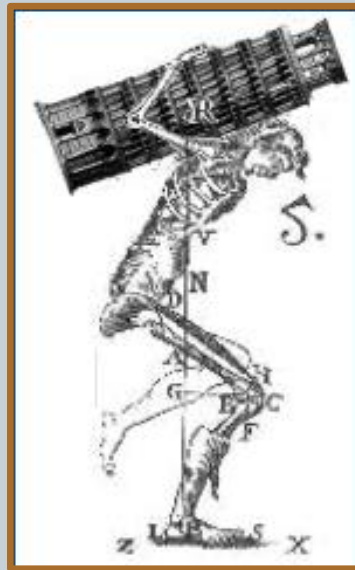


# *Meccanica Applicata al sistema muscolo-scheletrico*

## Rotazione



# Rotazione fisica

A rotation is a transformation that preserves the length, the volume (with sign), and the angle between pairs of vectors. If vector  $\mathbf{a}$  is rotated into vector  $\mathbf{b}$ , then the property of length preservation is expressed as

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|. \quad (1.1)$$

Furthermore, if vectors  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  and  $\mathbf{a}_3$  are transformed by the same identical rotation into vectors  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  and  $\mathbf{b}_3$ , respectively, by the property of volume preservation we have

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3. \quad (1.2)$$

Finally, by the property of angle preservation between vectors, we have

$$\cos \phi_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = \cos \phi_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2}, \quad (1.3)$$

where  $\phi_{i,j}$  indicates the angle between vector  $i$  and vector  $j$ . Because of these three properties, a rotation is termed a *rigid transformation*.

*Bottasso*

[https://home.aero.polimi.it/trainelli/downloads/Bottasso\\_ThreeDimensionalRotations.pdf](https://home.aero.polimi.it/trainelli/downloads/Bottasso_ThreeDimensionalRotations.pdf)

## 1. ROTAZIONI

Essendo data nello spazio fisico una terna di assi cartesiani ortogonali si vuole descrivere il moto di un corpo rigido. Ogni posizione assunta nel tempo è completamente specificata dalla conoscenza dell'**origine** e dell'**orientamento** di una **terna solidale**. La descrizione del comportamento dell'origine è assimilabile alla descrizione del moto di un punto e non crea particolari complicazioni. Fissiamo l'attenzione sugli assi solidali. Ogni orientamento da essi assunto può essere posto in corrispondenza con la trasformazione che la terna assegnata nello spazio deve subire affinché i suoi assi diventino paralleli a quelli della terna solidale. Occorre quindi saper descrivere le **rotazioni**. Per semplificare, si può supporre per il momento che l'origine resti in quiete.

Dal momento che i sistemi di coordinate cartesiane ortogonali (ad origine fissata) sono in corrispondenza biunivoca con le basi ortonormali, il problema della caratterizzazione delle rotazioni può essere affrontato nei termini seguenti: si caratterizzano prima le trasformazioni ortogonali, intese come le trasformazioni lineari di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$  che mandano basi ortonormali in basi ortonormali; poi di introducono le rotazioni di assi definendole come una opportuna sottoclasse delle trasformazioni ortogonali.

Gli stessi elementi che caratterizzano il moto di un solido, vale a dire il moto dell'origine e la rotazione di una terna solidale, intervengono anche nella descrizione del comportamento di un osservatore mobile, come si vedrà in seguito.

*Una trasformazione ortogonale  $\mathbf{R}$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che trasforma basi ortonormali in basi ortonormali. La matrice associata ad una trasformazione ortogonale è chiamata matrice ortogonale.*

*La matrice  $\mathbf{R}$  è ortogonale se e solo se*

$$R_{ij}R_{ih} = \delta_{jh} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = I,$$

Calcolando il determinante di ambo i membri e ricordando che  $\det \mathbf{R}^T = \det \mathbf{R}$  si trova che

$$(\det \mathbf{R})^2 = 1, \quad \text{ossia} \quad \det \mathbf{R} = \pm 1.$$

Si conclude che una matrice ortogonale è **invertibile**.

Dalla condizione  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  si deduce che  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ , essendo  $\mathbf{R}^{-1}$  l'inversa di  $\mathbf{R}$ . Scrivendo la definizione di inversa nella forma  $\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$  si trova che

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}.$$

Le trasformazioni ortogonali sono anche caratterizzabili come gli endomorfismi che **lasciano invariato il prodotto scalare** di due vettori qualsiasi. Di conseguenza lasciano anche invariata la distanza fra due punti qualsiasi. Per questo motivo ci dobbiamo aspettare che le trasformazioni ortogonali intervengano nella descrizione del moto dei corpi rigidi, ricordando che un corpo rigido è caratterizzato dal fatto che la distanza fra due suoi punti qualsiasi è costante nel tempo.

*Vale l'equivalenza*

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}.$$

Nota: lascia invariata la distanza è caso particolare con  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

# Teorema di Eulero

Quomodocunque sphaera circa centrum suum conservatur, semper assignari potest diameter cuius directio in situ translata conveniat cum situ initiali. (*Leonhard Euler*). (1776)

**Theorem.** *In whatever way a sphere might be rotated around its own center, a diameter can always be chosen whose direction in the rotated configuration would coincide with the original configuration.* (trad. Palais, 2009)

"Any displacement of a rigid body such that a point on the rigid body, say O, remains fixed, is equivalent to a rotation about a fixed axis through the point O."

Dati due riferimenti (o *corpi rigidi*) con origine coincidente, comunque orientati, è sempre possibile sovrapporre il primo al secondo con un'unica rotazione intorno ad un asse fisso (passante per l'origine).

## In termini di matrici di rotazione il teorema si può formulare come segue

Si osserva che appartengono all'asse di rotazione tutti quei vettori (se ne esistono) che sono lasciati invariati dalla trasformazione  $\mathbf{R}$ . La condizione è espressa dall'equazione

$$\mathbf{R} \mathbf{n} = \mathbf{n}.$$

Si osserva allora che l'equazione  $\mathbf{R} \mathbf{n} = \mathbf{n}$  è un caso speciale della relazione  $(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ , dove il vettore  $\mathbf{n}$  è caratterizzato come **autovettore di  $\mathbf{R}$  con autovalore 1**. Pertanto occorre dimostrare che ogni matrice di rotazione ammette l'autovalore 1. Il corrispondente autovettore normalizzato identifica il versore dell'asse di rotazione.

Lo scalare 1 è autovalore di  $\mathbf{R}$  se è vera l'equazione

$$\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = 0.$$

Per verificare che il determinante si annulla si considera la catena di identità

$$(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = -(\mathbf{I} - \mathbf{R}) = -(\mathbf{R}\mathbf{R}^T - \mathbf{R}) = -\mathbf{R}(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}).$$

Risulta quindi che

$$\mathbf{R} - \mathbf{I} = -\mathbf{R}(\mathbf{R}^T - \mathbf{I});$$


calcolando il determinante di ambo i membri si trova l'ulteriore identità

$$\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = \det[-\mathbf{R}(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})].$$

Si consideri ora il secondo membro: per le proprietà dei determinanti e la condizione  $\det \mathbf{R} = 1$  si trova

$$\det[-\mathbf{R}(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})] = (-1)^3 \det[\mathbf{R}(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})] = -\det \mathbf{R} \det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}).$$

$\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = 0.$



# Teoremi di Eulero

The geometric derivation of the rotation tensor can be based on the two fundamental theorems of Euler on rotations. Euler's Displacement Theorem states that any arbitrary displacement of a rigid body that leaves a point fixed is a rotation about a unit vector  $k$  by an angle  $\varphi$ . In other words, any three-dimensional rotation can be interpreted as a two-dimensional rotation that takes place in a plane orthogonal to a suitably chosen direction. Furthermore, Euler's Rotation Theorem states that any rotation may be described in terms of only three parameters.

*Bottasso*

E' possibile orientare un corpo rigido in modo arbitrario nello spazio attraverso 3 rotazioni attorno ad assi predefiniti (non complanari) ( $\rightarrow$  3 parametri, angoli di Eulero)

Generalizzazione angoli eulero

DAVENPORT, P. B. Rotations about Nonorthogonal Axes, AIAA Journal, Vol. 11, No. 6, June 1973, pp. 853-857.



# Euler Angles and Frame Angular Velocity

C. Scozzafava

Una rappresentazione della rotazione basata sugli angoli di Eulero consiste nella definizione di una tripletta (o terna o sequenza) i cui elementi, gli angoli di Eulero appunto, descrivono una sequenza ordinata di rotazioni elementari intorno ad assi coordinati di terna corrente. La sequenza di rotazioni applicata a partire dal riferimento fisso ne consente la sovrapposizione con quello mobile. La nomenclatura delle possibili terne di angoli di Eulero prende il nome dagli assi di terna corrente intorno a cui avvengono le tre rotazioni elementari.

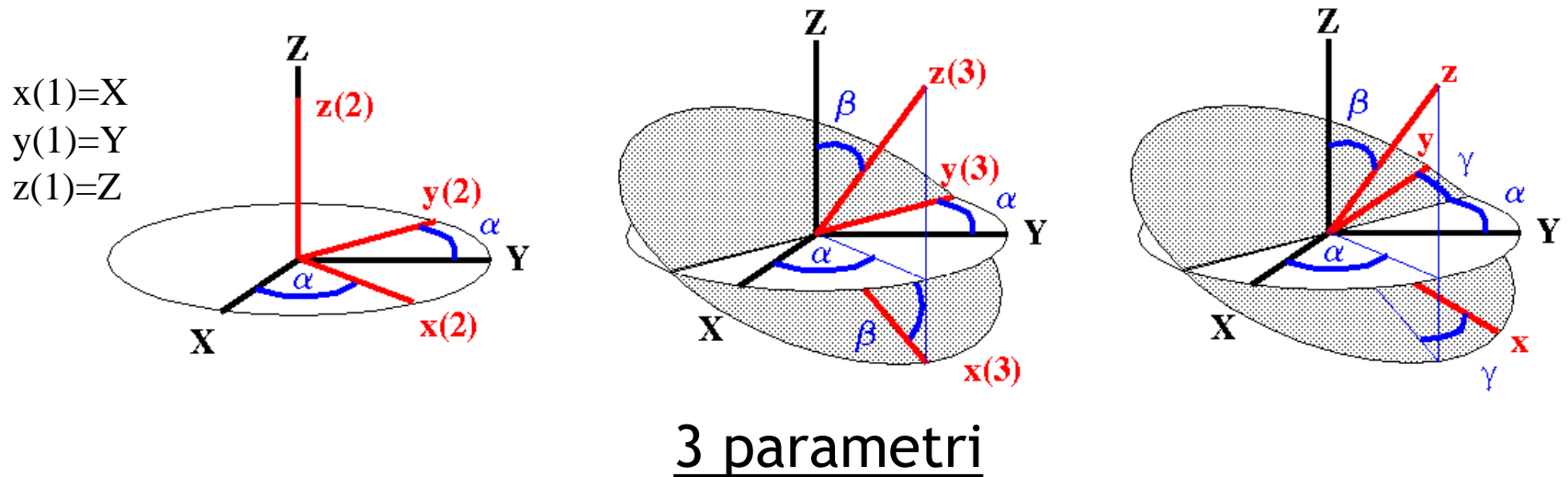
## 2.1 Angoli di Eulero

Ancora ad Eulero è dovuta la dimostrazione della possibilità di rappresentare una rotazione generica fra due sistemi di riferimento tramite la composizione di 3 rotazioni elementari in assi di terna corrente, e che tale rappresentazione è minima nel numero di parametri. I 3 parametri sono detti Angoli di Eulero. Tuttavia oltre a dover specificare i valori dei 3 angoli è necessario specificare quali siano gli assi coordinati attorno ai quali devono essere effettuate le rotazioni elementari; la scelta di tali assi è libera, cosicché esistono diverse sequenze possibili, tutte di lunghezza 3, per definire in maniera completa una rappresentazione dell'orientamento.



# Angoli di Eulero ZYZ

rotazioni rispetto **terna corrente** tipo Z-Y-Z

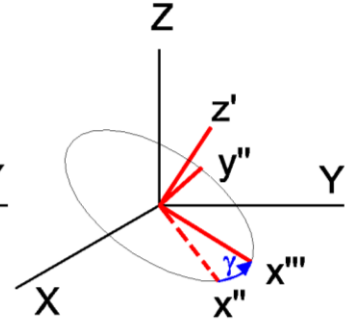
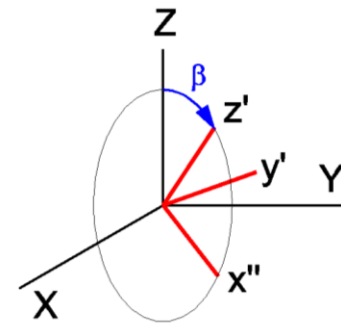
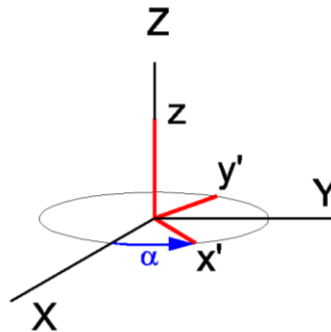
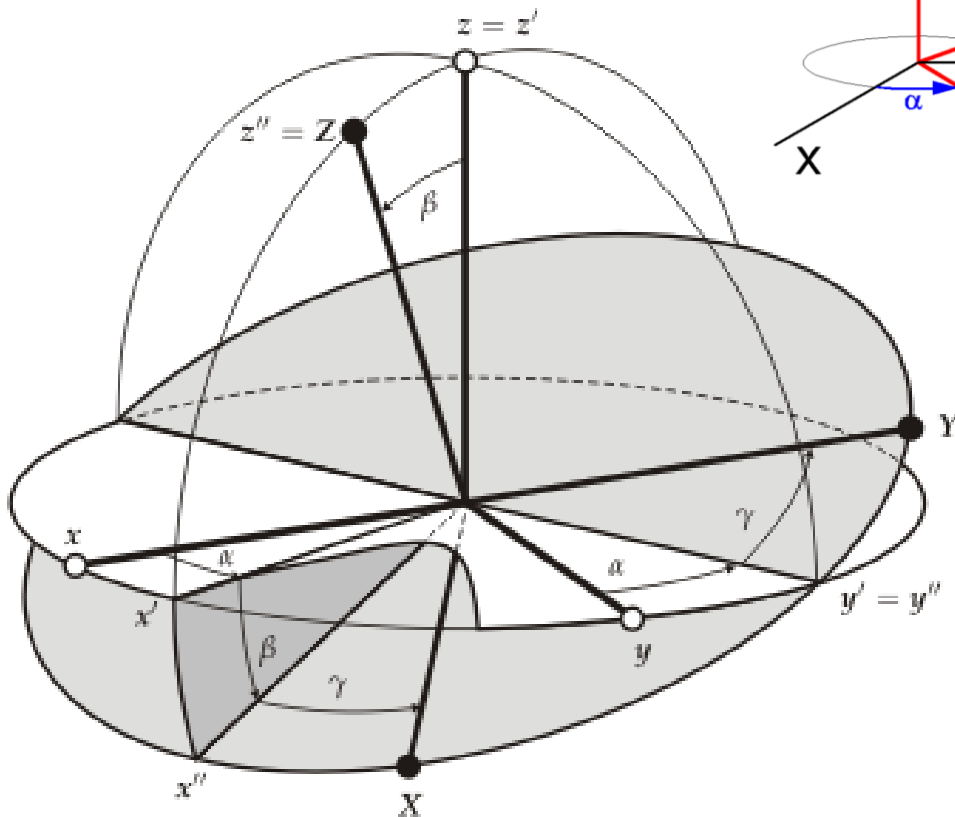


La matrice di rotazione associata:

$$\mathbf{R}_{EUL}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\gamma)$$

<https://i.stack.imgur.com/PskMY.gif>

# Angoli di Eulero ZYZ

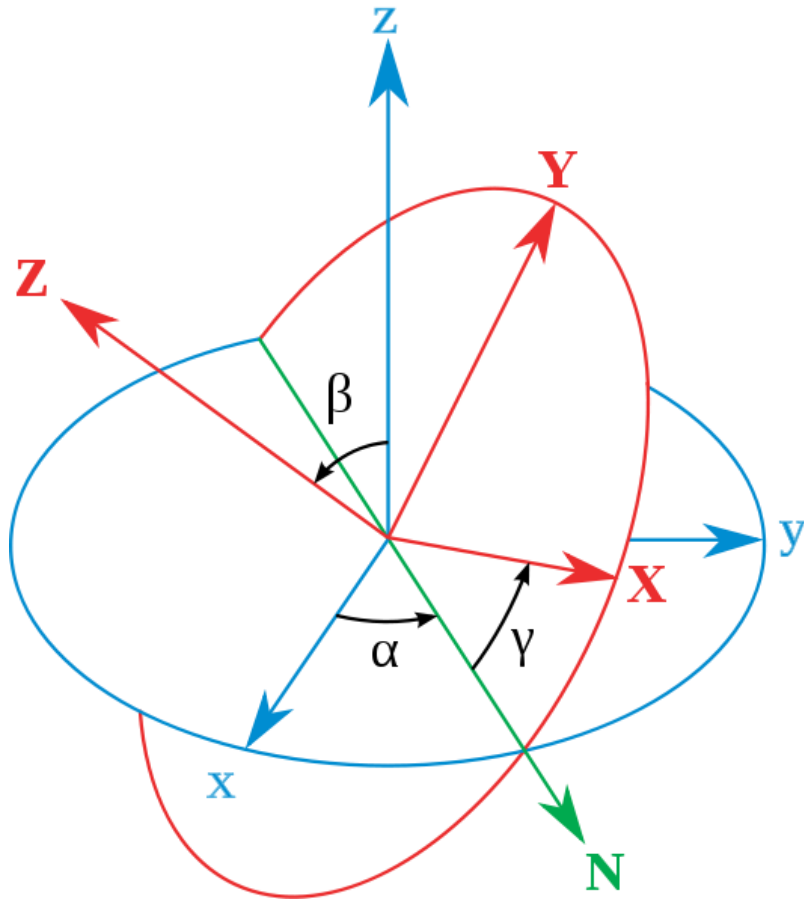


$$0 \leq \alpha < 2\pi,$$

$$0 \leq \beta \leq \pi$$

$$0 \leq \gamma < 2\pi$$

# Angoli di Eulero ZXZ



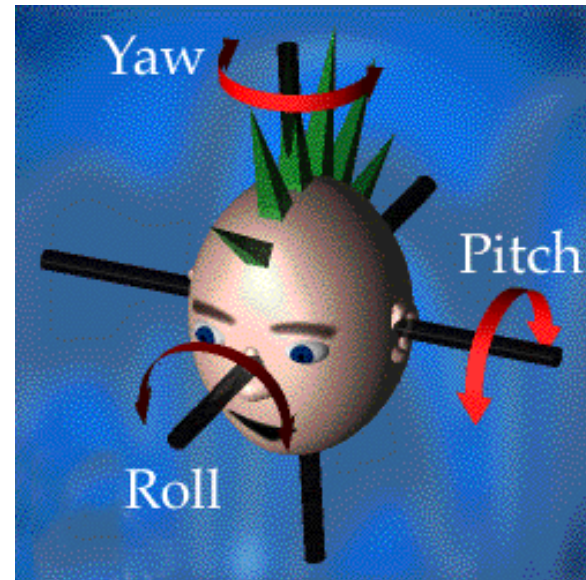
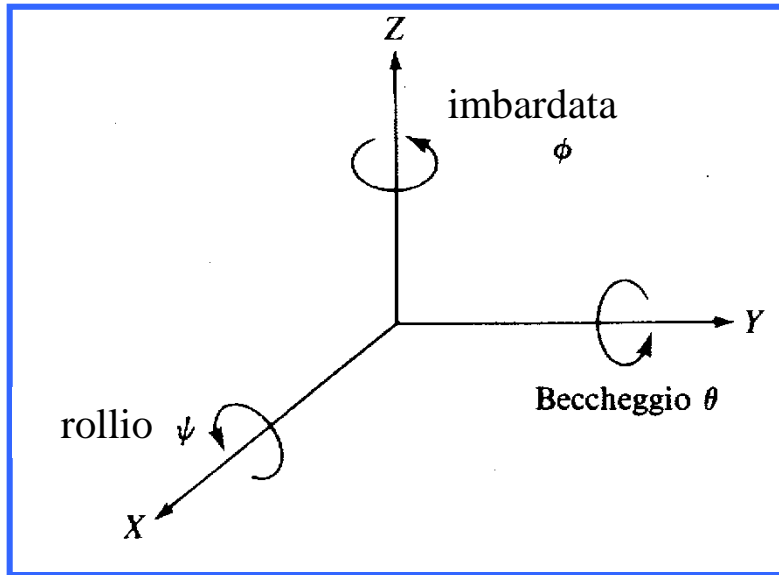
$$\mathbf{k} \times \mathbf{K} = \mathbf{N}$$

$\mathbf{N}$  Direzione linea dei nodi

Completare i vari passaggi delle singole rotazioni come per caso precedente,

$Z(\alpha) \rightarrow X(\beta) \rightarrow Z(\gamma)$  assi correnti

# Angoli RPY



Tipo Z-Y-X

$$\mathbf{R}_{RPY}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{R}_Z(\psi) \mathbf{R}_Y(\theta) \mathbf{R}_X(\phi)$$

osserva

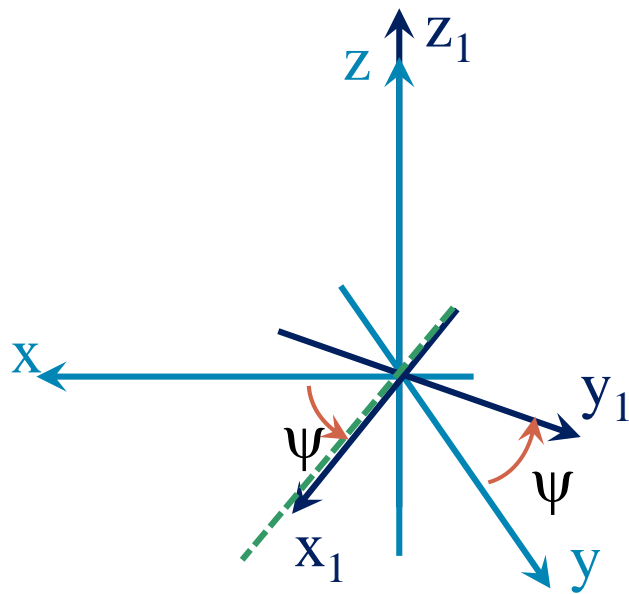
$$0 \leq \psi, \phi < 2\pi$$

$$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

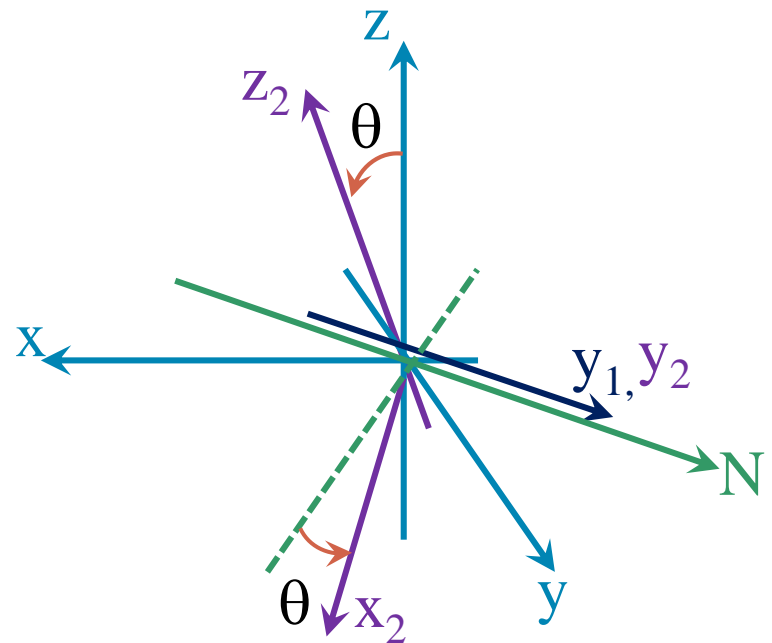
# Angoli RPY

Sequenza Z-Y-X

$$\mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\phi)$$



$$\mathbf{R}_z(\psi)$$

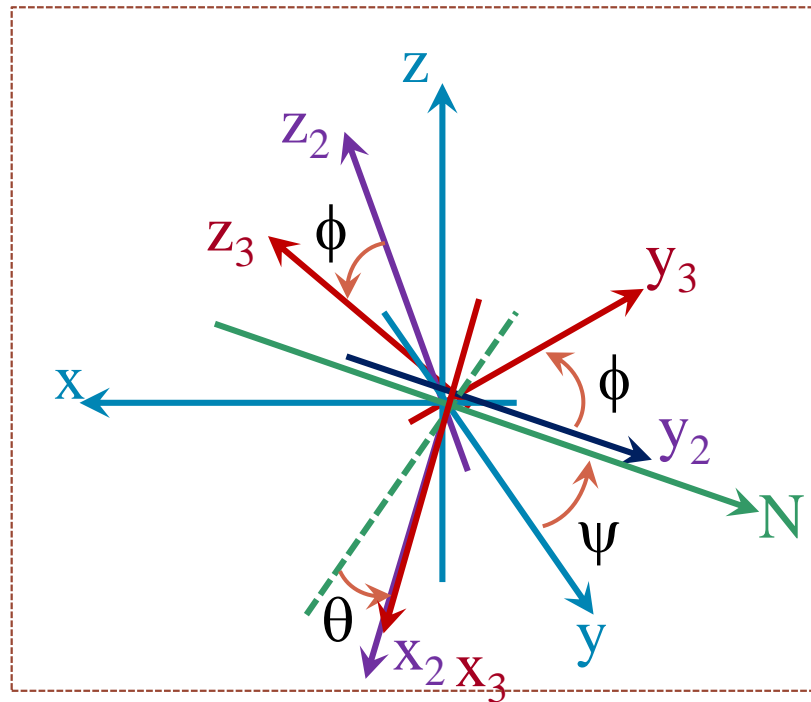


$$\mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_y(\theta)$$

# Angoli RPY

Tipo Z-Y-X      $\mathbf{k} \times \mathbf{I} = \mathbf{N}$

$\phi$  angolo tra  $z_2$  e  $z_3$  o tra  $y_2$  e  $y_3$



$$\mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\phi)$$

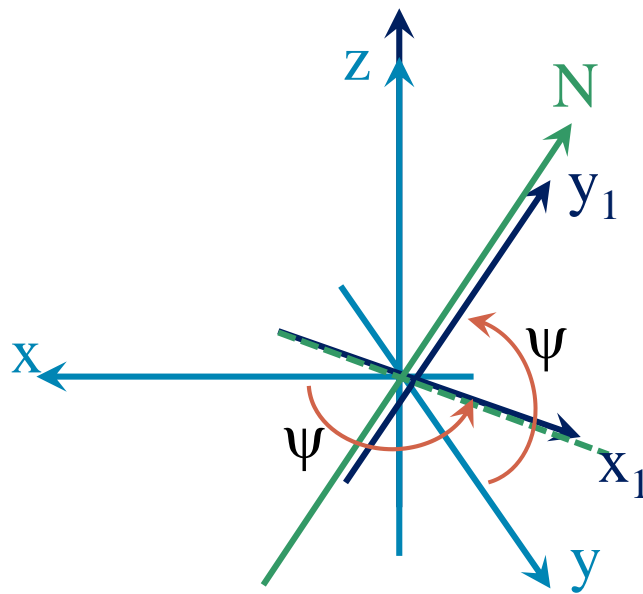


# Angoli RPY (2)

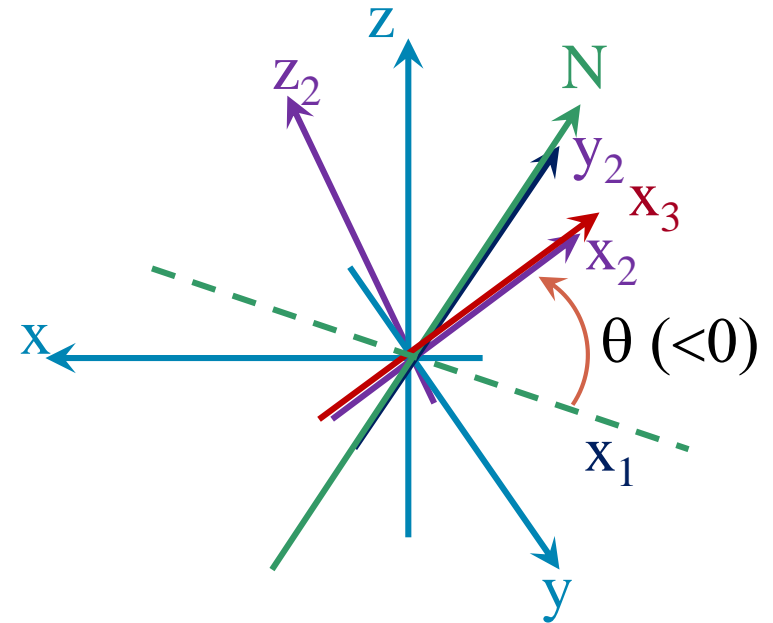
Tipo Z-Y-X

$$\mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\phi)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{I} = \mathbf{N}$$



$$\mathbf{R}_z(\psi)$$

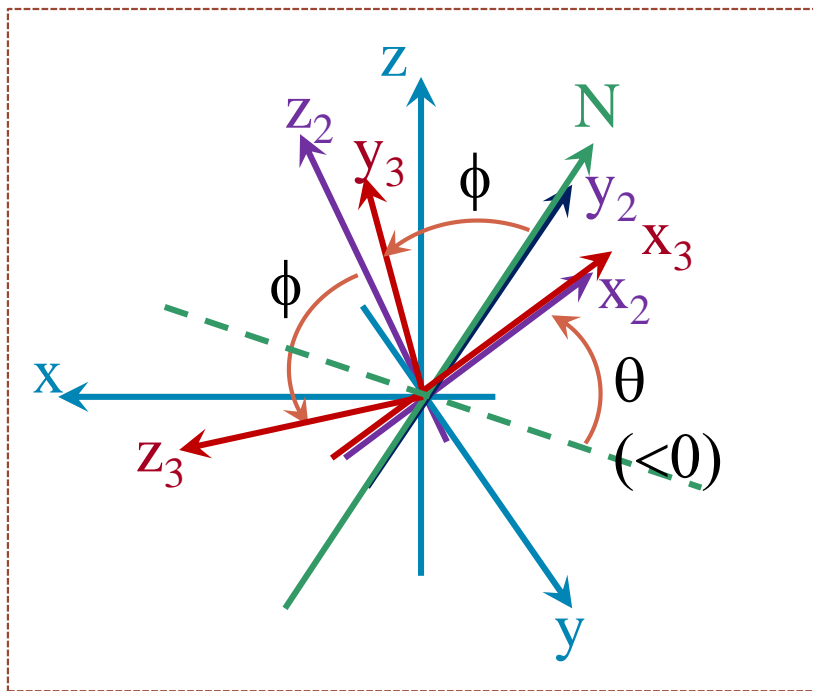


$$\mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_y(\theta)$$

# Angoli RPY (2)

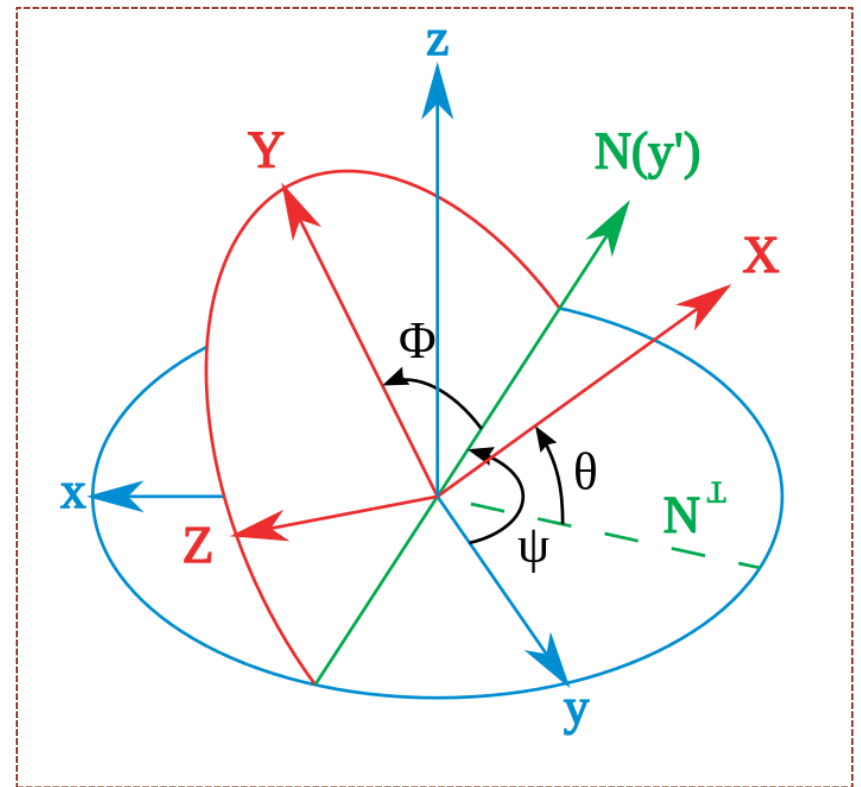
Tipo Z-Y-X      $\mathbf{k} \times \mathbf{I} = \mathbf{N}$

$\phi$  angolo tra  $z_2$  e  $z_3$  o tra  $y_2$  e  $y_3$



$$\mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\phi)$$

Schema (figura verso  $\theta < 0$ )



# Inversione: da R a angoli

Eulero ZYZ esempio  $\mathbf{R}_z(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi)$  o 3-2-3

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\psi) - \sin(\phi) \cdot \sin(\psi) & -\cos(\phi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\psi) - \sin(\phi) \cdot \cos(\psi) & \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\psi) + \cos(\phi) \cdot \sin(\psi) & -\sin(\phi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\psi) + \cos(\phi) \cdot \cos(\psi) & \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) \cdot \cos(\psi) & \sin(\theta) \cdot \sin(\psi) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Si determina prima angolo rotazione centrale da elemento  $R_{3,3}$

$$\theta = \arccos(R_{3,3}) \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\phi = \operatorname{atan2}(R_{3,2}, -R_{3,1})$$

$$\psi = \operatorname{atan2}(R_{2,3}, R_{1,3}) \quad 0 \leq \phi, \psi < 2\pi$$

$\operatorname{atan2}(y, x)$

matlab

Singularità delle rappresentazioni dell'orientamento

$\theta=0$  e  $\pi$

RPY esempio ZYX  $\mathbf{R}_z(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\psi)$  3-2-1

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) \cdot \cos(\theta) & -\sin(\phi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\psi) & \sin(\phi) \cdot \sin(\psi) + \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\psi) \\ \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) & \cos(\phi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\psi) & -\cos(\phi) \cdot \sin(\psi) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\psi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\psi) & \cos(\theta) \cdot \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

Si determina prima angolo rotazione centrale da elemento  $R_{3,1}$

$$\theta = \text{asin}(-R_{3,1}) \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\phi = \text{atan2}(R_{2,1}, R_{1,1})$$

$\text{atan2}(y, x)$   
matlab

$$\psi = \text{atan2}(R_{3,2}, R_{3,1}) \quad 0 \leq \phi, \psi < 2\pi$$

Singularità delle rappresentazioni dell'orientamento

$$\theta = \pm \pi/2$$

# Rappresentazioni di orientamento/rotazione

Riprodurre e studiare movimenti 3D, serve un modo per specificare, comporre, interpolare, derivare orientamento e rotazioni successive.

Possibilmente con relazioni biunivoche

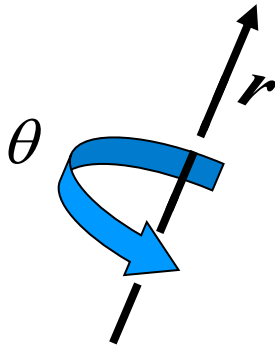
- 1) Angoli Eulero/RPY
- 2) matrici rotazione
- 3) Asse angolo
- 4) Quaternioni

N.B. ce ne sono anche altre...

# Asse-angolo

Rappresentazione intuitiva, vedi slide precedenti.

- asse rotazione (versore  $\mathbf{r}[r_x, r_y, r_z]$ )
- angolo di rotazione  $\theta$



4 parametri  $r_x, r_y, r_z, \theta$   
non indipendenti

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$$

Osserva che versore orienta l'asse di rotazione e angolo ha verso (e segno), secondo regola mano destra



# Da asse-angolo a **R**

a) via “diretta” con formula di Eulero-Rodriguez

$$\mathbf{p}' = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + [\mathbf{p} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})]\cos\theta + \sin\theta \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$$

Considerando i vettori in termini di componenti, si rielabora l'espressione per ottenere  $\mathbf{p}' = \mathbf{R} \mathbf{p}$  raccogliendo  $\mathbf{p}$  (vd. appendice) e si ottiene

$$\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{r} \mathbf{r}^T + \cos\theta (\mathbf{I} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T)}_{\mathbf{R}_{\text{symm}}} + \underbrace{\sin\theta \mathbf{S}}_{\mathbf{R}_{\text{asymm}}}$$

$$\mathbf{r} \mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} r_x^2 & r_x r_y & r_z r_x \\ r_x r_y & r_y^2 & r_z r_y \\ r_z r_x & r_z r_y & r_z^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$$

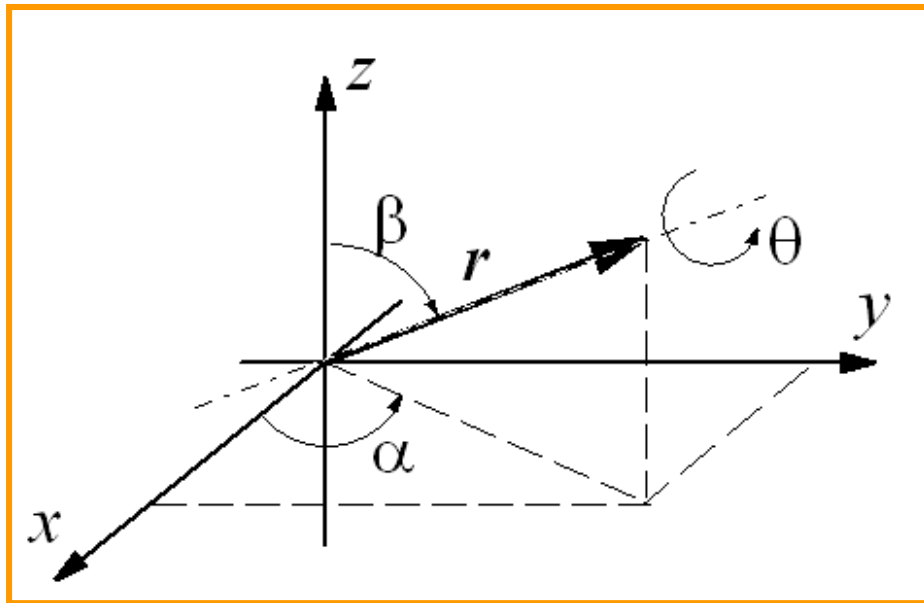
Osserva che per  $\theta=0, \pi$ ,  $\mathbf{R}$  è una matrice simmetrica

b) via “indiretta” da matrici rotazione elementari

Introduzione di un sistema di riferimento ausiliario, con asse  $z_a$  coincidente con  $r$  (prime due rot. di Eulero)

$$[\mathbf{p}]_G = \mathbf{R}_{GA} [\mathbf{p}]_A$$

$$[\mathbf{p}_{new}]_A = \mathbf{R}_z(\theta) [\mathbf{p}_{old}]_A$$



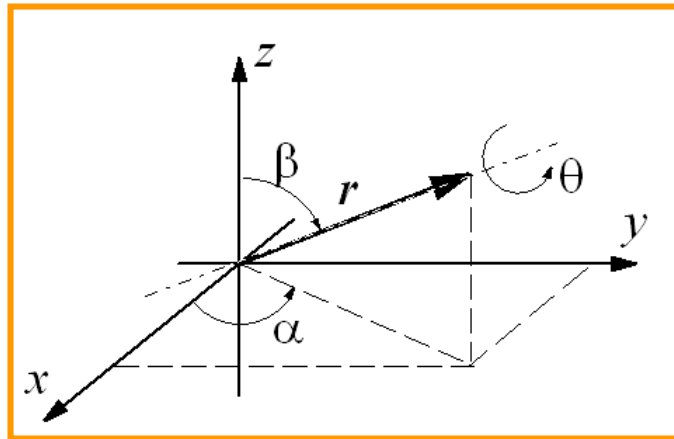
$$\mathbf{R}_{GA} = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta)$$

$$[\mathbf{p}_{new}]_G = \mathbf{R}_r(\theta) [\mathbf{p}_{old}]_G$$

essendo noto  $[\mathbf{p}_{old}]_G$

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}_{new}]_G &= \mathbf{R}_{GA} [\mathbf{p}_{new}]_A = \mathbf{R}_{GA} \mathbf{R}_z(\theta) [\mathbf{p}_{old}]_A \\ &= \mathbf{R}_{GA} \mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{R}_{GA}^T [\mathbf{p}_{old}]_G \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_r(\theta) = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{R}_y(-\beta) \mathbf{R}_z(-\alpha)$$



## Operazione inversa da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{r}, \theta$

Può essere utile anche l'operazione inversa: arrivando in una posizione definita da  $\mathbf{R}$ , determinare qual è l'unica rotazione equivalente.

- l'angolo  $\theta$  si ottiene dalla traccia di  $\mathbf{R}$  (invariante primo della matrice):

$$1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(\mathbf{R}) = (R_{11} + R_{22} + R_{33})$$

- $\underline{\mathbf{r}}$  si trova ricordando quanto precede da parte antisimmm  $\mathbf{R}$  (formula Eulero-Rodriguez)

$$\underline{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} S_{32} \\ S_{13} \\ S_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{pmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{pmatrix}$$

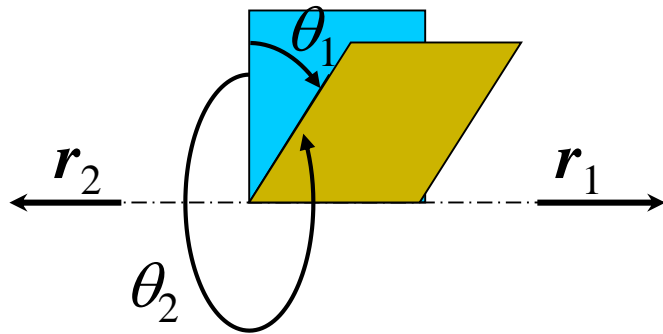
Lez.2 d.24

Si osserva la doppia soluzione per il valore di  $\theta$  dovuto alla funzione  $\text{acos}$ , (che viene “risolto” dall’inversione del versore  $\underline{r}$  )

$$\theta = \text{acos}\left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} \theta_1 \\ \theta_2 = 2\pi - \theta_1 \end{cases}$$

$$\underline{r}_1 = \frac{1}{2 \sin \theta_1} \begin{pmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_2 = \frac{1}{2 \sin \theta_2} \begin{pmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{pmatrix} = -\underline{r}_1$$



La posizione finale del piano è la stessa per  $\theta_1$  e versore  $\underline{r}_1$  che per  $\theta_2$  e versore  $\underline{r}_2$

ATT:  $\mathbf{R}$  è simmetrica (per  $\theta=\pi$ ) rimane

$$\mathbf{R} = 2 \mathbf{r} \mathbf{r}^T - \mathbf{I}$$

Quindi  $\mathbf{r}$  non da Rasimm (nulla) ma es.

$$\mathbf{r} \mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} r_x^2 & r_x \cdot r_y & r_z \cdot r_x \\ r_x \cdot r_y & r_y^2 & r_z \cdot r_y \\ r_z \cdot r_x & r_z \cdot r_y & r_z^2 \end{pmatrix}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{R_{1,1} + 1}{2}} \quad r_y = \frac{R_{1,2}}{r_x} \quad r_z = \frac{R_{1,3}}{r_x}$$

## Ancora: operazione inversa da $\mathbf{R}$ a $r, \theta$

La determinazione della direzione dell'asse di rotazione - ma non del suo verso- si può fare risolvendo un problema di autovettori, ricordando che la matrice di rotazione ha un autovalore +1 il cui autovettore è parallelo all'asse di rotazione.

$$(\mathbf{R}-\mathbf{I}) \underline{r} = \underline{0}$$

Sistema omogeneo con  
infinite soluzioni

$$\det(\mathbf{R}-\mathbf{I})=0$$

Autovalori

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2/3} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$



# Quaternioni

Scoperti nel 1843 da William Rowan Hamilton

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

Estensione dei numeri complessi, con 3 elementi immaginari  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Rotazioni con quaternioni unitari

$$q = \cos(\theta/2) + r_x \sin(\theta/2)\mathbf{i} + r_y \sin(\theta/2)\mathbf{j} + r_z \sin(\theta/2)\mathbf{k}$$

Analoga a rappresentazione asse-angolo; algebra particolare

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Quaternione coniugato

$$\mathbf{q}' = \cos(\theta/2) - r_x \sin(\theta/2)\mathbf{i} - r_y \sin(\theta/2)\mathbf{j} - r_z \sin(\theta/2)\mathbf{k}$$

Rotazione come prodotto di tre termini

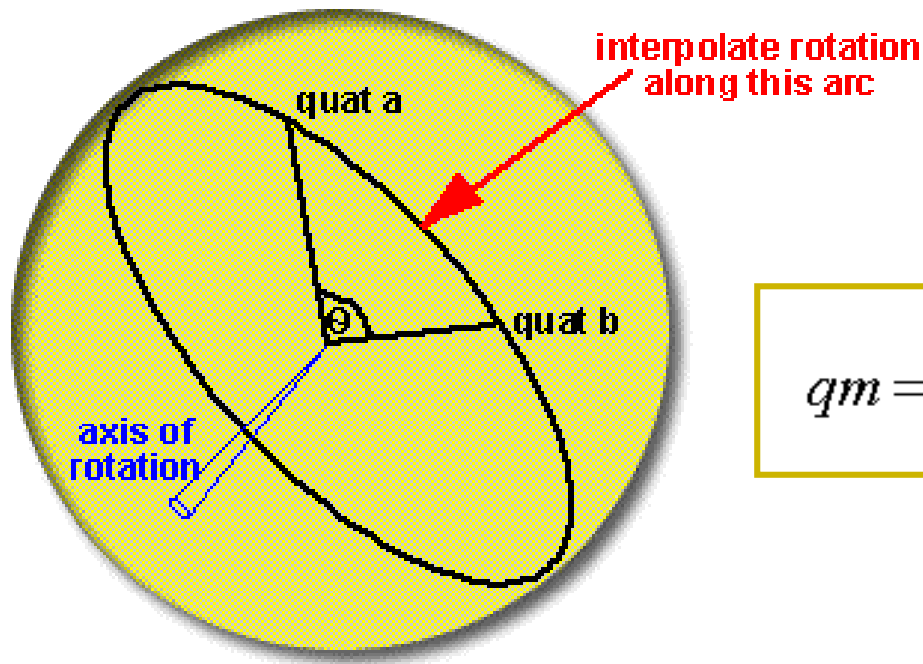
$$\mathbf{p}_{new} = \mathbf{q} \mathbf{p}_{old} \mathbf{q}'$$

dove il vettore posizione è trasformato in un quaternione

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$$

quaternioni vantaggiosi per interpolazione tra orientazioni diverse

## Interpolazione sferica lineare (SLERP)



$$qm = \frac{qa \sin((1-t)\theta) + qb \sin(t\theta)}{\sin \theta}$$

$$\theta = \arccos(\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}_b)$$

# Confronto fra le rappresentazioni

Significato fisico

Composizione operazioni

Singularità Biunivocità

Periodicità

Misurabilità

(quaternioni interpolazione)

	s.f.	oper	S.B.	per	mis
matrici	~ <b>si</b>	<b>si</b>	<b>no</b>	<b>no</b>	<b>no</b>
eul-rpy	~ <b>si</b>	<b>no</b>	<b>si</b>	<b>si</b>	<b>si</b>
asse-angolo	<b>si</b>	<b>no</b>	<b>no</b> ~	<b>si</b>	<b>no</b>
quaternioni	<b>no</b>	<b>si</b>	<b>no</b>	<b>si</b>	<b>no</b>