7 Lezione 19 ottobre

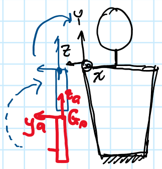
lunedì 19 ottobre 2020 10:36

RIV. 9/11

CONCETTI IMPORTANTI IN QUESTA LEZIONE

- Composizione di cambiamenti di sdr
- Altro significato di R: rotazione fisica
- Usare R per variare la posizione di Punti/corpi
- Proprietà di R come rotazione fisica detR=1 R'R=I dimostrazione

RICORDIAMO PROCEDURA



- scegliere i corpi
- associare SDR ≡ corpo
- VISUALIZZAZIONE PUNTI CORPI

→ $\{\text{Punti}\}_{\text{Corpo}}$

- TUTTI I PUNTI IN TERNA FISSA

$S_b \to S$ braccio → fissa

$S_a \to S$ avamb → fissa

$S_a \to S_b \to S$ si passa da braccio

- CAMBIAMENTO SDR ATTRAVERSO T

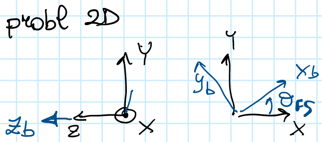
$$T_{ss'} = \left[\begin{array}{c|c} R_{ss'} & [O_{s'}]_s \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]$$

4x4 per probl 3D

3x3 per probl 2D

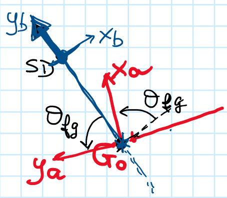
$$T_{sb} = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_{FS} & -s\theta_{FS} & 0 & 0 \\ s\theta_{FS} & c\theta_{FS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

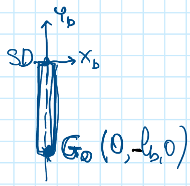
ORIGINE ≡ SPALLA



SOLO FLESSIONE BRACCIO

$$T_{ba} = \begin{bmatrix} c\theta_{FG} & -s\theta_{FG} & 0 & 0 \\ s\theta_{FG} & c\theta_{FG} & 0 & -l_b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





z_b // e concorde z_a

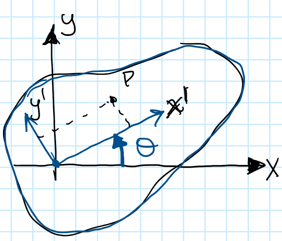
OSS. G_0 punto di avbraccio o braccio | $R_{ba} = R_z(\theta_{fg})$

$$T_{sa} = T_{sb} \cdot T_{ba}$$

GENERALIZZA COMPOSIZIONE R CON T

OSSERVIAMO UNA COSA IMPORTANTE

Al variare di θ_{fg} e θ_{fs} si ottiene un movimento



$R_z(\theta) = R_{ss'}$

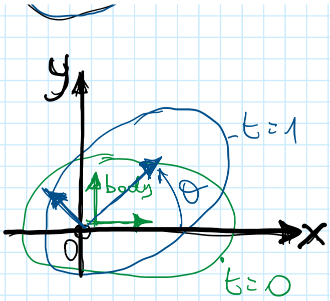
CAMB. SDR - CONFIGURAZIONE "BLOCCATA"

$[P]_{s'} \xrightarrow[R_z(\theta)]{} [P]_s$

$$[P(t)]_s = R_{ss'} [P(t)]_{s'}$$

P(t) NELLA STESSA CONFIGOR. SIA IN S CHE IN S'

SIA IN S CHE IN S'



$P(0)$
$\downarrow$
$? \, P(1)$

CONFIGURAZIONE VARIA
TRA DUE ISTANTI
ROTAZ. FISICA
ATTORNO ASSE (z-COORD)

$t=0$ terna corpo $\equiv$ terna fissa (ipot. comoda NON NEC)

$t=1$ terna " ruotata attorno z di θ

$$* \quad \underline{[P(1)]_S = R \, [P(0)]_S}$$ ROTAZ. FISICA

P IN ISTANTI DIVERSI

$t=0)$ $[P(0)]_S = \underbrace{[P]_{corpo} = [P]_{S'}}_{costanti}$ × ipotesi $S' \equiv S$ a $t=0$

TEMPO

$t=1)$ $[P(1)]_S = R(t)[P]_{S'}$ $\xrightarrow{QUI}$ $R \equiv R_{SS'} = R_z(\theta)$

COME CAMBIAM. SDR $S'(t=1) \to S$

IN GENERALE SENZA SDR

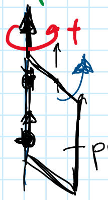
$$\boxed{P(1) = R(\underline{r},\theta)\, P(0)}$$

ESPRESSA CON VETTORE POSIZIONE $\vec{OP} = P$

dove $O \in$ asse di rotazione

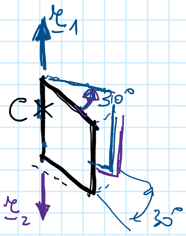
- si può poi passare a $R(t)$ con $\theta(t)$

Rotazione fisica . asse rotazione , angolo



direz. + orient } → versore $\underline{r}$ ⟷ importante per distinguere rot. positiva da negativa

+ punto



IMPORTANTE $(\underline{r},\theta)$

$\left.\begin{matrix} r_1, \; 30° \\ r_2, \; -30° \end{matrix}\right) = \,!$

$R(\underline{r},\theta)$ ROTAZIONE DEFINITA DA VERS. e θ

ROTAZIONE FISICA

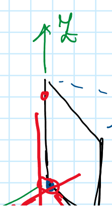
$$\underbrace{P(1) = R(\underline{r},\theta)\, P(0)}$$ ⇐ IN GENERALE

LA ESPRIMIAMO IN UN SDR "A PIACERE"

$$[P(1)]_S = R_S \, [P(0)]_S$$

nello stesso SDR

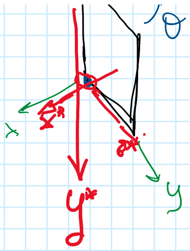
ORIGINE e asse di rotazione S scelto in modo "comodo"



ESEMPIO

1) $R_S = R_z(\theta)$

$\underline{r}, \theta$ asse - angolo
INVARIANTI NATURALI
DELLA ROTAZIONE



1) $R_S = R_z(\theta)$

2) $R_{S^*} = R_{y_*}(-\theta)$

INVARIANTI NATURALI DELLA ROTAZIONE

- ROTAZIONE FISICA ⟷ ROTAZIONE RIGIDA

1) non variano lunghezze
Trasf. isometrica

$$\underline{p}(1) = R\,\underline{p}(0) \rightarrow \text{componenti } \underline{p}(1) = R\,\underline{p}(0)$$

$$\underline{p}(1) \cdot \underline{p}(1) = \underline{p}(0) \cdot \underline{p}(0)$$

$$\underline{p}(1)^T\,\underline{p}(1) = \underline{p}(0)^T\,\underline{p}(0)$$

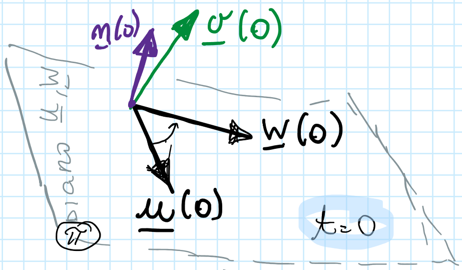
$$(R\,\underline{p}(0))^T\,R\,\underline{p}(0) = \underline{p}(0)^T\,\underline{p}(0)$$

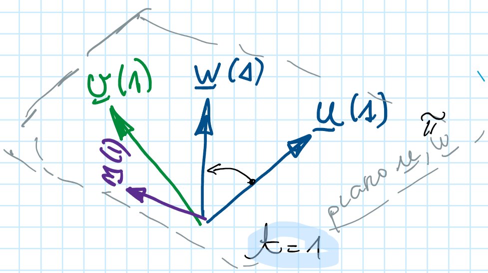
$$\underline{p}(0)^T R^T R\,\underline{p}(0) = \underline{p}(0)^T\,\underline{p}(0)$$

$$\boxed{R^T R = I}$$

$$R^T = R^{-1}$$

2) non variano angoli





NORMALE AL PIANO π SU CUI GIACCIONO $\underline{u}$ E $\underline{w}$

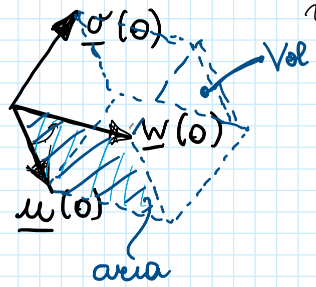
$\underline{n}(0) = \text{vers}(\underline{u}(0) \wedge \underline{w}(0))$

$\underline{n}(1) = \text{vers}(\underline{u}(1) \wedge \underline{w}(1))$

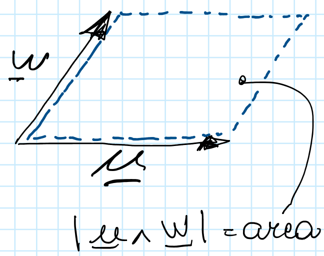
conservazione angoli implica che
- sono invarianti angoli tra $\widehat{uv}$, $\widehat{uw}$, $\widehat{vw}$
- $\underline{v}$ si mantiene dalla stessa parte del piano π (non si riflette), nel caso in figura dalla stessa parte di $\underline{n}$

Questa conservazione si esprime in modo semplice con il prodotto misto $(\underline{u} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{v}$

che geometricamente è un modo per calcolare volume con segno che geometricamente è un modo per calcolare volume con segno



Infatti, partendo da



$$\underline{u} \wedge \underline{w} = \text{Area } \underline{n}$$

con $\underline{n} = \text{vers}(\underline{u} \wedge \underline{w})$

$$\text{Area } \underline{n} \cdot \underline{w} = \text{Area } h \quad (\text{con segno}) = V$$

$$V(0) = [\underline{u}(0) \wedge \underline{w}(0)] \cdot \underline{v}(0) \qquad V(1) = \underline{u}(1) \wedge \underline{w}(1) \cdot \underline{v}(1)$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{u}(1) &= R\, \underline{u}(0) \\ \underline{v}(1) &= R\, \underline{v}(0) \\ \underline{w}(1) &= R\, \underline{w}(0) \end{aligned}\right\} - \text{conservazione del prodotto misto (conserv. volume con segno)}$$

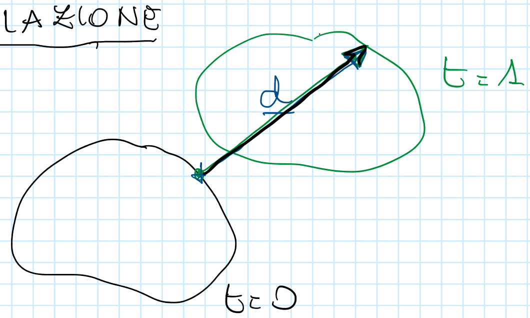
$$\det \begin{bmatrix} \underline{u}(0)^T \\ \underline{v}(0)^T \\ \underline{w}(0)^T \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \underline{u}(1)^T \\ \underline{v}(1)^T \\ \underline{w}(1)^T \end{bmatrix} = \underbrace{\det R}_{\det R = 1} \det \begin{bmatrix} \underline{u}(0)^T \\ \underline{v}(0)^T \\ \underline{w}(0)^T \end{bmatrix}$$

- $\det R = 1$

Anche x rot. fisica valgono stesse proprietà R come SDR

- $R^T = R^{-1}$
- $\det R = 1$

TRASLAZIONE



$\underline{d}$ VETTORE spost / traslazione

= x tutti i punti

$$\underline{p}(0) + \underline{d} = \underline{p}(1)$$

$$\underline{p}(s) = \underline{p}(0) + \underline{d}$$

SIST. DI RIF. SI ASSEGNA DOPO