

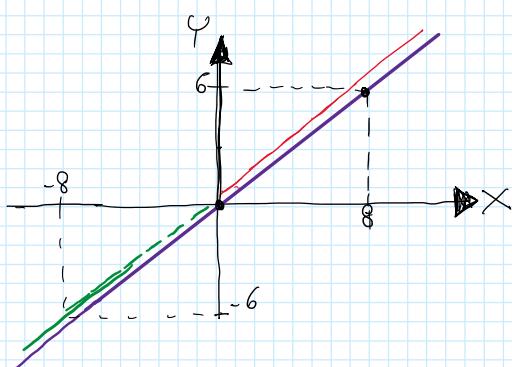
## 12. Lezione 5 novembre

giovedì 5 novembre 2020 10:29

**NOTA SU FUNZIONE atan2**  
x ESECUZIONE

$\text{atan2}(Y, X)$  MATLAB

tenere distinte  
 $X$  e  $Y$  permette di  
risalire al quadrante  
(diversamente da atan  
normale)



$$\text{atan}\left(\frac{6}{8}\right) = 0.6435 + i\pi$$

**TUTTA RETTA**

**2 soluzioni!**

$$\text{atan2}(6, 8) = 0.6435$$

**SOLO QUADR.**  
**SEMI RETTA ROSSA**

$$\text{atan2}(-6, -8) = 0.6435 + \pi$$

**SEMI RETTA VERDE**

$$\text{atan}\left(\frac{6}{8}\right) = \text{atan}\left(\frac{-6}{-8}\right) \text{ ma}$$

$$\text{atan2}(6, 8) \neq \text{atan2}(-6, -8)$$

$$\text{atan2}\left(\frac{6}{2}, \frac{8}{2}\right) \neq \text{atan2}\left(\frac{-6}{-2}, \frac{8}{-2}\right)$$

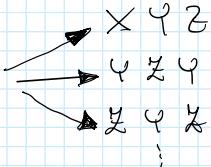
esempio  
per  $\cos(\tan^{-1}) > 0$

**procedura inversa**

$R \rightarrow$  angoli di Eulero

(ad esempio  
ottenuta da  
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (30°, 45°, 90°)  
in esercizio Matlab)

DIVERSE SEQUENZE



per ogni sequenza  
c'è una tripletta  
di angoli  
(diversa da sequenza  
a sequenza).

vedi procedura su Matlab

è sempre possibile fare procedura inversa?

OSSERVAZIONE PRELIMINARE

caso  $R_y(\alpha) R_x(\beta) R_y(\theta)$

$$\text{se } R = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} = R_y(\gamma)$$

si deduce che  $\beta = 0$

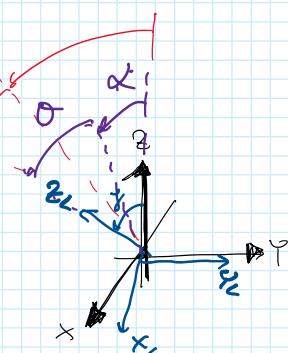
$$R = R_y(\gamma) = R_y(\alpha) R_y(\theta) = R_y(\alpha + \theta)$$

$$\alpha + \theta = \gamma \Rightarrow \begin{array}{l} \text{IMPOSSIBILE} \\ \text{INDIVIDUARE} \\ \text{IN MODO UNIVO} \end{array}$$

$$\alpha \in \theta$$

infinte soluzioni

↳ **SINGOLARITÀ**  
della rappresentazione  
dell'orientamento

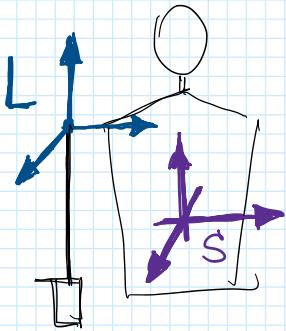


ESEMPIO



condizionamento PAR.

### ESEMPIO



• configurazione PAR

$$R_{SL} = I$$

a) orientam di  $L$  espressa con angoli di Euler tipo  $X Y Z$

**PAR CONFIG. SINGOLARE PER SEQU. EULER**

angoli in PAR  $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$

ma anche  $(30^\circ, 0^\circ, -30^\circ)$  e altre....

b) orient.  $L$  con

SEQUENZA CARDANO  $X Y Z$

$$R_{SL} = R_x(\alpha) R_y(\beta) R_z(\theta)$$

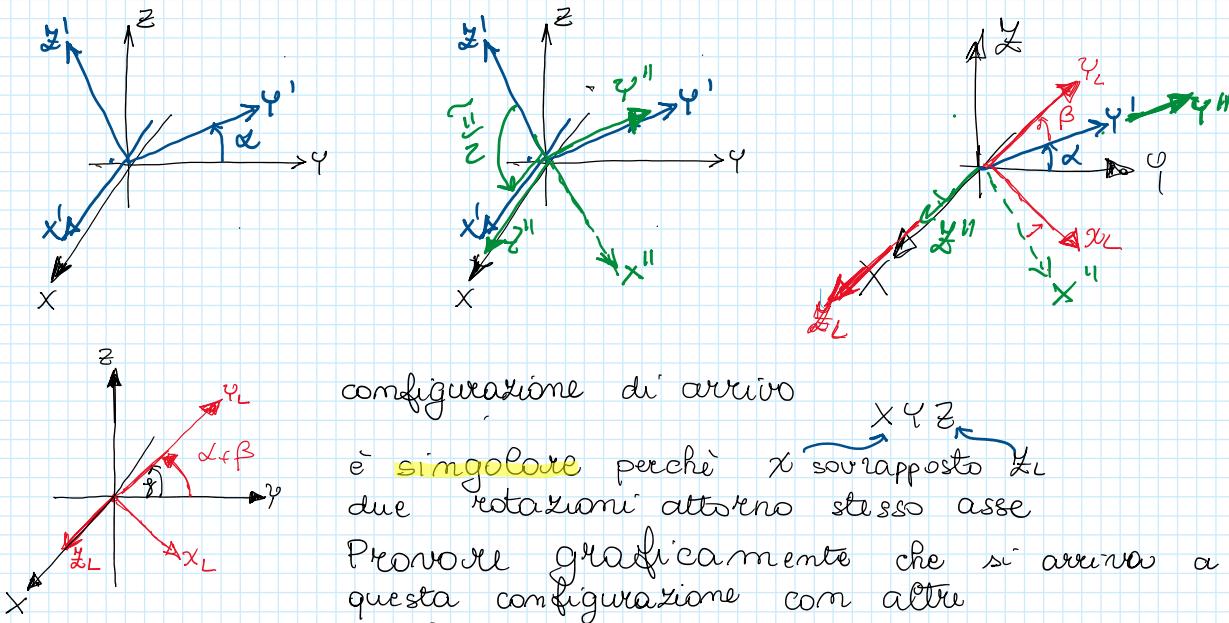
in PAR  $(\alpha, \beta, \theta) = (0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$

non singolare in PAR

? ci sono CONFIGURAZ. SINGOLARI PER LA  
SEQUENZA  $X Y Z$

→ angolo rotaz. centrale  $\pi/2$

Proviamo costruzione grafica  $R_x(\alpha) R_y(\pi/2) R_z(\beta)$



QUINDI

- per sequenze EULER sono singolari configurazioni in cui rotazione centrale nulla o  $\pi$
- per sequenze CARDANO sono singolari configurazioni in cui rotazione centrale è  $\pm \pi/2$

osserva che valori della rotazione centrale sono:

- seq EULERO  $0 \leq \beta \leq \pi$  SINGOLARITÀ PER VALORI ESTREMI
- seq CARDANO  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  PORTA  $\infty$  SOLUZIONI NELLA PROCEDURA INVERSA

### OSSERVA

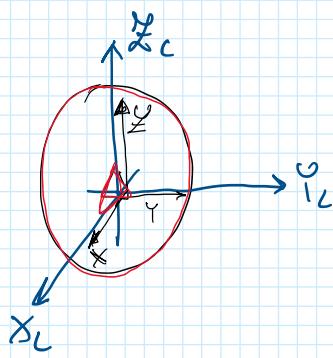
• Una data configurazione può essere singolare per una rappresentazione ma non per altre. Può essere utile cambiare sequenza x attraversare config. singolari

Esempio:  $ZYZ$  singolare in PAR x le tue mostrate sopra vicino a PAR ( $\beta \rightarrow 0^\circ$ ) passare a  $ZYX$  o altro

Quando due assi sono allineati codici danno errore ( $\rightarrow$  configurazione singolare) - Talvolta segnalato come

gimbal lock

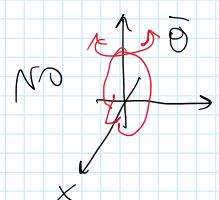
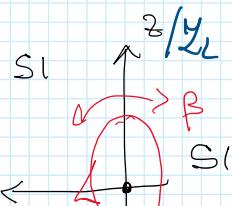
### ALTRA OSSERVAZIONE



#### VANTAGGI DI ANGOLI CARDANO

- 1) non singolare per  $L \parallel S$
- 2) descrivere modo semplice movimenti elementari
 

sequenza	• SI $\rightarrow (0, \bar{\beta}, 0)$ • NO $\rightarrow (0, 0, \bar{\theta})$ • NI $\rightarrow (\bar{\alpha}, 0, 0)$
----------	--



• cambiando sequenza  $\rightarrow YXY$

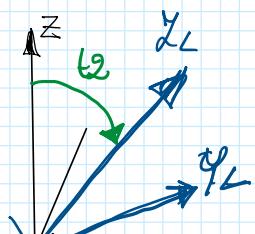
quali angoli per config. SI NO NI?

• SI  $(\bar{\beta}, 0, 0) \rightarrow (0, 0, \bar{\beta})$  o altro ...

• NI  $(0, \bar{\alpha}, 0)$

• NO ?? non con un solo angolo... provare con MATLAB

### PROVIAMO COSTRUZIONE GRAFICA

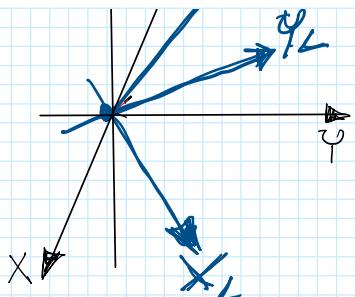


SE I DATI, come si individuano da figura gli angoli associati a sequenza

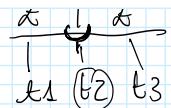
esempio  
sequenza



$\rightarrow$  come in Matlab  
primo angolo è rotaz. centrale



sequenza

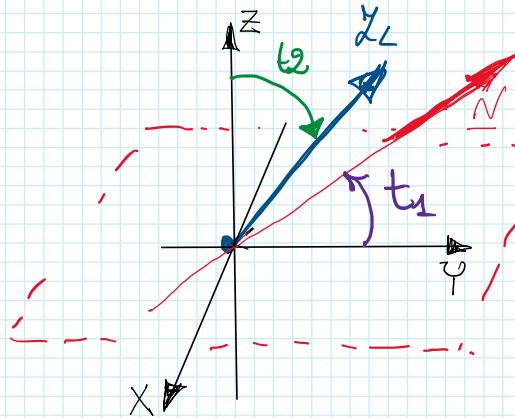


→ come in natura  
primo angolo è  
rotaz. centrali

angolo tra primo e ultimo asse

- $t_2$  angolo che porta  $Z$  su  $Z_L$  con  $0 \leq t_2 \leq \pi$
- asse della seconda rotazione si individua da  $R \wedge R_L = N$

$N$  asse dei nodi  
 $\perp$  sia a  $Z$  che  $Z_L$



asse dei nodi su piano  $XY$

rotazione  $t_2$  attorno asse nodi torna con regola mano destra  
asse modi  $\equiv$  asse  $Y'$  (asse  $Y$  corrente dopo prima rotaz.)

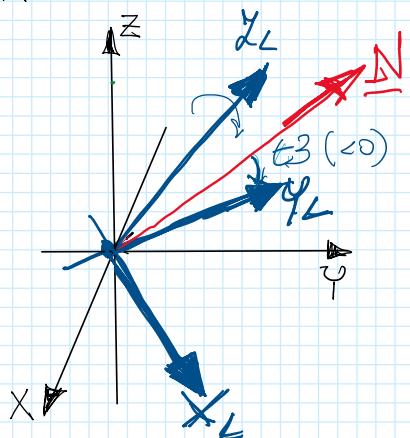
→ angolo  $t_1$  tra  $Y$  e asse nodi

infine  $t_3$  angolo tra  $N$  e  $Y_L$

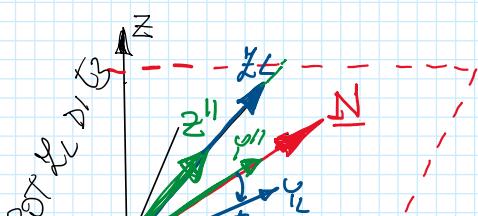
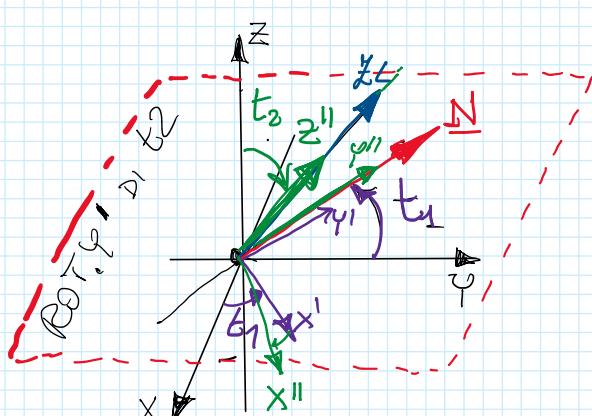
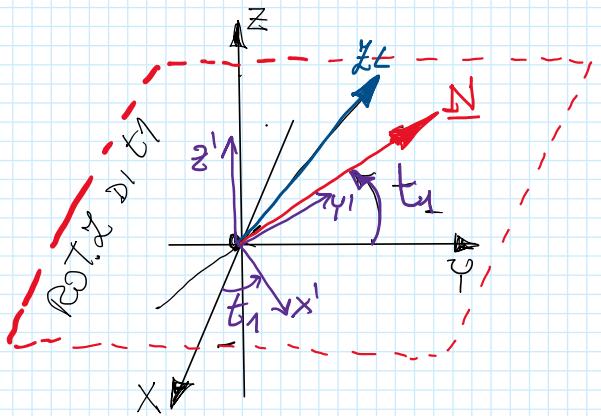
Osserva che data una sequenza dei 3 assi il primo e l'ultimo asse sono già "riconoscibili" da 2 sdr manca l'asse della rotazione intermedia (asse dei nodi) che si trova come specificato sopra

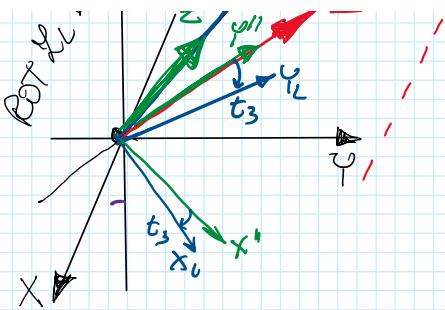
$$R_1 \wedge R_3 = N$$

versore  
primo asse      versore  
ultimo asse

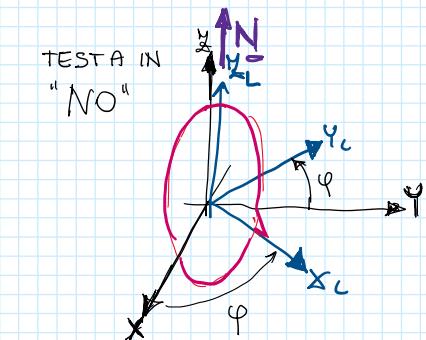


Ripetendo passaggi  
da  $R \wedge R_L =$

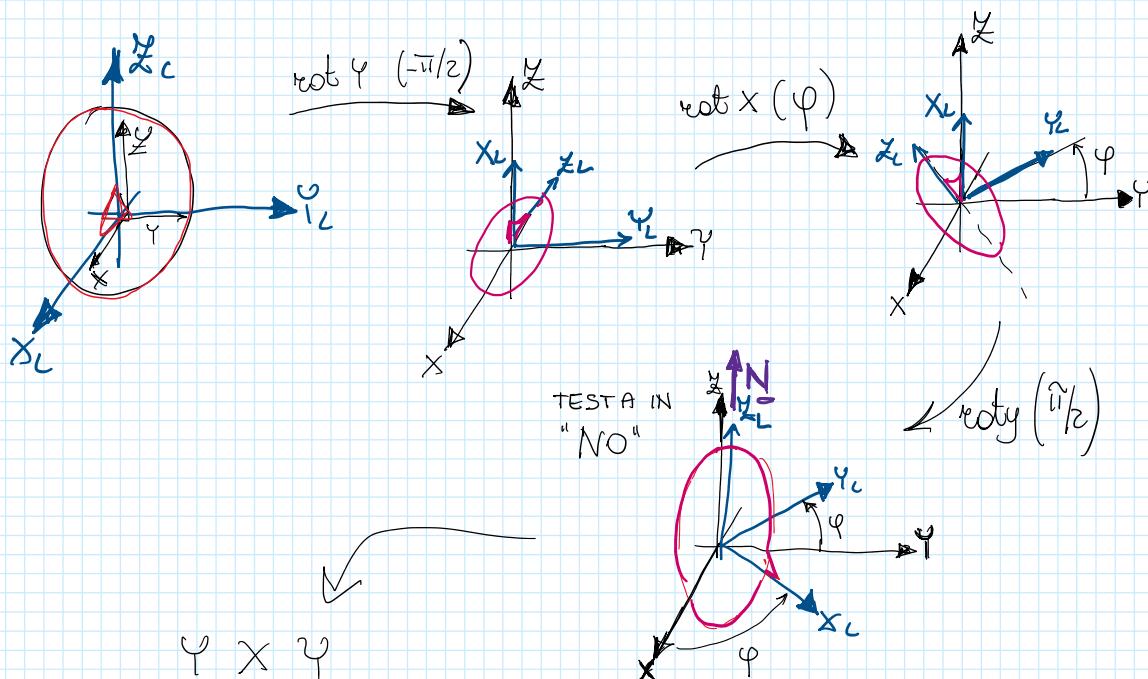




**GRAFICAMENTE:** testa in "NO"  
e sequenza  $YXY$



- $YXY \rightarrow$  prima rotaz  $Y$ , ultima  $Y_L$
- asse rot. intermedia da  $\underline{j} \wedge \underline{j}_L = \underline{N}$   
osserva che asse dei modi  $\equiv \underline{Z}, \underline{Z}_L$
- $t_1$  angolo per portare  $X$  su  $\underline{N}$ , rotaz  $Y$   
 $t_1 = -\pi/2$



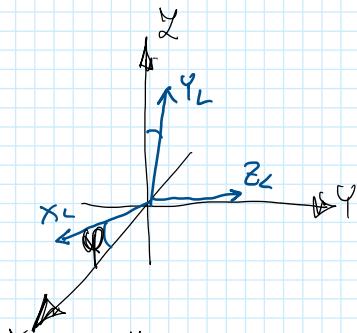
$$\left(-\frac{\pi}{2}, \varphi, \frac{\pi}{2}\right)$$

- Provare a trovare angoli per SI-NO-NO  
con altre sequenze
- Provare a usare script Matlab assegnando  
 $R = \text{rotY}(-30^\circ)$  e ricavare angoli da inversa  
 $YXY$   
cosa trovate?

YXY

Cosa trovate?

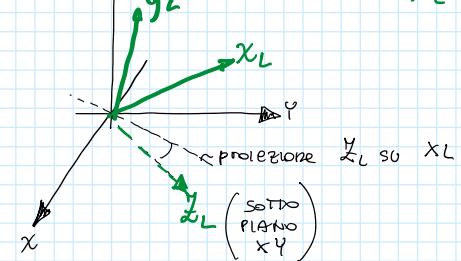
- ripartire da matrice in forma simbolica per  $t_2 = 0$  e valutare elementi di  $R$  per calcolare  $t_1$  e  $t_3$ .



angoli EUL - CARD  
secondo varie sequenze

$X \cdot Y \cdot Z$        $X \cdot Y \cdot X$   
etc

$x_L \in$  piano XY



• provare a trovare asse nodi e angoli con varie sequenze (vd. anche note 1 - Rappresentaz. rotazioni)