potenza richiesta al motore per mantenere in rotazione il rotore è nulla. Quando l'elicottero è in discesa, il flusso di aria dal basso attraversa il disco spaziato dal rotore, generando forze aerodinamiche tali da mantenere la velocità di rotazione del rotore e permettere dunque all'elicottero di atterrare in modo sicuro. Allo stesso modo, nella fase discendente di volo di un boomerang, come descritto in [2], l'autorotazione agisce fornendo potenza motrice a contrasto della resistenza dei profili aerodinamici tramite la conversione di energia potenziale in energia cinetica (si veda [13]), grazie alla velocità di discesa del corpo: ciò può portare ad un aumento del valore dello spin r in questa parte di traiettoria. Può comunque capitare che un boomerang non entri in autorotazione durante il volo e che quindi la velocità angolare r non subisca queste variazioni positive durante la traiettoria. Nelle figure 29 e 30, vengono riportati rispettivamente una traiettoria di un boomerang e i corrispondenti andamenti dello spin r e della quota z nel tempo. Le simulazioni sono state effettuate con i dati delle tabelle 3 e 4 e con un boomerang che ha come profilo il Bellen, figura 47.

Tabella 3: Caratteristiche Geometriche

| Lunghezza pala [m] | corda [m] | freccia [deg] | diedro [deg] | pitch [degrees] |
|--------------------|-----------|---------------|--------------|-----------------|
| 0.3 | 0.06 | 45 | 0 | 0 |

Tabella 4: Condizioni iniziali

| r [Hz] | θ [deg] | D [deg] | ϕ [deg] | V_t [m/s] |
|----------|----------------|-----------|--------------|-------------|
| 10.9 | 7.9 | 56 | 58.5 | 12.1 |

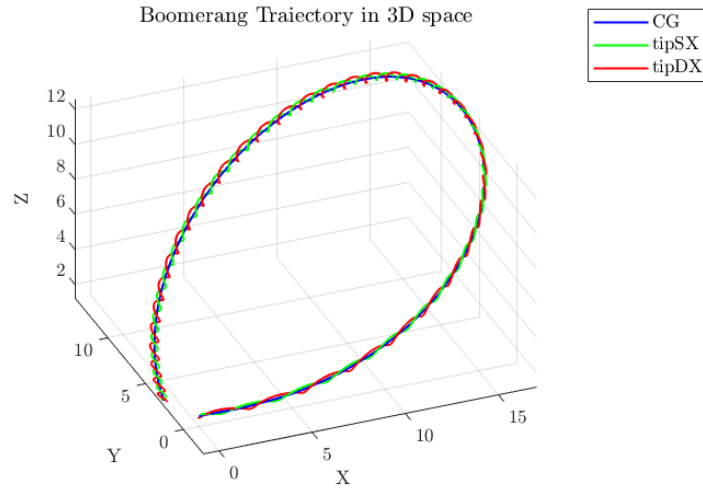


Figura 29: Traiettoria

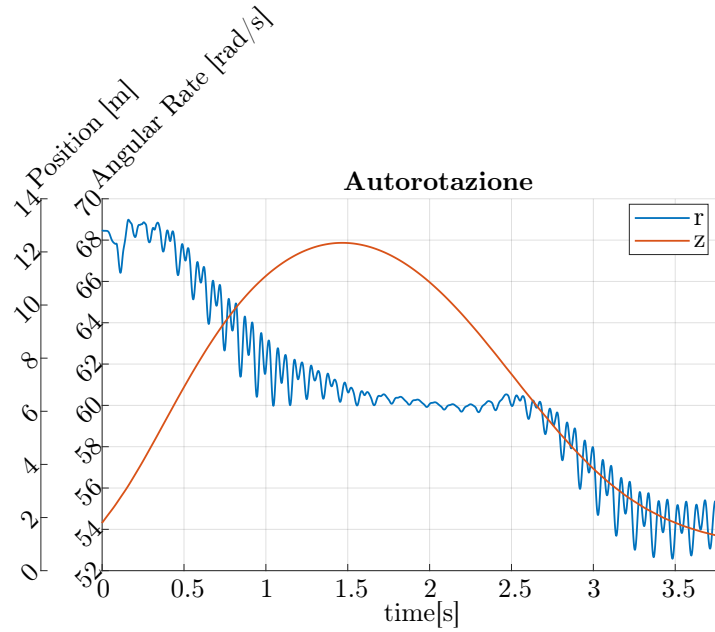


Figura 30: Andamento di r e di z

Si osservi dalla figura 30 come, dopo aver raggiunto l'apice della traiettoria, intorno a 1.5 secondi, nella fase discendente lo spin r mantenga un valore medio inizialmente costante. A 2.5 secondi, si osserva che lo spin r diminuisce nuovamente, a causa di una perdita di quota non sufficientemente rapida per creare l'autorotazione.

7 Profili alari

In questa sezione si passa a discutere la scelta del profilo aerodinamico. Quest'ultima, infatti, è un punto particolarmente critico: il numero di Reynolds di questa applicazione, stimato essere attorno a 50000, è basso rispetto alle usuali applicazioni aeronautiche. Tipicamente, a questo Re la scelta del profilo gioca un ruolo fondamentale perchè profili relativamente spessi, sopra al 6%, sono soggetti a isteresi dovuta a separazione laminare con transizione turbolenta [17]. Tuttavia, il profilo scelto deve essere abbastanza spesso da essere impugnabile e resistente a eventuali urti, quindi la scelta finale è frutto di un compromesso.

L'argomento può essere diviso in due parti. Nella prima parte si analizzano le curve dei coefficienti aerodinamici per profili a basso numero di Reynolds. Il Re considerato è ottenuto a $3/4$ la lunghezza della pala, mediando su tutta la traiettoria, in accordo con [1]. Il suo valore calcolato è nell'ordine di 50000. Si fa particolare riferimento a quelle che sono le peculiarità delle curve dei coefficienti aerodinamici che influenzino maggiormente le traiettoria del boomerang.

Una seconda parte invece è quella di ottimizzare un profilo secondo le caratteristiche salienti individuate. Il risultato dell'ottimizzazione viene confrontato con gli altri profili analizzati.

7.1 Impatto delle forze aerodinamiche sulla traiettoria

Nel confronto si sono considerati 4 profili per funzionamento a bassi Reynolds [17] o utilizzati per la costruzione di boomerang, quali: *FX-84-W-127*, *Eppler-61*, *SD-7080* e *fastcatch* (utilizzato per boomerang a rapido ritorno). La forma di questi profili viene riportata in App. C. In fig. 31 è possibile osservare le polari e le curve $C_l - \alpha$ di questi profili a confronto ricavate tramite xFoil.

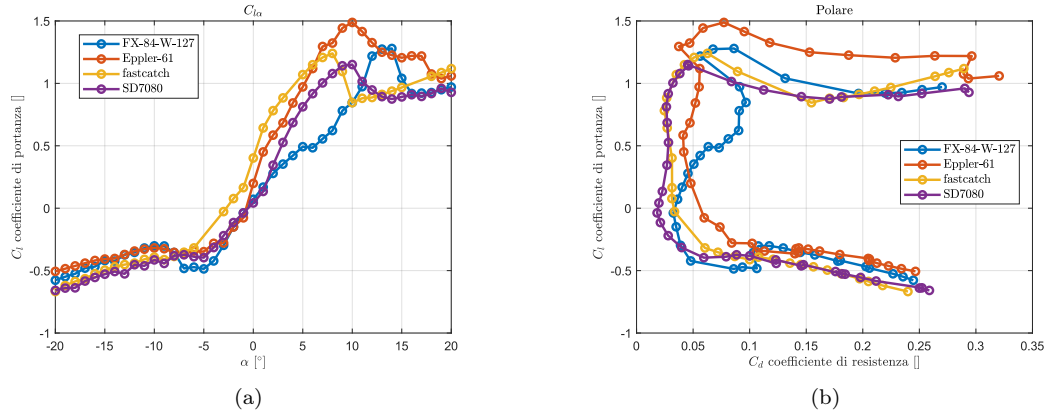


Figura 31: (a): Confronto curve $C_{l\alpha}$ (b): Confronto polari

Nonostante si stia studiando il profilo in un range di angoli più ampio, i piccoli angoli risultano influenzare in maniera preponderante la dinamica. Infatti è stata svolta un'indagine statistica per varie configurazioni del boomerang, ed effettivamente, la maggior parte delle incidenze è a bassi angoli. Si riporta in fig. 32 la traiettoria e la distribuzione statistica delle incidenze per un boomerang con un angolo di freccia di 40° , senza callettamento, per una condizione iniziale di lancio di 20 m/s di velocità, 10 Hz di spin, $\theta 5^\circ$, $\phi 75^\circ$ e altezza di 1.8 m . Il profilo utilizzato in questo test è il *fastcatch*, che secondo le analisi svolte si è dimostrato quello con la traiettoria migliore. Si è calcolato un tempo di ritorno di 1.8 s e una distanza massima di 10.77 m .

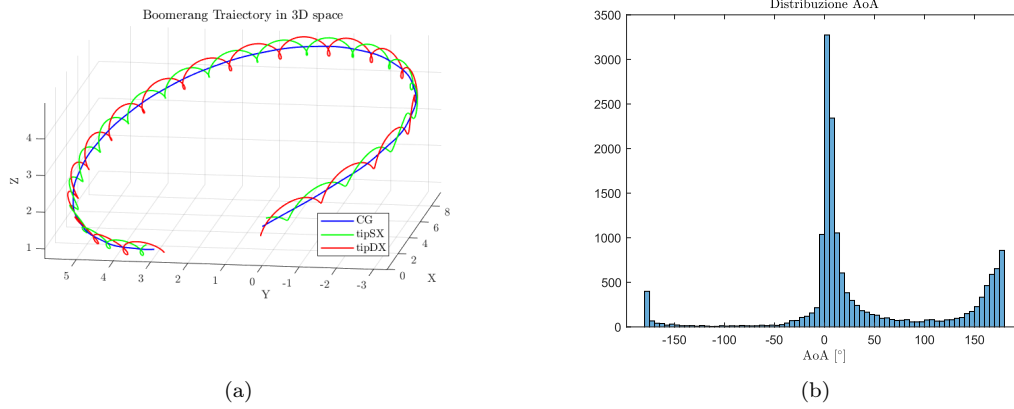


Figura 32: (a): Traiettoria con profilo *fastcatch* (b): Distribuzione statistica angoli di attacco durante il lancio con profilo *fastcatch*

Si è passati poi ad analizzare le traiettorie cambiando, rispetto alla configurazione precedente, il profilo. In fig. 33a è possibile vedere la traiettoria dell'*Eppler-61*, dove il boomerang non riesce a sviluppare portanza necessaria a curvare. In fig. 33b si è provato ad aggiungere un grado di angolo di pitch/callettamento.

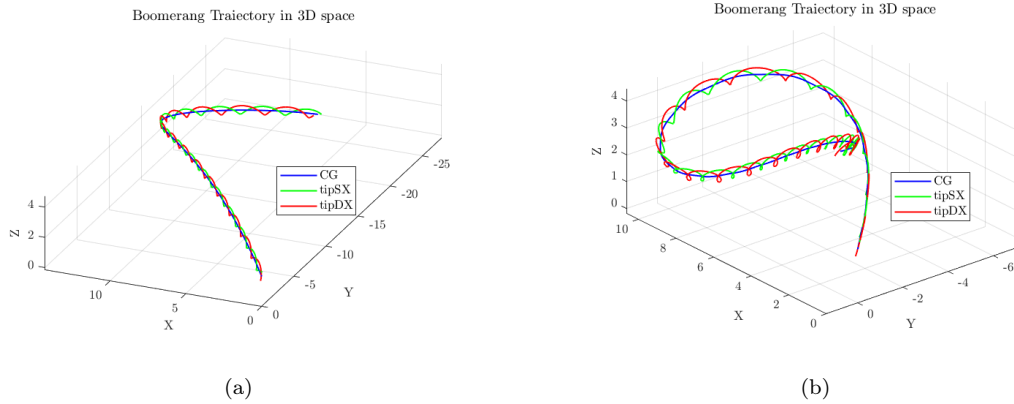


Figura 33: (a): Traiettoria con profilo *Eppler-61* (b): Traiettoria con profilo *Eppler-61* callettato di 1°

Il comportamento generale, osservato anche in questo caso particolare, è che se il boomerang non riesce a sviluppare abbastanza portanza nei primi istanti, non riesce a curvare e cade a terra, come in fig. 34. Se nei primi istanti del moto la portanza è sufficiente a sostenere il boomerang si passa da angoli molto piccoli ad angoli maggiori. Questo si può notare aggiungendo 1° di callettamento come in fig. 35.

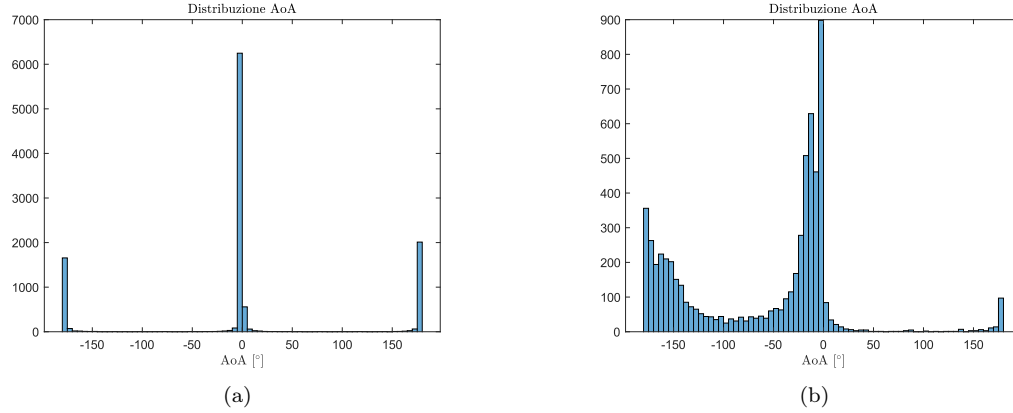


Figura 34: Distribuzione statistica angoli di attacco con profilo *Eppler-61* (a): prime fasi del lancio (b): successive

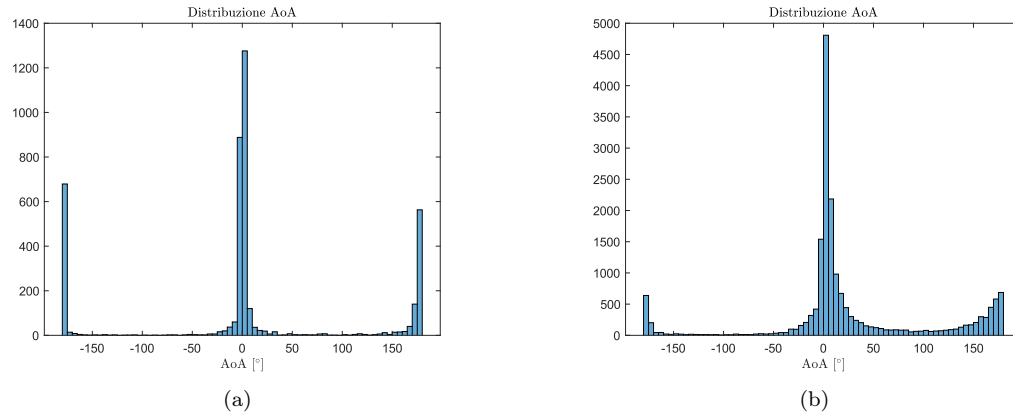


Figura 35: Distribuzione statistica angoli di attacco con profilo *Eppler-61* callettato di 1° (a): prime fasi del lancio (b): successive

Nel caso particolare dell'*Eppler-61*, quest'ultimo, senza pitch, non riesce a sviluppare abbastanza portanza e cade. Aggiungendo pitch, inizia a curvare dolcemente e, successivamente, il rateo di curvatura diventa sempre più marcato, poiché l'incidenza si sposta su angoli maggiori e l'*Eppler-61* ha un C_{lMAX} più alto rispetto al *fastcatch*.

Dall'analisi svolta si ricava quindi che un buon profilo deve avere un C_l a bassi angoli sufficientemente alto da permettere lo sviluppo di buone forze aerodinamiche. Inoltre è necessario che il C_{LMAX} non sia troppo elevato perché, nella fase discendente della traiettoria, quando gli angoli di incidenza sono più elevati, la portanza che si crea raggiunge i massimi valori. Se tali valori sono troppo elevati la traiettoria si chiude più del dovuto, senza cioè tornare vicino al punto di lancio: è quello che accade nel caso dell'*Eppler-61* con calettamento, in figura 33. Facendo riferimento alla figura 31, si può osservare che l'*Eppler-61* ha un C_l a bassi angoli di incidenza piccolo e un C_{LMAX} molto elevato: infatti, necessita di un calettamento per avere sufficienti forze portanti nella prima fase di volo ma la sua traiettoria si chiude prima di tornare al punto di partenza a causa del C_{LMAX} troppo elevato. Nella stessa figura si osservi ora la curva relativa al profilo *fastcatch*: il C_l a bassi angoli di incidenza

è più alto del profilo precedente e $C_{L_{MAX}}$ è moderato. Ne risulta una traiettoria migliore, come mostrato in figura 32.

Si riassume di seguito l'influenza dei vari parametri per un buon profilo:

- C_l a bassi angoli: essenziale avere valori elevati per iniziare la curvatura del boomerang
- $C_{l_{MAX}}$: valori più elevati causano una curvatura più accentuata nelle fasi finali della traiettoria
- C_d : il contributo dato dai piccoli angoli non ha grande influenza, dato che oltre la regione di deep stall, il profilo diventa praticamente un corpo tozzo, con drag di un ordine di grandezza più elevato

7.2 Ottimizzazione del profilo

Mettere come è stata eseguita l'ottimizzazione, con risultati (polari e traiettorie) Si è eseguita un'ottimizzazione di profilo utilizzando il codice OpenSource `Xoptfoil` [19]. La parametrizzazione utilizzata è quella di *Hicks-Henne*, un metodo perturbativo che utilizza funzioni di forma per modificare un profilo esistente. Si considera il dorso e ventre in modo indipendente, modificandoli come segue:

$$z = z_{base} + \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x) \quad (52)$$

ϕ_i sono le funzioni di forma, anche note come *bump functions*. Sono funzioni trigonometriche il cui spessore di bump è stato fissato a 0.1. Si sono utilizzate poi 4 funzioni di forma per il dorso e 4 per il ventre. Il metodo utilizzato per la minimizzazione è diviso in due step: 1000 iterazioni di minimizzazione globale, nel caso specifico metodo genetico, e 1000 iterazioni di minimizzazione locale, ovvero metodo del semplice. Per quanto riguarda la *fit-function* si è scelto di massimizzare il C_l a -2° e 8° , mentre per angoli intermedi a questi due valori si è massimizzato la pendenza della curva $C_l - \alpha$. Come vincoli si è scelto di dare uno spessore minimo di **non mi ricordo**.

Come profili di partenza si è scelto di prendere il migliore, ovvero il *fastcatch*, e uno tra i peggiori, come il *SD-7080*. La tendenza che si è osservata è quella di ridurre parecchio lo spessore, coerentemente con quanto ci sarebbe aspettato da un profilo a basso Reynolds. Come in fig. ?? il risultato del *fastcatch*, che è stato nominato come *Franco-33*, in fig. 50, risulta essere più veloce **etc**. Tuttavia, a causa dello spessore troppo piccolo e della forma molto particolare non è un profilo di facile realizzazione e impiego. Discorso leggermente diverso si applica al secondo profilo ottimizzato il *Friz-2*, in fig. 49. Questo profilo non è molto difficile da realizzare e lo spessore risulta essere modesto. Tuttavia, porta con se altri problemi, in quanto non è un profilo molto facile da far tornare indietro e il bordo d'uscita risulta essere molto aguzzo. Questo è un problema non solo per la realizzazione, ma anche per la sicurezza, diventando pericoloso da impiegare.

7.3 Scelta del profilo

In questo capitolo si descrivono le motivazioni dietro la scelta finale del profilo per il boomerang da costruire. Si è deciso di utilizzare un approccio ibrido, tra il risultato dell'ottimizzazione e un database considerato. Questi ultimi sono quelli descritti nella sezione 7.1, quelli di tipico impiego per boomerang [21].

Parametri presi in considerazione sono stati:

- **Coefficienti aerodinamici** si è rivolto particolare attenzione ad avere un basso angolo di portanza nulla α_0 , per garantire alto C_l a basse incidenze e $C_{l_{MAX}}$ abbastanza elevato
- **Realizzabilità** si è preferito scegliere un profilo spesso, per poter garantire una buona impugnabilità, parametro essenziale per un buon lancio, e una buona resistenza agli urti. Un prototipo più resistente garantisce un periodo di impiego più esteso e maggiore possibilità di studio e test

Tra i profili che si sono rivelati un buon compromesso, rientra sicuramente il *Bellen*, in fig. 47, di cui si riporta traiettoria e polari **aggiungere traiettoria e polari**. Nonostante le prestazioni non ottimali si è scelto di considerarlo per semplicità di costruzione. Ottenere un profilo come questo potrebbe essere consentito anche da una semplice levigatura in legno.

La scelta finale del profilo è ricaduta sul *fastcatch*, scartando quindi anche il risultato dell'ottimizzazione di profilo. Il motivo principale è semplice. Le caratteristiche inerziali del boomerang dipendono fortemente anche dalla scelta del profilo. Un profilo troppo spesso porta, infatti, anche maggiore peso. Il *fastcatch* si è dimostrato il profilo più flessibile per impiego su una vasta gamma di condizioni di lancio, come riportato nel cap. 8.

8 Ottimizzazione forma in pianta

Il progetto della pianta alare è stato ottimizzato per soddisfare i requisiti di avere un boomerang facilmente lanciabile. In particolare, una volta scelto il profilo alare che si utilizzerà nelle due pale, il design della forma del boomerang sarà tale da avere uno spettro di condizioni iniziali per cui la traiettoria risultante vedrà il ritorno del boomerang verso il punto iniziale il più vasto possibile. Per ottenere ciò la geometria del boomerang viene resa parametrica, come spiegato nella Sezione 4.1, ed attraverso un metodo di ottimizzazione verrà scelta la configurazione finale.

Per considerazioni legate alla realizzazione del modello e al codice di ottimizzazione non tutte le variabili parametriche che definiscono la geometria sono state ritenute variabili di progetto. In particolare come variabili di progetto sono state considerate:

- Lunghezza delle pale l
- Corda del profilo c
- Angolo di freccia delle pale Δ

con un range di variazione accettabile

- $l \in [0.15, 0.3]m$
- $\frac{l}{c} \in [4, 8]$
- $\Delta \in [30, 60]^\circ$

Gli altri parametri che definiscono la geometria sono così stati fissati:

- Pitch delle pale $\theta_j = 0^\circ$
- Diedro delle pale $\beta_j = 0^\circ$
- Parametro di raccordo $PARA = 1.2$
- Svergolamento $\Delta\theta_j = 0^\circ$

8.1 Funzione Fitness

Le condizioni iniziali, descritte nella Sezione 4.1, prevedono 5 parametri liberi di variare $r_0, V_t, \Theta, D, \phi$, tuttavia possono essere introdotte alcune ipotesi per semplificare la trattazione.

In particolare l'angolo D che prevede la possibilità di un lancio in una direzione specifica (ad esempio verso X inerziale oppure Y inerziale) in realtà è ininfluente per la forma della traiettoria per questo viene posto nullo.

L'angolo Θ viene fissato ad un valore di 5° in modo tale che la velocità iniziale del boomerang sia leggermente diretta verso l'alto.

Tra r_0 e la velocità di lancio è possibile definire una relazione legata al rapporto di avanzamento χ . Per avere un lancio stabile è necessario avere un χ sufficientemente elevato per cui è stato posto un valore di $\chi = 0.85$ che lega tra di loro velocità e spin. Come parametro libero è stato quindi mantenuto r_0 e V_t ricavato di conseguenza.

L'angolo di assetto ϕ rimane un parametro libero.

E' quindi possibile costruire una griglia di condizioni iniziali con i parametri r_0 e ϕ e testare ogni geometria all'interno di questa griglia. Il boomerang che ha un buon design avrà un'ampia area all'interno di questa griglia per cui ogni coppia (r_0, ϕ) di condizioni iniziali farà sì che la traiettoria risultante sia ad anello.

La griglia di condizioni iniziali è stata mantenuta fissa per ciascuna geometria ed il range considerato corrisponde a:

- $r_0 \in [5, 15] Hz$
- $\phi \in [65, 90]^\circ$

Per migliorare la computazione su questa griglia delle condizioni iniziali viene fatto un test iniziale su 25 punti equi-spaziati di questa griglia per definire un'area iniziale di interesse. Fatto questo vengono generati punti random all'interno della zona di interesse in numero sufficiente da poter definire una area di condizioni iniziali accettabili.

In particolare è stata definita come traiettoria accettabile un percorso che rispetti le seguenti caratteristiche:

1. Il punto di arrivo sia ad una distanza inferiore a 3 metri rispetto al punto di lancio
2. L'altezza del punto finale sia inferiore a 2 metri
3. Completamento di un solo anello (NON sono accettate traiettorie con più anelli uno dentro l'altro)

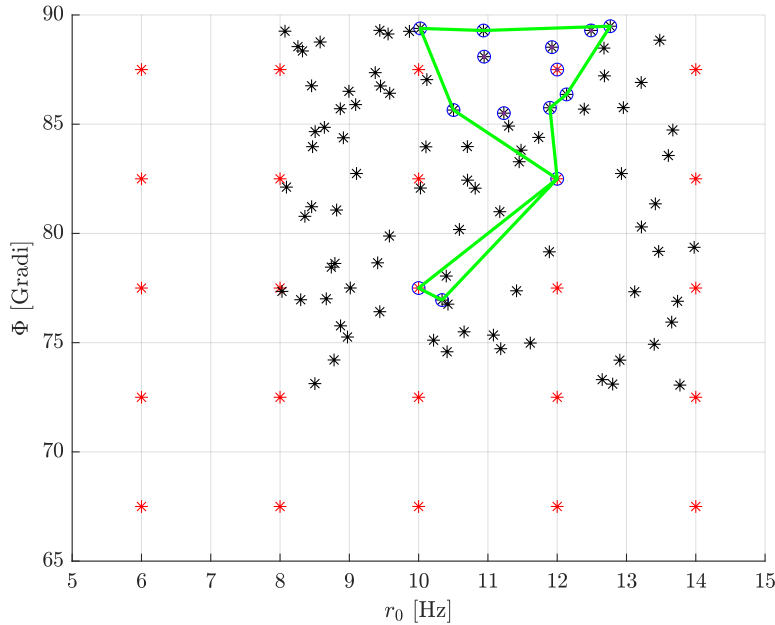


Figura 36: Banda di funzionamento data una densità pari a 650 kg/m , lunghezza di $0.3m$, corda di $0.05m$ e freccia di 30°

Il calcolo dell'area è realizzato con la funzione MATLAB@ `boundary` che permette di definire un contorno ad un set di punti in uno spazio 2D e ne calcola l'area racchiusa. La figura 36 mostra l'area generata dalla funzione MATLAB@ `StabilityCheck.m`, i punti in rosso indicano la griglia iniziale, i punti neri indicano i punti che non creano una traiettoria "circolare", invece i punti blu sono i punti tali per cui il boomerang, se lanciato rispetto a quelle condizioni iniziali funziona, infine la linea verde rappresenta il contorno dell'area. Ovviamente il calcolo dell'area ha una componente aleatoria che ha sicuramente un'influenza importante nel calcolo dell'area, ma nonostante ciò viene identificata la bontà di una geometria. Si può dunque definire una funzione di fitness F_{Area} :

$$F_{Area} = -StabilityCheck(x, BoomInfo) \quad (53)$$

dove x è il vettore delle variabili di progetto definite in precedenza.

8.2 Metodo di Ottimizzazione

L'obiettivo del metodo di ottimizzazione è quello di minimizzare la funzione F_{Area} , dal punto di vista computazionale, la valutazione dell'area è molto dispendiosa, infatti devono essere valutate 25 condizioni di lancio iniziali, oltre N successive per raffinare la "mesh", spesso il tempo necessario può essere oltre i 200 secondi. Proprio per non appesantire l'ottimizzazione è stato deciso di non considerare la velocità indotta, poiché il tempo necessario per ogni simulazione triplica. Come metodo di ottimizzazione sono stati provati inizialmente il metodo del simplesso e del pattern-search, ma molto spesso si bloccavano su minimi locali, proprio per questo motivo si è optato per la scelta di un algoritmo genetico. Come funzione fitness si è scelta una funzione che dato in input i tre parametri geometrici definiti in precedenza fornisca in output l'area delle condizioni iniziali accettabili, la popolazione ha una dimensione pari a 30 individui con un numero di generazione pari a 10.

```

1 lb = [30*10,0.15*1000,4*100];
2 ub = [60*10,0.3*1000,8*100];
3 options = optimoptions('ga', 'MaxStallGenerations', 10, 'MaxGenerations', 10, ...
    'NonlinearConstraintAlgorithm', 'penalty',...
4     'PopulationSize', 30, 'PlotFcn', {'gaplotbestindiv', 'gaplotbestf'},...
5     'Display', 'iter', 'UseParallel', true, 'UseVectorized', false);
6 X_fin = ga(Fun_A,3,[],[],[],[],lb,ub,[],1:3,options);
7 X_fin=[X_fin(1)/10 X_fin(2)/1000 X_fin(3)/100];

```

I fattori 10, 100, 1000, servono per velocizzare il codice **ga**. L'algoritmo genetico trova inizialmente una geometria avente le tre variabili di progetto pari a $x = (, ,)$, ed un'area totale, raffigurante alla figure ?? pari a *prova*. L'algoritmo genetico evita il problema di altri metodi di ottimizzazione di ricadere in un minimo locale, anziché in uno globale, ma non è detto che riesca a raggiungere con esattezza comunque il minimo globale. Proprio per questo motivo si è deciso di migliorare ulteriormente la geometria utilizzando il metodo del simplesso, presente su matlab® come comando **fminsearch.m**. La funzione non permette di definire dei limiti per le variabili di progetto, per questo motivo è stata definita una nuova funzione fitness $F_{AreaSimplex}$:

$$F_{AreaSimplex} = -StabilityCheck(x, BoomInfo, lb, ub) \quad (54)$$

dove lb ed ub sono i limiti superiori ed inferiori delle variabili di progetto, nel momento in cui i parametri di progetto non vengono rispettati, la funzione assume un valore nullo, in modo che non venga preso in considerazione.

```

1 Fun_A_constrained= @(x) GA_Spot_constrained(x,lb,ub,BoomInfo,D,theta,Chi);
2 options = optimset('Display','iter','PlotFcns',@optimplotfval);
3 X_fin = fminsearch(Fun_A_constrained,x0,options)

```

Il punto iniziale del metodo del simplesso è pari al punto finale raggiunto tramite l'algoritmo genetico

A Implementazione ed unione dei modelli

Nei capitoli precedenti sono stati descritti tutti i modelli necessari per il corretto calcolo della traiettoria di un boomerang. Come mostra la figura 37 i modelli sono molto connessi fra loro, per calcolare la traiettoria è necessario conoscere la massa e la matrice di inerzia del boomerang e le forze aerodinamiche, che a loro volta necessitano di informazioni sui coefficienti aerodinamici bidimensionali e sulla posizione dei profili alari del boomerang nello spazio tridimensionale. Per questo motivo è stato deciso di creare una variabile struct matlab® definita `BoomInfo` che è il vettore di scambio di informazioni tra i vari modelli.

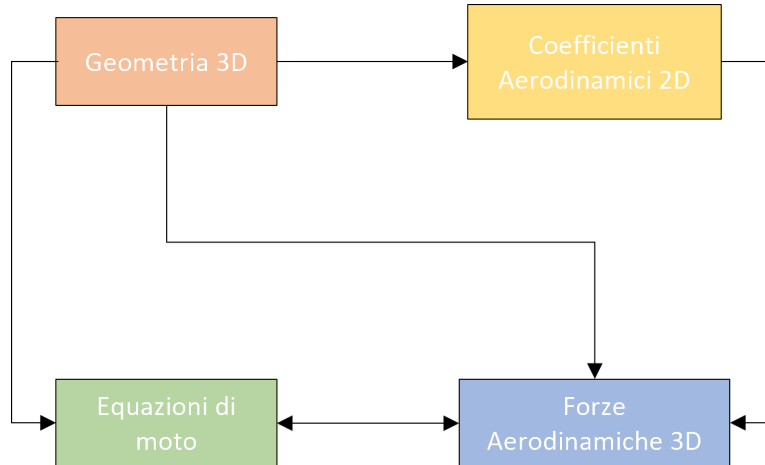


Figura 37: Interazione tra le funzioni

A.1 Come utilizzare il codice XBOOM

Il modello geometrico tridimensionale è il punto di partenza per il calcolo della traiettoria ed è stato sviluppato cercando di creare la geometria più coerente possibile al caso reale, senza alcun tipo di semplificazione o ipotesi. In particolare la funzione matlab® `Boom3DShape` necessita come INPUT la lunghezza delle pale l , la corda c , le coordinate dei punti del profilo, il numero di sezioni nella parte centrale e sulle pale, il parametro $PARA$, la densità del boomerang ρ , oltre che l'angolo di freccia, diedro e di pitch. La funzione matlab® `Boom3DShape` presenta alcune opzioni, come per esempio la creazione di una file stl per la visualizzazione tridimensionale del boomerang che può essere aperta con Femap, Paint3D o Blender. Di seguito sono riportati alcune righe di codice per spiegare al meglio la creazione di una geometria:

```
1 clear all
2 close all
3 addpath(genpath('BLACKBOX'));
4 %% INPUT in Boom3dShapes.m
5 BoomInfo.Pianta.l=0.3; % [m]
6 BoomInfo.Pianta.freccia=pi/6; % [Rad]
7 BoomInfo.Pianta.diedro=0; % [Rad]
8 BoomInfo.Pianta.pitch=0; % [Rad]
9 BoomInfo.Geom3D.p_c=20;
10 BoomInfo.Geom3D.num=20;
11 BoomInfo.Geom3D.PARA=1.5;
12 BoomInfo.Profile.Chord=0.05; % [m]
```

```

13 BoomInfo.Mecc.Dens=650; % [Kg/m^3]
14 Profile2D=importdata('Naca0012.dat');
15 Xp=[Profile2D.data(2:67,1) ; fliplr(Profile2D.data(68:end,1)')].*Chord;
16 Zp=[Profile2D.data(2:67,2) ; fliplr(Profile2D.data(68:end,2)')].*Chord;
17 Xp_flip=-(Chord/2.*ones(size(Xp))+Xp)+Chord/2.*ones(size(Xp))-Chord;
18 Zp_flip=(Zp);
19 [n,~]=size(Xp);
20 % Riordino in modo da rispettare il sistema di riferimento
21 Xp_flip=[fliplr(Xp_flip(1:n/2)')';fliplr(Xp_flip(n/2+1:end)')'];
22 Zp_flip=[fliplr(Zp_flip(1:n/2)')';fliplr(Zp_flip(n/2+1:end)')'];
23 BoomInfo.Profile.Xp_sx=Xp;
24 BoomInfo.Profile.Xp_dx=Xp_flip;
25 BoomInfo.Profile.Zp_sx=Zp;
26 BoomInfo.Profile.Zp_dx=Zp_flip;
27 %% Aggiorno BoomInfo
28 [BoomInfo] = Boom3DShape(BoomInfo, 'Info', 'Create_Stl');

```

La funzione matlab@ **Boom3DShape** fornisce in output una nuova variabile struct uguale a **BoomInfo** con l'aggiunta di alcuni dati come:

- **BoomInfo.Mecc.V**: Volume del boomerang (m^3)
- **BoomInfo.Mecc.m**: Massa del boomerang (Kg)
- **BoomInfo.Mecc.I**: Inerzia del boomerang ($Kg \cdot m^2$)
- **BoomInfo.Mecc.CG**: Posizione del Baricentro (m)

Ed altri dati necessari all'aerodinamica come:

- **PStartDx**: Posizione del centro aerodinamico della pala sinistra (Kgm^2)
- **StartDx**: inizio della pala sinistra nel sistema di riferimento pala (m)
- **PStartSx**: Posizione del centro aerodinamico della pala sinistra (Kgm^2)
- **StartSx**: inizio della pala sinistra nel sistema di riferimento pala (m)

La figura 38 mostra i punti necessari al calcolo delle forze aerodinamiche calcolati in matlab@ **Boom3DShape**. In particolare vengono definite le origini dei sistemi di riferimento pala e l'apertura alare lungo la quale l'integrazione discreta viene effettuata. La parte di raccordo viene trascurata dal calcolo aerodinamico sia perché il profilo non è facilmente definibile, perché permette la transizione tra le due zone, ed inoltre sia la pressione dinamica che il braccio rispetto al baricentro sono bassi rispetto a tutta l'apertura alare generando così poco momento necessario all'effetto giroscopico del corpo. Una volta calcolati questi parametri geometrici viene chiamata la funzione matlab@ **fpolar360** descritto nella Sezione ?? che permette di ricavare i coefficienti bidimensionali della portanza, momento e resistenza.

```

1 coeff360 = f_polar_360('load', 'fastcatch.dat', 50000, 1.6);
2 BoomInfo.Aero.alpha_cl= coeff360.alpha;
3 BoomInfo.Aero.alpha_cd= coeff360.alpha;
4 BoomInfo.Aero.alpha_cm= coeff360.alpha;
5 BoomInfo.Aero.Cl=coeff360.CL;
6 BoomInfo.Aero.Cd=coeff360.CD;
7 BoomInfo.Aero.Cm=coeff360.CM;
8 CheckBoomInfo(BoomInfo, 'Plot');

```

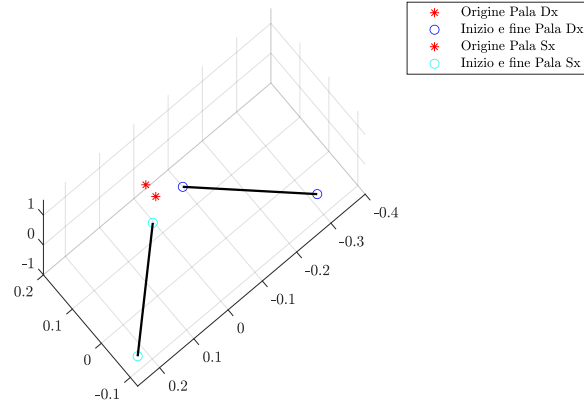


Figura 38: OUTPUT da matlab@ Boom3DShape per il calcolo delle forze aerodinamiche

Nella variabile **BoomInfo** sono contenuti tutti i dati necessari alla simulazione, sia per la parte del calcolo delle equazioni di moto, sia per le forze aerodinamiche. La funzione matlab@ **CheckBoomInfo** permette di verificare che tutti i dati siano stati inseriti correttamente in questo modo vengono evitati possibili problemi e bug durante la simulazione. Infine viene richiamato il calcolo delle condizioni iniziali ed il calcolo della traiettoria tramite matlab@ **ode45** e **EquationOfMotionsQuaternionIND** o **EquationOfMotionsQuaternion** (Senza velocità indotta)

```

1 X_ini=[10.0000    9.9000    1.6000   65.5000    8.3000];
2 r0=X_ini(1)*2*pi;
3 theta=X_ini(2)*pi/180;
4 D=X_ini(3)*pi/180;
5 phi=X_ini(4)*pi/180;
6 Vs=X_ini(5);
7 theta0=0*pi/180;
8 phi0=0*pi/180;
9 psi0=0*pi/180;
10 Tl_0=[cos(theta0)*cos(psi0), cos(theta0)*sin(psi0), -sin(theta0)
11       -cos(phi0)*sin(psi0)+sin(phi0)*sin(theta0)*cos(psi0), ...
12       cos(phi0)*cos(psi0)+sin(phi0)*sin(theta0)*sin(psi0), sin(phi0)*cos(theta0)
13       sin(phi0)*sin(psi0)+cos(phi0)*sin(theta0)*cos(psi0), ...
14       -sin(phi0)*cos(psi0)+cos(phi0)*sin(theta0)*sin(psi0), cos(phi0)*cos(theta0)];
15 z0= 1.8; % initial altitude
16 [quat,ustart] = HandInitial(r0,theta,D,phi,Vs,Tl_0,BoomInfo);
17 tfin=40;
18 [V_dx_b,V_sx_b]=InitialConditionPlot(Tl_0,quatToAtt(quat),ustart',[0;0;r0],BoomInfo);
19 options = odeset('Events', @EventsQUAT,'RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-6);
20 Y0=[quat 0 0 r0  ustart(1) ustart(2) ustart(3) 0 0 z0 ]';
21 [TOUT,YOUT_quat] = ode45(@(t,y)EquationOfMotionsQuaternion_IND(t,y,BoomInfo,Tl_0),[0 ...
22     tfin],Y0,options); %

```

Infine ce una serie di funzioni che permettono di visionare in modo più semplice e rielaborare i risultati della matlab@ **ode45**:

```

1 %% Grafici Finali
2 [YOUT] = Eul_Quat(YOUT_quat,TOUT);

```

```

3 Energy(TOUT,YOUT,BoomInfo)
4 PlotTipDxSx(TOUT,YOUT,BoomInfo,Tl_0)
5 PlotAeroForce(YOUT,TOUT,BoomInfo)
6 ChiAvan(BoomInfo,YOUT,TOUT)
7 FinalReport(YOUT,TOUT)

```

Il codice così costruito è estremamente facile e veloce, e soprattutto può essere sfruttato molto facilmente all'interno di un ottimizzatore o di un codice più ampio, possono essere provati diversi boomerang, di diversa forma, con diversi profili, con varie masse.

A.2 Algoritmi

L'implementazione su Matlab è divisa in 3 macro gruppi, i cui algoritmi di funzionamento può essere visualizzato nelle Figure 39,40 e 41:

- **BoomShape3D.m**: è la funzione che permette di creare la geometria tridimensionale, aggiunge nuovi dati all'interno della struct **BoomInfo.s**
- **fpolar360.m**: è la funzione che permette di calcolare i coefficienti aerodinamici del profilo bidimensionale scelto, e aggiungerli all'interno di **BoomInfo.s**, inoltre utilizza **Xfoil**, per il calcolo a bassi angoli d'attacco e poi tramite l'analogia della lastra piana per angoli più elevati.
- **Ode45.m**: è la funzione matlab® che permette di ricavare la traiettoria e di risolvere le equazioni differenziali di moto. In particolare ad ogni istante t vengono calcolate le forze ed i momenti aerodinamici con o senza velocità indotta tramite la funzione **AeroDynamicFAST** e considerati all'interno delle equazioni di moto **EquationOfMotionsQuaternion**.

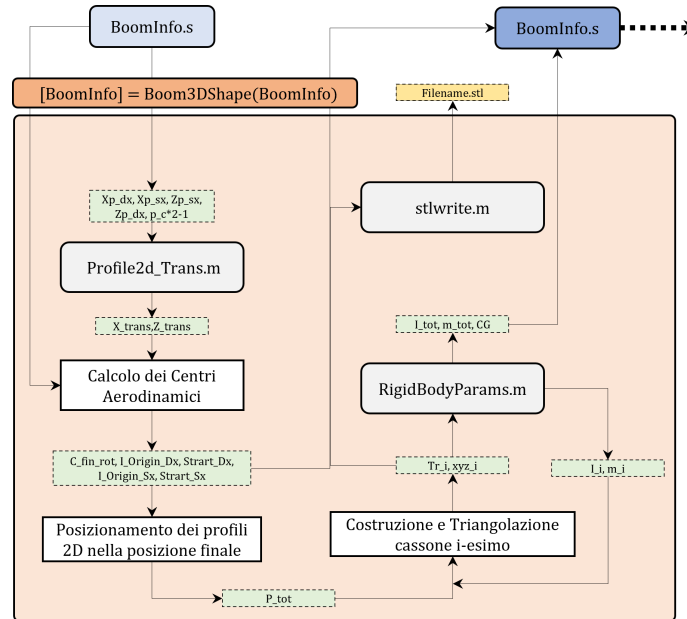


Figura 39: Algoritmo globale per il calcolo dei parametri geometrici

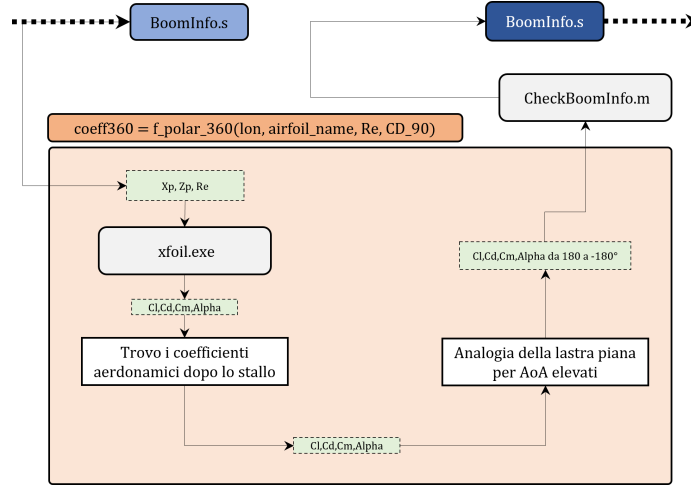


Figura 40: Algoritmo globale per il calcolo dei coefficienti aerodinamici da -180 a 180

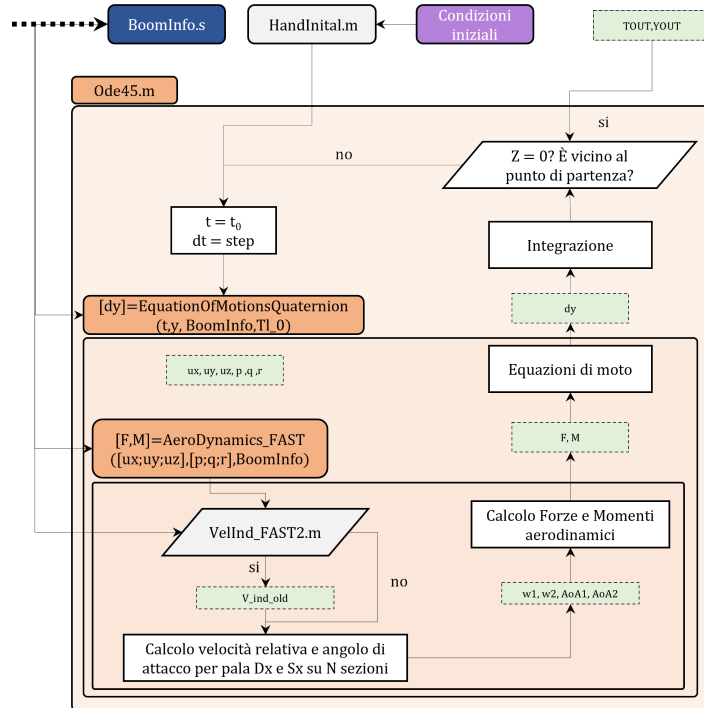


Figura 41: Algoritmo globale per il calcolo della traiettoria

B Verifica Profili Aerodinamici

B.1 Confronto f_polar_360 vs QBlade

Di seguito un confronto per il *NACA 0012* a Re 50000 tra i coefficienti predetti da QBlade, mediante interpolazione di Montgomerie, e quelli tramite **f_polar_360**.

Lo script da noi sviluppato è un modello più semplice rispetto a quello implementato in QBlade. In particolare il C_l è sottostimato nell'intorno di 180° . Si noti anche che QBlade non restituisce una stima del C_m , che invece può essere stimato tramite **f_polar_360**. In generale i coefficienti valutati sono in buon accordo con risultati sperimentali in letteratura, in fig. 45.

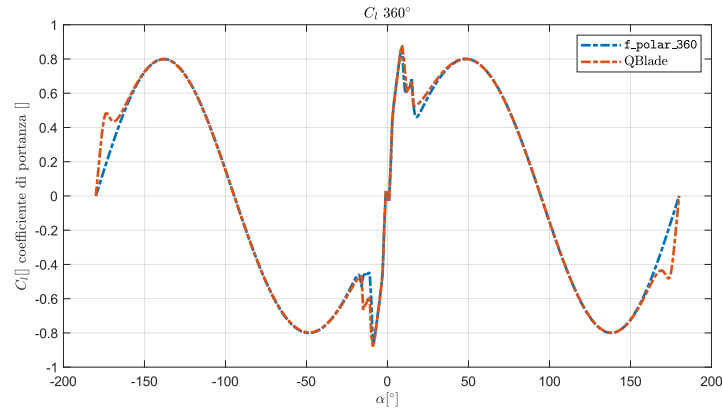


Figura 42: Confronto C_l

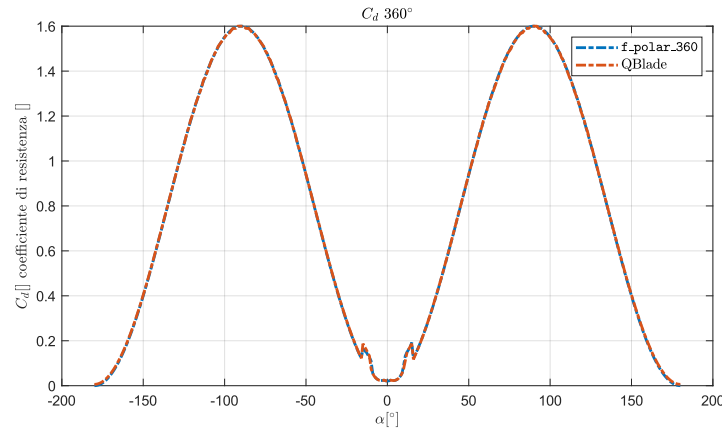


Figura 43: Confronto C_d

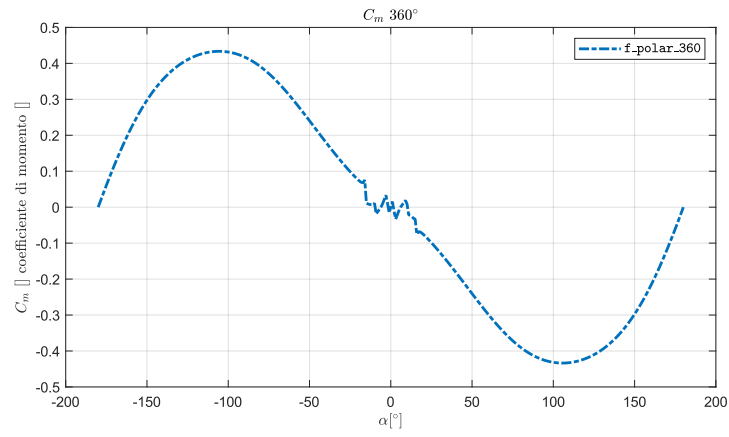


Figura 44: Confronto C_m

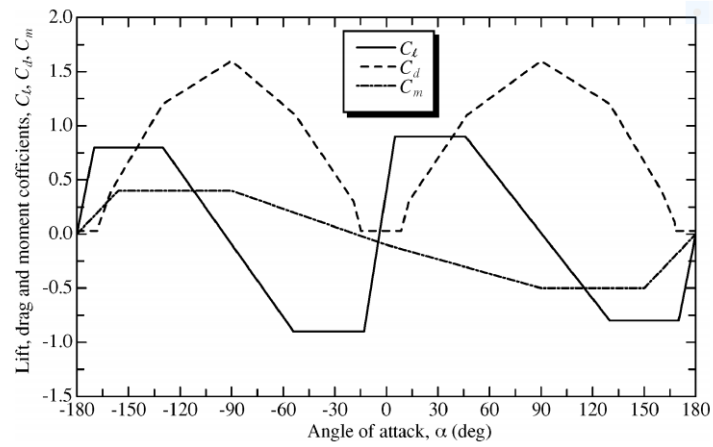


Figura 45: Coefficienti aerodinamici per *NACA 0012* utilizzati in un precedente studio della dinamica di un boomerang [1] [4]

C Profili

Da rifare tutta l'impaginazione, foto perfette, ottimo, però magari affiancare le immagini così da recuperare spazio Di seguito sono riportati i profili citati nell'elaborato, che hanno evidenziato risultati promettenti durante lo studio.

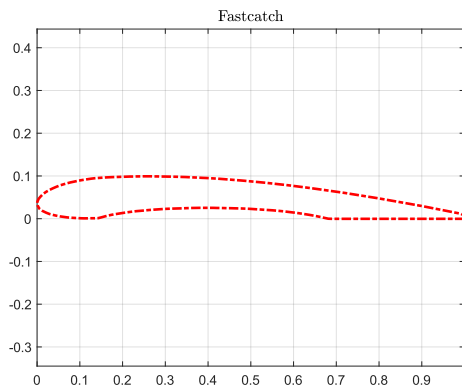


Figura 46: Profilo utilizzato per boomerang a rapido ritorno [21]

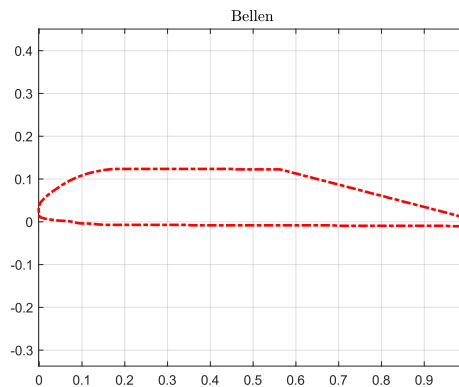


Figura 47: Profilo di tipico impiego per Boomerang [21]

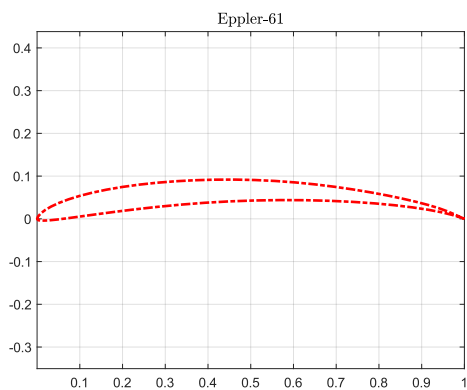


Figura 48: Profilo impiegato a bassi Re [17]

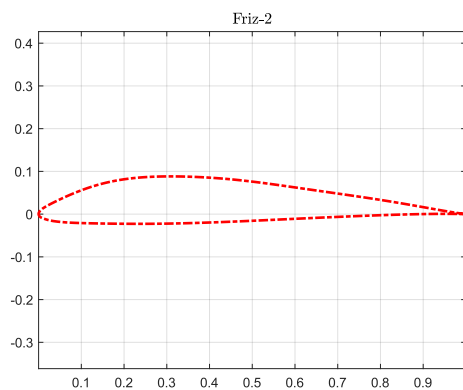


Figura 49: Profilo ottimizzato a partire dal *SD7060*

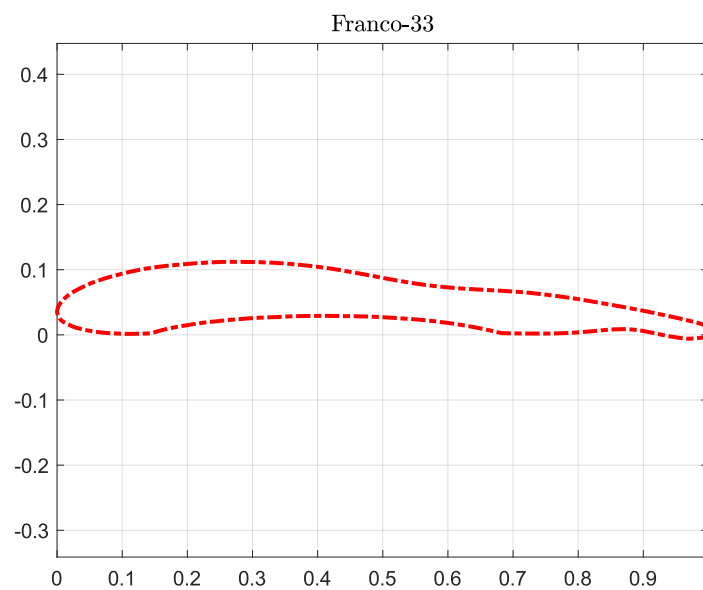


Figura 50: Profilo ottimizzato a partire dal *fastcatch*

Riferimenti bibliografici

- [1] Akira Azuma et al. “Flight Dynamics of the Boomerang, Part 1: Fundamental Analysis”. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 27.4 (2004), pp. 545–554. DOI: 10.2514/1.11157. eprint: <https://doi.org/10.2514/1.11157>. URL: <https://doi.org/10.2514/1.11157>.
- [2] Manuela Battipede. “Boomerang Flight Mechanics: Unsteady Effects on Motion Characteristics”. In: *Journal of Aircraft* 36.4 (1999), pp. 689–696. DOI: 10.2514/2.2492. eprint: <https://doi.org/10.2514/2.2492>. URL: <https://doi.org/10.2514/2.2492>.
- [3] Pierre Bigot, Valdemir Carrara e Philipe Massad. “Numerical calculation algorithm of attitude and movement of a boomerang”. In: ott. 2013. DOI: 10.5540/03.2013.001.01.0161.
- [4] Chris C Critzos, Harry H Heyson e Robert W Boswinkle Jr. *Aerodynamic characteristics of NACA 0012 airfoil section at angles of attack from 0 deg to 180 deg*. Rapp. tecn. NATIONAL AERONAUTICS e SPACE ADMINISTRATION WASHINGTON DC, 1955.
- [5] John Cross. *Performance Boomerangs. Your guide to tuning and carving*. 2012.
- [6] Louis Edelman. *Xfoil Interface Updated*. MATLAB Central File Exchange. Retrieved July 3, 2022. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/49706-xfoil-interface-updated>.
- [7] H. GLAUERT. “A General Theory of The Autogyro”. In: (1926).
- [8] Prasad Gudem, Manuel Schütz e Kyle Holland. “Flight Dynamics of Boomerangs: Impact of Reversal of Airflow, Reversal of Angle-of-Attack and Asymmetric Lift”. In: *AIAA Aviation 2019 Forum*. DOI: 10.2514/6.2019-2826. eprint: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2019-2826>. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2019-2826>.
- [9] S. Widnall J. Peraire. “Lecture L26 -3D Rigid Body Dynamics: The Inertia Tensor”. In: (2008).
- [10] N. javergard. “Flight Dynamics of boomerangs”. In: (2018).
- [11] Yong-Hui Xia Kit Ian Kou. “Linear Quaternion Differential Equations: Basic Theory and Fundamental Results”. In: *School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, Fujian, China* ().
- [12] Kit Ian Kou e Yong-Hui Xia. “Linear quaternion differential equations: basic theory and fundamental results”. In: *Studies in Applied Mathematics* 141.1 (2018), pp. 3–45.
- [13] J. Gordon Leishman. *Principles of helicopter aerodynamics*.
- [14] P. Di Lizia. *Lezione di Meccanica Aerospaziale*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=kIaXye4-7kE&t=87s>.
- [15] David Marten et al. “QBLADE: an open source tool for design and simulation of horizontal and vertical axis wind turbines”. In: *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering* 3.3 (2013), pp. 264–269.
- [16] Björn Montgomerie. “Methods for root effects, tip effects and extending the angle of attack range to $\{+-\}$ 180 deg., with application to aerodynamics for blades on wind turbines and propellers”. In: (2004).
- [17] Thomas J. Mueller. “Aerodynamic Measurements at Low Reynolds Numbers for Fixed Wing Micro-Air Vehicles”, presented at the”. In: 1999, pp. 13–17.
- [18] G.A. Pignone. *Boomerang: fascino di un’arma preistorica*. Olimpia, 1979. URL: <https://books.google.it/books?id=HFn8GgAACAAJ>.
- [19] Daniel Prosser. *Xoptfoil, an airfoil optimization code using the Xfoil aerodynamics engine*. 2017-2019. URL: <https://github.com/montagdude/Xoptfoil>.
- [20] Anton Semechko. “Using Divergence Theorem to Compute Exact Rigid-Body Parameters of Objects Represented by Triangular Surface Meshes”. In: (December, 2014). URL: <https://it.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/48913-rigid-body-parameters-of-closed-surface-meshes>.

- [21] Michael Siems. *Ultimate Boomerang Book*. 2012.
- [22] J. Vassberg. “Boomerang Flight Dynamics”. In: giu. 2012. ISBN: 978-1-62410-185-4. DOI: 10.2514/6.2012-2650.