19. Lezione 30 novembre

lunedì 30 novembre 2020
08:32

Cinematica di posizione → differenziale

Per ogni corpo del sistema POSA nota attraverso matrici

$T_{SL_i}(\underline{q}_i)$ — VARIABILI GIUNTO / COORD. LIBERE

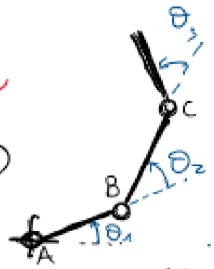
FISSA, LOCALE DEL CORPO i

ricorda che si possono estrarre dalla T le 6 grandezze che si associano ai gdl del corpo rigido

$T_{SL_i} \rightarrow \underline{x}_i(\underline{q}_i)$ vettore posa 6×1 $\qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{P}^0 \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}$

- cinematica posizione
  - diretta $\underline{q} \longrightarrow \underline{x}$
  - inversa $\underline{x} \longrightarrow \underline{q}$

Una nota sulle catene chiuse



RRR

- catena SERIALE (aperta)

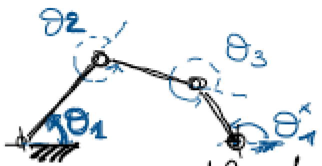
  $\underline{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$

  gli angoli sono indipendenti $\qquad$ gdl = 3

- c. chiusa → PARALLELO

  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, (\theta^*)$

  sono dipendenti



gdl = 1

$\boxed{es}$ $\quad \theta_2(\theta_1), \; \theta_3(\theta_1)$

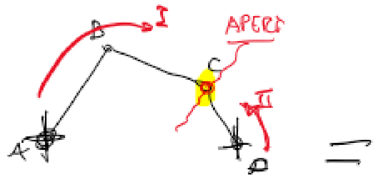
queste relazioni si ricavano dalle

- eq.ni di chiusura

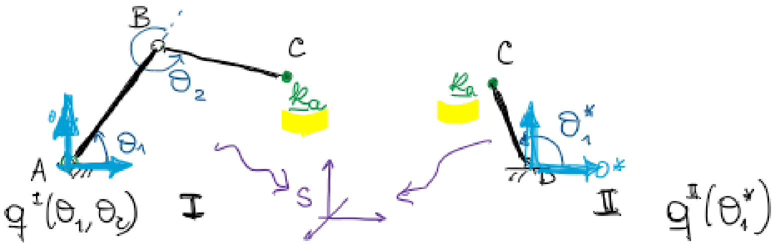
COME SI POSSONO TRATTARE CATENE CHIUSE?

L'idea è di trattare catena chiusa come due aperte e poi imporre condizioni di chiusura

→ si sceglie giunto da aprire



asse: punto / direzione (versore)

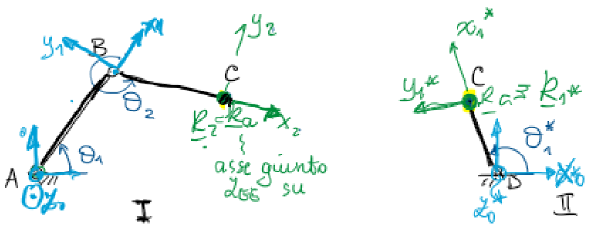


k_a direzione asse giunto aperto

EQ. CHIUSURA
$$\begin{cases} [C^I]_S = [C^{II}]_S \\ [k_a^I]_S = [k_a^{II}]_S \end{cases}$$

S SDR DOVE RIPORTARE CONDIZIONI
scelto da noi x esprimere eqni

Esempio di soluzione di quadrilatero articolato con DH per posizionare sdr locali



$\longrightarrow T_{02}(\theta_1, \theta_2)$ $\qquad$ $\longrightarrow T_{0^*1^*}(\theta_1^*)$

EQ. CHIUSURA $\quad$ 1) $k_a = k_2 = k_{1^*}$ $\qquad$ 2) $C^I \equiv C^{II}$

componenti k e coord C nelle matrici T

$$T_{02}(\theta_1, \theta_2) = \begin{array}{cccc} & & k & C \\ \left[\begin{matrix} [i_2]_0 & [j_2]_0 & [k_2]_0 & [C]_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. & & & \left.\right] \end{array}$$

$$T_{0^*1^*}(\theta_1^*) = \begin{bmatrix} [i_{1^*}]_{0^*} & [j_{1^*}]_{0^*} & [k_{1^*}]_{0^*} & [C]_{0^*} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le componenti vanno scritte nello stesso sdR

$\underline{S \equiv \text{base } O}$ $O^* \to O$

In questo caso $\underset{\text{COSTANTE}}{T_{OO^*}} = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} \overline{AD} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ $[O^*]_0 = [D]_0$

$$T_{O1^*} = T_{OO^*}\, T_{O^*1^*} = \begin{bmatrix} [\underline{i}_{1^*}]_0 & [\underline{j}_{1^*}]_0 & [\underline{k}_{1^*}]_0 & [C]_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

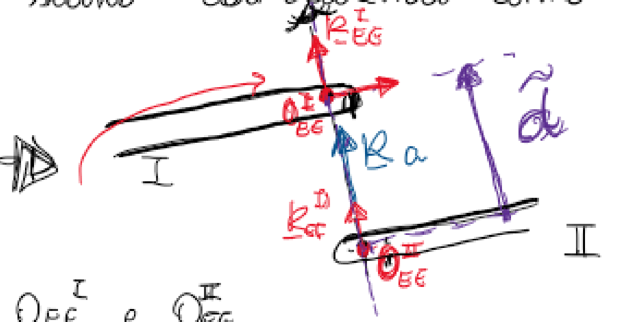
In questo caso $R_{OO^*} = I$

EQ. CHIUS.

- $[\underline{k}_2(\theta_1,\theta_2)]_0 = [\underline{k}_{1^*}(\theta_1^*)]_{0^*} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ✓ NON UTILI — NON DIPENDONO $\theta_1, \theta_2, \theta_1^*$

- $[C(\theta_1,\theta_2)]_0 = \begin{bmatrix} \overline{AD} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [C(\theta_1^*)]_{0^*}$
  $(0 = 0)$
  → 2eq. sc. (componente z $0 = 0$)
  → $\theta_2(\theta_1)$ $\theta_1^*(\theta_1)$ θ_1 VAR. IND.

ATTENZIONE! in generale non è detto che le origini degli EE delle due catene siano coincidenti come qui C.

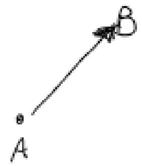


(Dipende da convenzione DH sui due lati)

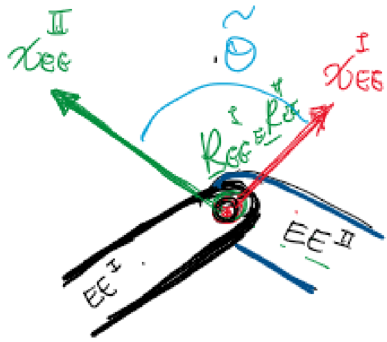
GUARDANDO DA k_a

O_{EE}^{I} e O_{EE}^{II} saranno allineati sulla direzione

- $\underline{k}_a = \underline{k}_{EE}^{I} = \underline{k}_{EE}^{II}$
- $O_{EE}^{I} = O_{EE}^{II} + \underbrace{\overrightarrow{O_{EE}^{II}\, O_{EE}^{I}}}_{/\!/ \underline{k}_a}$



$$\overrightarrow{O_{EE}^{II}\, O_{EE}^{I}} = \tilde{d}\, \underline{k}_a$$



$\tilde{d}$ → GIUNTO ROTOIDALE: $\tilde{d}$ costante

$\tilde{d}$ → GIUNTO PRISMATICO: $\tilde{d}$ variabile

INOLTRE

$\underline{i}_{EE}^{I} \cdot \underline{i}_{EE}^{II} = \cos\tilde{\theta}$

- $\tilde{\theta}$ variabile ← → $\tilde{\theta}$ costante

$$\left[O_{EE}^{I}\right]_S = \left[O_{EE}^{II}\right]_S + \left[\overrightarrow{O_{EE}^{II}\ O_{EE}^{I}}\right]_S$$

per questa — SCELTO COMODO × EQUAZIONI

S potrebbe essere scelto come Sdr su EE^{II}

così $\left[O_{EE}^{II}\right]_{EE^{II}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\overrightarrow{O_{EE}^{II}\ O_{EE}^{I}}\right]_{EE^{II}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{d} \end{bmatrix}$

più complesso $\left[O_{EE}^{I}\right]_{EE^{II}}$ ma fattibile, dato

$T_{0EE^{I}}$, $T_{0^*EE^{II}}$, T_{00^*} ⟹ $T_{EE^{II}EE^{I}} = T_{EE^{II}0^*}\, T_{0^*0}\, T_{0EE^{I}}$

- $T_{EE^{II}EE^{I}} = T_{0^*EE^{II}}^{-1}\, T_{00^*}^{-1}\, T_{0EE^{I}}$

CINEMATICA DIFFERENZIALE

- velocità, accelerazioni calcolati usando matrici

RICORDA da meccanica CORPO RIGIDO

VELOCITÀ

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$ form. fond. corpo rigido 2D / 3D
A, B ∈ C.R.

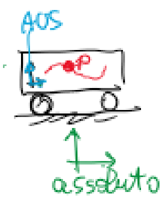
- COMPOSIZIONE Σ_{AUS} $\begin{cases} \underline{v}_P = \underline{v}_P^{(tr)} + \underline{v}_P^{(rel)} \\ \underline{\omega} = \underline{\omega}^{(tr)} + \underline{\omega}^{(rel)} \end{cases}$ (*)

$\underline{\omega}$ vel. ang. corpo rigido GALILEO!

$$\underline{v}_P = \dot{s}\,\underline{t} \quad \text{TRAIETT.}$$

(*) $\underline{v}_P^{(tr)}$ velocità che avrebbe P se ∈ AUS

$\underline{v}_P^{(rel)}$ velocità di P vista dall' AUS

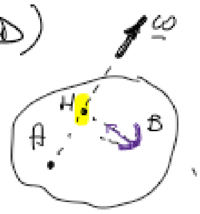


Istant. Screw Axis o Asse di Mozzi

$$\underline{v}_P = \underline{v}_{//} + \underline{\omega} \wedge QP \qquad Q \in \text{asse Mozzi}$$
$\underline{v}_{//}$ // $\underline{\omega}$

ACCELERAZIONI

- $\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{AB}$ TEOR. RIVALS (2D)
- $\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{HB}$ (3D)
$= \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}} \wedge \overrightarrow{AB} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \overrightarrow{AB})$



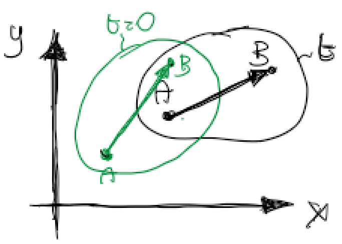
COMPOSIZIONE Σ_{AUS} $\underline{a} = \underline{a}^{(tr)} + \underline{a}^{(rel)} + \underline{a}^{(Cor)}$

$$\underline{a}^{(Cor)} = 2\,\underline{\omega}^{(tr)} \wedge \underline{v}^{(rel)}$$

CON LE MATRICI ?

* $\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ F.F.

$\underline{\omega} \overset{?}{\longleftrightarrow} R$



partiamo da

$$\overrightarrow{OB}(t) = \overrightarrow{OA}(t) + \overrightarrow{AB}(t)$$
$$\overrightarrow{AB}(t) = R(t)\,\overrightarrow{AB}(0)$$

$$\underset{\overrightarrow{OB}}{p_B(t)} = \underset{\overrightarrow{OA}}{p_A(t)} + R(t)\,\overrightarrow{AB}(0)$$

$\frac{d}{dt}$

$$\underbrace{\dot{p}_B}_{\underline{v}_B} = \underbrace{\dot{p}_A}_{\underline{v}_A} + \underbrace{\dot{R}(t)\,\underbrace{\overrightarrow{AB}(0)}_{cost}}_{?\ \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

nota che $\underline{\omega \wedge \vec{AB}(t)}$

quindi per il confronto

$$\vec{AB}(0) \to \vec{AB}(t) = R(t)\,\vec{AB}(0)$$

$$\vec{AB}(0) = R^{-1}(t)\,\vec{AB}(t) = R^T(t)\,\vec{AB}(t)$$

$$\dot{p}_B = \dot{p}_A + \underbrace{\dot{R}\,R^{-1}\,\vec{AB}(t)}_{\underline{\omega} \wedge \vec{AB}(t)}$$

$$\boxed{\dot{R}R^{-1} = \Omega}$$

MATR. VEL. ANGOLARE (prod. vettoriale)

- Ricorda Eul. – Rodriguez

$\underline{r} \wedge p \to S\,p$ $\quad S$ ANTISIMMETRICA

$\underline{\omega} \wedge \vec{AB} \to \Omega\,\vec{AB}$ $\quad \Omega$ "

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

verifica Ω ANTISIMM OSSIA $\boxed{\Omega = -\Omega^T}$

propr. R: $R R^T = I$, derivo $\qquad \Omega = \dot{R}R^T$

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0$$

$$\underbrace{\dot{R}R^T}_{\Omega} = -R\dot{R}^T$$

$$\Omega = -(\dot{R}R^T)^T = -\Omega^T \quad \checkmark$$

- VELOCITÀ IN UN MANIPOLATORE

$$\underline{x}(q) = \begin{bmatrix} p_0 \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{COOR. 1 PUNTO} \\ \leftarrow \text{ANG EUL.} \end{array}$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{\underline{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \underline{v}_0 \text{ VEL. LINEARE} \\ \sim ??\ \underline{\omega} \end{array}$$

relazione tra $\underline{\omega}$ e $\dot{\underline{\lambda}}$??

pseudo velocità $\to \int \omega\,dt \overset{?}{=} \varphi$ NON ESISTE!

$\dot{\varphi} = \omega$!?

funzione vettoriale

$$\underline{x}(q) = \underline{f}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ \vdots \\ f_6(q) \end{bmatrix} \quad \text{dove } q(t)$$

per cui $\dot{\underline{x}} = f'(q)\,\dot{q} = \boxed{J_{AN}(q)\,\dot{q}}$ veloc. ai giunti

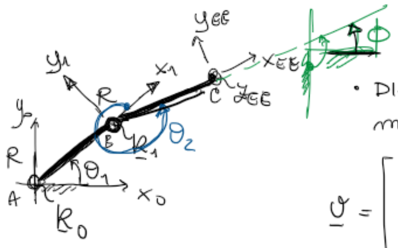
jac. analitico

$$J_{AN} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial q_n} \end{bmatrix} \to \dot{x} = J_{AN}\,\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\underset{6\times1}{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{R}}_0 \\ \underline{\omega} \end{bmatrix}$$ più significativo ($\underline{\omega}$) per cinematica

$$\underline{v} = \underbrace{J_g(q)}_{\text{Jac. geometrico}}\, \dot{q}$$

vediamo come si costruisce J_g con un esempio



- Dispongo terne su manipolatore con DH ma non è necessario seguire conv.

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ \underline{\omega}_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\omega}_2\,? \qquad \underline{v}_C\,?$$

ω_2

- Φ angolo assoluto per orientare asta ② $\rightarrow$ $\underline{\omega}_2 = \dot{\Phi}\,\underline{k}$
  ma non usiamo Φ, usiamo Θ_1 e Θ_2
  Θ_2 angolo relativo!
  $\underline{\omega}_2 \longrightarrow$ AUS ≡ ①

$$\Sigma_1 \quad \underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_2^{(tr)} + \underline{\omega}_2^{(rel)} = \underline{\omega}_1 + \dot{\Theta}_2\,\underline{k}_1$$

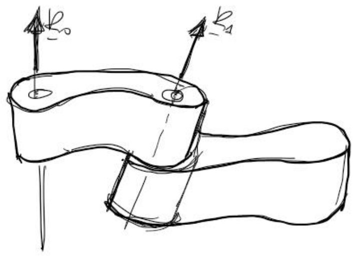
$$\underline{\omega}_2 = \dot{\Theta}_1 \underline{k}_0 + \dot{\Theta}_2 \underline{k}_1$$

scriviamo $\underline{k}_0$, $\underline{k}_1$ pensando a caso generale con $\underline{k}_0 \not\parallel \underline{k}_1$

$\Rightarrow$ q variabili quindi $[\Theta_1, \Theta_2]$

- $\underline{\omega}_2 = \dot{\Theta}_1 \underline{k}_0 + \dot{\Theta}_2 \underline{k}_1$

$$\underline{\omega}_2 = [\underline{k}_0 \quad \underline{k}_1] \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{q}}$$

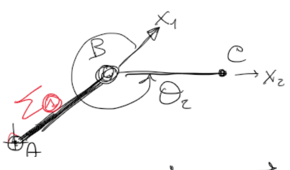


- $\underline{v}_C$

$$\begin{cases} \underline{v}_{C_2} = \underline{v}_{B_2} + \underline{\omega}_2 \wedge \vec{BC} \\ \underline{v}_{B_2} = \underline{v}_{B_1} = \underline{\omega}_1 \wedge \vec{AB} \end{cases} \quad \underline{v}_C = \underline{\omega}_1 \wedge \vec{AB} + \underline{\omega}_2 \wedge \vec{BC} = \dot{\Theta}_1 \underline{k}_0 \wedge \vec{AB} + (\dot{\Theta}_1 \underline{k}_0 + \dot{\Theta}_2 \underline{k}_1) \wedge \vec{BC}$$

$$\underline{v}_C = \underbrace{\dot{\Theta}_1 \underline{k}_0}_{\text{VEL. 1° GIUNTO}} \wedge (\vec{AB} + \vec{BC}) + \underbrace{\dot{\Theta}_2 \underline{k}_1}_{\text{VEL. 2° GIUNTO}} \wedge \vec{BC} = \dot{\Theta}_1 \underline{k}_0 \wedge \vec{AC} + \dot{\Theta}_2 \underline{k}_1 \wedge \vec{BC}$$

$$\underline{v}_C = \left[\underline{k}_0 \wedge \vec{AC} \quad \underline{k}_1 \wedge \vec{BC} \right] \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{bmatrix}$$



=

in alternativa direttamente composizione

$$\Sigma_1 \quad \underline{v}_C = \underline{v}_C^{(rel)} + \underline{v}_C^{(tr)} = \underset{\dot{\Theta}_2 \underline{k}_1}{\underline{\omega}^{(rel)}} \wedge \vec{BC} + \underset{\underline{\omega}_1 \wedge \vec{AC}}{\underline{v}_{C(1)}} = \dot{\Theta}_2 \underline{k}_1 \wedge \vec{BC} + \dot{\Theta}_1 \underline{k}_0 \wedge \vec{AC}$$

Jac. geom.

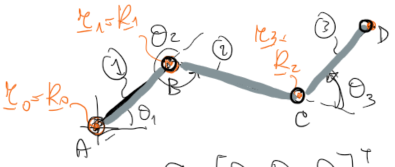
$$\begin{array}{c} 3\times1 \\ 3\times1 \end{array} \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ \underline{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_0 \wedge \vec{AC} & \underline{k}_1 \wedge \vec{BC} \\ \underline{k}_0 & \underline{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{bmatrix}$$

ricompattando ecco J_{geom}

TANTE COLONNE QUANTI SONO GDL
OGNI COLONNA - 1 GIUNTO (1 GDM)

↓

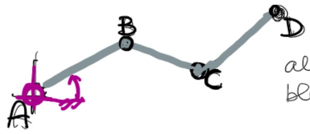
Proviamo a costruire J_g per altro manipolatore RRR



$$q = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$$

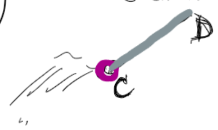
$$\begin{bmatrix} v_D \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} J_P \\ \left[\begin{array}{c:c:c} k_0 \wedge \vec{AD} & k_1 \wedge \vec{BD} & k_2 \wedge \vec{CD} \\ \hdashline k_0 & k_1 & k_2 \end{array}\right] \\ J_\omega \end{array} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

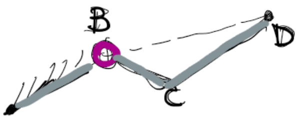
CONTRIBUTO 1° GIUNTO



altri giunti bloccati

CONTRIBUTO 3° GIUNTO



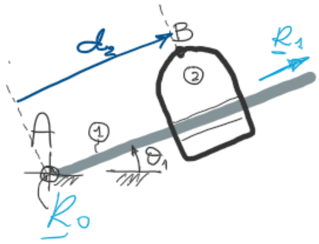


CONTRIBUTO 2ª GIUNTO sbloccato

scrivere equazioni come sopra

v_C, ω_3 verifica costruzione J

- MANIPOLATORE CON GIUNTO PRISMATICO



Ricorda vincolo coppia prism

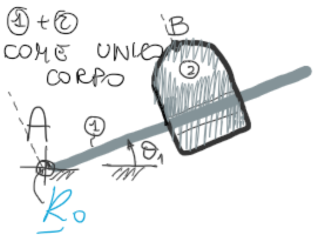
$$\Sigma_2 \quad \omega_2 = \omega^{(tr)} + \omega^{(rel)}$$
$$\omega^{(rel)} = 0$$
$$\omega_2 = \omega_1 = \dot{\theta}_1 k_0$$

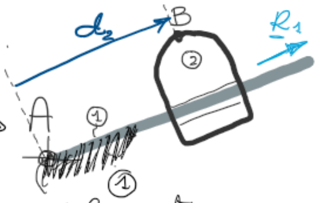
$$\Sigma_1 \quad v_B = v_B^{(tr)} + v^{(rel)}$$
$$= \omega_1 \wedge \vec{AB} + \dot{d}_2 k_1$$

$$\begin{bmatrix} v_B \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} k_0 \wedge \vec{AB} & k_1 \\ \hline k_0 & 0 \end{array}\right]$$

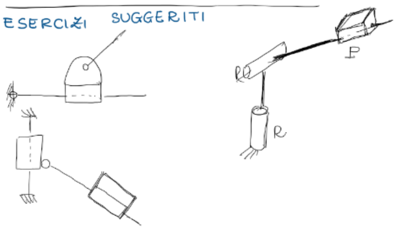
GIUNTO R   GIUNTO P

CONTRIBUTO DA GIUNTO ①





ESERCIZI SUGGERITI



Rimane da correlare $J_g \leftrightarrow J_{an}$
$(\omega \leftrightarrow \dot{\vartheta})$