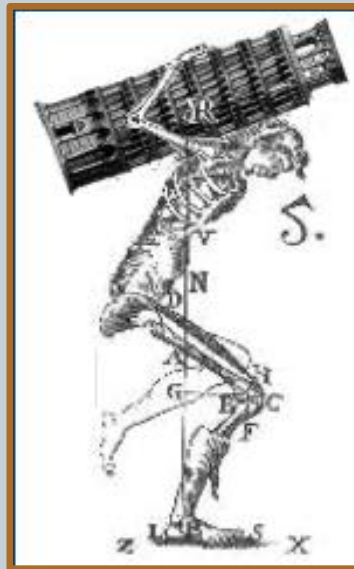


Elementi di Statica



Definizione di forza

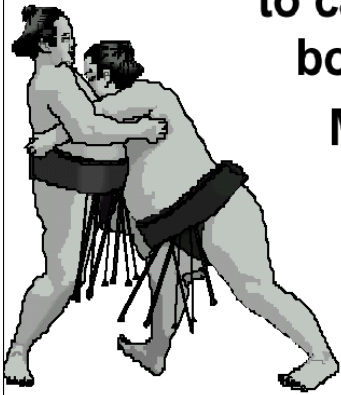
La *forza* è un vettore applicato caratterizzato da:

Force

A push or pull which tends to cause a change in a body's state of motion.

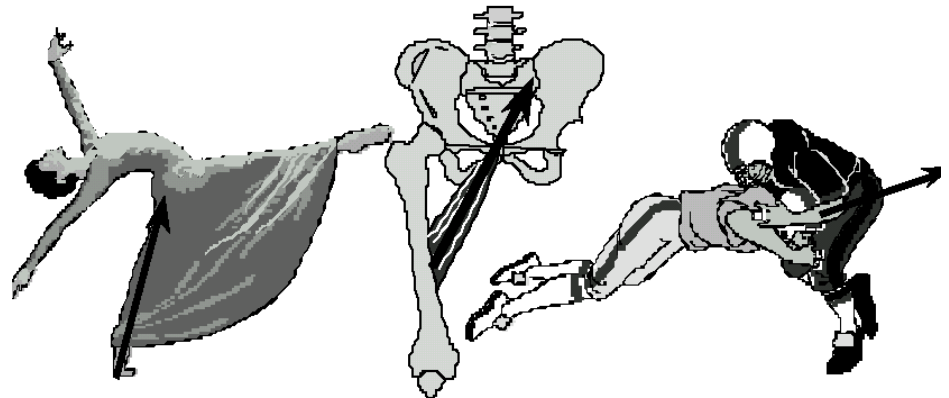
Measured in newtons.
(N)

- punto di applicazione
- direzione
- verso
- modulo



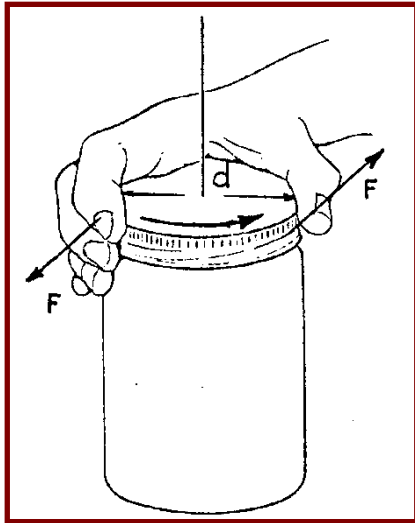
Force

Point of Application and Direction



Definizione di Momento

Il *momento* (polare) è un vettore *libero* definito come



$$\mathbf{M}_A = \mathbf{AP} \wedge \mathbf{F}$$

(momento rispetto al polo A della forza \mathbf{F} applicata nel punto P)

Legge di trasporto del momento

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{R}$$

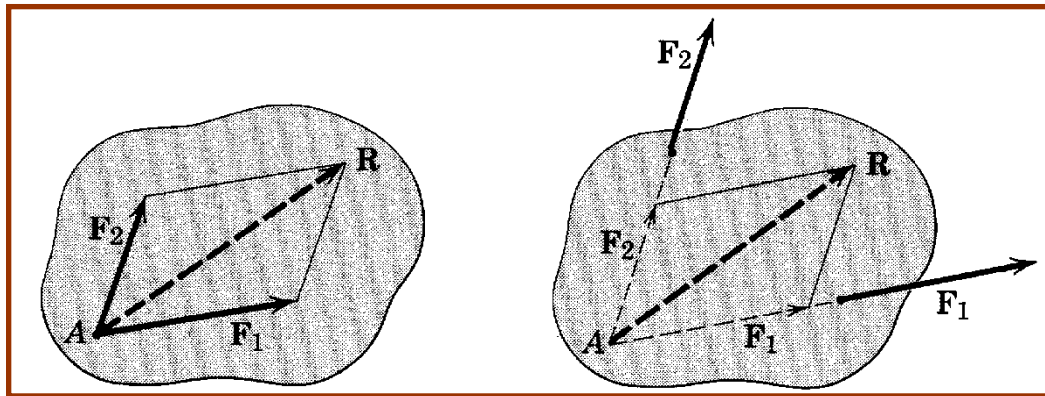
Definizione di Momento assiale

Grandezza scalare, componente del momento rispetto ad un asse r . Sia $A \in$ asse e \mathbf{r} il suo versore, allora vale

$$M_r = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{r}$$

Definizione di sistemi equivalenti

Due sistemi di vettori si dicono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo arbitrario.



Due forze applicate in un punto sono *equivalenti* alla loro risultante sempre applicata nello stesso punto.

Due forze non applicate nello stesso punto sono equivalenti alla loro risultante applicata nel punto in cui si intersecano le loro rette di azione.

Sistemi equivalenti

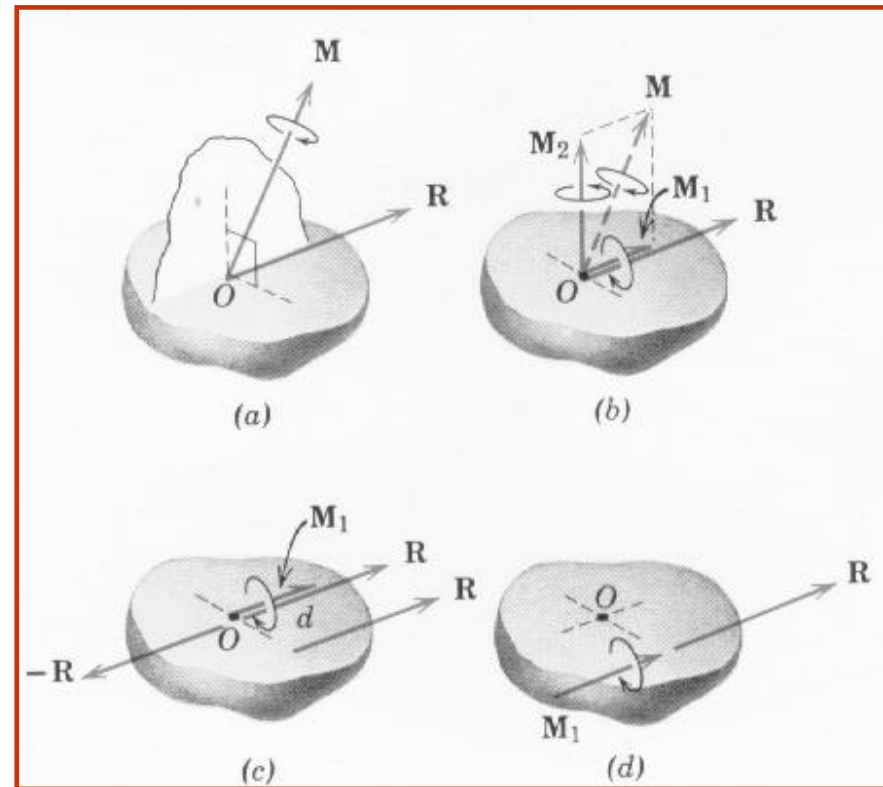
Un generico sistema di forze Σ è equivalente alla sua risultante applicata in un punto Ω scelto a piacere e al momento risultante del sistema Σ rispetto a quel punto:

$$\Sigma \rightarrow \Sigma eq = \{(\Omega, \mathbf{R}^\Sigma), \mathbf{M}_\Omega^\Sigma\}$$

Oppure è equivalente alla risultante applicata su una retta (asse centrale, ac) e ad un momento parallelo alla risultante

$$\Sigma eq^+ = \{(\text{ac}, \mathbf{R}^\Sigma), \mathbf{M}_{//}^\Sigma\}$$

Osserva che $\mathbf{M}_{//}$ non varia con il polo ed è nullo per sistemi piani, vettori paralleli o incidenti in un punto



Sistema di forze

Ne segue che qualsiasi sistema di forze può essere rappresentato come un sistema ad elica, in analogia a quanto fatto per le velocità.

$$\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_{//} \cdot \mathbf{R} = m_0 \mathbf{R}$$

$$\mathbf{M}_P = \begin{cases} \mathbf{M}_{//} \text{ è lo stesso per tutti i poli} \\ \mathbf{M}_{\perp} \text{ dipende dal polo} \end{cases}$$

L'asse dell'elica è l'asse centrale, la posizione di un suo punto si ottiene come segue

$$\text{se } K \in ac \rightarrow \mathbf{M}_K \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Supponendo nota \mathbf{R} e momento del sistema rispetto al polo A

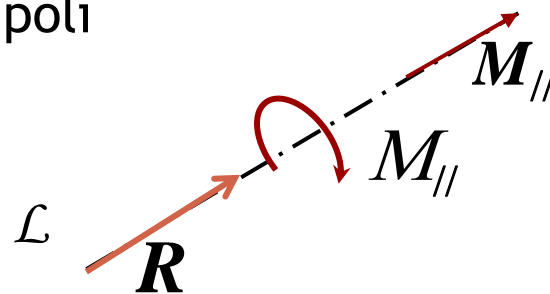
$$(\mathbf{M}_A + K\mathbf{A} \wedge \mathbf{R}) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0} \rightarrow \infty \text{ soluzioni per } K$$

Ad esempio, si può scegliere K tale che

$$\begin{aligned} KA \cdot \mathbf{R} &= 0 \\ AK &= \frac{-\mathbf{M}_A \wedge \mathbf{R}}{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OK \cdot \mathbf{R} &= 0 \\ OK &= \frac{\mathbf{R} \wedge (\mathbf{M}_A - \mathbf{R} \wedge \mathbf{OA})}{|\mathbf{R}|^2} \end{aligned}$$

(trovare espressione corrispondente per ISA)



Sistemi equivalenti: asse centrale

Nel caso si cerchi il sistema equivalente più semplice occorre individuarne l'asse centrale.

(Problema analogo a quello dell'asse di istantanea rotazione)

$$\text{se } K \in ac \rightarrow \mathbf{M}_K \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Supponendo nota \mathbf{R} e momento del sistema rispetto al polo A

$$(\mathbf{M}_A + K\mathbf{A} \wedge \mathbf{R}) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0} \rightarrow \infty \text{ soluzioni per } K$$

scelto K tale che

$$K\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = 0$$

$$AK = \frac{-\mathbf{M}_A \wedge \mathbf{R}}{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}$$

(trovare espressione
corrispondente per ISA)

Equilibrio di un corpo

Equazioni cardinali della statica (necessarie e sufficienti per l'equilibrio)

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{R} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{AP}_i \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_A = 0$$

- Problema piano

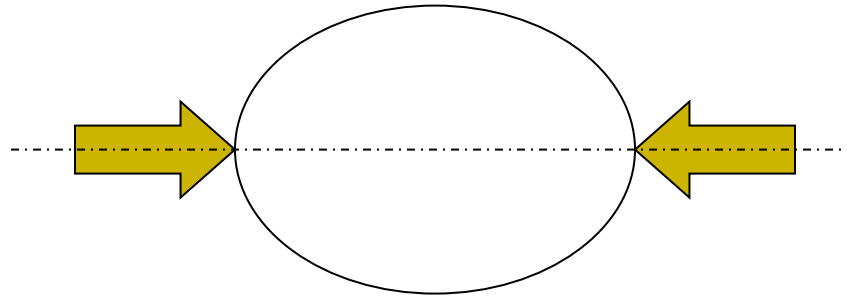
$$R_x = 0, R_y = 0, M_z = 0$$

- Problema 3D

$$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$$

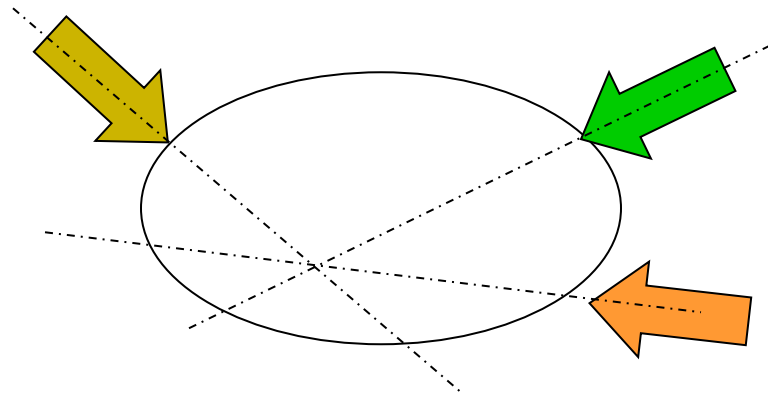
$$M_x = 0, M_y = 0, M_z = 0$$

Equilibrio di un corpo soggetto a due forze



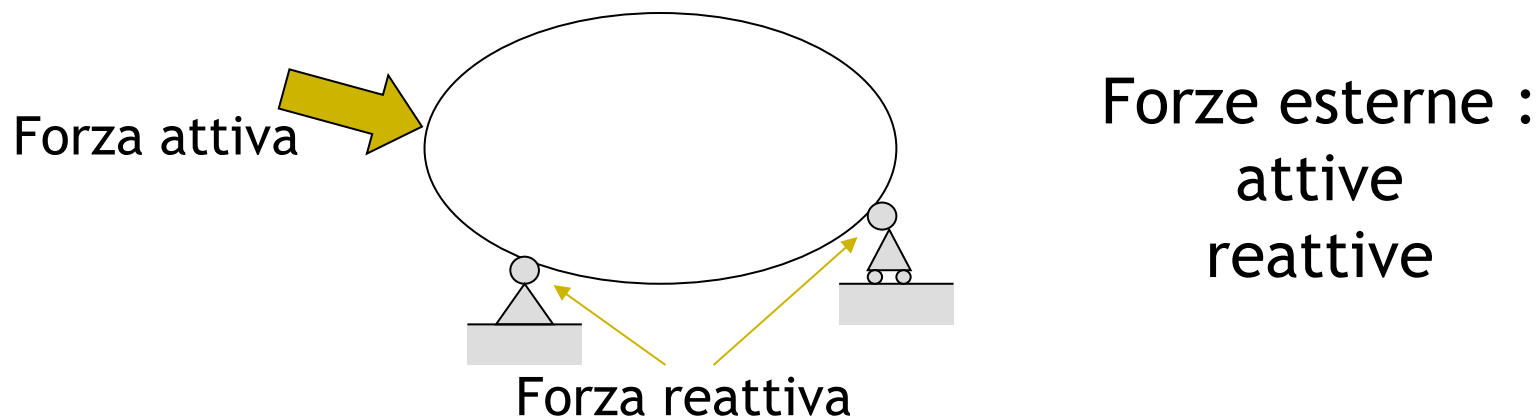
Le forze sono una coppia a braccio nullo
(uguali ed opposte, sulla stessa retta)

Equilibrio di un corpo soggetto a tre forze



Le forze devono necessariamente essere complanari ed avere rette di azione parallele o concorrenti in un punto

Equilibrio di un corpo vincolato



Approccio cambia tra

- Corpi non labili ($gdl \leq 0$)

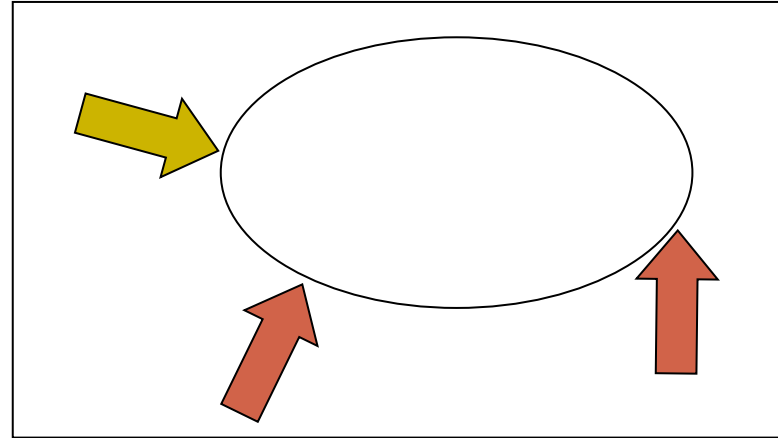
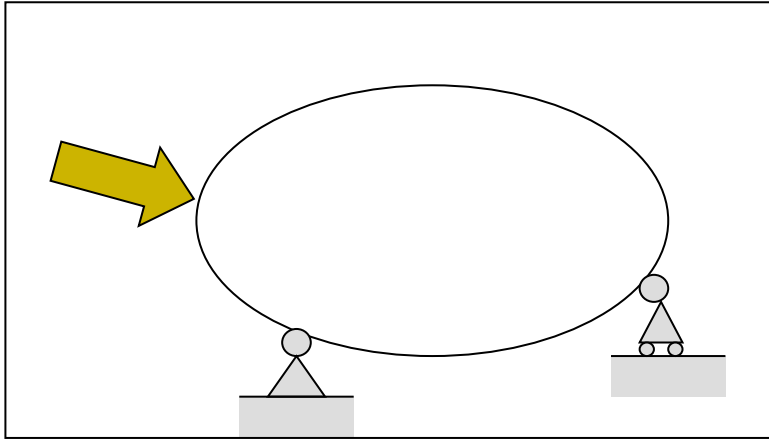
Le reazioni vincolari sono sufficienti ad assicurare l'equilibrio di qualsiasi sistema di forze attive applicate

- Corpi labili ($0 < gdl$)

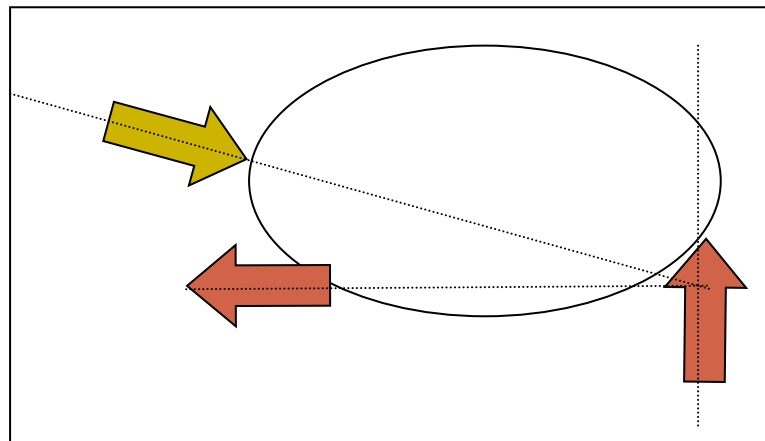
Le reazioni vincolari non sono sufficienti ad assicurare l'equilibrio, le forze attive applicate devono essere assegnate per l'equilibrio

Diagramma di corpo libero

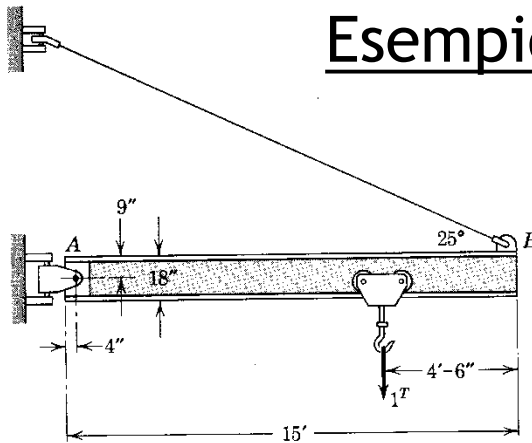
Si rappresentano sul corpo tutte le forze (attive e reattive) che agiscono su di esso



e se ne fa
l'equilibrio

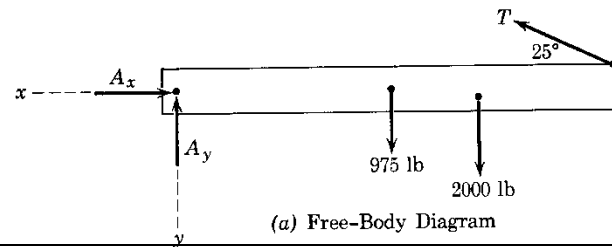


Esempio



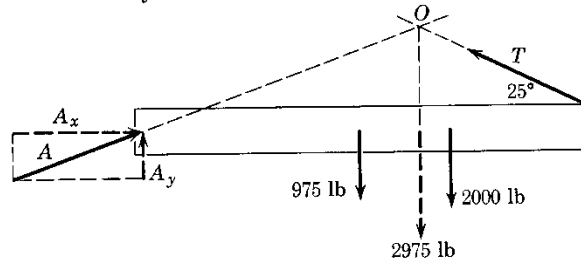
Dati del problema.

? Trovare le reazioni nella fune e nel vincolo A

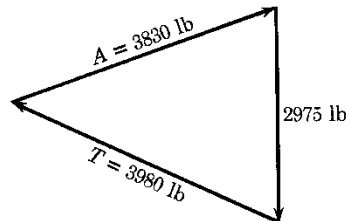


Schema di corpo libero.

Oss.: la tensione nella fune è parallela alla fune stessa.

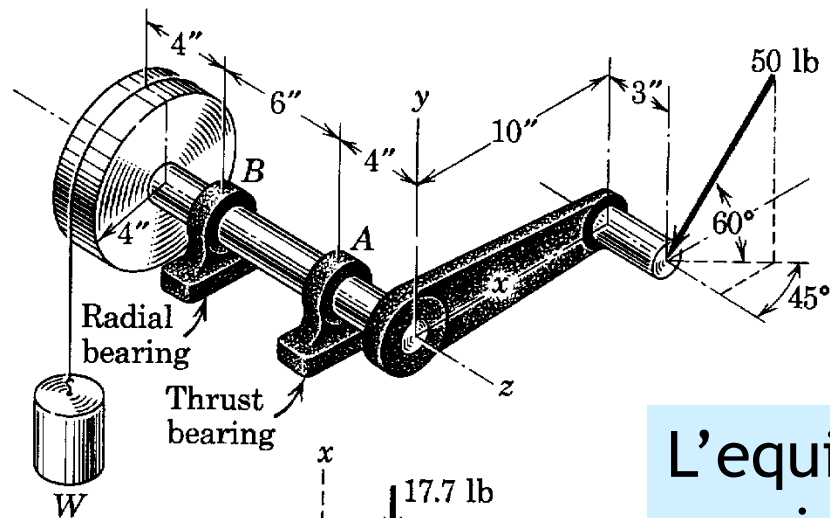


1) Si sostituiscono le due forze note (975 e 2000) con la loro risultante sull'asse centrale (2975 per O).

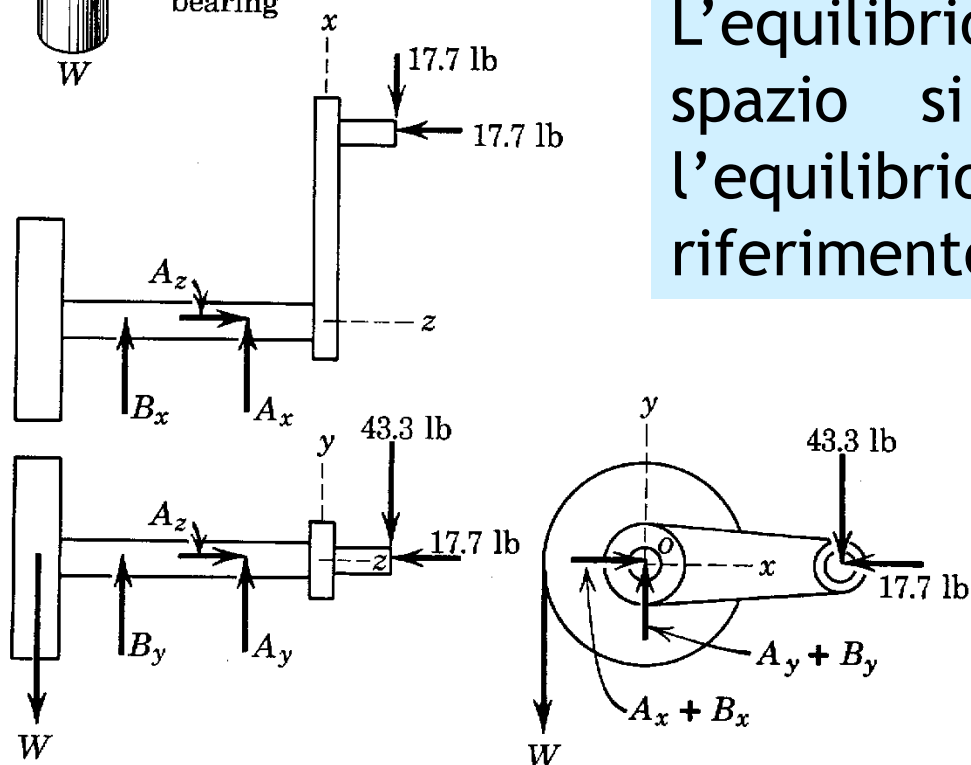


(b) Graphical Solution

2) L'equilibrio della trave è dato da tre forze: la reazione in A, l'azione della fune T e (2975 per O), che devono essere concorrenti in un punto e formare un poligono chiuso.

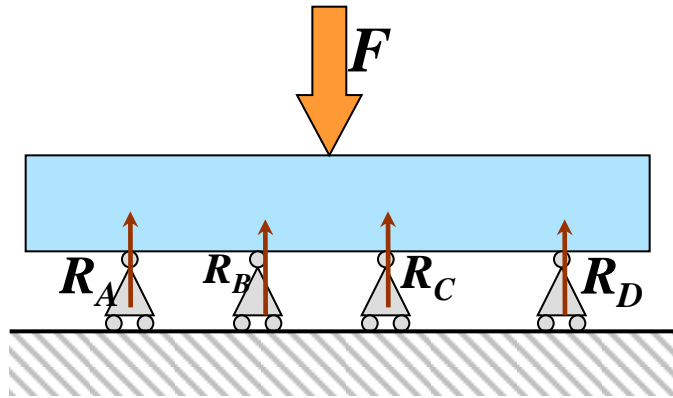


L'equilibrio di un corpo nello spazio si studia facendo l'equilibrio sui piani di riferimento

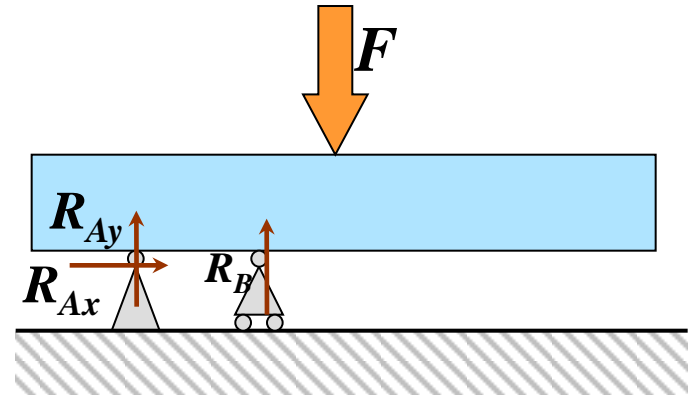


Problemi isostatici - iperstatici

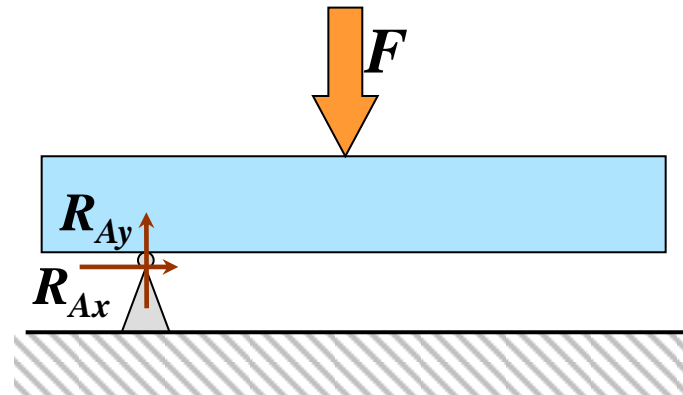
Un problema si dice iperstatico - isostatico - ipostatico in base al numero delle incognite (ni) che compaiono nelle equazioni di equilibrio (ne) rispetto al numero di tali equazioni.



$ni > ne$ iper-statico
(oss. 1gdl)



$ni = ne$ iso-statico



$ni < ne$ ipo-statico
(labile)

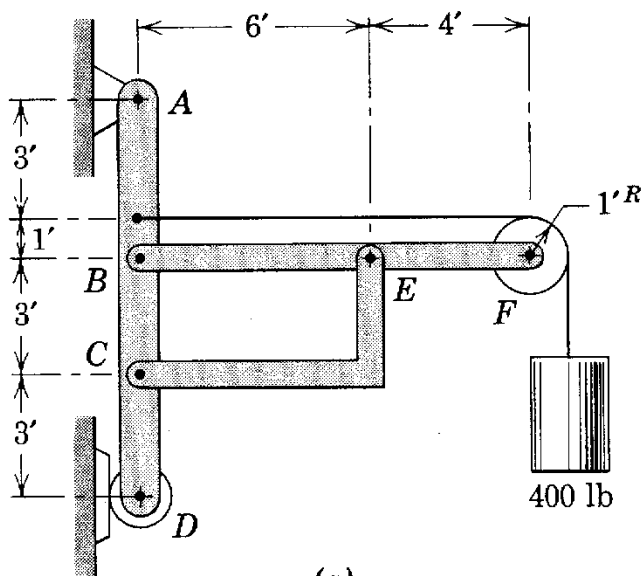
Equilibrio di un sistema di corpi

Equazioni cardinali della statica

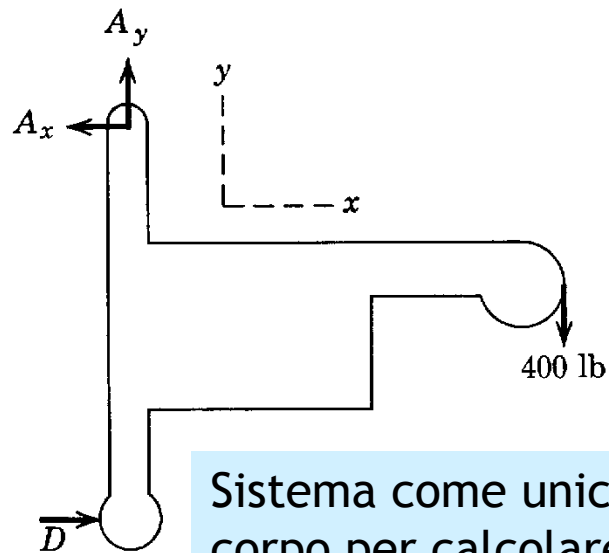
$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{R} = 0 \qquad \sum_{i=1}^n AP_i \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_A = 0$$

Le equazioni cardinali della statica rimangono valide per tutto il sistema (assimilato ad un solo corpo) ma non sono sufficienti a garantire l'equilibrio (sono solo necessarie).

Si studiano i vari elementi del sistema e si scrivono per ciascuno le equazioni cardinali

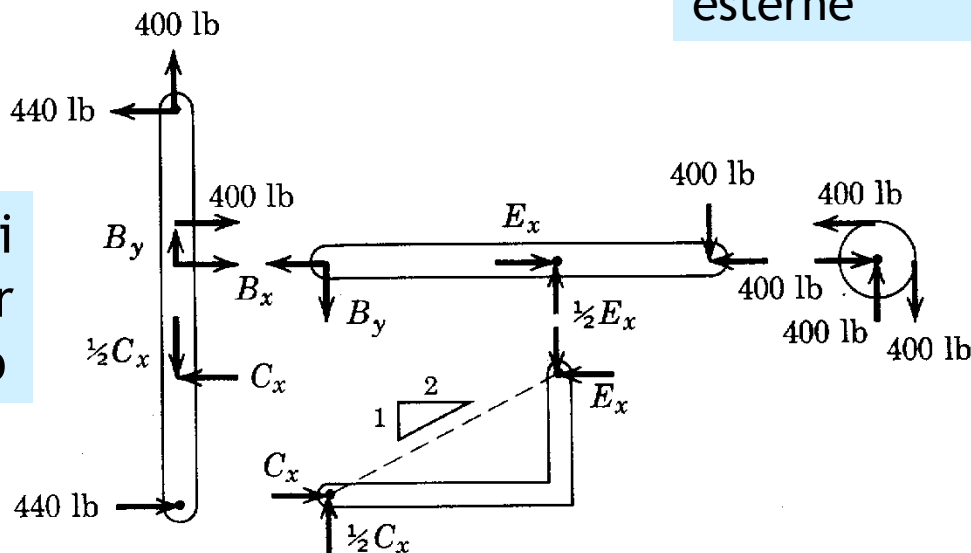


(a)



Sistema come unico corpo per calcolare le reazioni vincolari esterne

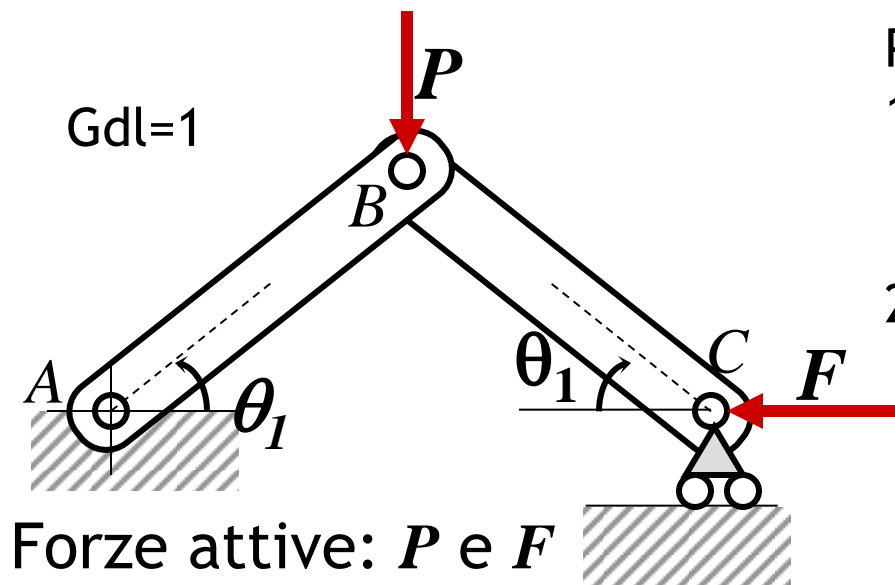
Diagramma di corpo libero per ciascun elemento



Principio dei lavori virtuali

Ipotesi: sistema di corpi rigidi ($gdl > 0$), vincoli lisci o di puro rotolamento, indipendenti dal tempo, bilaterali

CNS affinché una configurazione sia di equilibrio per un sistema è che il lavoro virtuale delle forze attive sia uguale a 0 per ogni spostamento che allontana il sistema da tale configurazione.



Possibili analisi:

- 1) Data la configurazione e dato P trovare F per l'equilibrio;
- 2) Dati P e F trovare la configurazione all'equilibrio

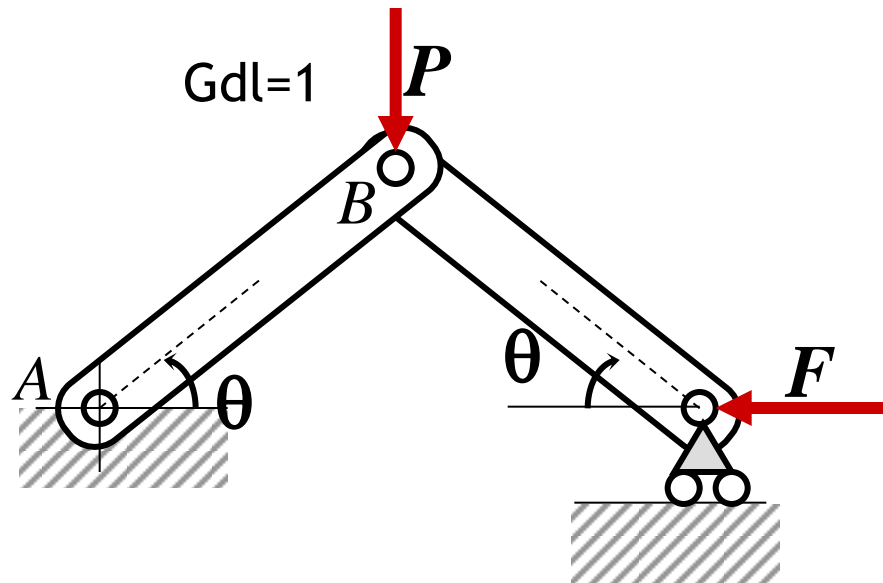
$$\delta L^{(a)} = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{C} = 0$$

Dalla cinematica

$$\delta \mathbf{B} = \delta \theta \mathbf{k} \wedge \overline{AB} = \overline{AB} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \delta \theta$$

$$\delta \mathbf{C} = \delta \mathbf{B} - \delta \theta \mathbf{k} \wedge \overline{BC} = -2 \overline{AB} \sin \theta \mathbf{i} \delta \theta$$

$$\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{B} + \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{C} = (-P \overline{AB} \cos \theta + 2 F \overline{AB} \sin \theta) \delta \theta = 0$$



$$F = \frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$$

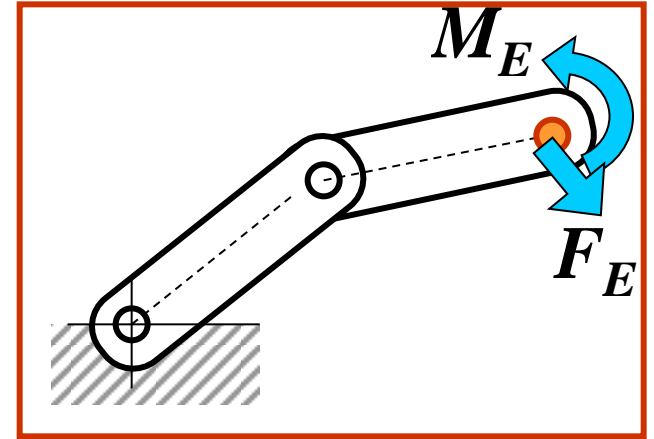
Caso 2)

$$\theta = \arctan \left(\frac{P}{F} \right)$$

Sistema a 2 bracci con forza e momento applicate all'EE (vd sist equivalenti).

Il lavoro virtuale di queste azioni è

$$\delta L_E = \mathbf{F}_E \cdot \delta \mathbf{E} + \mathbf{M}_E \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$



Si osserva che

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \boldsymbol{\omega}_E \end{bmatrix} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \delta \mathbf{E} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \delta \mathbf{q}$$

quindi

$$\delta L_E = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{E} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_E \\ \mathbf{M}_E \end{bmatrix} = [\mathbf{J} \delta \mathbf{q}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_E \\ \mathbf{M}_E \end{bmatrix} = [\delta \mathbf{q}]^T \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_E \\ \mathbf{M}_E \end{bmatrix}$$

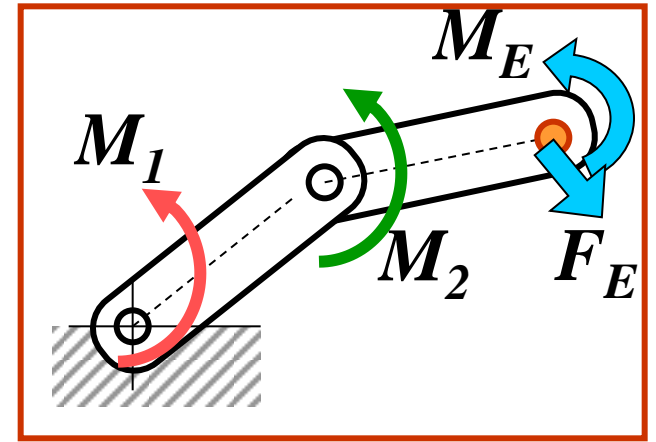
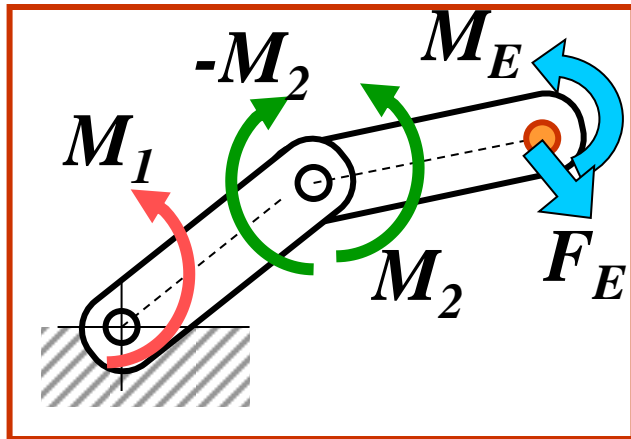
Il sistema è tenuto in equilibrio da azioni che producono le coppie agenti. cali che

$$\delta L_E + \delta L_m = 0$$

In base allo schema della figura in alto (M_1 su corpo 1 e M_2 su corpo 2)

$$\delta L_m = \mathbf{M}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{M}_2 \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{M}_1 \cdot \delta \theta_1 \mathbf{k}_0 + \mathbf{M}_2 \cdot (\delta \theta_1 \mathbf{k}_0 + \delta \theta_2 \mathbf{k}_1)$$

Ma gli attuatori ai giunti esercitano delle azioni interne, ossia:



$$\begin{aligned} \delta L_m &= \mathbf{M}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{M}_2 \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \mathbf{M}_2 \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ &= \mathbf{M}_1 \cdot \delta \theta_1 \mathbf{k}_0 + \mathbf{M}_2 \cdot \delta \theta_2 \mathbf{k}_1 \\ &= M_1 \delta \theta_1 + M_2 \delta \theta_2 \\ &= \begin{bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ottenuto

$$\delta L_m = \begin{bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad \text{generalizzando} \quad \delta L_m = \delta \mathbf{q}^T \boldsymbol{\tau}$$

$\boldsymbol{\tau}$ vettore coppie ai giunti

Quindi, complessivamente il PLV per il manipolatore ci dà

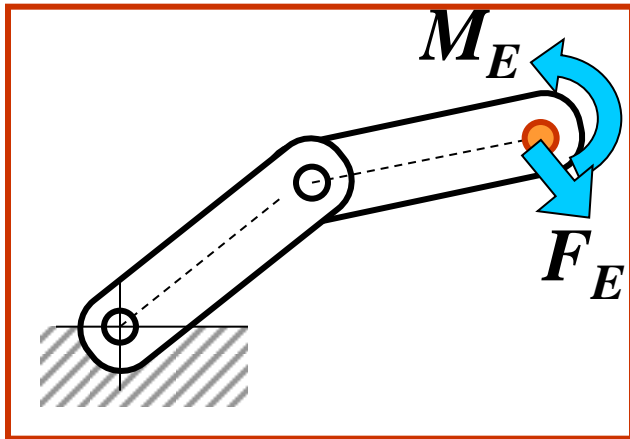
$$\delta L_E + \delta L_m = 0$$

$$[\delta \mathbf{q}]^T \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_E \\ \mathbf{M}_E \end{bmatrix} + [\delta \mathbf{q}]^T \boldsymbol{\tau} = 0$$

$$\mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_E \\ \mathbf{M}_E \end{bmatrix} + \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_E \\ \mathbf{M}_E \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^T \boldsymbol{\gamma}$$

Le coppie ai giunti sono calcolate in funzione dei carichi all'E.E. e dello jacobiano geometrico.

Esempio



Le azioni sull'EE -in componenti nel rif.globale

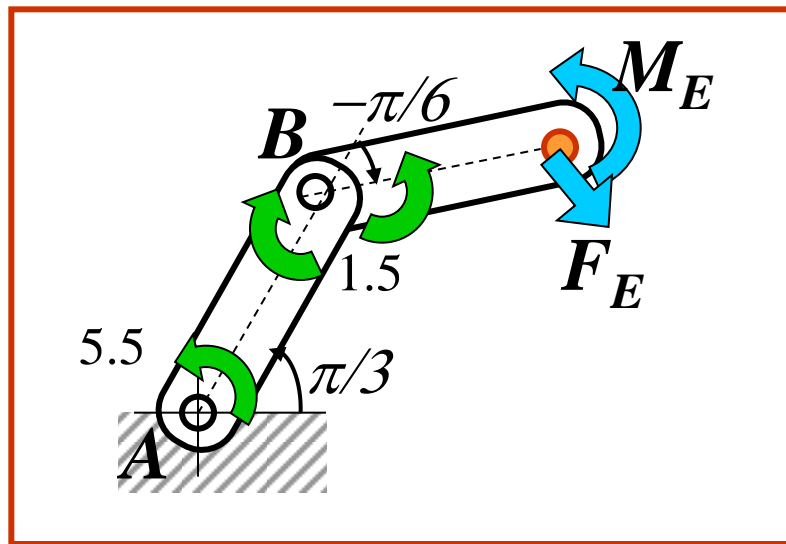
$$F_E = [10 \quad -15 \quad 0]^T \quad M_E = [0 \quad 0 \quad 3]^T$$

$$\gamma = [10 \quad -15 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3]^T$$

$$J \begin{bmatrix} -a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) - a_1 \cdot \sin(\theta_1) & -a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cdot \cos(\theta_1) & a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.34151 & -0.125 \\ 0.34151 & 0.21651 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si è valutato lo jacobiano per $a_1=a_2=0.25$ m e nella configurazione $\theta_1=\pi/3$ $\theta_2=-\pi/6$.

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0.34151 & -0.125 \\ 0.34151 & 0.21651 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -5.53766 \\ -1.4976 \end{bmatrix}$$



Oppure si può calcolare τ dalle equazioni cardinali (momento assiale giunto in A e giunto in B).

Verifica con eq. cardinali

momento dovuto a \mathbf{M}_E e \mathbf{F}_E rispetto a B e A

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{BE} \wedge \mathbf{F}_E + \mathbf{M}_E$$

Interessa solo la componente z di \mathbf{M}_B 

$$\begin{aligned} M_{Bz} &= -10 \cdot 0.25 \cdot \sin(\pi/6) - 15 \cdot 0.25 \cdot \cos(\pi/6) + 3 \\ &= -1.4976 \end{aligned}$$

analogamente

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{AE} \wedge \mathbf{F}_E + \mathbf{M}_E$$

$$\begin{aligned} M_{Az} &= -10 \cdot [0.25 \cdot \sin(\pi/3) + 0.25 \cdot \sin(\pi/6)] + \\ &\quad - 15 \cdot 0.25 \cdot [0.25 \cdot \cos(\pi/3) + 0.25 \cdot \cos(\pi/6)] + 3 \\ &= -5.5376 \end{aligned}$$

Il PLV indaga l'equilibrio richiedendo la cinematica del sistema e le forze attive ma non quelle reattive.

Il PLV si scrive per sistemi labili e fornisce tante equazioni quanti sono i gdl.

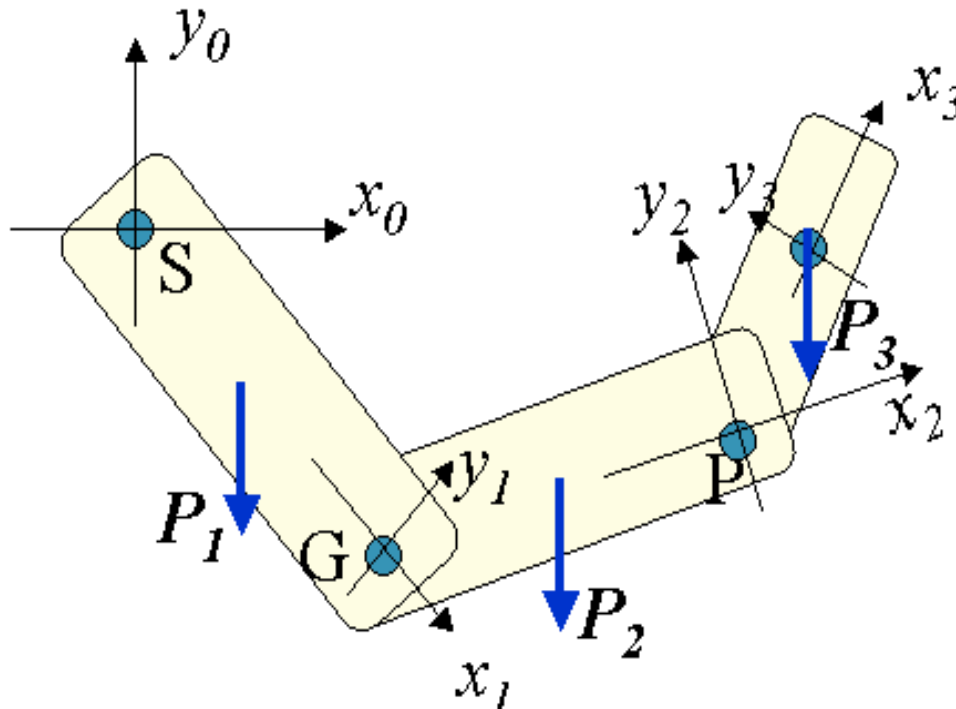
Osservazione1

Le azioni sull'end effector si costruiscono con i sistemi equivalenti per riportare tutte le forze sull'EE ad una risultante in E (origine della terna locale) + momento rispetto ad E.

Osservazione2

Cosa accade se ci sono forze su altri link?

Esempio con forze su più link



Dati:

Massa braccio (1) = 3.2 mt/100

Massa avambraccio (2)= 1.7 mt/100

Massa mano (3)= 0.9 mt/100

mt=massa totale persona

Si risolve analizzando 3 sistemi

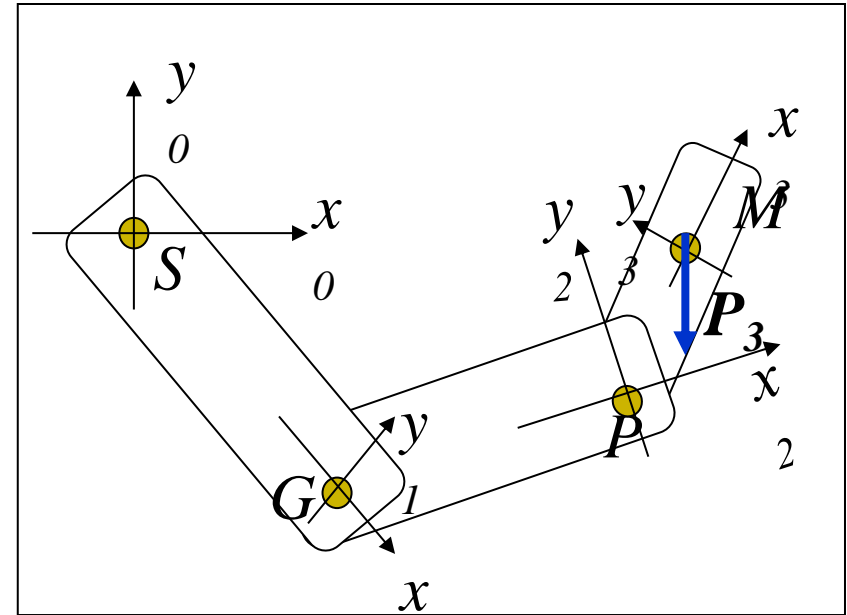
1) Braccio completo - carichi sulla mano

Carico nel riferimento glob

$$\gamma_1^T = [0 \quad -P_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{p}_0 = \overrightarrow{SM}, \mathbf{o}_0 = \overrightarrow{SS},$$

$$\mathbf{o}_1 = \overrightarrow{SG}, \mathbf{o}_2 = \overrightarrow{SP}$$



$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_0 \wedge (\mathbf{p}_0 - \mathbf{o}_0) & \mathbf{k}_1 \wedge (\mathbf{p}_0 - \mathbf{o}_1) & \mathbf{k}_2 \wedge (\mathbf{p}_0 - \mathbf{o}_2) \\ \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = -\mathbf{J}^T \boldsymbol{\gamma}_1 \longrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 = \begin{bmatrix} M_{1-spalla} \\ M_{1-gomito} \\ M_{1-polso} \end{bmatrix}$$

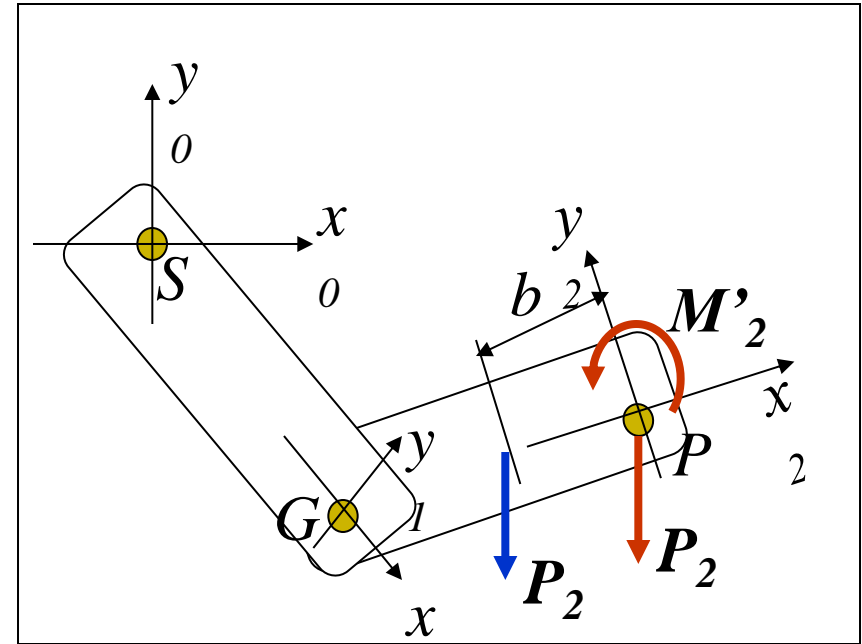
2) Carichi avambraccio (due alternative)

Alternativa 1:

Sottosistema senza mano,
carichi sul polso (sistema
equivalente $\mathbf{P}_2, \mathbf{M}'_2$)

$$\gamma'_2{}^T = [0 \quad -P_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad M'_2]$$

$$M'_2 = b \cos(\theta_1 + \theta_2)$$



$$J'_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_0 \wedge (\mathbf{p}_0 - \mathbf{o}_0) & \mathbf{k}_1 \wedge (\mathbf{p}_0 - \mathbf{o}_1) \\ \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 \end{bmatrix}$$

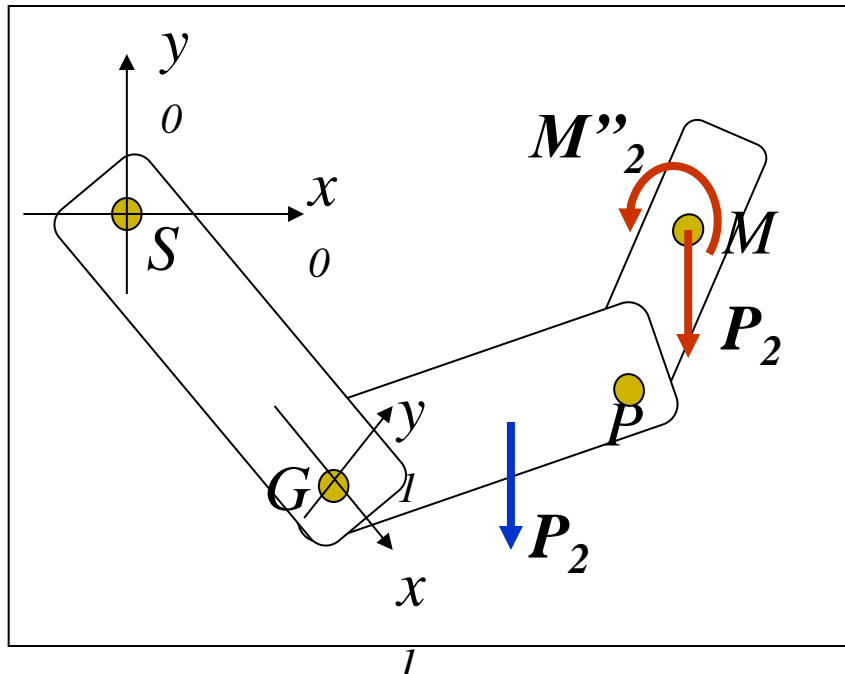
ma ora ¹
 $\mathbf{p}_0 = \overrightarrow{SP} \mathbf{o}_0 = \overrightarrow{SS} \mathbf{o}_1 = \overrightarrow{SG}$
 quindi J'_2 va ricalcolato

$$\boldsymbol{\tau}_2 = -\mathbf{J}'_2{}^T \boldsymbol{\gamma}'_2 \longrightarrow$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \begin{bmatrix} M_{2-spalla} \\ M_{2-gomito} \end{bmatrix}$$

Alternativa 2:

con mano, carichi in (sistema equivalente P_2, M''_2)



Come se mano e
avambraccio fossero un
unico pezzo

$$\gamma'_2{}^T = \begin{bmatrix} 0 & -P_2 & 0 & 0 & 0 & M''_2 \end{bmatrix}$$

$$M''_2 = b \cos(\theta_1 + \theta_2) +$$

$$+ a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$a_3 = \overline{PM}$$

$$J''_2 = \begin{bmatrix} k_0 \wedge (p_0 - o_0) & k_1 \wedge (p_0 - o_1) \\ k_0 & k_1 \end{bmatrix} \quad p_0 = \overrightarrow{SM}, \quad o_0 = \overrightarrow{SS},$$

$$o_1 = \overrightarrow{SG}$$

quindi J''_2 è

sottomatrice di J $\tau_2 = -J''_2{}^T \gamma''_2 \longrightarrow$

$$\tau_2 = \begin{bmatrix} M_{2-spalla} \\ M_{2-gomito} \end{bmatrix}$$

Osservazione: con la seconda alternativa, utilizzando sistema equivalente in M , si può anche tenere tutto lo jacobiano, avendo cura poi di tenere utilizzarne solo gli elementi importanti (il primo ed secondo, il terzo è relativo alla coppia al polso che non c'è).

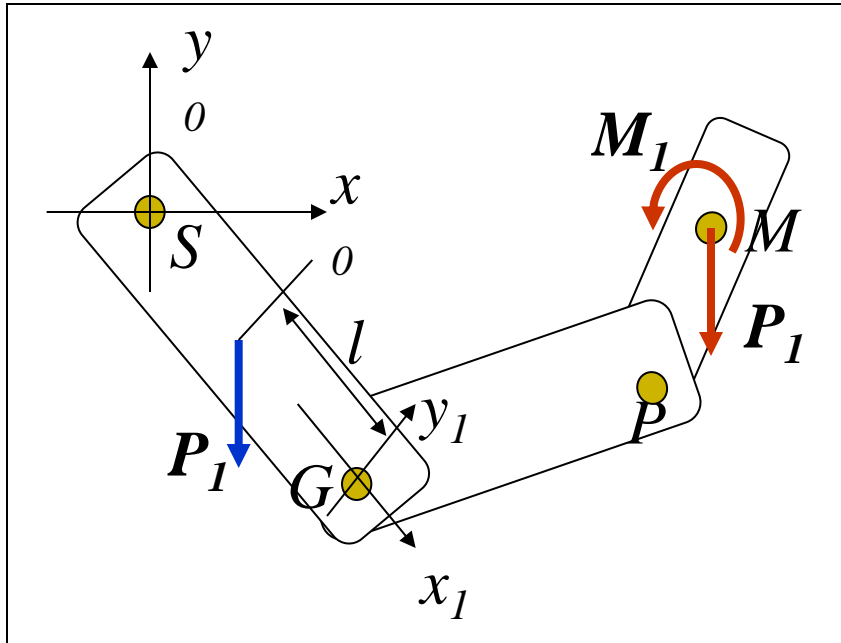
$$\tau_2' = -J^T \gamma''_2 \quad \tau_2' = \begin{bmatrix} M_{2-spalla} \\ M_{2-gomito} \\ M_{\text{polso}} \end{bmatrix}$$

Se Q_2 è il punto di applicazione della forza P_2 su avambraccio per calcolare il sistema equivalente nel polso o nella mano occorre determinare le componenti nel riferimento globale della risultante (che è sempre P_2) e del momento di P_2 rispetto al polso o a M .

3) Carichi braccio

Seguendo la alternativa 2:

con mano, carichi in (sistema equivalente P_1, M_1)



$$\gamma_3'^T = [0 \quad -P_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad M_1]$$

$$M_1 = l \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$a_2 = \overline{GP}$$

$$\tau_3 = -J^T \gamma_3 \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} M_{3-spalla} \\ M_{2-gomito} \\ M_{1-polso} \end{bmatrix}$$

Coppie totali ai giunti
 -spalla: $M1s+M2s+M3s$
 -gomito: $M1g+M2g$
 -polso: $M1p$

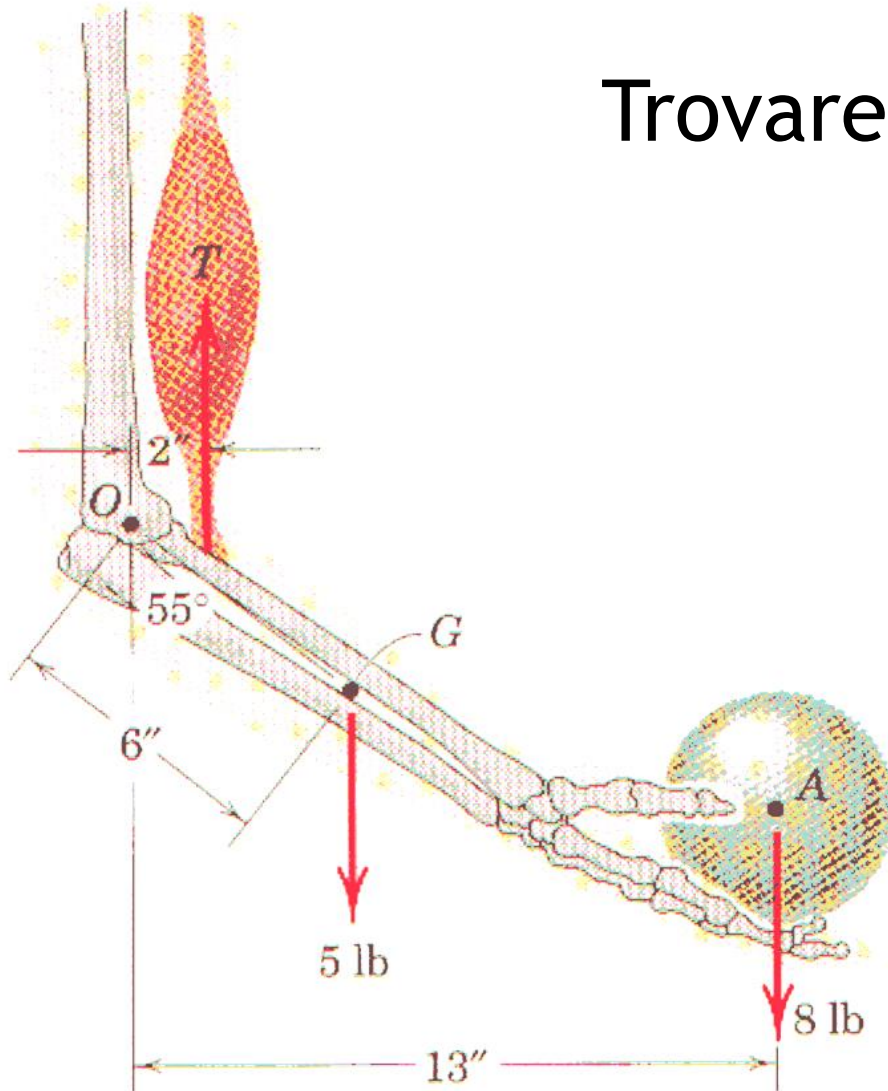
Qualche semplice equilibrio



RIPASSO DI MECCANICA

ESERCIZIO 1

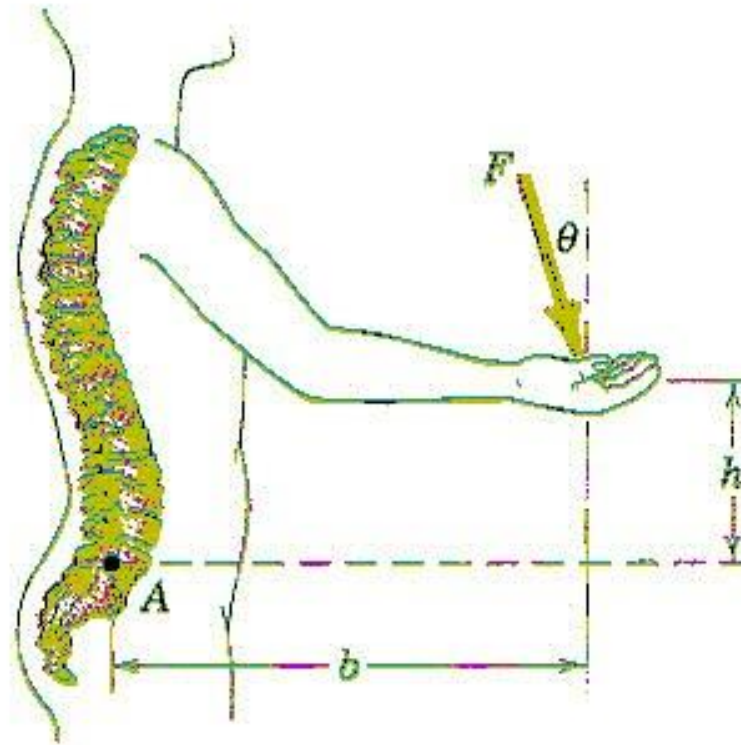
Trovare T



$1\text{ lb} = 0.4536\text{ kg}$

$1\text{ in.} = 25.4\text{ mm}$

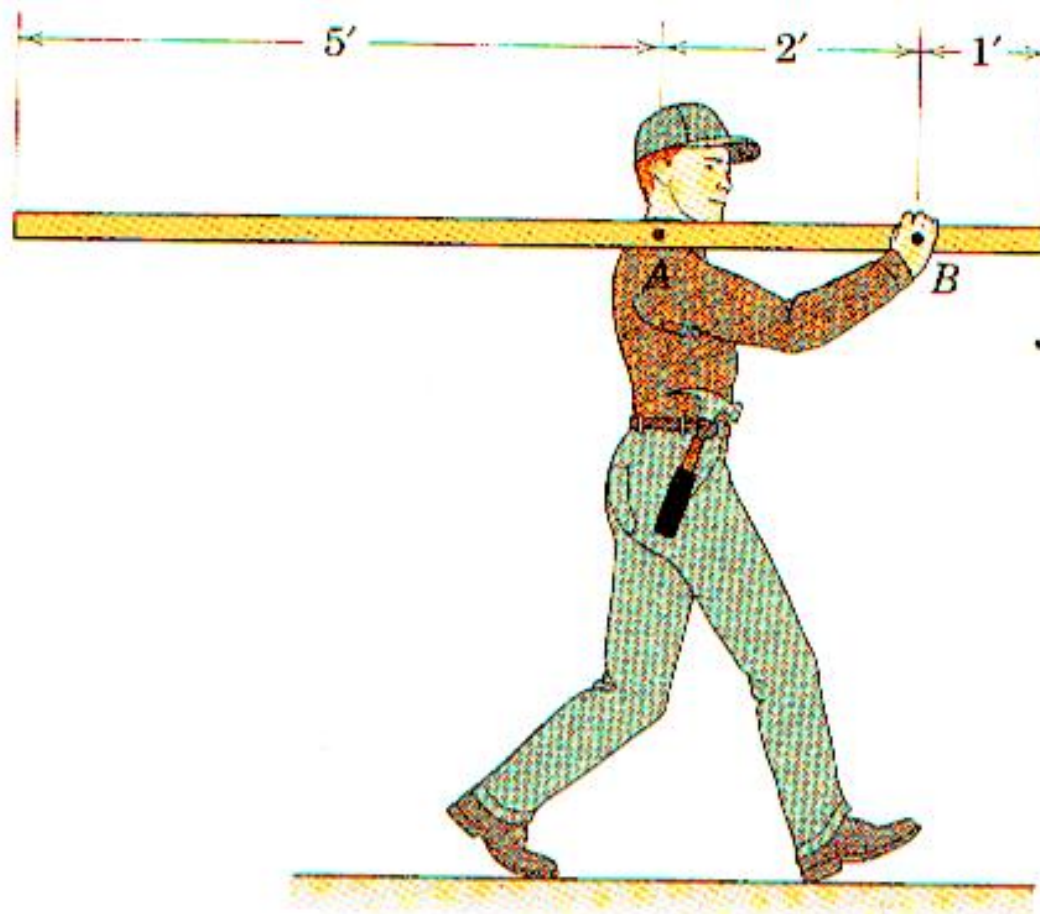
ESERCIZIO 2



Problem 2/40

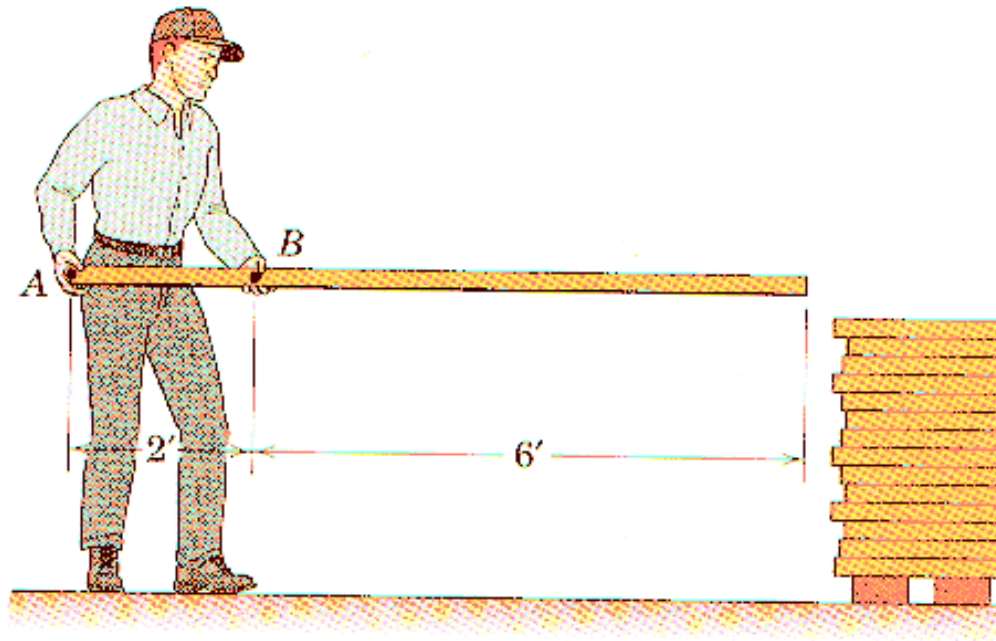
Trovare il momento sulla vertebra lombare A

ESERCIZIO 3



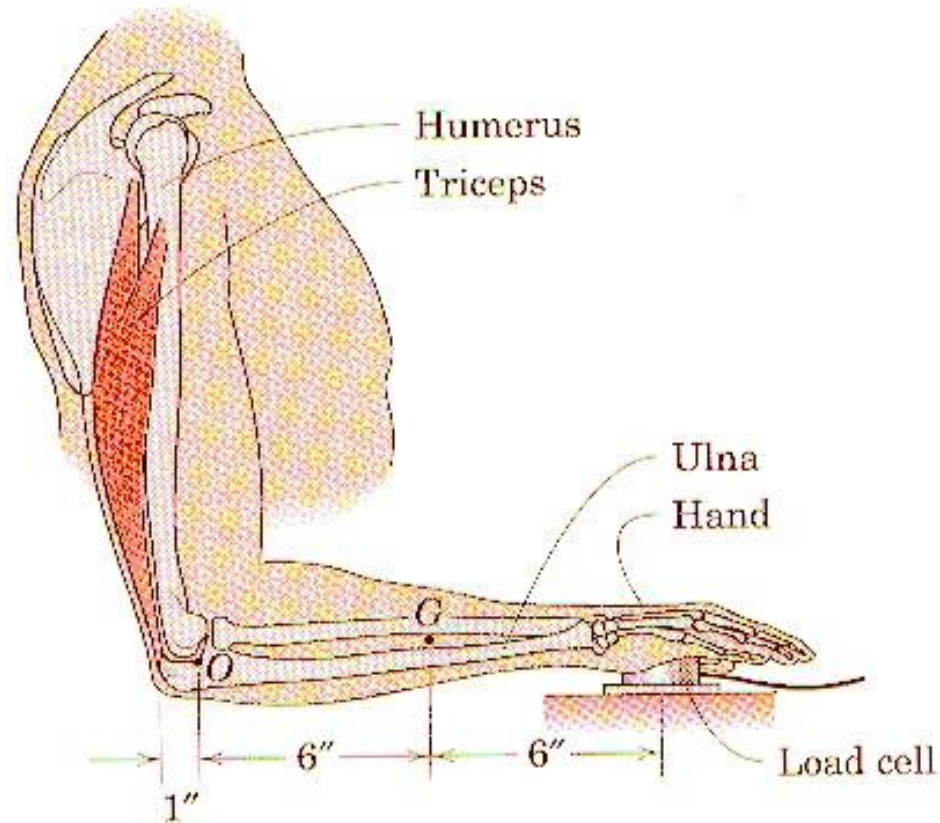
L'asta omogenea pesa 60 N;
quanto si scarica sulla spalla in A?

ESERCIZIO 4



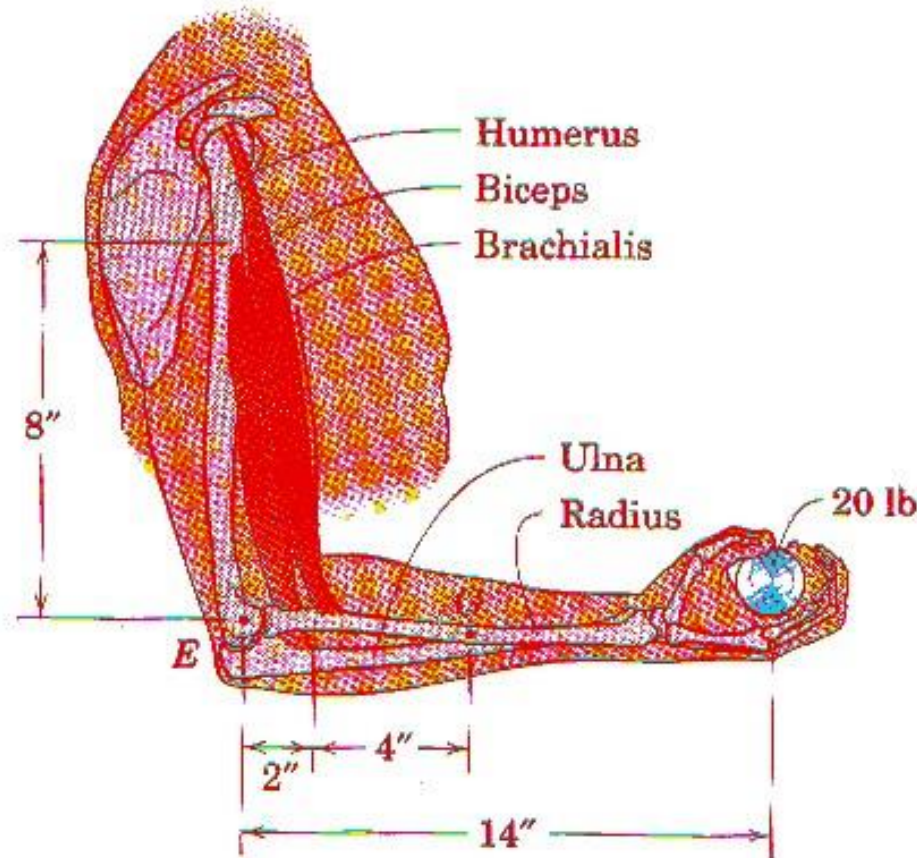
Stessa asta, quali sono le azioni sulle mani?

ESERCIZIO 5



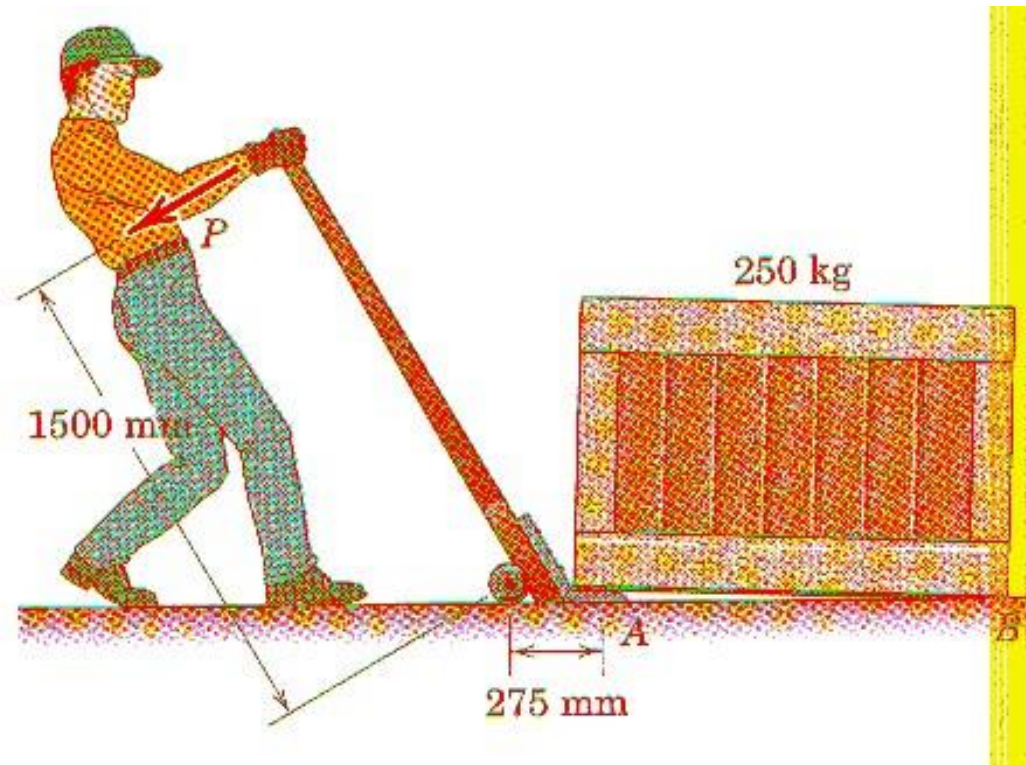
Sistema di misura della forza del tricipite. Si chiede al paziente di spingere con la mano su una cella di carico. Sapendo che la forza misurata è 35 lb e che l'avambraccio pesa 3.2 lb, determinare la forza sviluppata dal tricipite.

ESERCIZIO 6



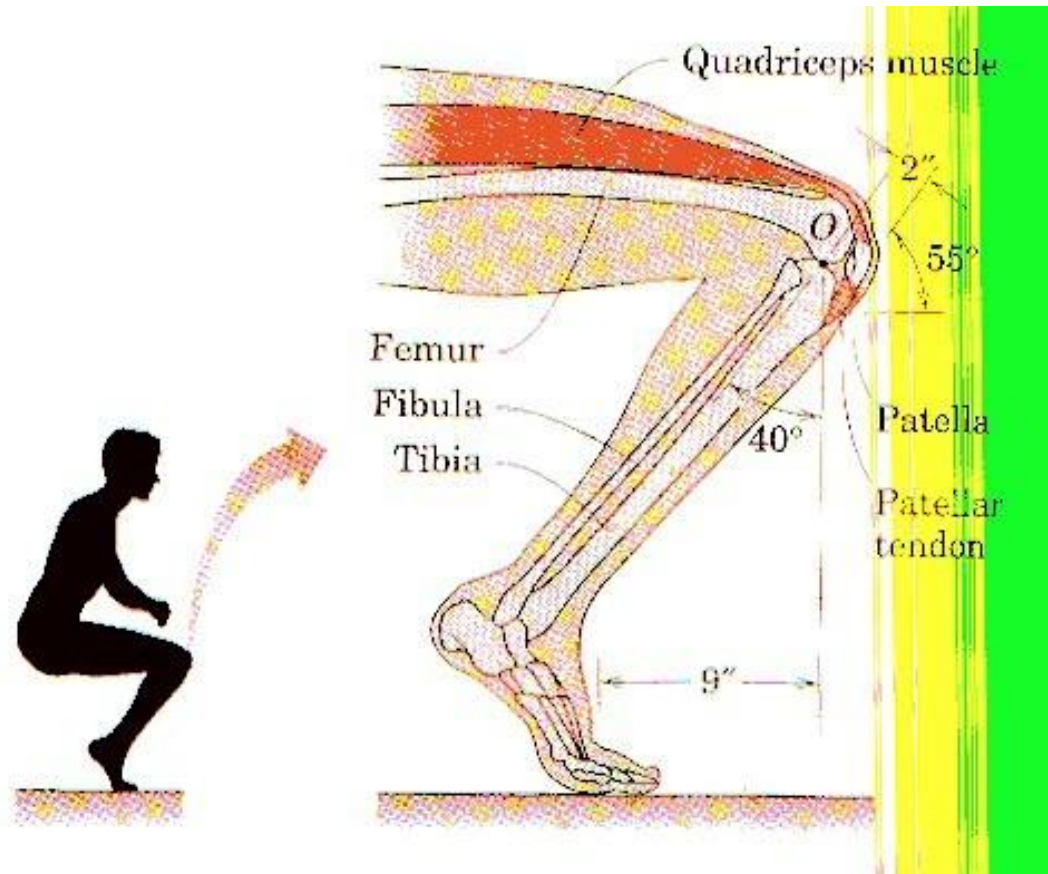
Calcolare le azioni dei muscoli e la reazione del gomito. Oltre al peso nella mano, considerare anche il peso proprio dell'avambraccio 3.2 lb.

ESERCIZIO 7



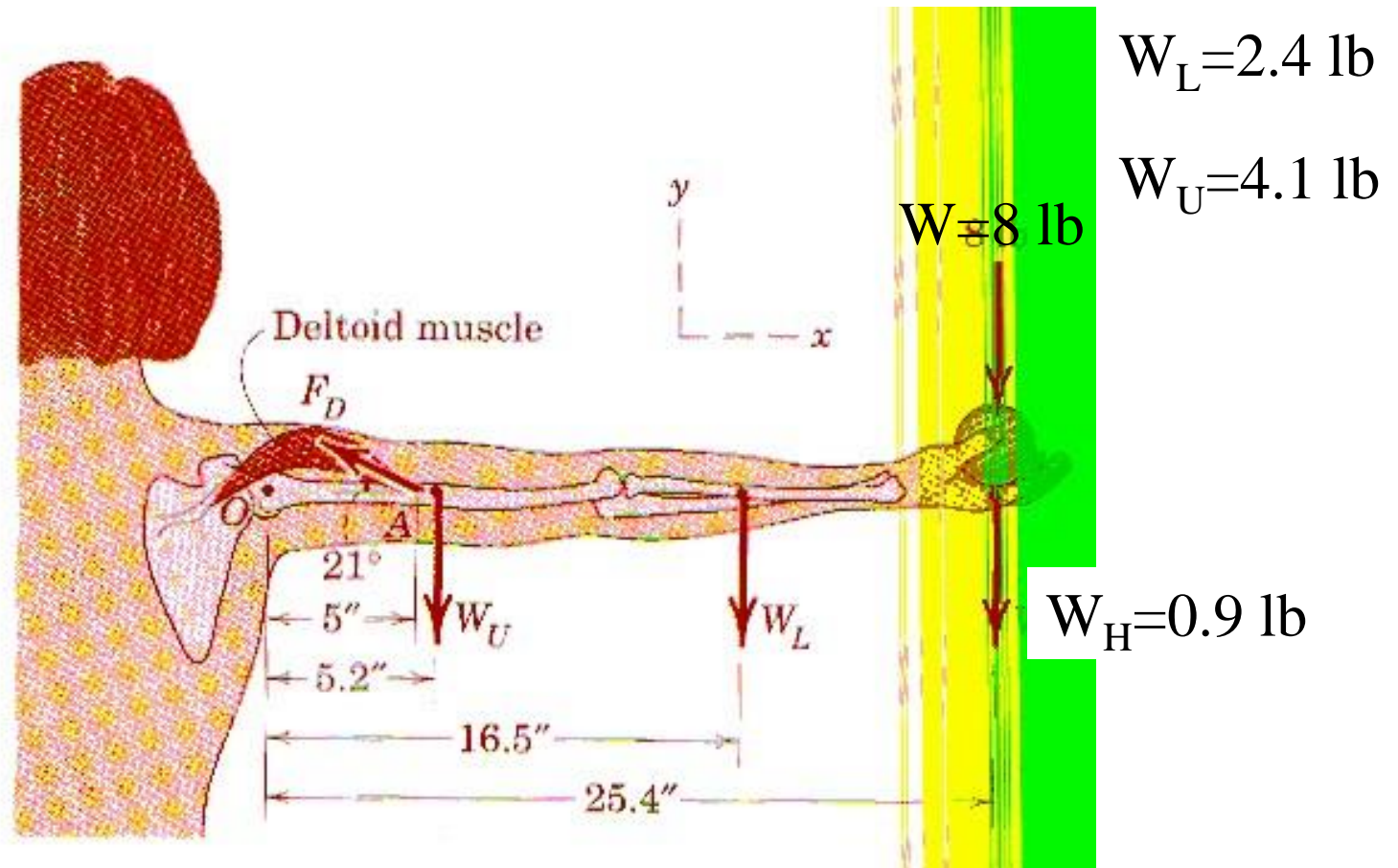
Quale forza P sta esercitando la persona in figura?

ESERCIZIO 8



Tutto il peso W della persona si scarica sulle punte dei piedi. Quale azione passa per il tendine rotuleo?

ESERCIZIO 8



Calcolare la forza esercitata dal deltoide.