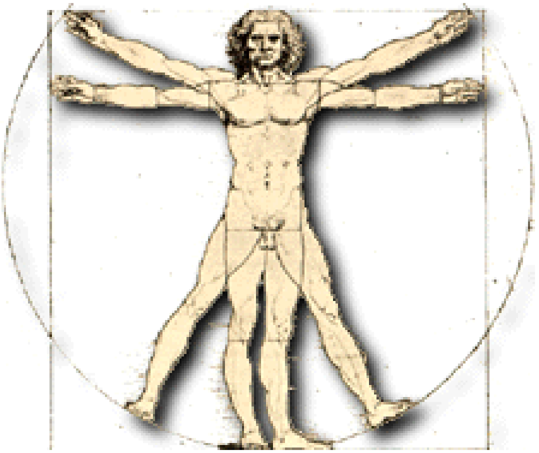
Fondamenti di Robotica: Coordinate omogenee e DH



In questa lezione introduciamo innanzitutto un modo compatto, sempre con matrici, per rappresentare la postura o combinare spostamenti rotazioni di uno o più corpi rigidi:

coordinate omogenee e matrici di trasformazione omogenea

poi descriviamo una procedura per studiare catene di più corpi rigidi

convenzione di Denavit-Hartenberg

Infine si riportano alcuni esempi di cinematica diretta ed inversa di manipolatori

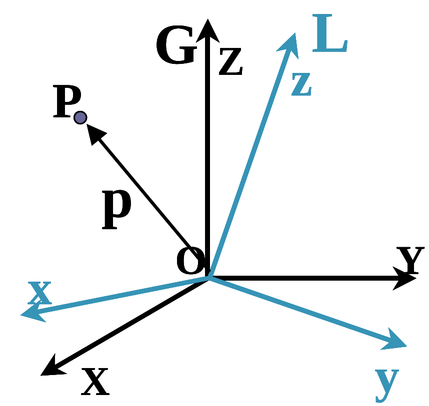
Posizione/spostamento di un insieme di punti

$$\boxed{[\boldsymbol{p}]_G = \mathbf{R}_{GL}\ [\boldsymbol{p}]_L}$$

$$\boxed{[\boldsymbol{p(t)}]_G = [\mathbf{R}(t)]_G\ [\boldsymbol{p(0)}]_G}$$

Considerando più punti

$$\begin{cases} [p1_n]_G = R\,[p1_o]_G \\ [p2_n]_G = R\,[p2_o]_G \\ \dots\dots \\ [pn_n]_G = R\,[pn_o]_G \end{cases}$$



$$\left([p1_n]_G\ [p2_n]_G\ \dots\ [pn_n]_G\right) = R\ \left([p1_o]_G\ [p2_o]_G \dots [pn_o]_G\right)$$

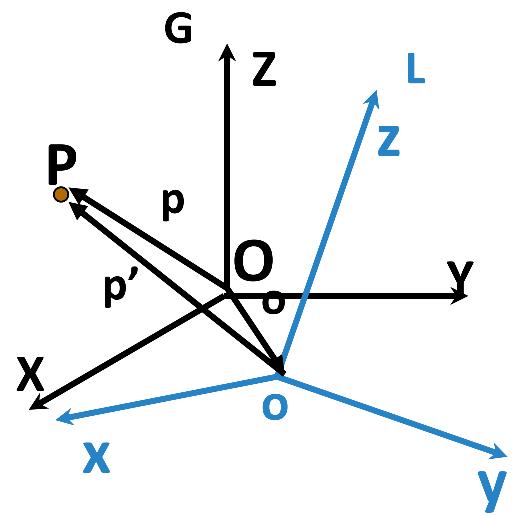
matrice 3xn   matrice 3xn

$$\boxed{P_n = R\ P_o}$$

Rotazione + traslazione/shift origine

Posizione

$[\boldsymbol{p}]_G = [\boldsymbol{o}]_G + \mathbf{R}_G \; [\boldsymbol{p}']_L$



Trasformazione affine ma non lineare

per lineare devono valere

omogeneità $L(\alpha\, \underline{p}) = \alpha\, L(\underline{p})$

additività $L(\underline{p}_1 + \underline{p}_2) = L(\underline{p}_1) + L(\underline{p}_2)$

Coordinate omogenee

Trasformazione omogenea ha forma più compatta

$$[p]_G \Rightarrow \{p\}_G = \begin{Bmatrix} [p]_G \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$[p]_G = R_G \; [p']_L + [o]_G$$

$$\boxed{\{p\}_G = \begin{Bmatrix} [p]_G \\ 1 \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} [p']_L \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

Matrice trasf. omogenea

$$T = \begin{pmatrix} R_G & [o]_G \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trasformazione inversa

$$[\boldsymbol{p}']_L = R_G^T\,[\boldsymbol{p}]_G - R_G^T\,[\boldsymbol{o}]_G = R_G^T\,[\boldsymbol{p}]_G + [-\boldsymbol{o}]_L$$

$$\boxed{\{\boldsymbol{p}'\}_L = \begin{Bmatrix} [\boldsymbol{p}']_L \\ 1 \end{Bmatrix} = T^{-1} \begin{Bmatrix} [\boldsymbol{p}]_G \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

$$T^{-1} = \begin{Bmatrix} R^T & [-\boldsymbol{o}]_L \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

$\boxed{T^{-1} \neq T^{T}}$ non ortogonale

Osservazione

In coordinate omogenee si fa distinzione tra le coordinate di un punto e le componenti del vettore posizione nello stesso riferimento.

$[\boldsymbol{p}]_G$ coordinate cartesiane: componenti e coordinate coincidono

Ricordando che è $$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP} = P - O$$

vettore come differenza di punti

Ha senso fare la differenza di punti ma non la somma, mentre si fa la somma di un punto e di un vettore.

$$\{P\}_G = \begin{Bmatrix} [P]_G \\ 1 \end{Bmatrix}$$ Definisce il punto P

$$\{v\}_G = \begin{Bmatrix} [v]_G \\ 0 \end{Bmatrix}$$ Definisce il vettore

Esempio

Aggiornare le coordinate in seguito ad una traslazione:

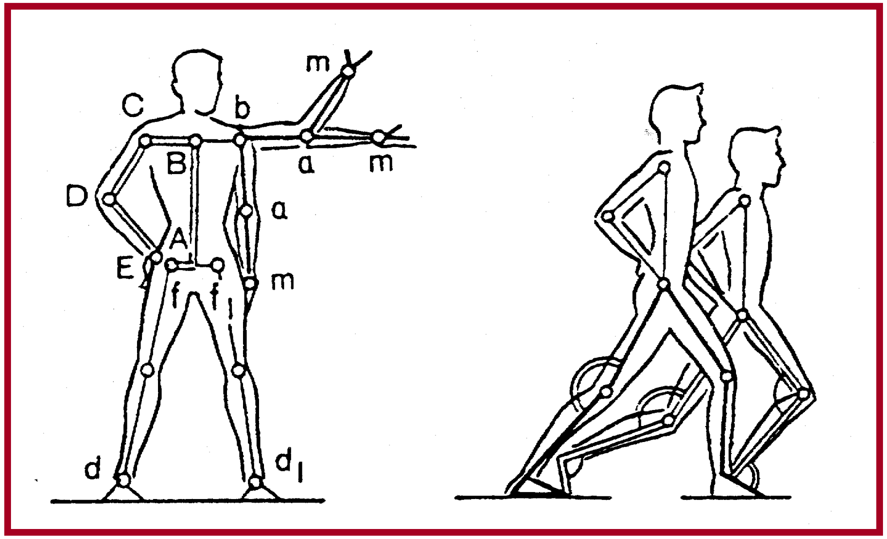
$$\{\boldsymbol{p}_{new}\}_G = \begin{Bmatrix} [\boldsymbol{p}_{new}]_G \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\boldsymbol{p}_{old}]_G \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [\boldsymbol{d}]_G \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Posizione/movimento di un sistema di corpi rigidi

Per lo studio della posizione e del movimento del corpo umano si utilizzano metodi della robotica per i manipolatori/robot

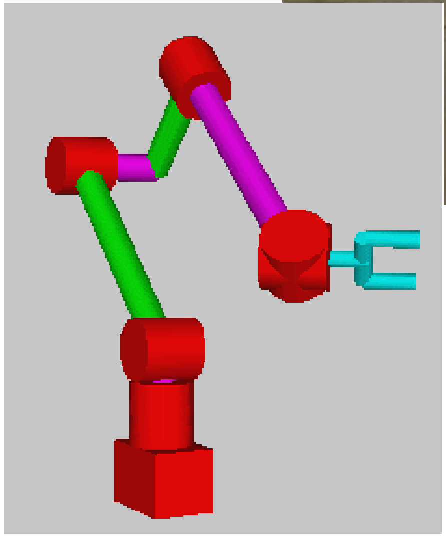
Insieme di corpi rigidi collegati attraverso giunti
= **catena cinematica**

Catena:
aperta o chiusa
ramificata

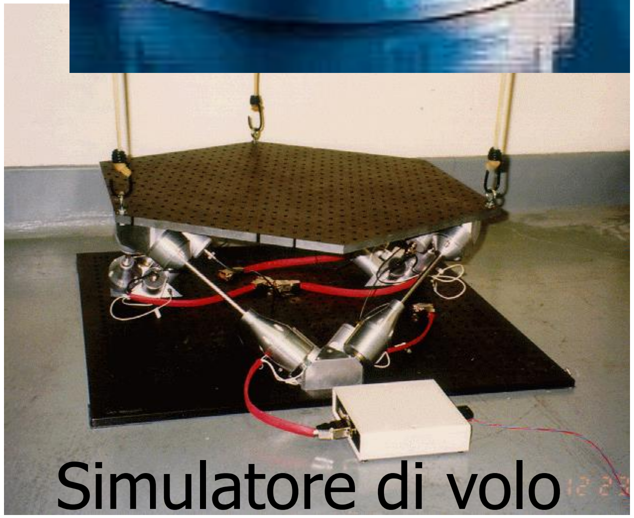


Manipolatori

seriali

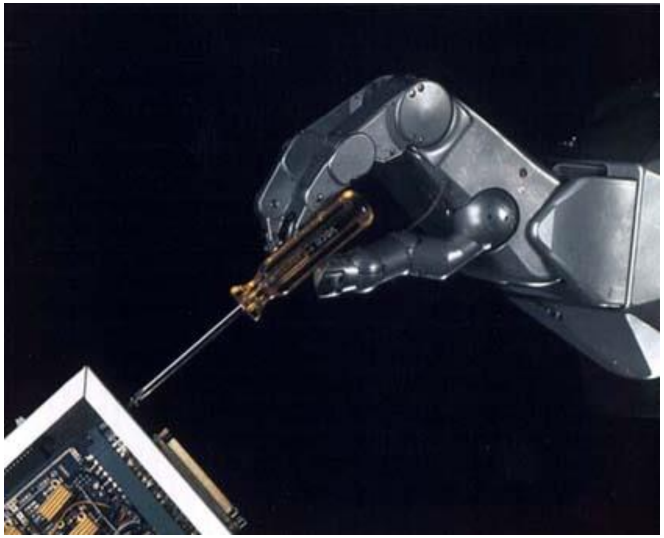


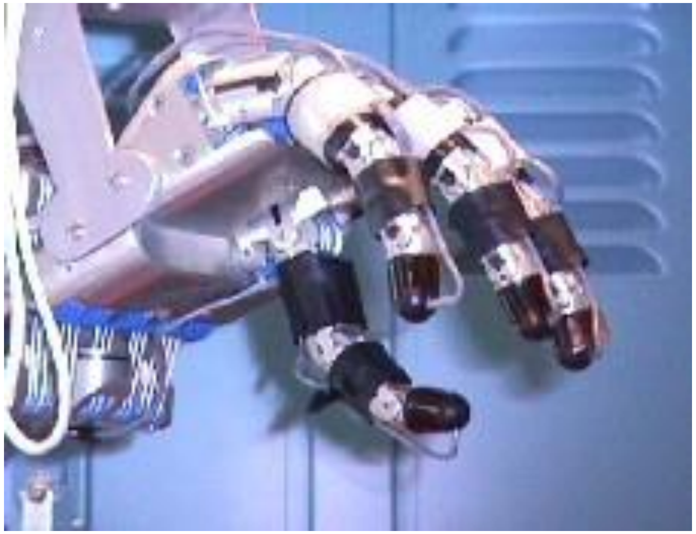
paralleli



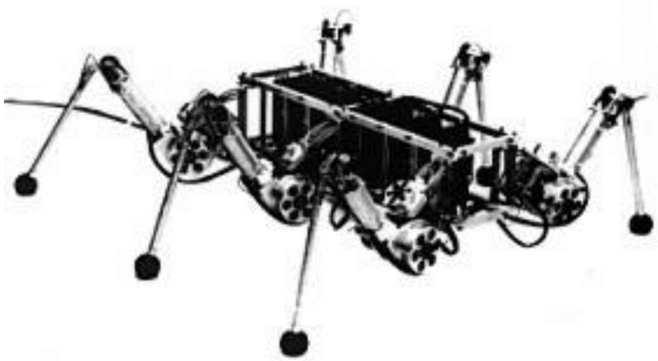
Simulatore di volo

Mani robotiche





Walking machines



Definizioni

Link: corpo rigido (elemento della catena)

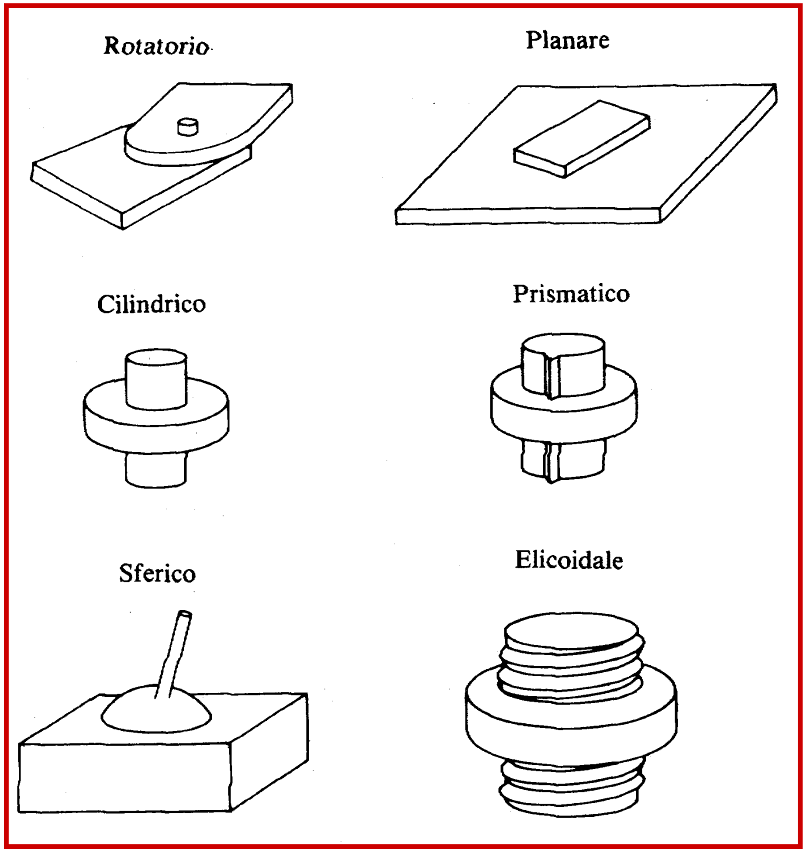
Joints: giunti (articolazioni)

End effector: ultimo elemento catena

Vincoli

- Olonomi $f(x,t)=0$
  indipendenti dalla velocità
  scleronomi (indip.tempo)
  $$f(x)=0$$
  reonomi (dip. tempo)
  $$f(x,t)=0$$

- Anolomi $f(x,\dot{x},t)=0$
  rotolamento ss



Mobilità di una catena cinematica (f): DOF totale

Posizionamento dell'*end effector*

arbitrario (pos. e orient.) richiede mobilità ≥ 6

$f = 6 \rightarrow$ almeno 1 sol.

$f > 6 \rightarrow \infty$ sol.

Manovrabilità (m) $\quad m = f - 6$

Postura dell'organo terminale richiede 6 coordinate (3 coord. posizione origine ***p0*** +3 angoli Eulero o RPY λ)

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p0} \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} \in \text{ spazio operativo } S_o$$

Analisi cinematica

1. cinematica diretta

note posizioni dei giunti $\boldsymbol{q}$ → posizione *end effector* $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f(q)}$$

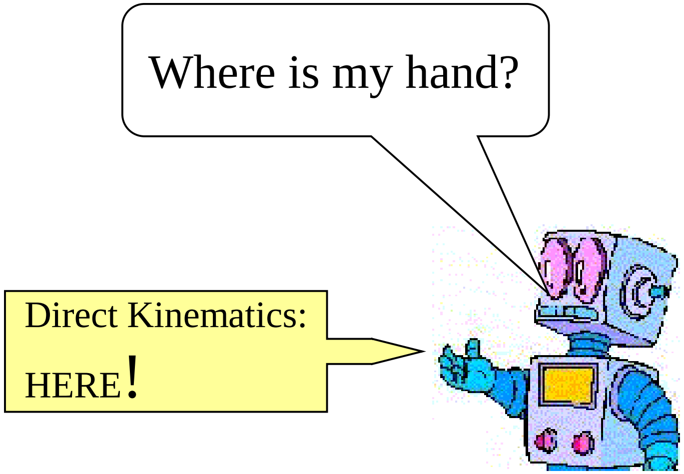
2. cinematica inversa

nota posizione *end effector* $\boldsymbol{x}$ → posizione dei giunti $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{f}^{\,-1}\,(\boldsymbol{x})$$

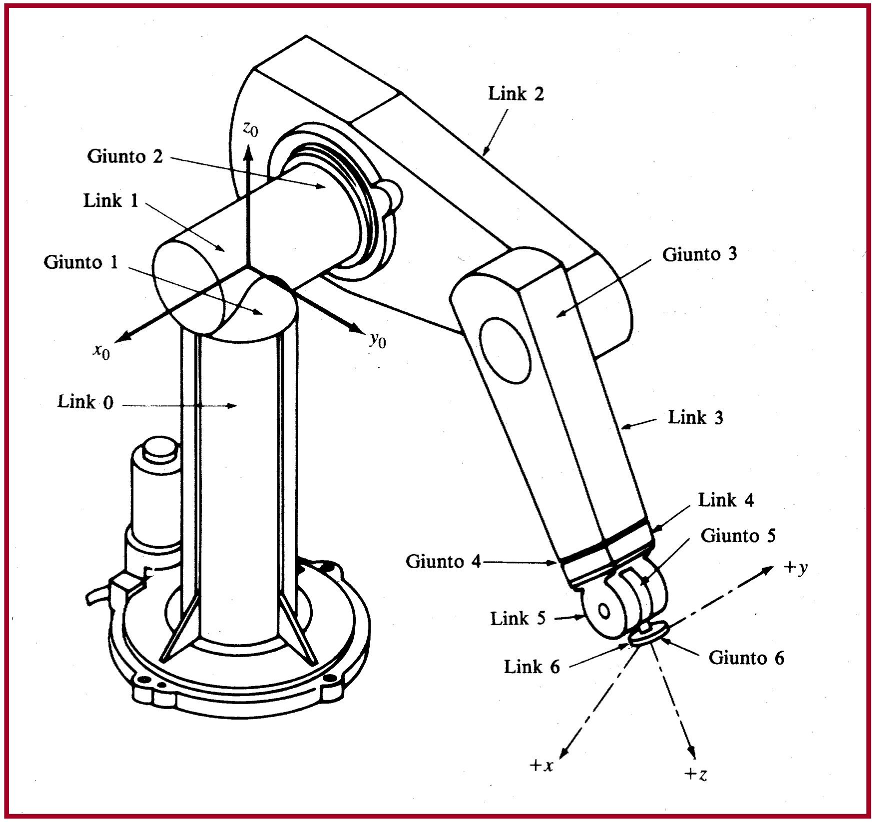
$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{q} \in$ spazio dei giunti Sg o spazio delle configurazioni



Cinematica diretta: convenzione Denavit-Hartenberg

- *Links* collegati in catena aperta da giunti ad 1 gdm*:
  rotoidali (R)
  traslazionali (P)
  n+1 links (con telaio)



- Variabili di giunto
  → $\boldsymbol{q}$
  Vettore n x 1

* gdm= grado di mobilità (dei giunti)

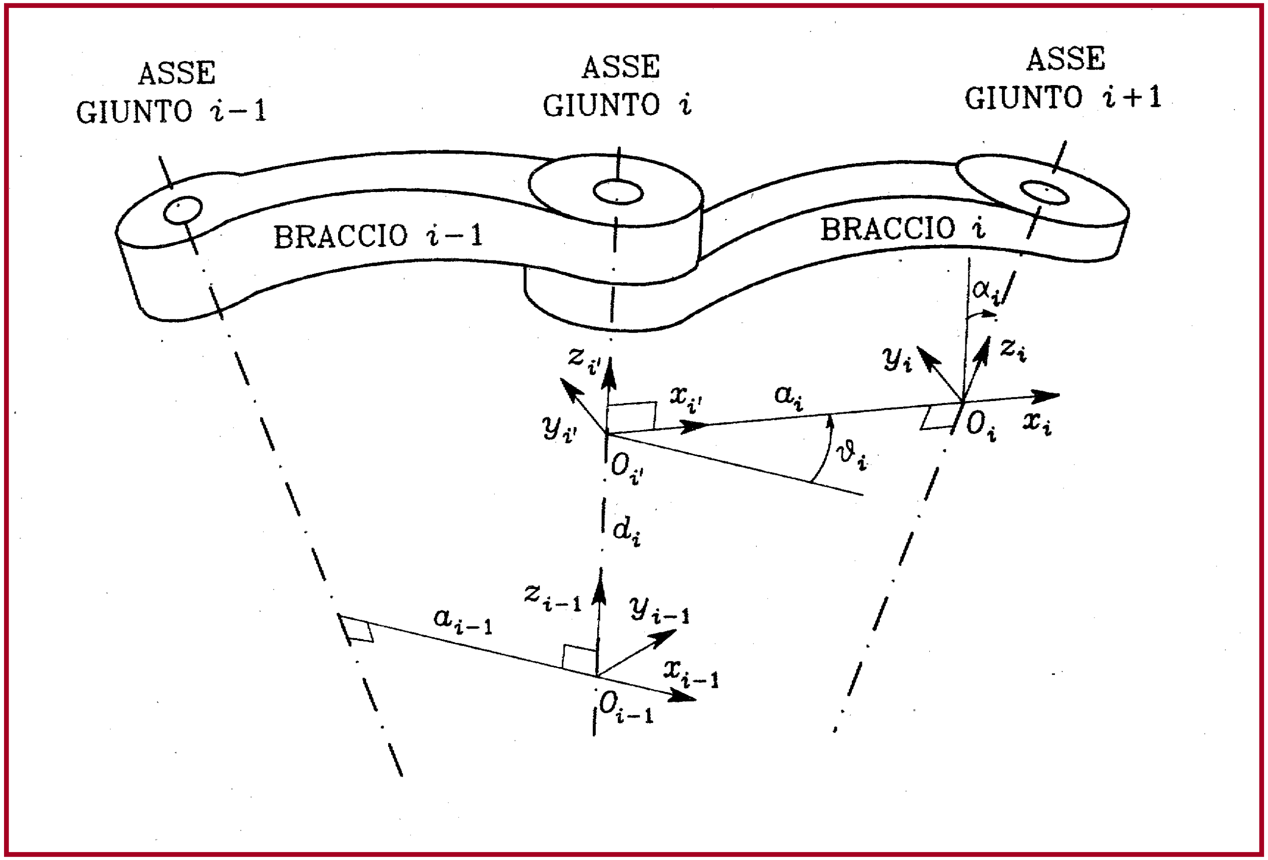
Procedura per la costruzione delle terne locali

1. Individuare assi dei giunti → assi z (da z_0 a z_{n-1})
2. Scegliere asse z_n su end effector
3. Fissare terna base (x_0, y_0, z_0) (x_0, y_0 arbitrari)
4. Individuare asse x_i come retta min dist tra z_{i-1} e z_i verso da z_{i-1} a z_i
5. Da intersezione x_i e z_i si fissa l'origine O_i
6. Definire asse y_i per avere terna levogira
7. Definire la tabella con i parametri

Osserva che la terna (O_i, x_i y_i z_i) solidale al *link i* si costruisce sul giunto distale.

Procedura

Asse giunto (z)
Rette ortogonali (x)
Levogira → y



variabili di giunto:
θ - giunti R
d - giunti P

Parametri geometrici:
α, a, d/θ

L(i-1)→ L'(i)

rispetto all'asse z_{i-1} traslazione di *d* e rotazione θ

$$\boldsymbol{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{i}^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

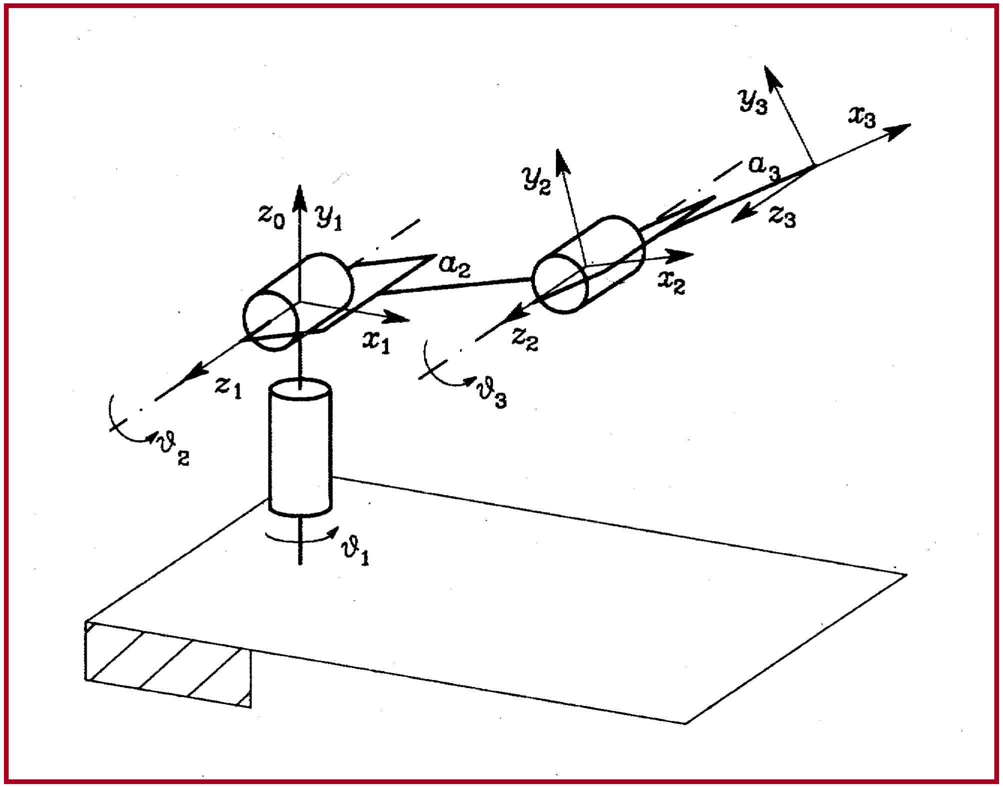
L'(i)→ L(i)

rispetto all'asse x_i traslazione di *a* e rotazione α

L(i-1)→ L(i)

$$\boldsymbol{A}_{i}^{i-1}(q_i) = \boldsymbol{A}_{i'}^{i-1}\boldsymbol{A}_{i}^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio: braccio antropomorfo



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

Matrici di trasformazione

$$A_1^0(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da telaio a primo *link*

$$A_i^{i-1}(\vartheta_i) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i = 2, 3$$

Da primo *link* a *end effector*

$c_i = \cos(\theta_i) \quad s_i = \sin(\theta_i)$

$$\boxed{T_3^0(q) = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j) \quad s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$

Cinematica inversa

richiami

- descrizione del problema:

  nota la posizione EE (inclusa orientazione), trovare le variabili di giunto

  Direct Kinematics Problem (DKP) -> Soluzione unica

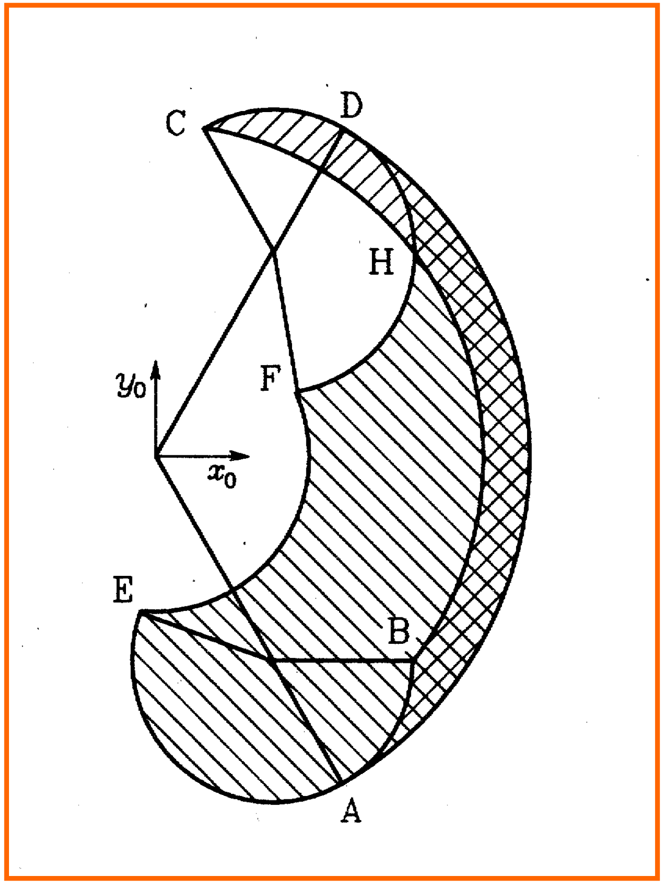
  Inverse Kinematics Problem (IKP) -> Può avere più soluzioni, non sempre risolvibile (Kinematic Invertibility)

- Equazioni della IKP sono tipicamente altamente non lineari, risolvibili in forma chiusa solo per alcuni casi particolari.

- Generalmente i manipolatori richiedono metodi numerici per la soluzione del problema spazio di lavoro SL regione descritta dall'origine terna utensile

$\boldsymbol{p0=g(q)}$

con $\boldsymbol{g: q} \in \mathrm{Sg} \rightarrow \boldsymbol{p0} \in \mathrm{SL}$



si fa cinematica inversa
anche della sola posizione

$\boldsymbol{q=g^{-1}(p0)}$

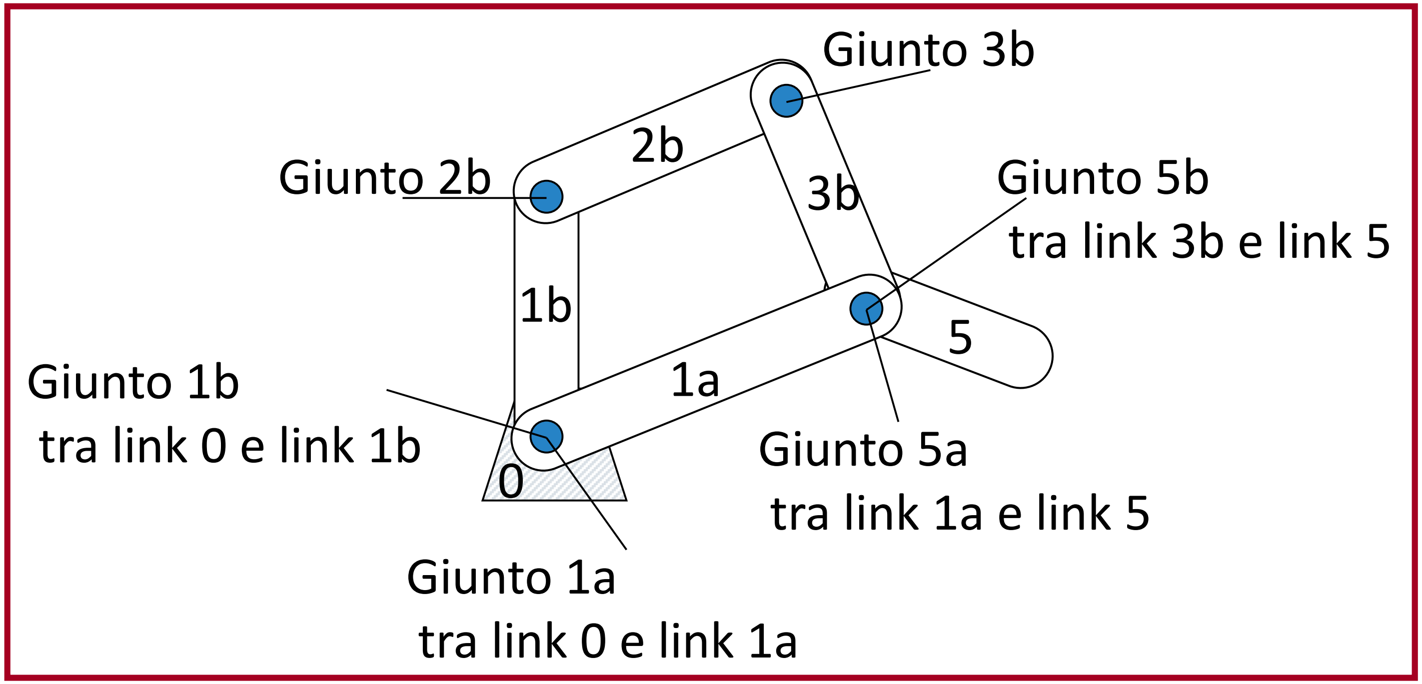
con $\boldsymbol{g^{-1}: p0} \in \mathrm{Sl} \rightarrow \boldsymbol{q} \in \mathrm{Sg}$

Appendice

Estensione del metodo di DH alla catena chiusa

Numero dei giunti l > numero dei corpi n

$l - n$ numero di anelli chiusi

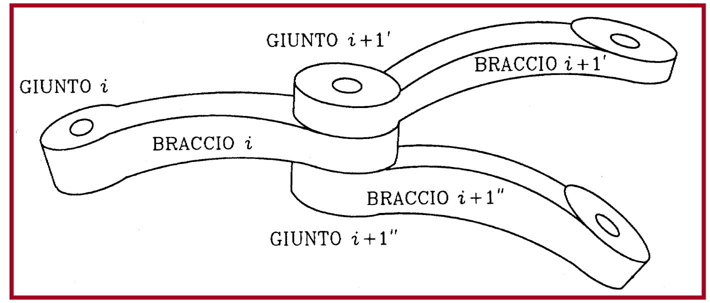


5 corpi → $n=5$

6 giunti → $l=6$

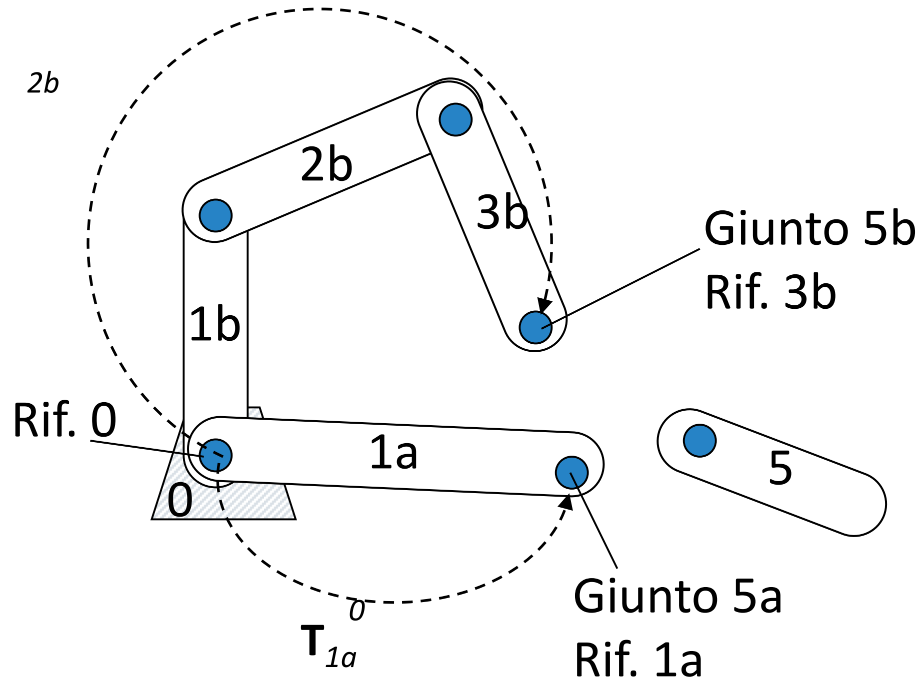
→ 1 anello chiuso

Attenzione numero di giunti:



Apertura della catena

$$ {}^{0}\mathbf{T}_{3b} = {}^{0}\mathbf{T}_{1b}\,{}^{1b}\mathbf{T}_{2b}\,{}^{2b}\mathbf{T}_{3b} $$



trasformazione

$$ {}^{0}\mathbf{T}_{5} = {}^{0}\mathbf{T}_{1b}\,{}^{1b}\mathbf{T}_{2b}\,{}^{2b}\mathbf{T}_{3b}\,{}^{3b}\mathbf{T}_{5} $$

o $$ {}^{0}\mathbf{T}_{5} = {}^{0}\mathbf{T}_{1a}\,{}^{1a}\mathbf{T}_{5} $$

Si osserva ora che i riferimenti 3b e 1a sono sullo stesso giunto 5a per cui devono avere :

stesso asse Z

$$\left[\boldsymbol{k}_{3b}\right]_0 = \left[\boldsymbol{k}_{1a}\right]_0$$

e

<u>giunto R</u>

distanza costante tra le origini

$$\left[\boldsymbol{O}_0\boldsymbol{O}_{3b}\right]_{3b} - \left[\boldsymbol{O}_0\boldsymbol{O}_{1a}\right]_{3b} = \left[0,0,d\right]^T$$

<u>giunto P</u>

orientamento assi costante

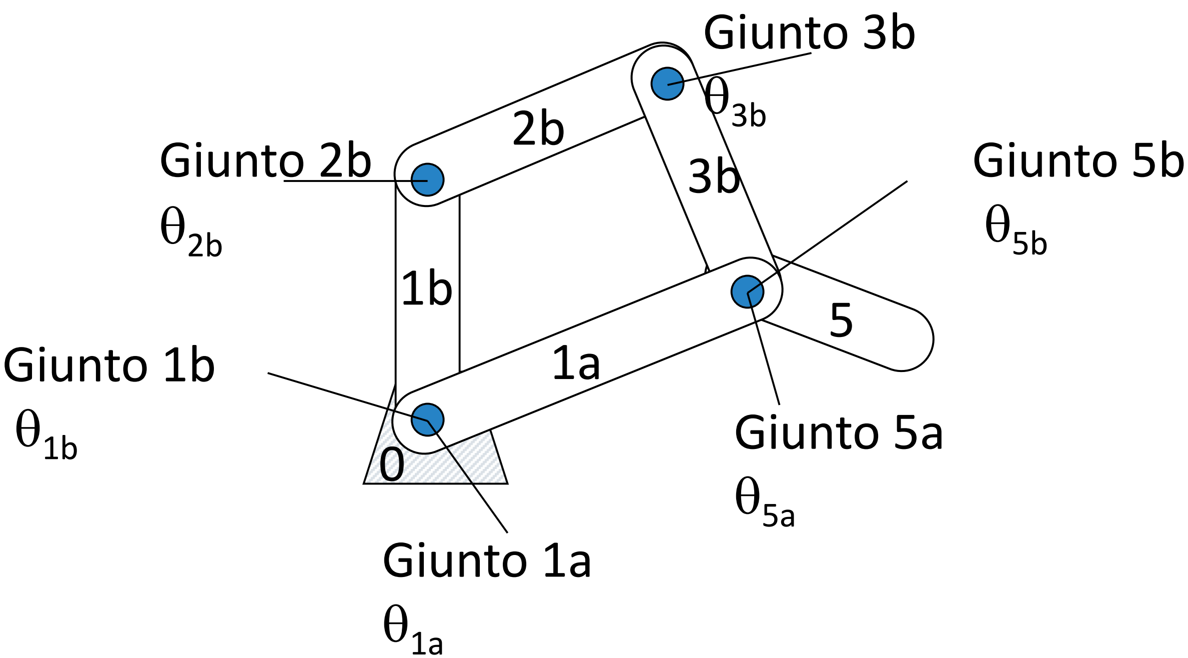
$$\left[\boldsymbol{i}_{3b}\right]^T \left[\boldsymbol{i}_{1a}\right] = \cos(\theta_{3b-1a})$$

spostamento tra origini solo in z

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{O}_0\boldsymbol{O}_{3b} - \boldsymbol{O}_0\boldsymbol{O}_{1a}\right]_{3b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>In tutto 6 condizioni</u>

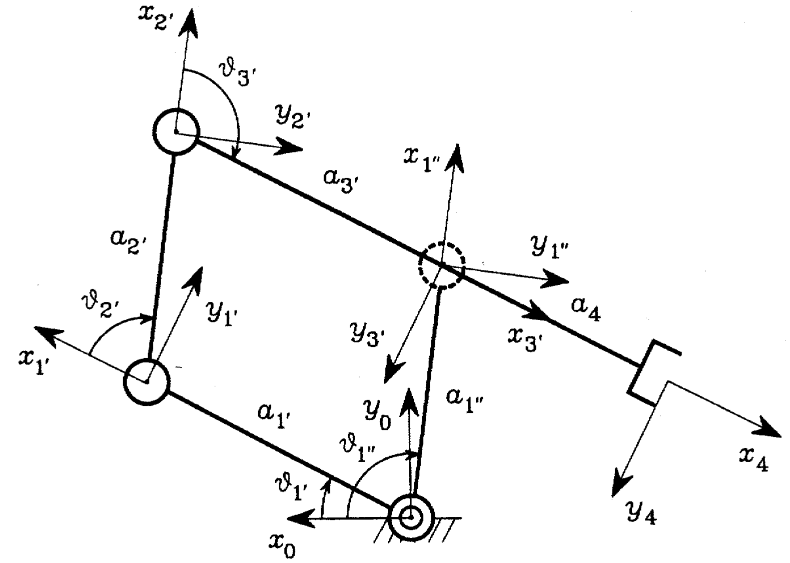
E’ importante notare che le variabili di giunto in una catena chiusa non sono indipendenti per cui occorre individuare gli effettivi gradi di mobilità del sistema.



6 giunti ma *f=3* $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \theta_{1a} \\ \theta_{1b} \\ \theta_{5b} \end{bmatrix}$

Esempio (da Siciliano Sciavicco):
Manipolatore a parallelogramma

La catena chiusa viene aperta nel giunto 4 (giunto di taglio)



Si noti che i parametri per il braccio 4 sono tutti costanti. Dal momento che i giunti sono rotoidali, la matrice di trasformazione omogenea definita in (2.47) ha la stessa struttura per tutti i giunti, ovvero come nella (2.57) per i giunti $1'$, $2'$, $3'$ e $1''$. Pertanto, le trasformazioni di coordinate per i due rami dell'albero risultano rispettivamente:

Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
$1'$	$a_{1'}$	0	0	$\vartheta_{1'}$
$2'$	$a_{2'}$	0	0	$\vartheta_{2'}$
$3'$	$a_{3'}$	0	0	$\vartheta_{3'}$
$1''$	$a_{1''}$	0	0	$\vartheta_{1''}$
4	a_4	0	0	0

$$\boldsymbol{A}_{3'}^0(\boldsymbol{q}') = \boldsymbol{A}_{1'}^0 \boldsymbol{A}_{2'}^{1'} \boldsymbol{A}_{3'}^{2'} = \begin{bmatrix} c_{1'2'3'} & -s_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}c_{1'} + a_{2'}c_{1'2'} + a_{3'}c_{1'2'3'} \\ s_{1'2'3'} & c_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}s_{1'} + a_{2'}s_{1'2'} + a_{3'}s_{1'2'3'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ove $\boldsymbol{q}' = [\vartheta_{1'} \quad \vartheta_{2'} \quad \vartheta_{3'}]^T$, e

$$\boldsymbol{A}_{1''}^0(q'') = \begin{bmatrix} c_{1''} & -s_{1''} & 0 & a_{1''}c_{1''} \\ s_{1''} & c_{1''} & 0 & a_{1''}s_{1''} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ove $q'' = \vartheta_{1''}$. Per completare, la trasformazione omogenea costante per l'ultimo braccio è

$$A_4^{3'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con riferimento alla (2.54), i vincoli sulla posizione risultano ($d_{3'1''} = 0$)

$$R_0^{3'}(q')\left(p_{3'}^0(q') - p_{1''}^0(q'')\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mentre i vincoli sull'orientamento sono soddisfatti indipendentemente da q' e q''. Pociché $a_{1'} = a_{3'}$ e $a_{2'} = a_{1''}$, è possibile estrarre due vincoli indipendenti:

$$\begin{aligned} a_{1'}(c_{1'} + c_{1'2'3'}) + a_{1''}(c_{1'2'} - c_{1''}) &= 0 \\ a_{1'}(s_{1'} + s_{1'2'3'}) + a_{1''}(s_{1'2'} - s_{1''}) &= 0. \end{aligned}$$

Per soddisfarli, qualunque sia la scelta di $a_{1'}$ e $a_{1''}$, bisogna imporre

$$\begin{aligned} \vartheta_{2'} &= \vartheta_{1''} - \vartheta_{1'} \\ \vartheta_{3'} &= \pi - \vartheta_{2'} = \pi - \vartheta_{1''} + \vartheta_{1'} \end{aligned} \tag{2.59}$$

Pertanto, il vettore delle variabili di giunto risulta $q = \begin{bmatrix} \vartheta_{1'} & \vartheta_{1''} \end{bmatrix}^T$. La scelta di attuare questi giunti è pressoché naturale.[9] Sostituendo le espressioni di $\vartheta_{2'}$ e $\vartheta_{3'}$ nella trasformazione omogenea $A_{3'}^0$ e calcolando la funzione cinematica diretta come nella (2.56), si ottiene

$$T_4^0(q) = A_{3'}^0(q)A_4^{3'} = \begin{bmatrix} -c_{1'} & s_{1'} & 0 & a_{1''}c_{1''} - a_4c_{1'} \\ -s_{1'} & -c_{1'} & 0 & a_{1''}s_{1''} - a_4s_{1'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.60}$$