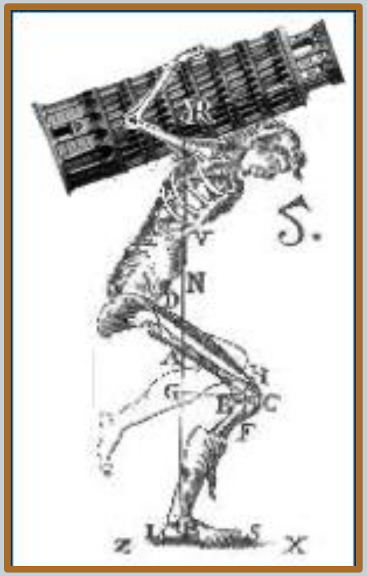
Meccanica Applicata al sistema muscolo-scheletrico

Lezione 1



Introduzione al corso

Per farvi un'idea degli obiettivi del corso e degli strumenti con cui lavoreremo, date un'occhiata al webinar

https://www.youtube.com/watch?v=XP3UTe6xJ4U

(dal minuto 5 al 21, circa).

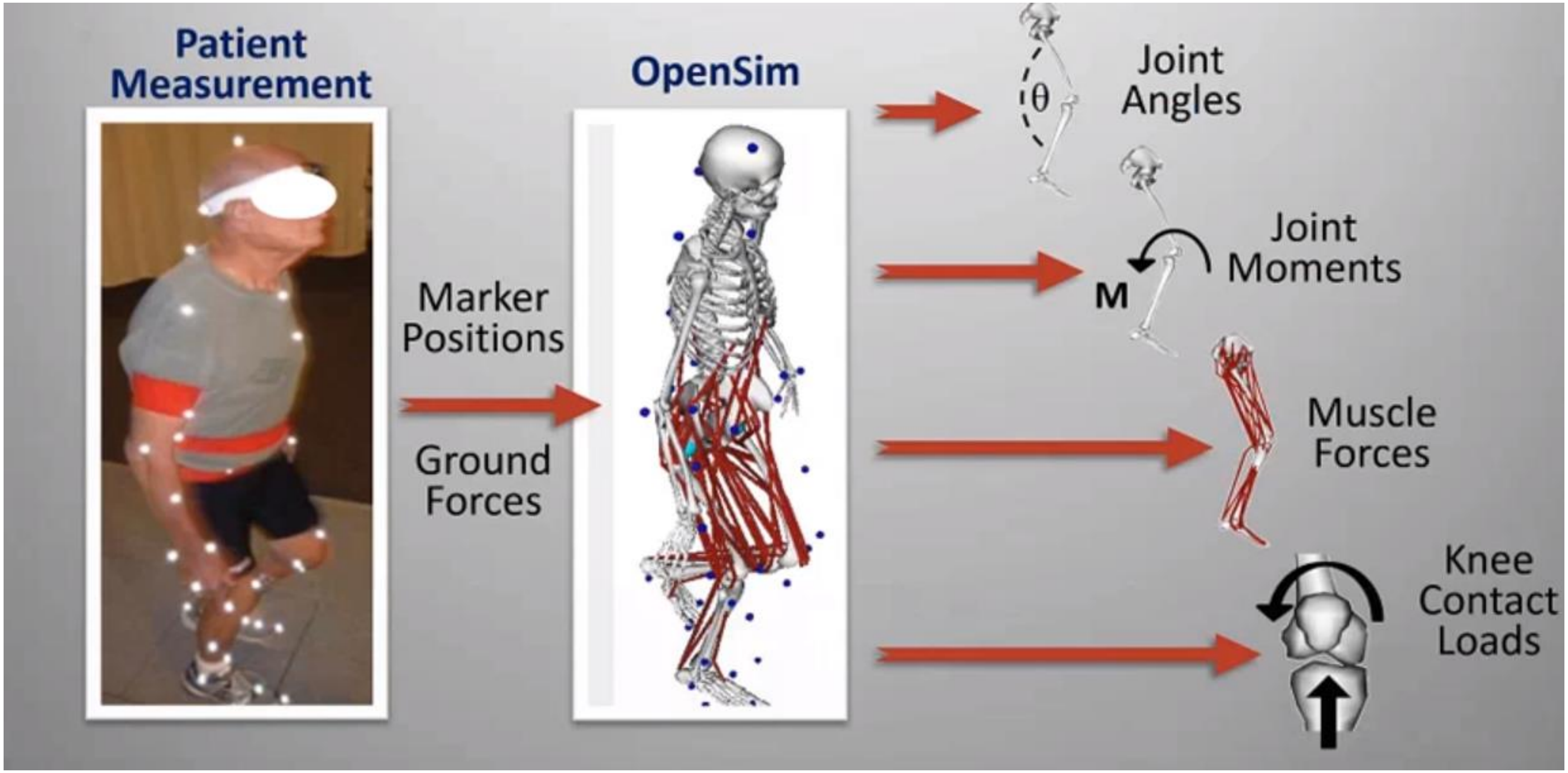
Osservate:

<u>Qual è l'obiettivo dello studio?</u>

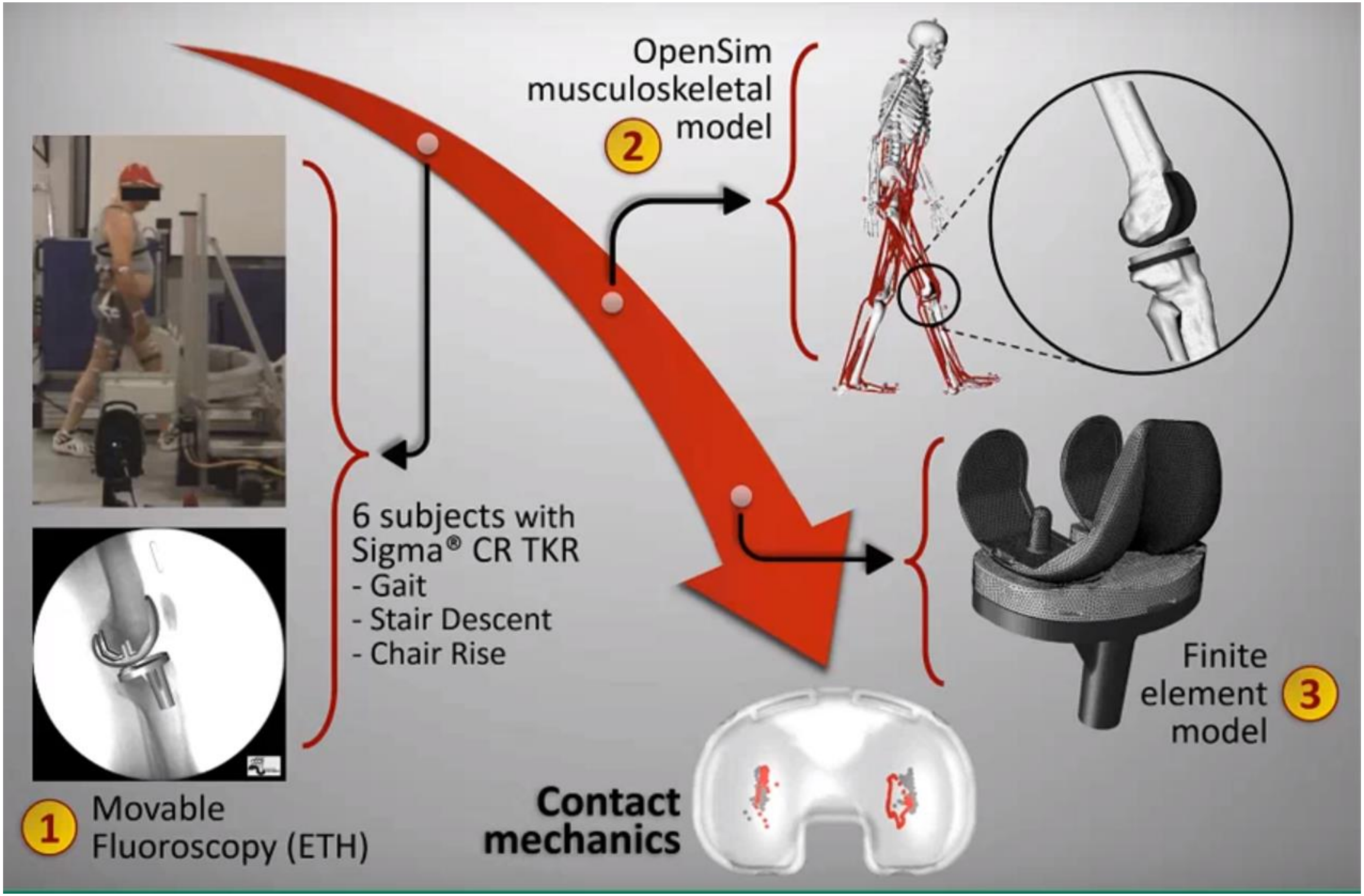
<u>Quali sono i passi dello studio?</u>

<u>Da cosa si inizia?</u>

Analisi muscolo-scheletrica



Analisi muscolo-scheletrica + FEM



Cinematica di posizione

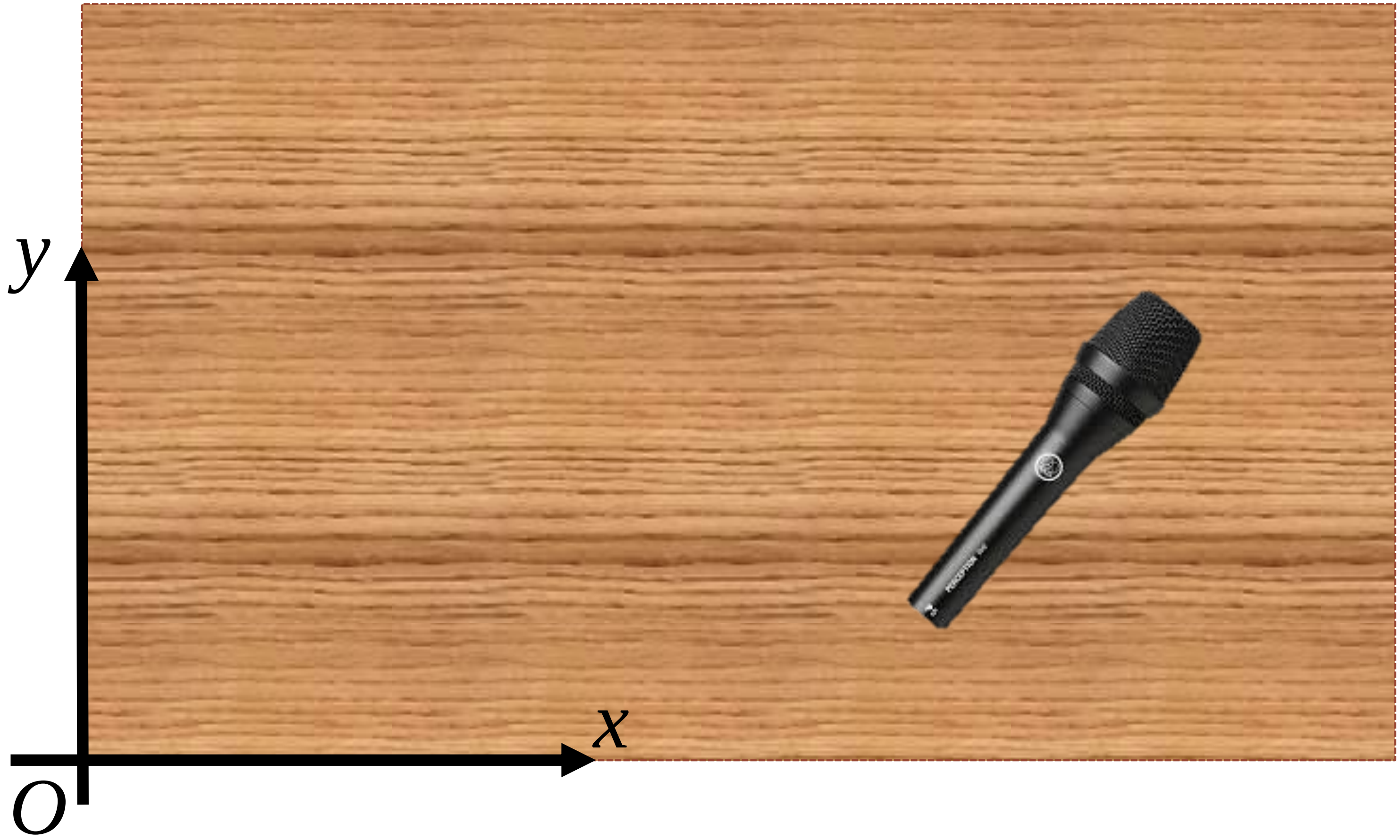
Il primo passo nell'analisi muscolo-scheletrica è **l'analisi del movimento**, generalmente fatta per via sperimentale (paziente con marker).

Lo scopo dell'analisi del movimento è ricostruire la **cinematica (di posizione)** del nostro corpo. Il movimento è il risultato di una sequenza di posizioni.

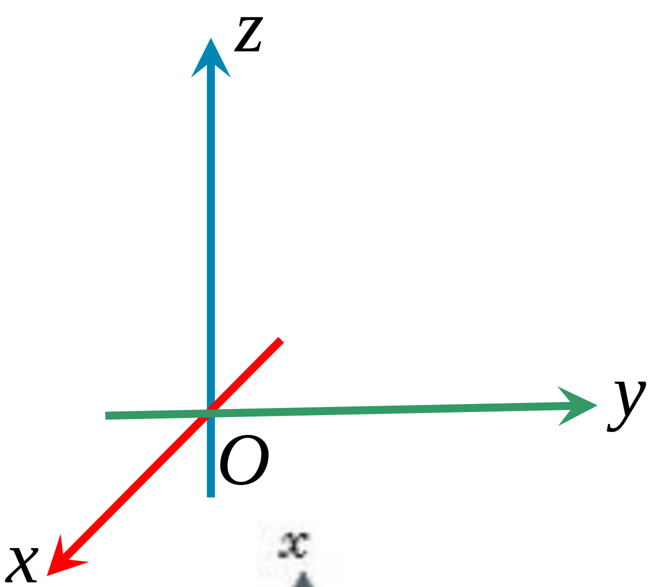
<u>Come si definisce la posizione di un corpo rigido nel piano?</u>

Esempio: posizione microfono sulla scrivania

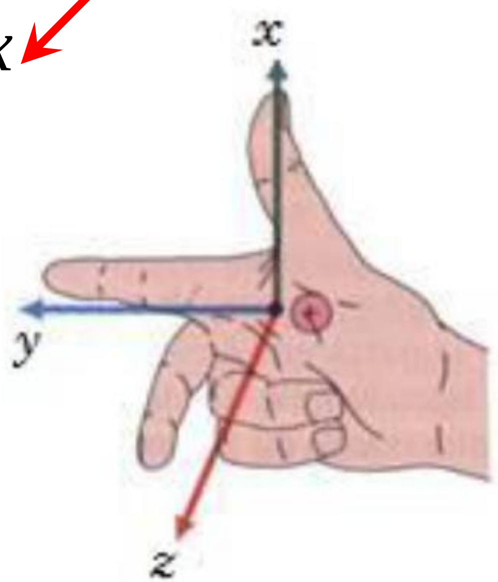
1) Si introduce un **sistema di riferimento** (sdr)

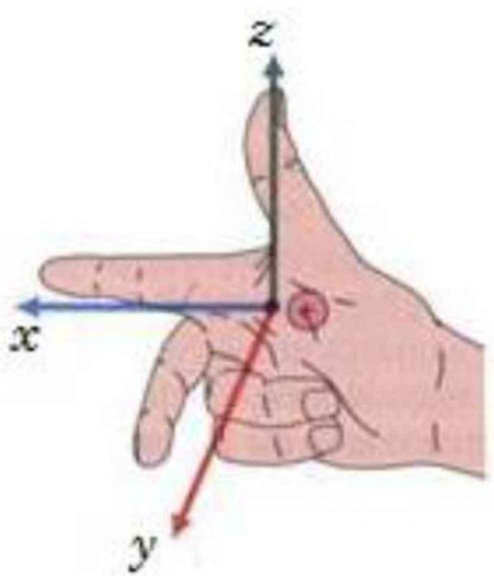


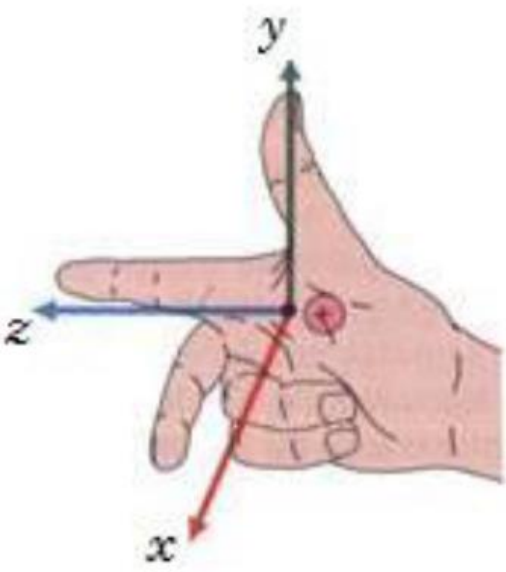
Se non diversamente specificato faremo uso di sdr cartesiani ortonormali levogiri



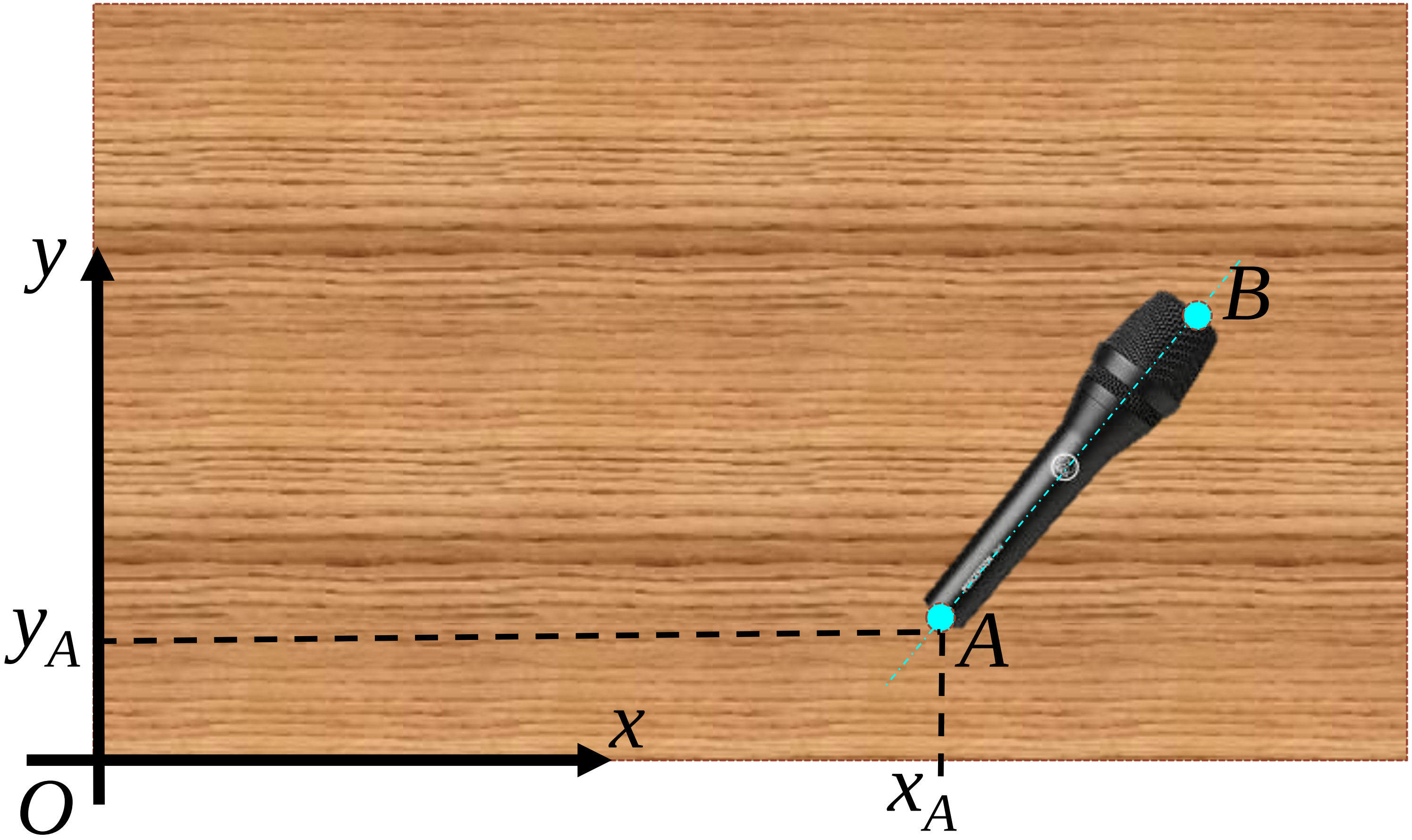
$$S=\{O;x,y,z\}$$







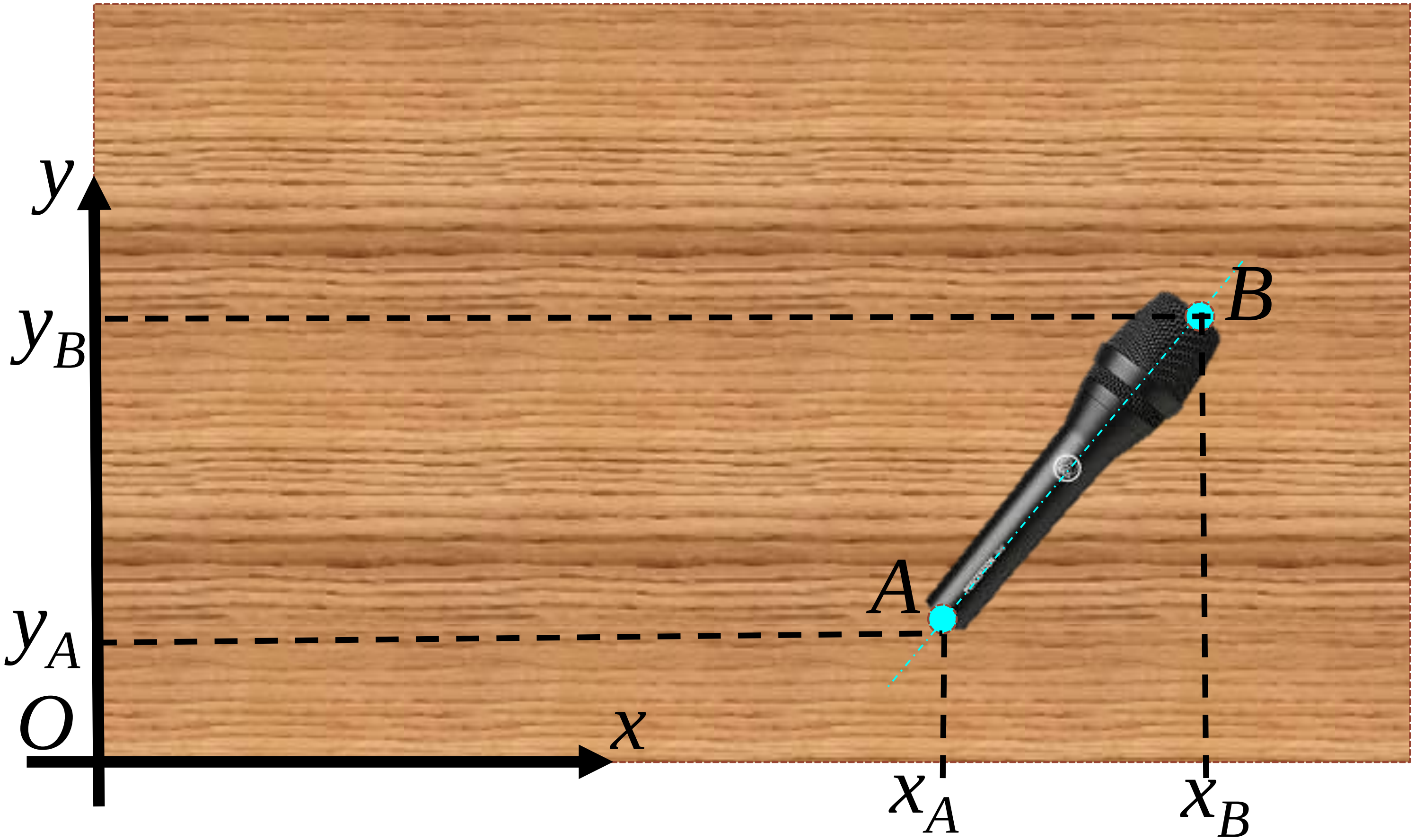
1) Si introduce un sistema di riferimento
2) Si specificano le **coordinate di un punto**, es. A



Le coordinate di un punto A nel sdr S si indicano

$$[A]_S = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = [x_A, y_A, z_A]^T = (x_A, y_A, z_A)$$

1) Si introduce un sistema di riferimento
2) Si indicano le **coordinate di un punto**, es. A
3) Si indicano le **coordinate di un altro punto**, es. B



Quante informazioni in tutto per indicare la posizione?

$$x_A, y_A, x_B, y_B$$

<u>Ricorda</u>: Quanti sono i gdl di un corpo rigido nel piano?
(ricorda anche la definizione di gdl!)

Posso scegliere 3 dati tra le coordinate di A e B?
(considerando nota la distanza AB)

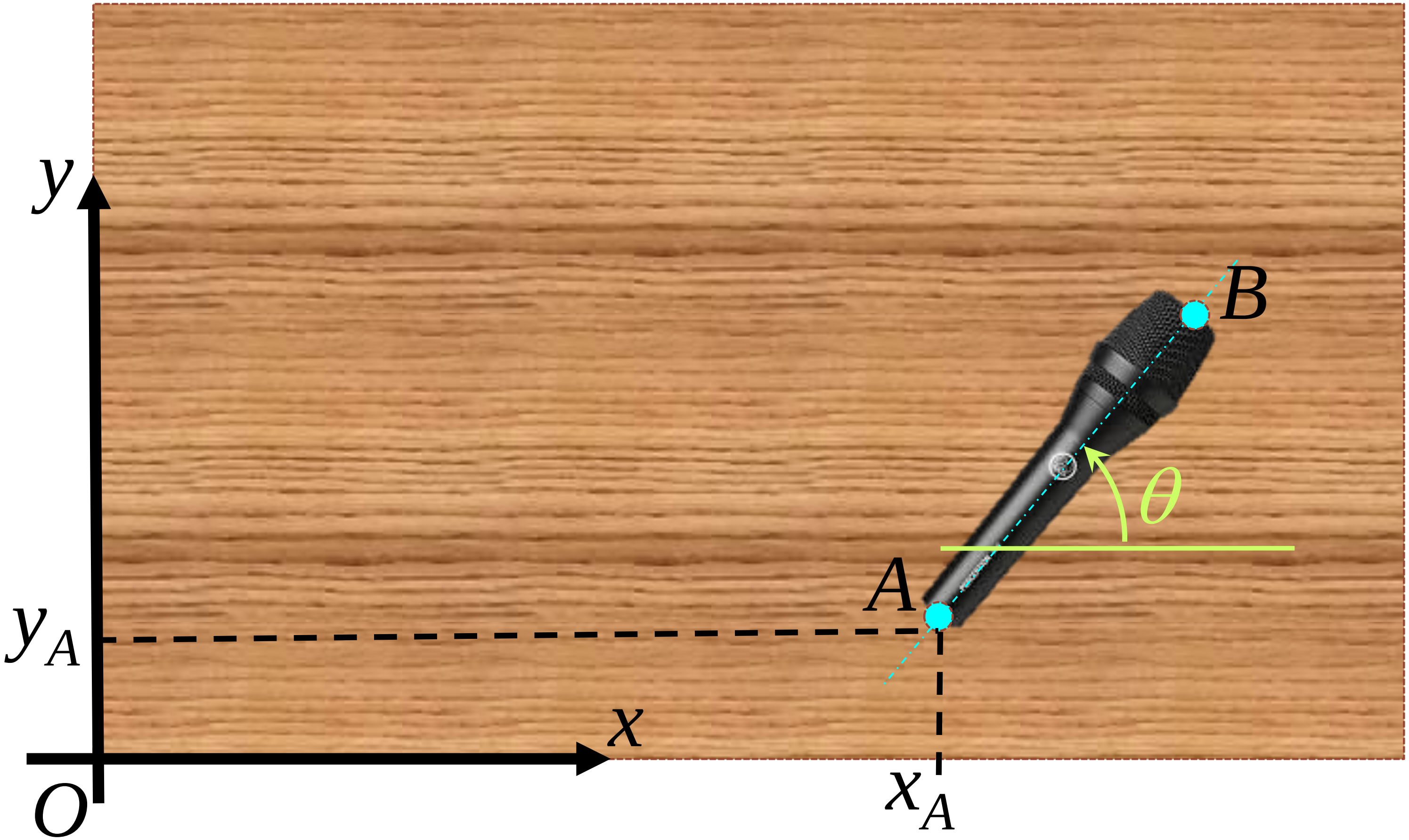
$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2$$

Es: Si riesce a ricavare in modo univoco la posizione di B se sono note l e

$$x_A, y_A, x_B\ ?$$

Per usare il numero minimo di informazioni serve un **angolo orientato**

1) Si introduce un sistema di riferimento
2) Si indicano le coordinate di un punto, es. A
3) Si indica l'**angolo $\boldsymbol{\theta}$**



L'angolo orientato è uno scalare con segno corrispondente all'angolo tra una semiretta fissa (che fa da riferimento) ed una solidale al corpo
https://www.geogebra.org/m/oNqubB78

Attenzione alla rappresentazione grafica degli **angoli orientati**

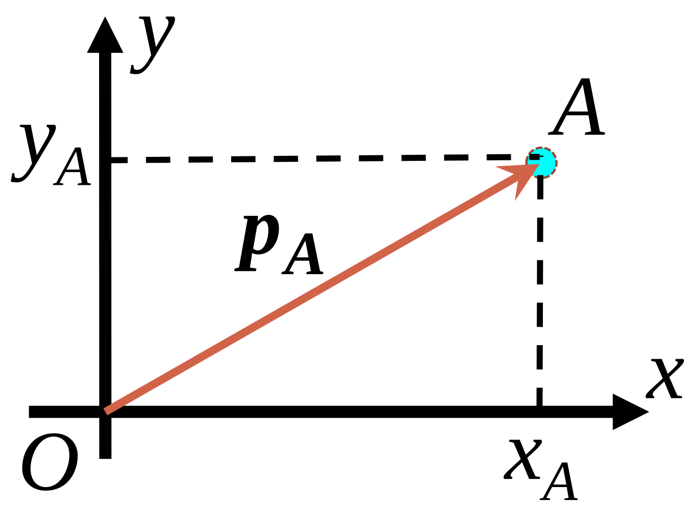
I **3** parametri scalari nec e suff a definire la posizione del microfono sulla cattedra sono le **coordinate di un suo punto** (es. A) in un sdr e un **angolo orientato** (es. **θ,** angolo formato dal segm.orientato <u>AB</u> con l'orizzontale, positivo se antiorario)

$$x_A, y_A, \theta$$

Punti – vettori posizione Coordinate - componenti

Punto A,
Coordinate in S

$$[A]_S$$



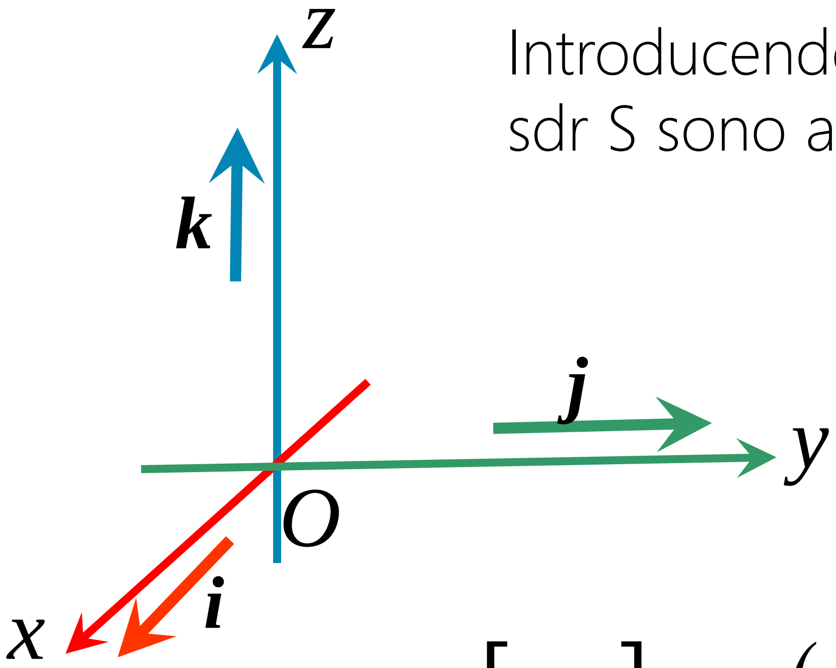
Vettore posizione di A,
componenti in S

$$\left[\overrightarrow{OA}\right]_S = [\boldsymbol{p_A}]_S$$

essendo O l'origine del sdr S

$$[A]_S = \left[\overrightarrow{OA}\right]_S = [\boldsymbol{p_A}]_S = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}$$

Il punto non è il vettore, ma la tripletta delle coordinate è uguale a quella delle componenti



Introducendo i vettori, si ricorda anche che al sdr S sono associati i versori

$$S=\{O;x,y,z\}$$

$$S=\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$$

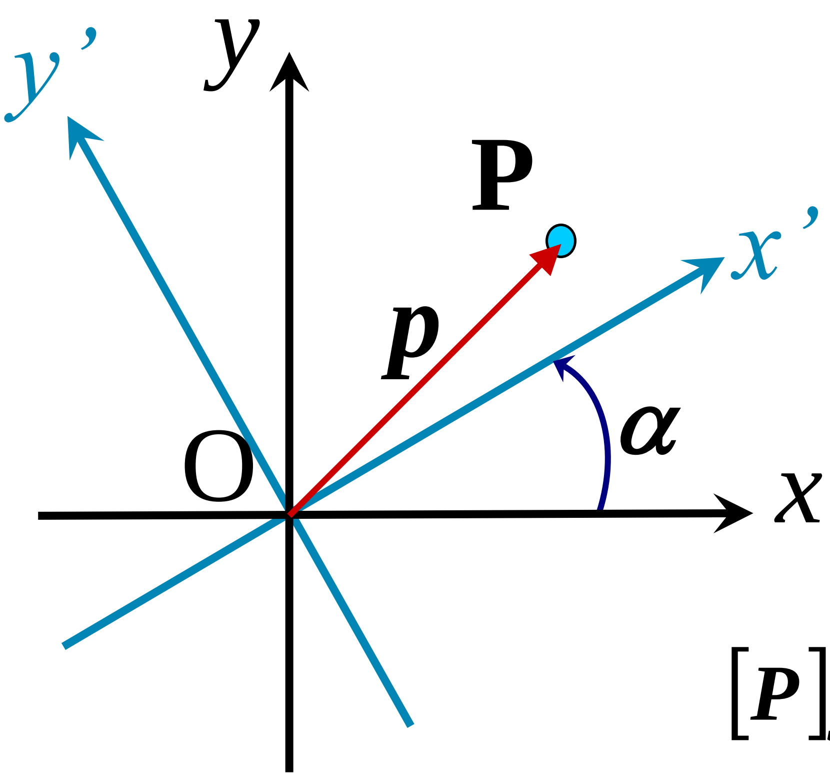
$$[\boldsymbol{p}_A]_S=(x_A,y_A,z_A)$$

$$\boldsymbol{p}_A=x_A\,\boldsymbol{i}+y_A\,\boldsymbol{j}+z_A\,\boldsymbol{k}$$

Ricorda decomposizione di un vettore secondo 3 direzioni non complanari nello spazio

Poiché il sdr è arbitrario, può servire passare da uno all’altro

Come variano coordinate/componenti al variare del sdr?



$$\boldsymbol{p} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{p} = x'\,\boldsymbol{i}' + y'\,\boldsymbol{j}' + z'\,\boldsymbol{k}'$$

$$[\boldsymbol{P}]_S = [\boldsymbol{p}]_S = (x, y, z)$$

$$[\boldsymbol{P}]_{S'} = [\boldsymbol{p}]_{S'} = (x', y', z')$$

$$[\boldsymbol{P}]_S = [\boldsymbol{p}]_S \overset{?}{\leftrightarrow} [\boldsymbol{P}]_{S'} = [\boldsymbol{p}]_{S'}$$

Che relazione c’è?

In questo caso il problema è analogo al cambiamento di base di uno spazio vettoriale

Con qualche passaggio, tipo

$$x = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{i} = \left(x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'\right) \cdot \boldsymbol{i}$$

$$= x'\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{i} + z'\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{i}$$

ripetuto per y e z si ottiene (att. Pedici)

$$[\boldsymbol{P}]_S = \mathbf{R}_{SS'}[\boldsymbol{P}]_{S'} \qquad [\boldsymbol{p}]_S = \mathbf{R}_{SS'}[\boldsymbol{p}]_{S'}$$

$$\mathbf{R}_{SS'} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{j} & \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{k} & \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{i}']_S & [\boldsymbol{j}']_S & [\boldsymbol{k}']_S \end{bmatrix}$$

Dalla definizione di componenti in S

+ Osservando le righe di R

$$\mathbf{R}_{SS'} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{k} & \boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{k} & \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{i}']_S & [\boldsymbol{j}']_S & [\boldsymbol{k}']_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{i}]_{S'}^{\mathrm{T}} \\ [\boldsymbol{j}]_{S'}^{\mathrm{T}} \\ [\boldsymbol{k}]_{S'}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

Si ripeta la procedura per ricavare per esercizio la matrice R da S a S′

$$[\boldsymbol{P}]_{S'} = \mathbf{R}_{S'S}[\boldsymbol{P}]_S \qquad [\boldsymbol{p}]_{S'} = \mathbf{R}_{S'S}[\boldsymbol{p}]_S$$

$$\mathbf{R}_{S'S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}' & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}' & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}' & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{i}]_{S'} & [\boldsymbol{j}]_{S'} & [\boldsymbol{k}]_{S'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{i}']_{S}^{\mathrm{T}} \\ [\boldsymbol{j}']_{S}^{\mathrm{T}} \\ [\boldsymbol{k}']_{S}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{R}_{S'S} = \mathbf{R}_{SS'}^{\mathrm{T}}}$$

Ne deriva una proprietà fondamentale di R

$$\boxed{\mathbf{R}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}}$$

ossia è una matrice ortogonale

$$[\boldsymbol{p}]_S = \mathbf{R}_{SS'}[\boldsymbol{p}]_{S'}$$

$$\mathbf{R}_{SS'}^{-1}[\boldsymbol{p}]_S = \mathbf{R}_{SS'}^{-1}\mathbf{R}_{SS'}[\boldsymbol{p}]_{S'} = [\boldsymbol{p}]_{S'}$$

$$[\boldsymbol{p}]_{S'} = \mathbf{R}_{S'S}[\boldsymbol{p}]_S$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{R}_{S'S} = \mathbf{R}_{SS'}^{-1} = \mathbf{R}_{SS'}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{R}_{SS'}\mathbf{R}_{SS'}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}\end{gathered}}$$

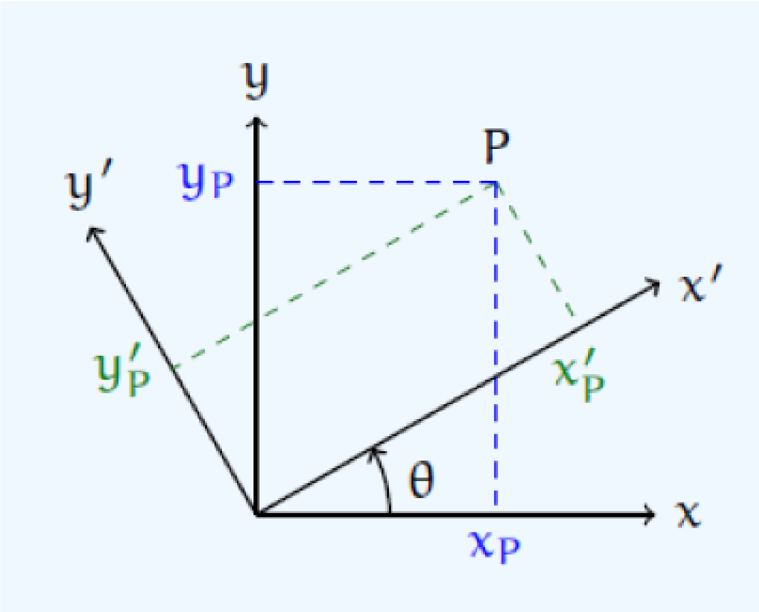
Inoltre, per la proprietà del prodotto misto

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \det\left[[\boldsymbol{u}]_S \quad [\boldsymbol{v}]_S \quad [\boldsymbol{w}]_S\right]$$

$$\boldsymbol{i}' \wedge \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{k}' = \det\left[[\boldsymbol{i}']_S \quad [\boldsymbol{j}']_S \quad [\boldsymbol{k}']_S\right] = \det \mathbf{R}_{SS'} = 1$$

$$\boxed{\det \mathbf{R} = 1}$$

Esercizio 1



Scrivere la matrice

$$\mathbf{R}_{SS'}(\theta)$$

Posto $\theta=\pi/6$ e noti

$$[\boldsymbol{P}]_S = (2,4)$$

$$[\boldsymbol{v}]_{S'} = (-20,0)$$

Si determinino $[\boldsymbol{P}]_{S'}$ e $[\boldsymbol{v}]_S$

Si calcolino

$$\overrightarrow{OP} \times \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}$$

nei due riferimenti

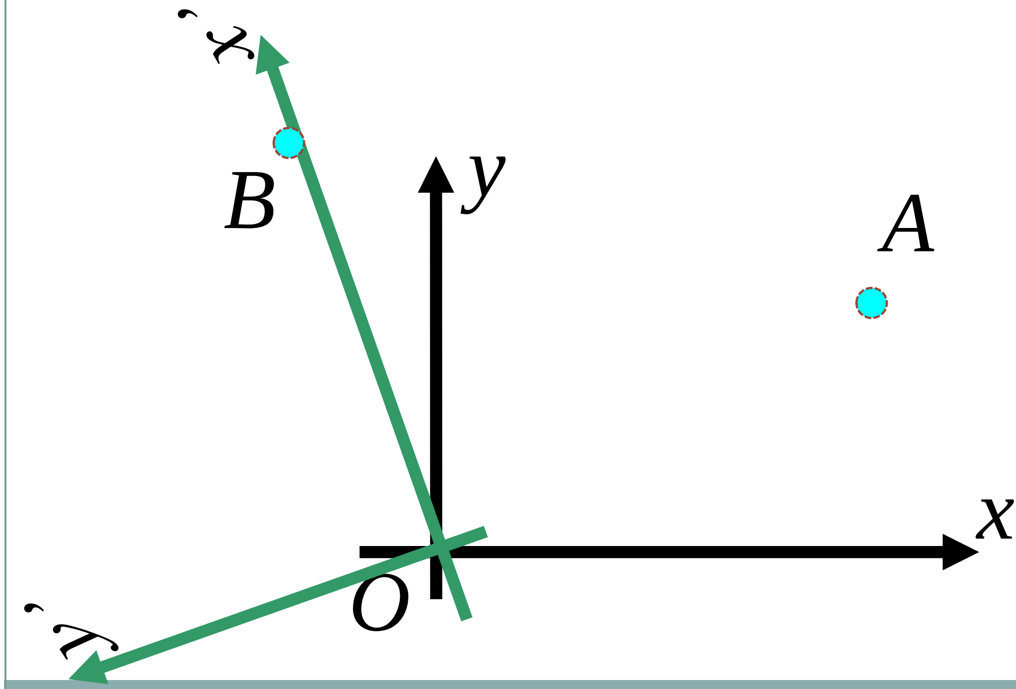
Esercizio 2

Sono noti $\theta=2\pi/3$ e $[A]_S = (5,2) \quad [B]_{S'} = (5,0)$

a) Si determinino $[A]_{S'} \quad [B]_S$

b) Si calcolino i moduli dei vettori *OA* e *OB* sia usando le componenti in S che in S′

c) Si scrivano le componenti del vettore *BA* in S ed in S′



d) Si calcoli il prodotto scalare

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

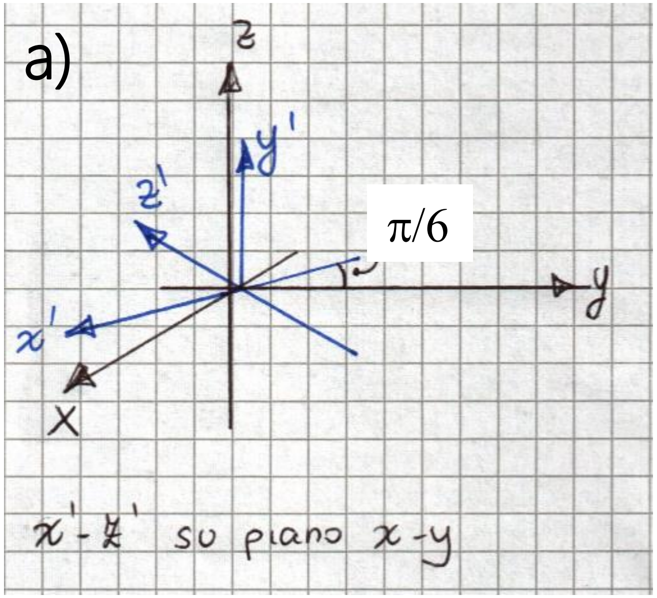
usando prima componenti in S poi in S′. Cosa si conclude? Perché?

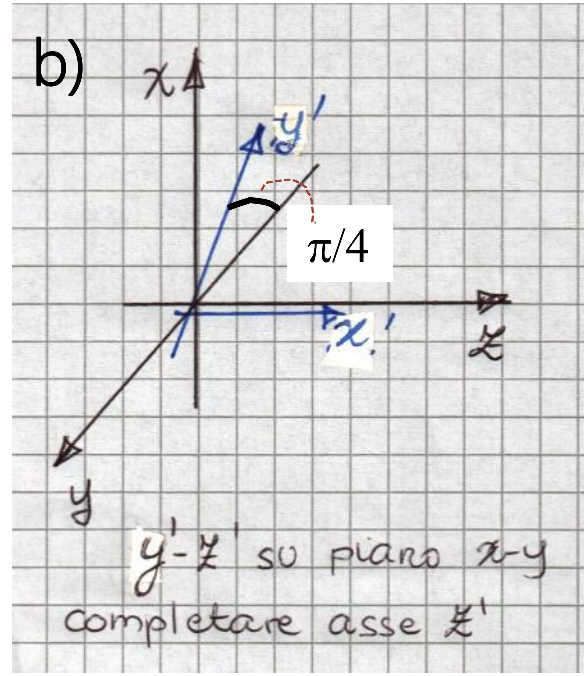
e) Analogo x $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$

f) calcolare angolo OA-OB

g) coord. punto medio AB

Esercizio 3





Per i due casi sopra mostrati:

-Scrivere le matrici di rotazione $\mathbf{R}_{SS'}$ $\mathbf{R}_{S'S}$

-Verificarne le proprietà