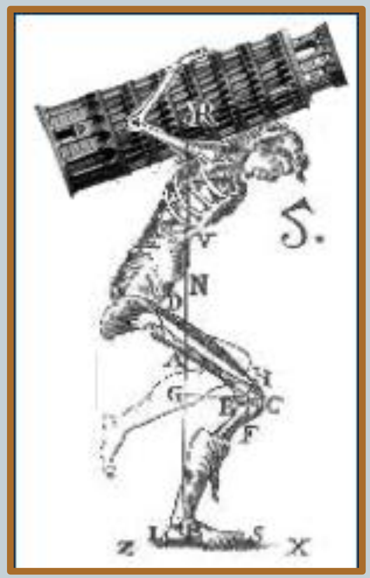
Meccanica Applicata al sistema muscolo-scheletrico

Lezione 2



A.A. 2017-2018

Punti – vettori sdr

Le coordinate del punto P nel riferimento S si indicano con

$$[P]_S = [x_P, y_P, z_P]^T = (x_P, y_P, z_P)$$

Analogamente le componenti del vettore **v** in S sono

$$[\mathbf{v}]_S = [v_x, v_y, v_z]^T = (v_x, v_y, v_z)$$

Per descrivere la posizione di un punto si usano anche i vettori posizione, rispetto ad una origine O,

$$[OP]_S = [P]_S - [O]_S = [P]_S = (x_P, y_P, z_P)$$

dove *OP* indica il vettore o segmento orientato con origine in *O* ed estremo in *P*.

Si ricorda anche che, indicati con **i**, **j**, **k** i versori del sdr, si ha:

$$v_x = \mathbf{v}\cdot\mathbf{i}, \quad v_y = \mathbf{v}\cdot\mathbf{j}, \quad v_z = \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

Cambiamento di sistema di riferimento

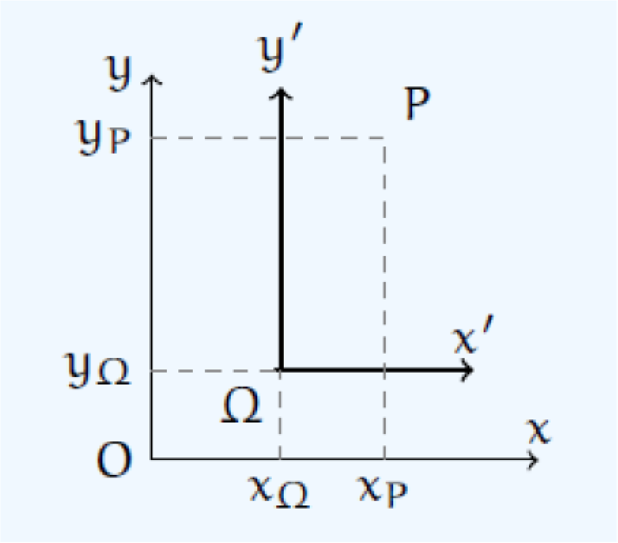
Sono dati S={O; x, y, z} e S'={Ω; x', y', z'}; si studiano tre casi

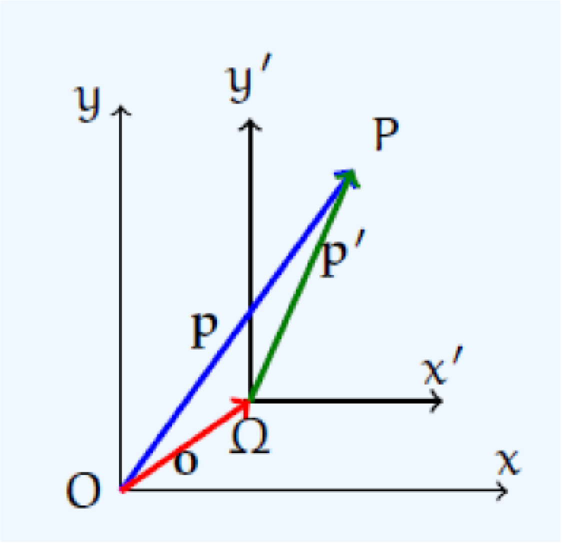
a) O diverso da Ω e assi paralleli e concordi (stessi versori)

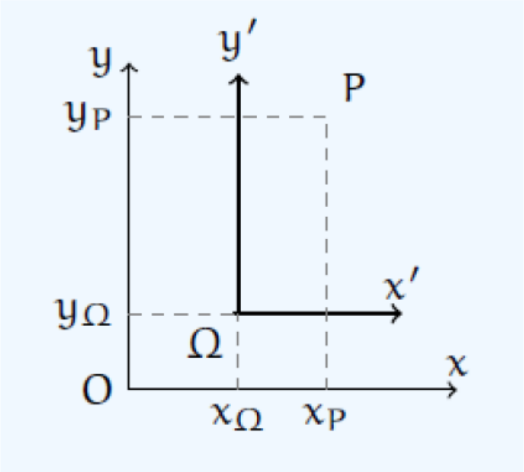
b) O coincide con Ω e assi ruotati

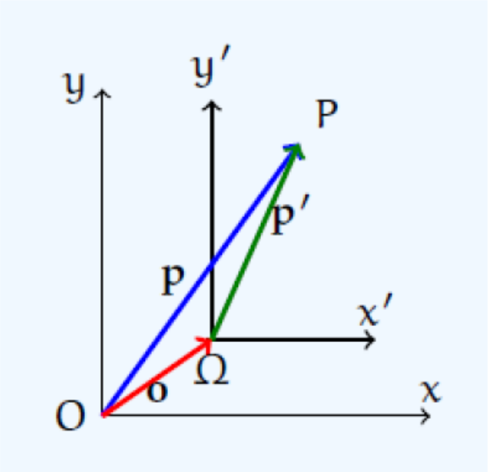
c) Generale: O diverso da Ω e assi ruotati

a) Diversa origine









$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + \mathbf{p}' \qquad \text{ossia} \qquad OP = O\Omega + \Omega P$$

$$\begin{cases} x_P = x_\Omega + x'_P \\ y_P = y_\Omega + y'_P \end{cases}$$

$$[\mathbf{p}]_S = [\mathbf{o}]_S + [\mathbf{p}']_{S'} \qquad \text{e} \qquad [OP]_S = [O\Omega]_S + [\Omega P]_{S'}$$

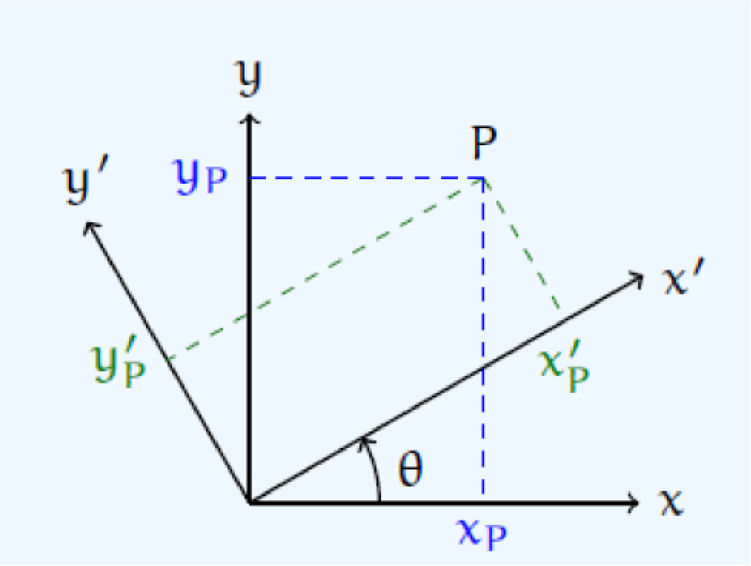
Oppure

$$[P]_S = [\Omega]_S + [\Omega P]_{S'}$$

b) Stessa origine

$$[P]_S = \mathbf{R}_{SS'}[P]_{S'}$$

$$[\mathbf{p}]_S = \mathbf{R}_{SS'}[\mathbf{p}]_{S'}$$

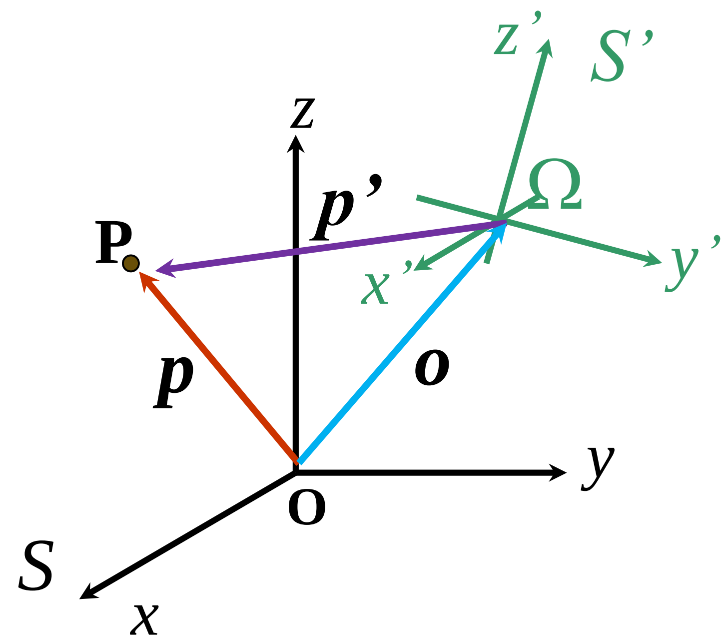


vd. Lezione 1

c) Caso generale

Dalla combinazione dei due si ottiene

$$[\mathbf{p}]_S = [\mathbf{o}]_S + \mathbf{R}_{SS'}[\mathbf{p}']_{S'}$$



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega P}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + \mathbf{p}'$$

✧ Per le componenti

$$[P]_S = [\Omega]_S + \mathbf{R}_{SS'}[P]_{S'}$$

$$[\mathbf{p}]_S = [\mathbf{o}]_S + \mathbf{R}_{SS'}[\mathbf{p}']_{S'}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} + \mathrm{R}_{SS'}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Infatti, si può pensare $S' \rightarrow S$ come

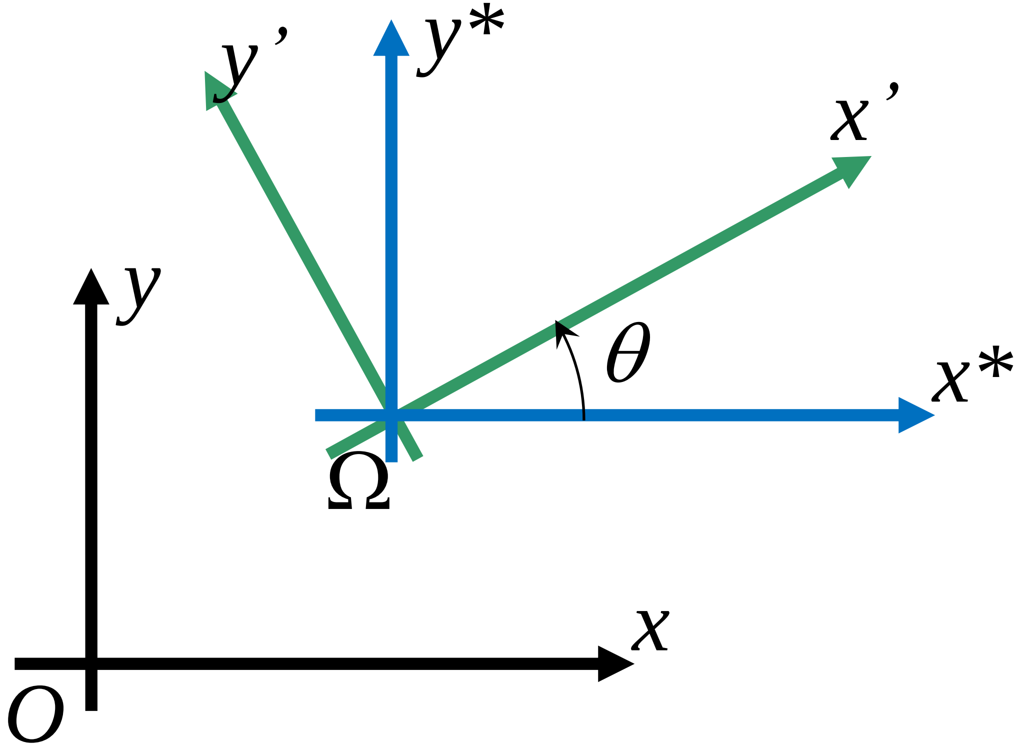
$S' \rightarrow S^*$ stessa origine, assi ruotati

$$[P]_{S*} = \mathbf{R}_{S*S'}[P]_{S'}$$

\+

$S^* \rightarrow S$ diversa origine, assi paralleli

$$[P]_S = [\Omega]_S + [P]_{S*}$$



$$\mathbf{R}_{S*S'} = \mathbf{R}_{SS'}$$

poiché i versori di S e di S* sono gli stessi

$$[P]_S = [\Omega]_S + \mathbf{R}_{SS'}[P]_{S'}$$

$$[\mathbf{p}]_S = [\mathbf{o}]_S + \mathbf{R}_{SS'}[\mathbf{p'}]_{S'}$$

Osservazione importante

Le relazioni

$$[P]_S = [\Omega]_S + \mathbf{R}_{SS'}[P]_{S'}$$

$$[\mathbf{p}]_S = [\mathbf{o}]_S + \mathbf{R}_{SS'}[\mathbf{p'}]_{S'}$$

Servono per calcolare come cambiano le coordinate dei Punti e/o le componenti dei vettori posizione con il sdr.

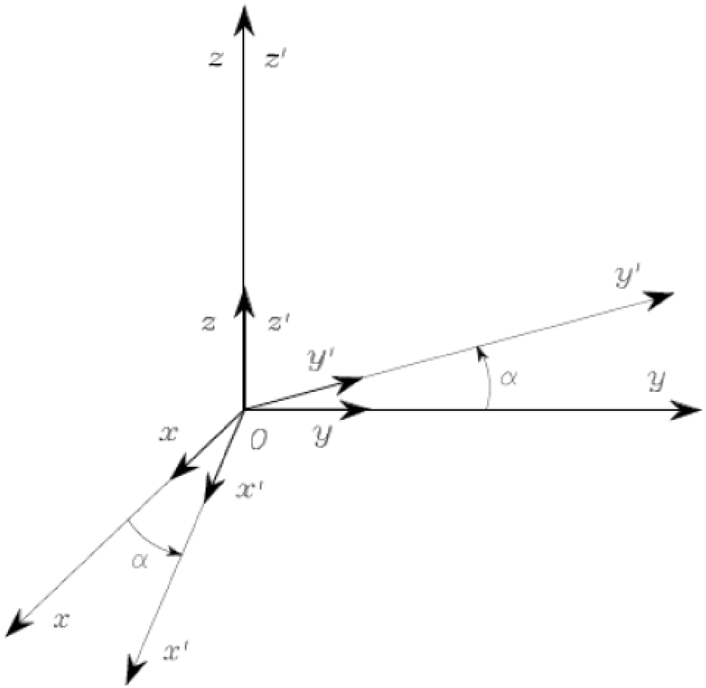
Per i vettori ‘veri’ (velocità, forza, accelerazione etc) vale la legge di cambiamento di base

$$[\mathbf{v}]_S = \mathbf{R}_{SS'}[\mathbf{v}]_{S'}$$

(dove è l’origine non conta)

Matrici elementari

Quando i due sdr hanno un asse in comune (o hanno due assi omonimi paralleli), la matrice di rotazione ha una struttura particolare.



z // z'

$$\mathbf{R}_{SS'} = R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Similmente

$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \qquad R_y(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

<u>Esercizio</u>

Fare qualche figura che mostri sdr in 4 casi, in cui $\mathbf{R}_{SS'}$ è data dalle seguenti matrici -una alla volta-

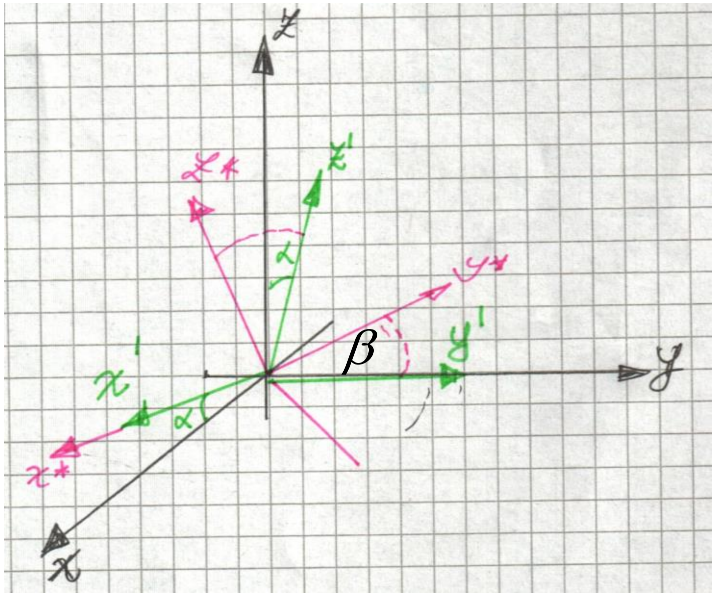
$$\mathbf{R}_x(-30°), \mathbf{R}_z(30°), \quad \mathbf{R}_y(120°), \quad \mathbf{R}_x(90°)$$

Riferimenti ausiliari

Si vuole scrivere la matrice di rotazione tra S e S*; può risultare utile inserire un sdr/passaggio intermedio *S'*, come mostrato

S'→*S* asse *y* sovrapposto *y'* $\mathbf{R}_{SS'} = \mathbf{R}_y(-\alpha)$

*S**→*S'* asse *x** sovrapposto *x'* $\mathbf{R}_{S'S*} = \mathbf{R}_x(\beta)$

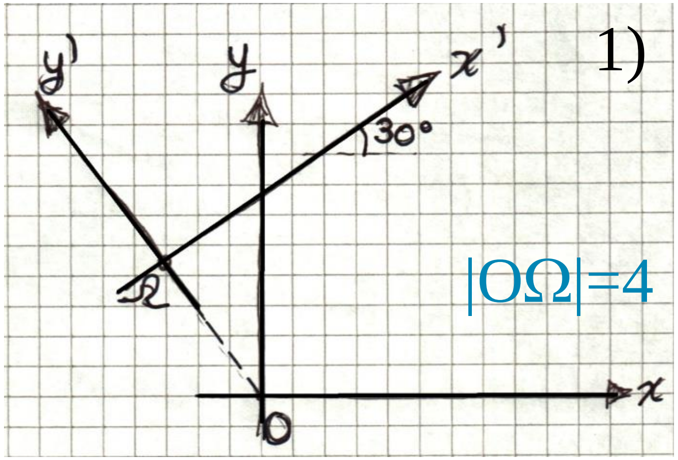


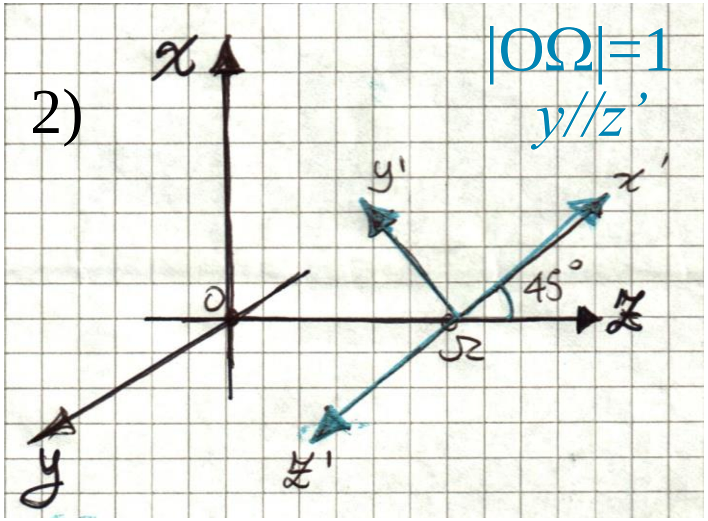
Si dimostra facilmente che

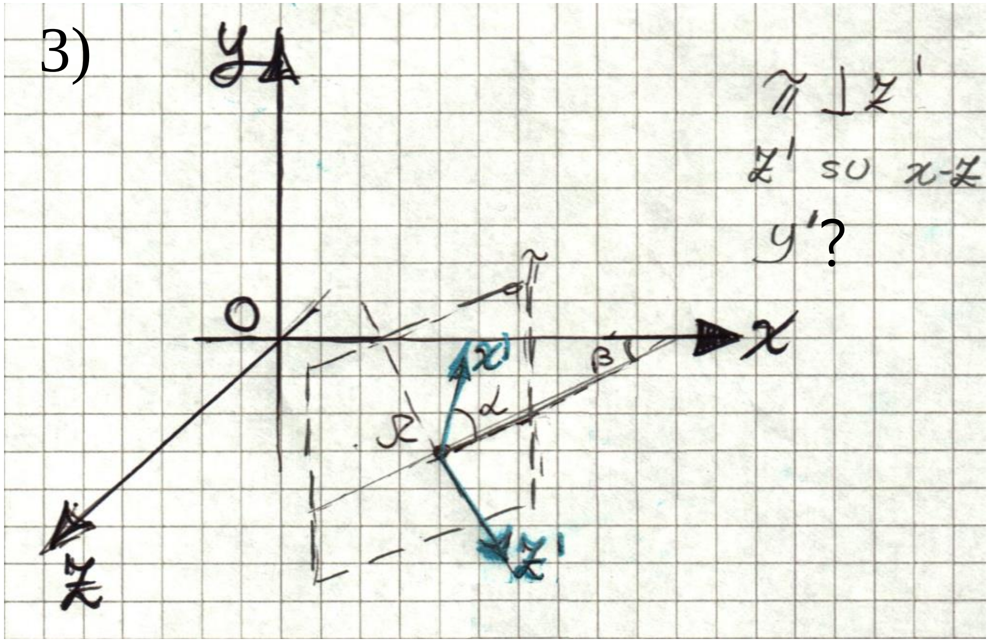
$$\mathbf{R}_{SS*} = \mathbf{R}_{SS'}\mathbf{R}_{S'S'}$$

Esercizio 1

Scrivere le relazioni per il passaggio $S' \rightarrow S$ e inverso $S \rightarrow S'$ per i casi mostrati nelle tre figure seguenti







Rappresentare y' e completare come precedenti

$$[O\Omega]_S = (d, 0, d)$$

Esercizio 2

Partendo da un sistema S, se ne rappresenti un altro S′, avente stesso asse z ma assi x′-y′ ruotati di 45° rispetto x-y. Si aggiunga S″ avente stesso asse y′ di S′ ma assi x″-z″ ruotati di -90°. Si aggiunga infine S* avente asse x in comune con S″ e altri assi ruotati di 15°. Si scrivano le matrici di rotazione tra i vari sdr e quella tra S e S*.

Esercizio 3

Si ripetano ancora le costruzioni dell'esercizio 2 (numeri riportati nella prima riga) per i casi della tabella sotto riportata. Si scrivano le matrici R.

S-S'	S'-S''	S''-S*
Z (45°)	Y (-90°)	X (15°)
X (-45°)	Y (60°)	X (15°)
Z (45°)	Y (-90°)	Z (15°)
Y (-30°)	X (90°)	Y (15°)