# Equazioni della dinamica per un corpo rigido

Si richiamano innanzitutto le equazioni cardinali della dinamica per un corpo rigido:

- Prima cardinale della dinamica (dal teorema di moto del baricentro)

$$\boldsymbol{R}^{(ext)} = m\boldsymbol{a}_G$$

dove $\boldsymbol{R}^{(ext)}$ è la risultante delle forze esterne, che in statica si pone uguale a zero, e $\boldsymbol{a}_G$ è l'accelerazione del baricentro del corpo. Osserva che vale per un corpo ma anche per un sistema.

- Seconda cardinale della dinamica; si hanno forme diverse

$$\boldsymbol{M}_O{}^{(ext)} = \dot{\boldsymbol{K}}_O + \boldsymbol{v}_O \times m\boldsymbol{v}_G$$ dove O è un polo arbitrario (vale per corpo/sistema)

$$\boldsymbol{M}_A{}^{(ext)} = \dot{\tilde{\boldsymbol{K}}}_A + AG \times m\boldsymbol{a}_A$$ dove A è un punto del corpo rigido

In particolare scegliendo A=G, si ha

$$\boldsymbol{M}_G{}^{(ext)} = \dot{\tilde{\boldsymbol{K}}}_G$$

Facendo uso della legge di variazione del momento al variare del polo per il calcolo del momento si ottiene un'altra forma utile (valida per corpo/sistema)

$$\boldsymbol{M}_O{}^{(ext)} = \dot{\boldsymbol{K}}_G + OG \times m\boldsymbol{a}_G = \dot{\tilde{\boldsymbol{K}}}_G + OG \times m\boldsymbol{a}_G$$

Si ricorda inoltre che il momento della quantità di moto per un corpo rigido è

$$\boldsymbol{K}_A = m\, AG \times \boldsymbol{v}_A + \tilde{\boldsymbol{K}}_A$$

dove

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_A = \boldsymbol{I}_A\, \boldsymbol{\omega}$$

essendo $\boldsymbol{I}_A$ il tensore di inerzia del corpo rispetto ad un sistema di riferimento con origine in A.

Si richiama inoltre una utile relazione per la derivata del momento della quantità di moto relativo ad A

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{K}}}_A = \boldsymbol{I}_A\, \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{K}}_A$$

dalla

$$\left[\frac{d\,\boldsymbol{v}}{dt}\right]_S = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{v}]_S + [\boldsymbol{\omega}_S]_S \times [\boldsymbol{v}]_S$$ dove S è un sistema di riferimento qualsiasi, anche mobile, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_S$. Si può riportare poi in un generico riferimento, conservando però il significato dei termini, ossia

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{v}}^{rS} + \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{v}$$

posta $\dot{\boldsymbol{v}}^{rS}$ la derivata relativa all'osservatore S. Scritte le equazioni in forma vettoriale, si potrà poi scegliere il sistema di riferimento più conveniente per esprimere le componenti e fare i conti.

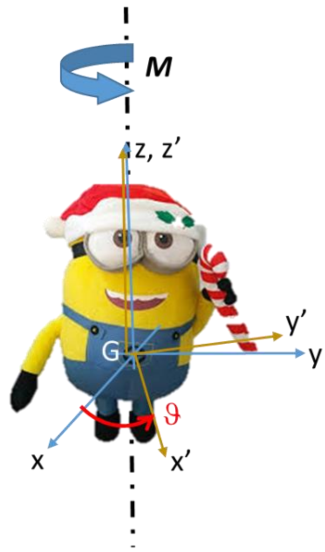
# Corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso

I quattro casi analizzati sono:

1) asse di rotazione coincidente un asse principale d'inerzia del corpo passante per il baricentro;
2) asse di rotazione passante per il baricentro ma formante un angolo α con l'asse principale precedente, ossia rotazione attorno ad un asse per il baricentro non principale d'inerzia;
3) asse di rotazione non passante per il baricentro, ma principale d'inerzia;
4) asse di rotazione non passante per il baricentro e non principale d'inerzia (formante un angolo α con l'asse del caso 3).

## CASO 1: asse di rotazione coincidente con un asse principale d'inerzia per il baricentro

$$\boldsymbol{R}^{(ext)} = \boldsymbol{R}_v + m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{0}$$




dove $\boldsymbol{R}_v$ è la risultante delle reazioni vincolari, incognita in tutte e tre le sue componenti. Tale risultante si considera applicata nel punto sovrapposto a G sull'asse di rotazione. In questo caso, il momento delle azioni esterne rispetto a G, $\boldsymbol{M}_G^{(ext)}$, è la somma di uno vincolare (ortogonale all'asse di rotazione) e di uno attivo (noto, parallelo asse)

$$\boldsymbol{M}_G^{(ext)} = \boldsymbol{M}_G^{(att)} + \boldsymbol{M}_G^{(reatt)} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_v = \dot{\tilde{\boldsymbol{K}}}_G$$

dove

$\boldsymbol{K}_G = \tilde{\boldsymbol{K}}_G = \boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\omega}$ in cui $\boldsymbol{I}_G$ è il tensore di inerzia del corpo e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare.

Sia S un sistema di riferimento (sdr) fisso con origine in G e asse z sull'asse di rotazione. Si definisce un secondo sdr S' solidale al corpo, principale di inerzia.

In questo caso l'asse z' principale è sovrapposto all'asse di rotazione z fisso; si ha pertanto:

$$[\boldsymbol{\omega}]_S = [\boldsymbol{\omega}]_{S'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \text{ da cui}$$

Il tensore d'inerzia in terna corpo è costante e vale

$$[\boldsymbol{I}_G]_{S'} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

da cui

$$[\boldsymbol{K}_G]_{S'} = [\boldsymbol{I}_G]_{S'}[\boldsymbol{\omega}]_{S'} = (0,0,C\dot{\vartheta})$$

La matrice di passaggio tra S' ed S è una matrice di rotazione attorno a z, $\mathbf{R}_z(\vartheta)$, per cui

$$[\boldsymbol{K}_G]_S = \mathbf{R}_{SS'}[\boldsymbol{K}_G]_{S'} = \mathbf{R}_z(\vartheta)[\boldsymbol{K}_G]_{S'} = (0,0,C\dot{\vartheta})$$

(i.e. stesse componenti //z essendo z coincidente con z’). Si ha pertanto

$$\left[\dot{\widetilde{\boldsymbol{K}}}_G\right]_{\boldsymbol{S}} = \left[\dot{\widetilde{\boldsymbol{K}}}_G\right]_{\boldsymbol{S'}} = (0{,}0, C\ddot{\vartheta})$$

alla quale si arriva sia da derivazione diretta che dalla

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{K}}}_G = \boldsymbol{I}_G\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \widetilde{\boldsymbol{K}}_G = \frac{d\widetilde{\boldsymbol{K}}_G}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C\ddot{\vartheta} \end{bmatrix}$$

Si osserva inoltre che valgono le seguenti

$$[\boldsymbol{R}_v]_S = \begin{bmatrix} R_{vx} \\ R_{vy} \\ R_{vz} \end{bmatrix} \qquad \left[\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{G}}^{(ext)}\right]_S = \begin{bmatrix} M_{vx} \\ M_{vy} \\ M \end{bmatrix}$$

Quindi dalla prima cardinale si ricava (sia per le componenti in terna mobile S’ che in terna fissa S)

$$R_{vx} = 0,\ R_{vy} = 0,\ \ R_{vz} = mg$$

mentre dalla seconda cardinale

$M_{vx} = 0,\ M_{vy} = 0,\ \ M = C\ddot{\vartheta}$ (componente ricavabile da analisi 2D)

Osserva che l’ultima equazione si può anche scrivere come

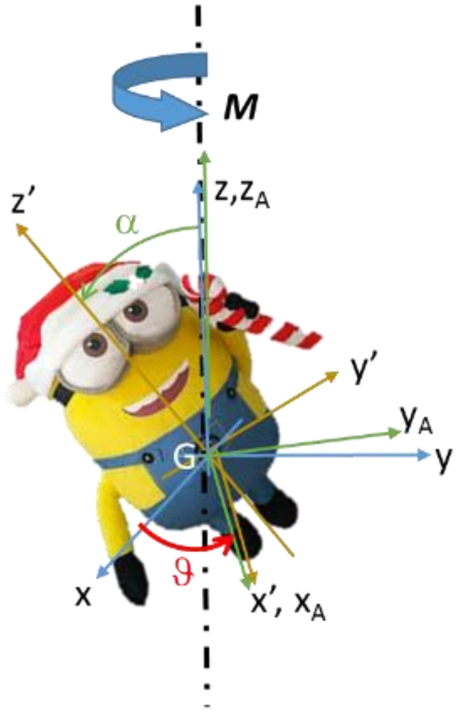
$$M = I_{zz}\ddot{\vartheta}$$

essendo $I_{zz}$ il momento di inerzia del corpo rispetto all’asse di rotazione. Da questa si può inoltre ricavare la legge del moto integrando due volte $\ddot{\vartheta}$. Pertanto risulta che:

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\frac{M}{I_{zz}}t^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{C}t^2$$

supposte nulle le condizioni iniziali.

## CASO 2: asse di rotazione NON principale d'inerzia ma passante per il baricentro




Si introduce un sdr ausiliario A, mobile solidale al corpo, con origine nel baricentro, asse $z_A$ parallelo all'asse z e $x_A$ coincidente con x'. Vale pertanto matrice di cambiamento coordinate tra terna S' e terna A (da S' ad A)

$$\mathbf{R}_{AS'} = \mathbf{R}_{x}(\alpha)$$

che è una matrice costante.

Pertanto il tensore d'inerzia nel sdr A diviene

$$[\boldsymbol{I}_{\mathbf{G}}]_{\mathrm{A}} = \mathbf{R}_{AS'}\,[\boldsymbol{I}_{\mathbf{G}}]_{S'}\,\mathbf{R}_{AS'}^{T}$$

$$[\boldsymbol{I}_{\mathbf{G}}]_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B\ \cos^2\alpha + C\ \sin^2\alpha & (B-C)\cos\alpha\sin\alpha \\ 0 & (B-C)\cos\alpha\sin\alpha & C\ \cos^2\alpha + B\ \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{\omega}]_{S} = [\boldsymbol{\omega}]_{A} = (0,0,\dot{\vartheta})$$

$$[\boldsymbol{K}_{\mathbf{G}}]_{\mathrm{A}} = \dot{\vartheta}\begin{bmatrix} 0 \\ (B-C)\cos\alpha\sin\alpha \\ C\ \cos^2\alpha + B\ \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{G}}]_{\boldsymbol{S}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{SA}}[\boldsymbol{K}_{G}]_{\boldsymbol{A}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}(\vartheta)[\boldsymbol{K}_{G}]_{\boldsymbol{A}}$$

La prima equazione cardinale è uguale al primo caso.

Per la seconda cardinale si può calcolare

$$\frac{d\widetilde{\boldsymbol{K}}_{G}}{dt} = \frac{d[\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{G}}]_{S}}{dt}$$

oppure

$$\left[\dot{\widetilde{\boldsymbol{K}}}_{G}\right]_{\mathrm{A}} = \left[\boldsymbol{I}_{G}\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\widetilde{\boldsymbol{K}}_{G}\right]_{A} = \ddot{\vartheta}\begin{bmatrix} 0 \\ (B-C)\cos\alpha\sin\alpha \\ C\ \cos^2\alpha + B\ \sin^2\alpha \end{bmatrix} - \dot{\vartheta}^2\begin{bmatrix} (B-C)\cos\alpha\sin\alpha\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui lungo z si ottiene

$$M = (C\ \cos^2\alpha + B\ \sin^2\alpha)\ddot{\vartheta} = I_{zz}\ddot{\vartheta}$$

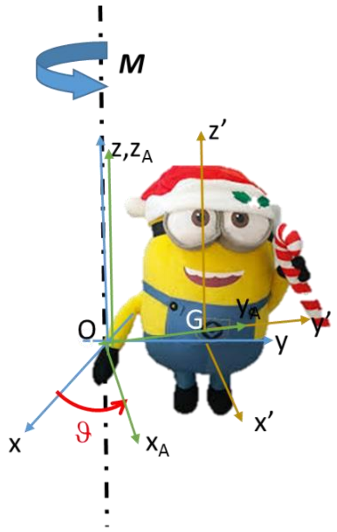
essendo sempre $I_{zz}$ il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione, diverso però come valore da C del caso 1. La legge di moto analogamente è data dalla

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\frac{M}{I_{zz}}t^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{(C\ \cos^2\alpha + B\ \sin^2\alpha)}t^2$$

Le coppie di reazione possono essere valutate in terna ausiliaria A o in terna fissa. Nel primo caso le due componenti sono

$$[\boldsymbol{M}_v]_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} M_{vx_A} \\ M_{vy_A} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\vartheta}^2(B-C)\cos\alpha\sin\alpha\; 0 \\ \ddot{\vartheta}(B-C)\cos\alpha\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

### CASO 3: asse di rotazione principale d'inerzia ma NON passante per il baricentro




In questo terzo caso l'asse z' del corpo si trova a distanza *d* dall'asse z di rotazione. Anche in questo caso può essere utile una terna ausiliaria A con asse $z_A$ coincidente con l'asse z e con origine nel punto O, intersezione di y' (o proiezione di G) con l'asse di rotazione. La prima cardinale ora è diversa dagli altri due casi perché l'asse di rotazione non passa per il baricentro quindi $\boldsymbol{a}_G$ è diversa da zero:

$$\boldsymbol{a}_G = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{OG} - \omega^2\, \overrightarrow{OG}$$

In componenti in terna A si ha

$$[\boldsymbol{a}_G]_A = (-\ddot{\vartheta}\, d, -\dot{\vartheta}^2 d, 0)$$

Pertanto la forza di reazione vincolare $\boldsymbol{R}_v$ , considerata applicata in O, sarà

$$[\boldsymbol{R}_v]_A = m \begin{bmatrix} -\ddot{\vartheta}\, d \\ -\dot{\vartheta}^2 d \\ \mathrm{g} \end{bmatrix}$$

Per ottenerle in terna fissa occorre ruotarle come per il caso 2

$$[\boldsymbol{R}_v]_{\boldsymbol{S}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{SA}}[\boldsymbol{R}_v]_{\boldsymbol{A}} = \mathbf{R}_z(\vartheta)[\boldsymbol{R}_v]_{\boldsymbol{A}}$$

La seconda cardinale si può scrivere rispetto a G o rispetto ad O (provare). Nel secondo caso occorre calcolare prima il tensore rispetto ad A che risulta ancora principale, perché ottenuta per traslazione lungo uno degli assi di S'. Dal teorema di Huygens di ottiene

$$[\boldsymbol{I}_{\mathrm{O}}]_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{md^2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} + \boldsymbol{md^2} \end{bmatrix}$$

Si osserva inoltre che è ancora valida la

$$[\boldsymbol{\omega}]_S = [\boldsymbol{\omega}]_A = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\vartheta}})$$

da cui segue

$$[\boldsymbol{K}_{\mathrm{O}}]_{\mathrm{A}} = [\boldsymbol{K}_{\mathrm{O}}]_{\mathrm{S}} = \dot{\vartheta}(0{,}0, \boldsymbol{C} + \boldsymbol{md^2})$$

In modo analogo al caso 1

$$M_{vx} = 0,\; M_{vy} = 0,\;\; M = (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{md^2})\ddot{\vartheta}$$

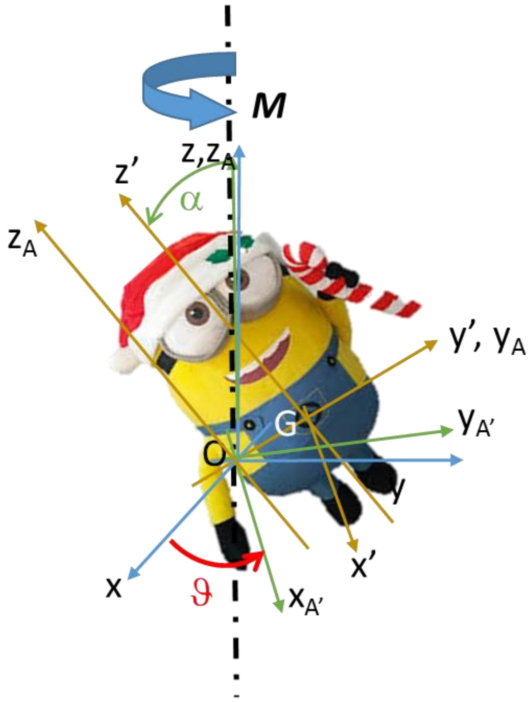
(ossia ancora $M = I_{zz}\ddot{\vartheta}$).

Pertanto la legge del motorisulta

$$\vartheta(t)=\frac{1}{2}\frac{M}{I_{zz}}t^2=\frac{1}{2}\frac{M}{\boldsymbol{C}\ +\boldsymbol{md^2}}t^2$$

## CASO 4: asse di rotazione NON principale d'inerzia e NON passante per il baricentro

Questo è il caso più generale. Per semplificare i passaggi può essere utile considerare due terne ausiliarie, A ed A’, entrambe solidali al corpo ed aventi origine in O, punto di intersezione tra l’asse y’ e l’asse di rotazione. La terna A ha assi paralleli ad S’ ed è principale di inerzia, pertanto vale sempre la




$$[\boldsymbol{I}_{\mathbf{O}}]_{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{md^2} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C}\ +\boldsymbol{md^2}\end{bmatrix}$$

dove $d=\overline{OG}$. La terna A’ ha invece un asse lungo l’asse di rotazione e non è principale di inerzia. Seguendo la procedura del caso 2 si può scrivere

$$[\boldsymbol{I}_{\mathrm{O}}]_{\mathrm{A}'}=\mathbf{R}_{A'A}\,[\boldsymbol{I}_{\mathrm{O}}]_{\boldsymbol{A}}\,\mathbf{R}_{A'A}^{T}$$

$$[\boldsymbol{I}_{\mathrm{O}}]_{\mathrm{A}'}=\begin{bmatrix}A+md^2 & 0 & 0\\ 0 & B\ \cos^2\alpha+(C+md^2)\ \sin^2\alpha & (B-C-md^2)\cos\alpha\sin\alpha\\ 0 & (B-C-md^2)\cos\alpha\sin\alpha & (C+md^2)\ \cos^2\alpha+B\ \sin^2\alpha\end{bmatrix}$$

Per la velocità angolare di può scrivere

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\boldsymbol{S}}=[\boldsymbol{\omega}]_{\boldsymbol{A}'}=(\mathbf{0},\mathbf{0},\dot{\boldsymbol{\vartheta}})$$

da cui

$$[\boldsymbol{K}_{\mathbf{O}}]_{\mathrm{A}'}=\dot{\vartheta}\begin{bmatrix}0\\ (B-C-md^2)\cos\alpha\sin\alpha\\ (C+md^2)\ \cos^2\alpha+B\ \sin^2\alpha\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K}_{O}]_{\boldsymbol{S}}=\mathbf{R}_{\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}'}[\boldsymbol{K}_{O}]_{\boldsymbol{A}'}=\mathbf{R}_{\boldsymbol{z}}(\vartheta)[\boldsymbol{K}_{O}]_{\boldsymbol{A}'}$$

La prima cardinale è uguale al terzo caso, con attenzione però alle componenti essendo

$$[\boldsymbol{a}_G]_{A'}=(-\ddot{\vartheta}\ d\ \cos\alpha\,,-\dot{\vartheta}^2 d\cos\alpha\,,0)$$

Pertanto la forza di reazione vincolare $\boldsymbol{R}_v$ , considerata applicata in O, sarà

$$[\boldsymbol{R}_v]_{A'}=m\begin{bmatrix}-\ddot{\vartheta}\ d\cos\alpha\\ -\dot{\vartheta}^2 d\cos\alpha\\ \mathrm{g}\end{bmatrix}$$

Per la seconda cardinale, come per il caso 2, si ha

$$\left[\dot{\widetilde{\boldsymbol{K}}}_O\right]_{\mathrm{A}'} = \left[\boldsymbol{I}_O\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \widetilde{\boldsymbol{K}}_O\right]_{A'}$$

$$= \ddot{\vartheta}\begin{bmatrix} 0 \\ (B - C - md^2)\cos\alpha\sin\alpha \\ (C + md^2)\ \cos^2\alpha + B\ \sin^2\alpha \end{bmatrix} - \dot{\vartheta}^2\begin{bmatrix} (B - C - md^2)\cos\alpha\sin\alpha\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui lungo z si ottiene

$$M = [(C + md^2)\ \ \cos^2\alpha + B\ \sin^2\alpha]\ddot{\vartheta} = I_{zz}\ddot{\vartheta}$$

essendo $I_{zz}$ il momento di inerzia del corpo rispetto all’asse di rotazione. Infine, la legge di moto è

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\frac{M}{I_{zz}}t^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{(C + md^2)\ \ \cos^2\alpha + B\ \sin^2\alpha}t^2$$

Le coppie di reazione possono essere valutate in terna ausiliaria A’, ottenendo

$$[\boldsymbol{M}_v]_{\mathrm{A}'} = \begin{bmatrix} M_{vx_{A'}} \\ M_{vy_{A'}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\vartheta}^2(B - C - md^2)\cos\alpha\sin\alpha\ 0 \\ \ddot{\vartheta}(B - C - md^2)\cos\alpha\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$