Rotazioni e quaternioni

Daniele Marini

Problema 1: “gimbal lock”

- blocco del giroscopio
- esprimiamo le rotazioni con gli angoli di Eulero, tre angoli di rotazione attorno agli assi coordinati (si pensi a un velivolo, *yaw (head)*, *pitch*, *roll*)
- implementiamo gli angoli di Eulero con le matrici appena esaminate

- eseguiamo una rotazione di yaw di 90°
- eseguiamo una rotazione di pitch di 90°
- esprimiamo la matrice come funzione di tre parametri **E**(h,p,r) [concatenazione di tre matrici di rotazione $\mathbf{R}_z(h)$. $\mathbf{R}_x(p)$. $\mathbf{R}_y(r)$] dopo la prima trasformazione abbiamo **E**(h, π/2, r)=

$$\begin{pmatrix} \cos r \cos h - \sin r \sin h & 0 & \cos r \sin h + \sin r \cos h \\ \sin r \cos h + \cos r \sin h & 0 & \sin r \sin h - \cos r \cos h \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- abbiamo perso p, un grado di libertà, non possiamo più ruotare attorno a *z*

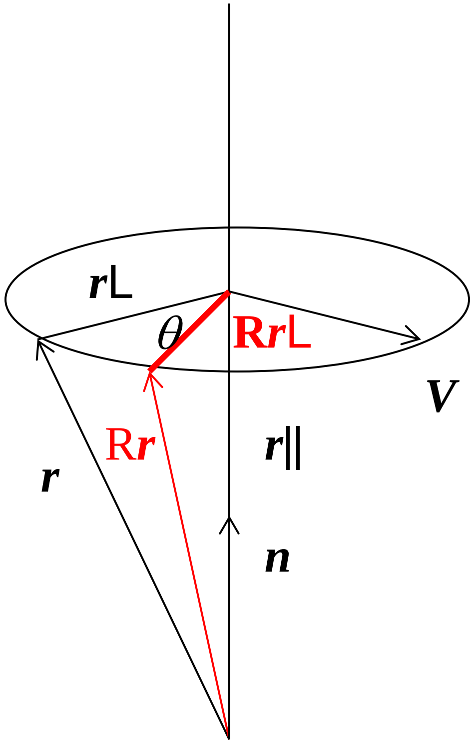
Problema 2: Interpolare rotazioni

- nella animazione si richiede di modificare la posizione di un oggetto o della camera con traslazioni e rotazioni
- interpolare traslazioni non pone problemi
- da un fotogramma al successivo la rotazione deve essere interpolata, è utile quindi poter esprimere la rotazione in forma parametrica

- se incrementiamo di una piccola quantita’ un angolo più volte nascono problemi di arrotondamento
- se abbiamo rotazione attorno a un solo asse nascono irregolarità e movimenti a scatto
- se abbiamo più rotazioni, dopo un po’ di applicazioni la matrice non è più ortogonale e la scena si deforma
- si può risolvere il problema “rinormalizzando” la matrice a ogni passo
- comunque è una soluzione costosa

Specificare le rotazioni

- Una matrice di rotazione generica dipende da 9 parametri
- una rotazione generica richiede un'asse di rotazione ***n*** e un angolo θ: solo 4 parametri (3 per il vettore, 1 per l'angolo)



il vettore ***r*** può essere scomposto in una componente parallela a ***n*** e in una ortogonale:

r||=(***n.r***) ×***n***

r⊥=***r* - (*n.r*)** ×***n***

la componente || resta invariata nella rotazione, varia solo la componente ⊥ (rossa). Sia ***V*** ortogonale a ***r***⊥:

V=***n***× ***r***⊥ **=** ***n***×***r*** da cui il vettore ruotato (rosso) espresso in funzione di ***V***:

$$R\mathbf{r}\perp = (\cos\theta)\mathbf{r}\perp + (\sin\theta)\mathbf{V}$$

quindi :

$$R\mathbf{r} = R\mathbf{r}\| + R\mathbf{r}\perp$$

$$= R\mathbf{r}\| + (\cos\theta)\mathbf{r}\perp + (\sin\theta)\mathbf{V}$$

$$= \mathbf{n.r} \times \mathbf{n} + (\cos\theta)(\mathbf{r} - \mathbf{n.r} \times \mathbf{n}) + (\sin\theta)\mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

$$= (\cos\theta)\mathbf{r} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}(\mathbf{n.r}) + (\sin\theta)\mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

I quaternioni

Numeri complessi (richiami)

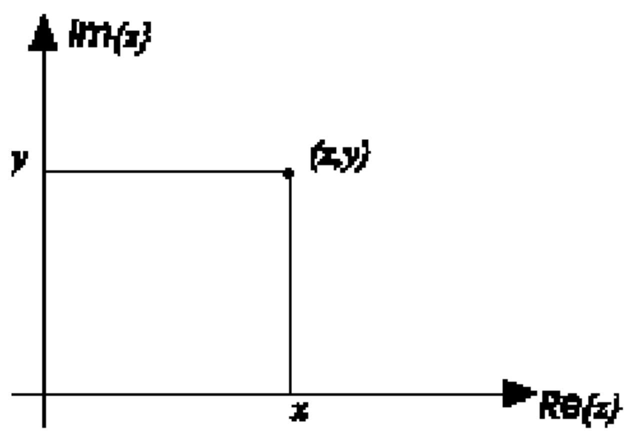
I numeri complessi sono una estensione dei numeri reali e sono indispensabili per risolvere equazioni del tipo: $z=(-1)^2$. Adottando il simbolo i per denotare la radice quadrata dell'unita negativa, la soluzione a questa equazione diventa $z = \pm i$.

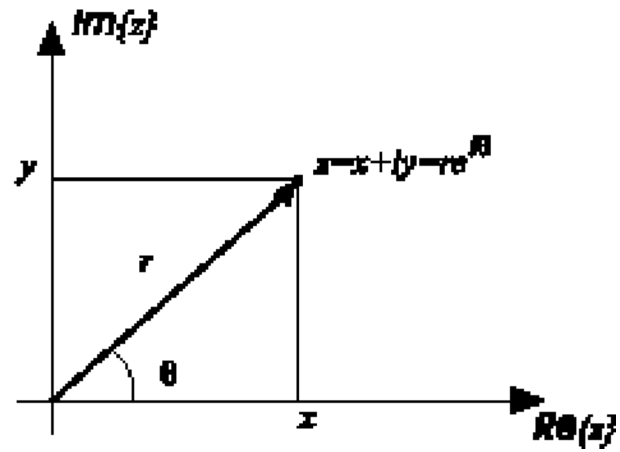
Un numero complesso z è una coppia ordinata di numeri reali. Si può quindi rappresentare un numero complesso con la notazione

$$z=(x,y)$$

dove x rappresenta la parte reale, denotata anche con $Re\{z\}$, mentre y rappresenta la parte immaginaria, denotata anche con$Im\{z\}$.

Un numero complesso si può anche rappresentare nella forma $z=x+iy$ (oppure $z=x+jy$ nella teoria dei segnali). Questa forma di rappresentazione dei numeri complessi viene anche chiamata "forma Cartesiana". I numeri complessi possono anche essere pensati come punti del "piano complesso", perciò i numeri complessi possono essere considerati come un punto vista dal quale studiare la geometria analitica del piano. Si usa anche la rappresentazione in coordinate polari





Sono definite numerose operazioni tra numeri complessi, in particolare:

somma : $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
sottrazione: $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
complesso coniugato: $z^* = (x + iy)^* = (x - iy)$

Le operazioni di prodotto e divisione sono più semplici nella forma polare, ricordando le proprietà degli esponenziali:

prodotto: $z_1 \, . \, z_2 = r_1 \, e^{i\theta_1} \, . \, r_2 \, e^{i\theta_2} = r_1 \, . \, r_2 \, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
divisione: $z_1 / z_2 = r_1 \, e^{i\theta_1} / r_2 \, e^{i\theta_2} = r_1 / r_2 \, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Per convertire un numero complesso dalla forma cartesiana a quella polare si ricorre a proprietà trigonometriche e al teorema di Pitagora; infatti ricordiamo che:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta$$

ed, equivalentemente, le componenti r e θ di un numero complesso in coordinate polari si convertono in forma cartesiana con le due equazioni:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

La rappresentazione in forma polare più adeguata è basata sulla formula di Eulero che permette di rappresentare un numero complesso come esponenziale in base *e* in forma trigonometrica:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Le formule di Eulero inverse permettono di ottenere seno e coseno dalla rappresentazione esponenziale di un numero complesso:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

La coppia di valori ($\cos\theta$, $\sin\theta$) rappresenta un qualunque punto su un cerchio di raggio unitario centrato nell'origine, al variare di θ; perciò per individuare qualsiasi punto nel piano è sufficiente moltiplicare la forma esponenziale per il modulo *r*:

$$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

I quaternioni

- la rotazione di un vettore ***r*** di un angolo si può esprimere con un operatore chiamato quaternione, caratterizzato da 4 numeri reali
- abbiamo 4 gradi di libertà invece dei 9 elementi della matrice
- useremo quaternioni *unitari*
- i quaternioni possono essere considerati come una generalizzazione dei numeri complessi, con uno scalare *s* come parte reale e un vettore ***v*** come parte immaginaria

- denotiamo un quaternione con:

$$q = s + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

dove ***i,j,k*** sono i quaternioni unitari ed equivalgono ai vettori unitari degli assi in un sistema vettoriale e hanno le proprietà:

$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$; $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k}$

- da queste proprietà ricaviamo le operazioni somma e moltiplicazione

Operazioni sui quaternioni

- somma:

$q+q'=(s+s',\mathbf{v}+\mathbf{v}')$

- moltiplicazione:

$qq'=(ss'-\mathbf{v}\mathbf{v}', \mathbf{v}\times\mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v})$

- coniugato:

$q=(s,\mathbf{v})$ $q^*=(s,-\mathbf{v})$

- il prodotto di un quaternione con il suo coniugato dà il modulo del quaternione:

$qq^*=(ss-|\mathbf{v}^2|)=q^2$

- quaternioni della forma: *q=(s,(0,0,0))* sono associati ai numeri reali
- quaternioni della forma: *q=(s,(a,0,0))* sono associati ai numeri complessi
- negazione:

*dato q=(s,**v**)* si ha *-q=(-s,-**v**)*

- identità moltiplicativa:

$$(a,\vec{v})(1,\vec{0}) = (a - \vec{v}\cdot\vec{0}, a\vec{0} + 1\vec{v} + \vec{v}\times\vec{0}) \;=\; (a,\vec{v})$$

$$(1,\vec{0})(a,\vec{v}) = (a - \vec{0}\cdot\vec{v}, 1\vec{v} + a\vec{0} + \vec{0}\times\vec{v}) \;=\; (a,\vec{v})$$

- inverso della moltiplicazione:

$$q^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+|\vec{v}|^2}, \frac{-\vec{v}}{a^2+|\vec{v}|^2}\right)$$

basta verificare che:

$$(a,\vec{v})(a,-\vec{v}) = (\boxed{a^2+\vec{v}\cdot\vec{v}}, \boxed{-a\vec{v}} + \boxed{a\vec{v}} + \boxed{\vec{v}\times(-\vec{v})})$$
$$= a^2+|\vec{v}|^2$$

da cui $qq^{-1}=q^{-1}q=1$

- quoziente: $$\frac{q_1}{q_2} = q_1 q_2^{-1}$$

•ricordiamo la moltiplicazione:

$$qq'=(\boxed{ss'-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'}, \boxed{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}'} \boxed{+s\boldsymbol{v}'} + \boxed{s'\boldsymbol{v}})$$

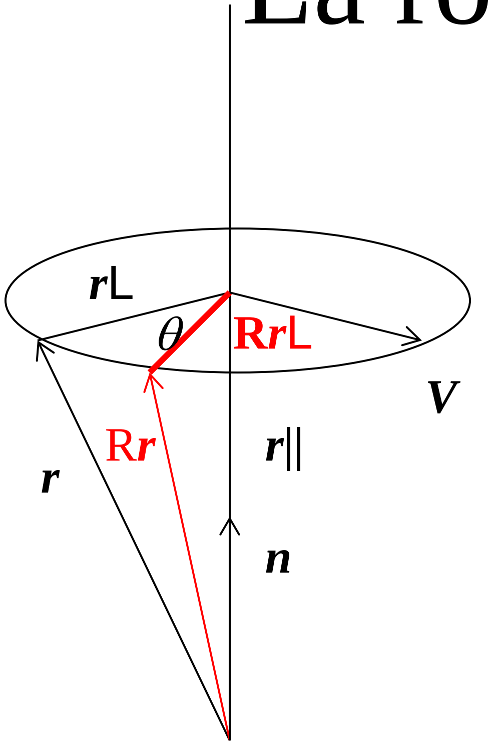
- Se $|q|=1$ il quaternione è detto *unitario*
- L'insieme dei quaternioni unitari forma una sfera in uno spazio a 4 dimensioni
- Si può dimostrare che se $q=(s,\mathbf{v})$ allora esiste un vettore $\mathbf{v}'$ e un numero $-\pi<=\theta<=\pi$ tale che: $q=(\cos\theta, \mathbf{v}'\sin\theta)$
- Se q è unitario allora $q=(\cos\theta, \sin\theta\,\mathbf{n})$ con $\mathbf{n}$ unitario
- i quaternioni non sono commutativi rispetto al prodotto, es:

(ricordiamo: $qq'=(ss'-\mathbf{v}\mathbf{v}', \mathbf{v}\times\mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v})$

$q_1q_2=(2-0, <0,1,0>+2<1,0,0>+<0,0,1>)=(2,<2,1,1>)$

$q_1q_2=(2-0,2<1,0,0>+<0,1,0>+<0,0,-1>)=(2,<2,1,-1>)$

La rotazione con quaternioni



- $\mathbf{r}$ è definito dal quaternione $p=(0,\mathbf{r})$
- definiamo l'operatore $R_q=q(.)q^{-1}$ con q quaternione unitario $(s,\mathbf{v})$
- applicato a p l'operatore dà: qpq^{-1}
- in forma esplicita:
- $R_q(p)=(0,(s^2-\mathbf{v.v})\mathbf{r}+2\mathbf{v}(\mathbf{v.r})+2s(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$
- ricordando che: se q è unitario allora $q=(\cos\theta, \sin\theta\,\mathbf{n})$ con $\mathbf{n}$ unitario e sostituendo si ha:

$$R_q(p)=(0,(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathbf{r}+2\sin^2\theta\,\mathbf{n}(\mathbf{n.r})+2\cos\theta\sin\theta(\mathbf{n}\times\mathbf{r}))=$$

$$(0,\mathbf{r}\cos 2\theta+(1-\cos 2\theta\,\mathbf{n}(\mathbf{n.r})+\sin 2\theta(\mathbf{n}\times\mathbf{r}))$$

- confrontiamo la:

$(0, \boldsymbol{r}\cos 2\theta + (1-\cos 2\theta)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}) + \sin 2\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}))$

- con l'equazione ricavata prima:

$$(\cos\theta)\mathbf{r} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}(\mathbf{n}.\mathbf{r}) + (\sin\theta)\mathbf{n}\times\mathbf{r}$$

- a meno del coefficiente 2 sono identiche
- la rotazione di un vettore $\boldsymbol{r}$ di $(\theta,\boldsymbol{n})$ si può quindi attuare:
  - passando allo spazio dei quaternioni
  - rappresentando la rotazione con un quaternione unitario $q=(\cos\theta/2, \sin\theta/2\,\mathbf{n})$
  - applicando l'operatore $q(.)q^{-1}$ al quaternione $(0,\boldsymbol{r})$
- la rotazione si parametrizza quindi con i 4 parametri: $\cos\theta/2, \sin\theta/2\,\mathbf{n}_x, \sin\theta/2\,\mathbf{n}_y, \sin\theta/2\,\mathbf{n}_z$

ancora un esempio

- ruotiamo un oggetto di 180° attorno all'asse *x* con la sequenza di rotazioni R(0,0,0), ... R(πt,0,0), ..., R(π,0,0) con 0<=t<=1
- la seconda sequenza ruota attorno *y*, *z* : R(0,0,0), ... R(0, πt, πt), ..., R(0, π, π)
- la posizione finale e' identica, ma l'oggetto "twista" nella seconda
- occorre controllare i 3 angoli di Eulero per governare la sequenza desiderata
- da qui l'uso dei quaternioni

con i quaternioni

- la rotazione ottenuta con la sequenza $R(0,0,0)$, ... $R(\pi t,0,0)$, ..., $R(\pi,0,0)$ è rappresentata dal quaternione $(\cos(\pi/2), \sin(\pi/2)(1,0,0))=(0,(1,0,0))$
- la rotazione ottenuta con la sequenza $R(0,0,0)$, ... $R(0, \pi t, \pi t)$, ..., $R(0, \pi, \pi)$ è rappresentata dal prodotto dei due quaternioni $(0,(0,1,0))(0,(0,0,1))=(0,(1,0,0))$
- **<u>Il risultato è uguale</u>**

Interpolare

- una sequenza di rotazioni puo’ ora essere attuata da una sequenza di quaternioni
- la sequenza di matrici di rotazione espresse con angoli di Eulero viene trasformata in una sequenza di quaternioni che danno origine a una nuova sequenza di matrici di rotazione
- come?

Entrare e uscire dallo spazio dei quaternioni

- data una matrice generale di rotazione determinare il quaternione corrispondente
- dato un quaternione determinare la corrispondente matrice di rotazione

- per ruotare un vettore ***p*** con il quaternione *q* usiamo l'operatore: $q(0,\mathbf{p})q^{-1}$
- dove $q=(\cos(\theta/2),\sin(\theta/2)\mathbf{n})=(s,(x,y,z))$
- si può dimostrare che questo corrisponde ad applicare al vettore la matrice di rotazione:

$$M=\begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2xy-2sz & 2sy+2xz & 0 \\ 2xy+2sz & 1-2(x^2+z^2) & -2sx+2yz & 0 \\ -2sy+2xz & 2sx+2yz & 1-2(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- la trasformazione inversa, dalla matrice al quaternione, consiste nel prendere una generica matrice:

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & M_{0,3} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,0} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{pmatrix}$$

- in cui $M_{3,3}=1; M_{0,3}=M_{1,3}=M_{2,3}=M_{3,0}=M_{3,1}=M_{3,2}=0$
- altri vincoli sulla matrice sono:
  - la somma degli elementi diagonali è: $4-4(x^2+y^2+z^2)$
  - il quaternione deve essere unitario, quindi:
  - $s^2+ x^2+y^2+z^2=1$ da cui: $4-4(x^2+y^2+z^2)=4-4(1- s^2)=4 s^2$

- da questa equazione si ricava:

$$s = \pm \frac{1}{2}\sqrt{M_{0,0} + M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3}}$$

e inoltre :

$$x = \frac{M_{2,1} - M_{1,2}}{4s}$$

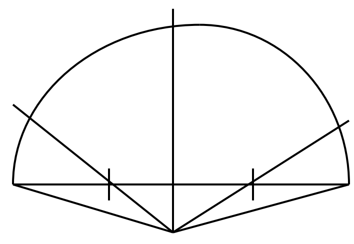
$$y = \frac{M_{0,2} - M_{2,0}}{4s}$$

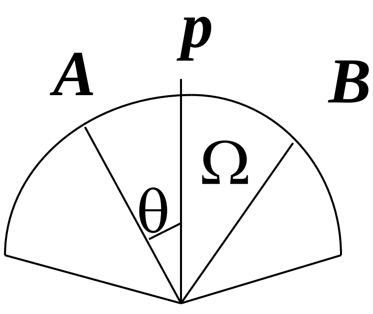
$$z = \frac{M_{1,0} - M_{0,1}}{4s}$$

Interpolazione lineare sferica SLERP

- per interpolare tra due quaternioni unitari determinando i quaternioni intermedi che identificano le matrici di rotazione ricordiamo che lo spazio dei quaternioni unitari forma una ipersfera nello spazio 4d, perciò tutti i quaternioni interpolati giacciono sulla sfera stessa.

- una interpolazione lineare ingenua produce angoli diseguali e quindi una variazione di velocità, da qui la nozione di interpolazione *sferica*:





- interpoliamo lungo una linea *geodesica* che ha gli esteremi nei punti chiave
- in due dimensioni (per semplicità) i punti ***A,B*** sono separati dall'angolo Ω, e $\boldsymbol{p}$ forma con $\boldsymbol{A}$ un angolo θ. Deriviamo $\boldsymbol{p}$ con interpolazione sferica con l'equazione parametrica: $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B}$;

- $\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}$ poiché:
- $|\boldsymbol{p}|=1$; $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}=cos(\Omega)$
- $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{p}=cos(\theta)$
- ricaviamo:
- $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}sin(\Omega-\theta)/sin(\Omega)+\boldsymbol{B}sin(\theta)/sin(\Omega)$

- generalizzando in 4d l'interpolazione tra due quaternioni unitari q_1 e q_2 che formano l'angolo: $q_1.q_2 = cos(\Omega)$ si ha, considerando θ come parametro 0<=u<=1:

$$slerp(q_1, q_2, u) = q_1 \frac{\sin((1-u)\Omega)}{\sin(\Omega)} + q_2 \frac{\sin(\Omega u)}{\sin(\Omega)}$$

- esistono due possibili archi geodesici che vanno da q_1 a q_2 uno segue il percorso più breve, l'altro il più lungo, e questo equivale a interpolare lungo l'angolo Ω o l'angolo $2\pi-\Omega$. Ciò consegue dal fatto che gli operatori $q(.)q^{-1}$ e $(-q)(.)(-q)^{-1}$ producono il medesimo risultato
- per decidere quale percorso seguire occorre valutare la grandezza della distanza tra i due quaternioni e tra il primo e il secondo negato:
- $(p-q).(p-q)$ verso $(p+q).(p+q)$ e scegliere il minore, sostituendo, nel caso, q con $-q$.

- L’interpolazione tra più di due posizioni chiave produce geodesiche che possono essere discontinue nella derivata prima, quindi dà luogo a movimento con scatti.
- per ovviare si valuta la velocità angolare e si suddividono gli intervalli per il parametro in modo adeguato (più fitti quando la velocità è maggiore).

continua ...

un po' di link

- http://www.3dgamedev.com/articles/eulers_are_evil.htm
- http://www.gamedev.net/reference/articles/article1095.asp
- keyword per ricerca in rete: quaternion, euler angle