

# Appunti di Campi Elettromagnetici

Stefano Rossini

28 gennaio 2025

## Introduzione

Appunti ordinati, con approfondimenti passo-passo, del corso di Campi Elettromagnetici per il corso di laurea in Ingegneria Elettronica presso l'Università Politecnica delle Marche.

Le fonti degli appunti sono le seguenti:

- Fields and Waves Electronics, 3rd Edition, Ramo, 1994  
(negli appunti sarà abbreviato come FWE)
- Fundamentals of Applied Electromagnetics (8th edition), Fawaz T. Ulaby  
(negli appunti sarà abbreviato come FAE)
- Fondamenti di campi elettromagnetici - Teoria ed applicazioni, Fawwaz T. Ulaby, McGraw-Hill, 2006  
(negli appunti sarà abbreviato come FCE: è la traduzione in italiano di FAE)
- Slide del corso del prof Antonio Morini, Campi elettromagnetici A.A. 2022/2023, PPT aggiornati al 2023  
(negli appunti sarà indicato come PPT)

Negli appunti ci saranno delle piccole appendici dentro a questi mini-paragrafi su come si leggono in italiano le varie formule matematiche, a prova di imbecille, e lascerò link su possibili approfondimenti matematici usando le animazioni, così è più facile comprendere la materia.

Per le lettere greche che ci saranno nel corso, vi consiglio di visitare questo sito  
[https://www.rapidtables.org/it/math/symbols/greek\\_alphabet.html](https://www.rapidtables.org/it/math/symbols/greek_alphabet.html)  
in cui è disponibile anche la pronuncia vocale delle lettere.

È consigliato studiare e superare prima l'esame di analisi matematica 2, quindi anche analisi matematica 1, e fondamenti di elettromagnetismo, ma se stai leggendo questi appunti, molto probabilmente hai saltato almeno uno tra questi.

Non ti preoccupare, ci sono io qui che cerco a darti una mano.

O maschio o femmina, bro sono qui con te (virtualmente) a superare questo esame.

Per qualsiasi domanda, scrivimi a [rossini.stefano.appunti@gmail.com](mailto:rossini.stefano.appunti@gmail.com)

Buono studio e buona lettura

## Tabella lettere greche utili per il corso

Lettera maiuscola	Lettera minuscola	Nome lettera greca
A	$\alpha$	Alfa
B	$\beta$	Beta
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma
$\Delta$	$\delta$	Delta
E	$\varepsilon$	Epsilon
H	$\eta$	Eta
$\Theta$	$\theta$	Theta
K	$\kappa$	Kappa
$\Lambda$	$\lambda$	Lambda
M	$\mu$	Mu
$\Pi$	$\pi$	Pi
P	$\rho$	Rho
$\Sigma$	$\sigma$	Sigma
T	$\tau$	Tau
$\Phi$	$\phi$	Phi
X	$\chi$	Chi
$\Psi$	$\psi$	Psi
$\Omega$	$\omega$	Omega



# Capitolo 1

## Equazioni di Maxwell



*J. Clark Maxwell*

## 1.1 Equazioni di Maxwell nel vuoto

1

Le equazioni di Maxwell sono le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.1)$$

I vettori verranno indicati con la freccia sopra alla lettera del vettore stesso.  
Un elenco degli operatori matematici che troverai nel corso:

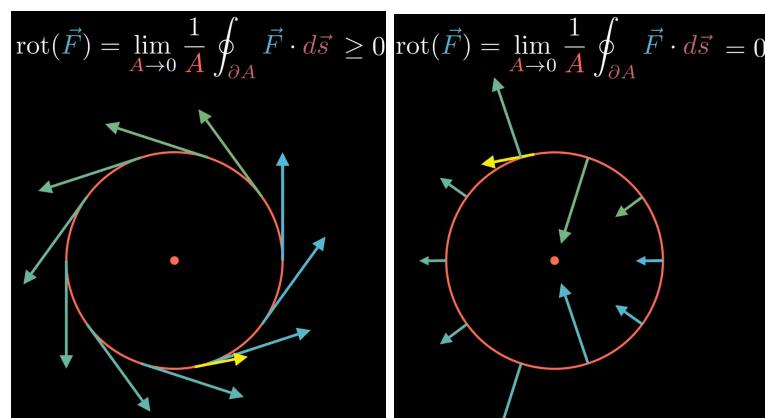
- Prodotto scalare
- $\times$  Prodotto vettoriale
- $\frac{\partial}{\partial t}$  Derivata nel tempo
- $\nabla$  Operatore nabla
- $\nabla \cdot$  Divergenza
- $\nabla \times$  Rotore

Per capire meglio perchè si usano questi operatori matematici in questo corso, puoi visualizzare questo video di

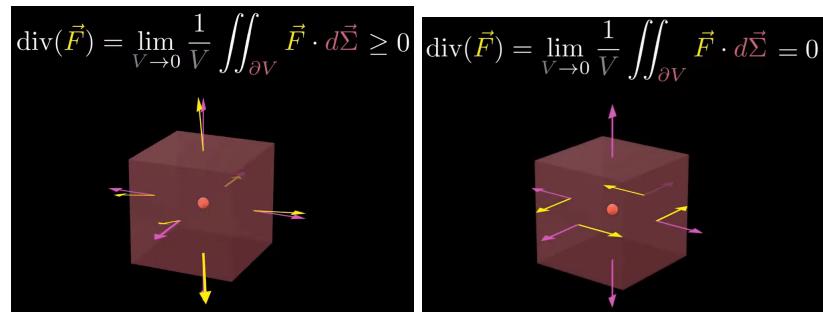
ClearMath - Rotore e Divergenza: Cosa sono? A che Servono?  
[https://youtu.be/q00XcRm7XBs?si=kWH6J1\\_2AyCfSYWB](https://youtu.be/q00XcRm7XBs?si=kWH6J1_2AyCfSYWB)

Step by Step - Fisica e Mate - FISICA Teoria 4 tris - PRODOTTO SCALARE, PRODOTTO VETTORIALE, REGOLA della MANO DESTRA  
<https://youtu.be/MJZnMRb9yZ0?si=rg0IhrHFdt5DQf45>

Per un vettore  $\vec{F}$ , possiamo visualizzare il rotore e la divergenza come:



<sup>1</sup>Equazioni di Maxwell - Wikipedia



Le foto sono degli screenshots da

ClearMath - Rotore e Divergenza: Cosa sono? A che Servono?

[https://youtu.be/q00XcRm7XBs?si=kWH6J1\\_2AyCfSYWB](https://youtu.be/q00XcRm7XBs?si=kWH6J1_2AyCfSYWB)

Da <https://it.wikipedia.org/wiki/Divergenza>

la divergenza è un campo scalare che misura la tendenza di un campo vettoriale a divergere o a convergere verso un punto dello spazio.

Da [https://it.wikipedia.org/wiki/Rotore\\_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Rotore_(matematica))

Il rotore esprime una rotazione infinitesima (ad esempio una velocità di rotazione) del vettore dato, associando a ogni punto dello spazio un vettore.

### 1.1.1 Legenda - Equazioni di Maxwell nel vuoto

$\vec{D}$  Flusso del campo elettrico

$\vec{E}$  Campo elettrico

$\vec{B}$  Flusso del campo magnetico

$\vec{H}$  Campo magnetico

$\vec{J}$  Densità di corrente

$\rho$  Densità di carica

Adesso che sappiamo cosa sono e come si chiamano gli operatori matematici ed i vettori che ci servono, possiamo leggere in italiano le formule matematiche date.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

anche detta legge di Gauss elettrica, esprime che  
la divergenza del flusso del campo elettrico è uguale alla densità di carica

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

anche detta legge di Gauss magnetica, esprime che  
la divergenza del flusso del campo magnetico è uguale a zero

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

anche detta legge di Faraday, esprime che  
il rotore del campo elettrico è uguale alla derivata nel tempo del flusso del campo magnetico,  
con verso contrario rispetto al campo elettrico stesso

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

anche detta legge di Ampere-Maxwell, esprime che  
il rotore del campo magnetico è uguale alla somma della densità di corrente e la derivata nel  
tempo del flusso del campo elettrico

## 1.2 Equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di cariche

2

In assenza di cariche, possiamo considerare:

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$\rho = 0$

La densità di carica è uguale a zero

$\vec{J} = 0$

La densità di corrente è uguale a zero

Quindi, le leggi di Maxwell diventeranno:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.3)$$

Per riassumere, le equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di cariche sono:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.4)$$

$\nabla \cdot \vec{D} = 0$

La divergenza del flusso del campo elettrico è uguale a zero

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

La divergenza del flusso del campo magnetico è uguale a zero

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Il rotore del campo elettrico è uguale alla derivata nel tempo del flusso del campo magnetico, con verso contrario rispetto al campo elettrico stesso

$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Il rotore del campo magnetico è uguale alla derivata nel tempo del flusso di campo elettrico

---

<sup>2</sup>FWC - pag 132 — 3.9 Maxwell's equations and plane waves

### 1.3 Equazioni di Maxwell nei materiali

3

In questa sezione, prenderemo in considerazione materiali lineari isotropici: lineari perchè le grandezze del materiale sono lineari, isotropici perchè le caratteristiche del materiale sono uguali in ogni punto del materiale stesso.

Ponendo:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \\ \mu = \mu_0 \mu_r \end{cases} \quad (1.5)$$

$\varepsilon_0$  è la costante dielettrica nel vuoto

$\varepsilon_r$  è il rapporto tra la costante dielettrica nel materiale e  $\varepsilon_0$

$\mu_0$  è la costante di permeabilità nel vuoto

$\mu_r$  è il rapporto tra la costante di permeabilità nel materiale e  $\mu_0$

Dalle leggi di Maxwell nel vuoto senza cariche, poniamo:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \quad (1.6)$$

Nota matematica:

$\varepsilon \vec{E}$  è un prodotto scalare tra uno scalare (quindi un valore) e un vettore.

Lo stesso principio vale per  $\mu \vec{H}$

Nota lettura italiano:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Il flusso del campo elettrico è uguale alla costante dielettrica nel materiale per il campo elettrico

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Il flusso del campo magnetico è uguale alla costante magnetica nel materiale per il campo magnetico

Svolgendo le dovute sostituzioni dalle leggi di Maxwell nel vuoto senza cariche, avremo che:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \frac{\varepsilon \vec{E}}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \frac{\mu \vec{H}}{\mu} = \frac{0}{\mu} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial (\mu \vec{H})}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial (\varepsilon \vec{E})}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.7)$$

Per riassumere, le equazioni di Maxwell nei materiali, in assenza di cariche, sono:

---

<sup>3</sup>FWC - pag 126 — 3.6 Maxwell's equations in differential form

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

La divergenza del campo elettrico è uguale a zero

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

La divergenza del campo magnetico è uguale a zero

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Il rotore del campo elettrico è uguale al prodotto tra la derivata del campo magnetico nel tempo per la costante di permeabilità nel materiale con segno opposto rispetto al campo elettrico

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il rotore del campo magnetico è uguale al prodotto tra la derivata nel tempo del campo elettrico e la costante elettrica nel materiale

## 1.4 Equazioni di Maxwell nelle coordinate cartesiane

4

Considerando il sistema delle coordinate cartesiane, cioè un sistema in cui ogni punto ha coordinate  $(x,y,z)$ , possiamo scrivere che:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.9)$$

Quindi:

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  sono i versori delle coordinate cartesiane, cioè i vettori unitari del sistema cartesiano.  
 $E_x, E_y, E_z$  sono le ampiezze di  $\vec{E}$  nei rispettivi assi cartesiani

Ora andiamo a calcolare il rotore di  $\vec{E}$

A livello operativo, calcolare il rotore di un vettore significa calcolare il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Se non sai calcolare il determinante di una matrice, ti consiglio questo video:

Elia Bombardelli - Determinante di una Matrice  
<https://youtu.be/pstBLN4gCqE?si=pkqB5Mmd0gCFapP9>

Svolgendo i calcoli passo-passo, avremo che:

---

<sup>4</sup>FWC - pag 85 — 2.5 The curl of a vector field  
 FWC - pag 132 — 3.9 Maxwell's equations and plane waves

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= \text{rot} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\
&= \hat{x} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_y & E_z \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_z \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ E_x & E_y \end{vmatrix} \quad (1.11) \\
&= \hat{x} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{y} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\
&= \hat{x} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( -\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Possiamo svolgere gli stessi passaggi svolti anche per  $\nabla \times \vec{H}$

$$\nabla \times \vec{H} = \hat{x} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (1.12)$$

Per riassumere, le equazioni di Maxwell nei materiali nelle coordinate cartesiane sono le seguenti:

$$\left\{
\begin{array}{l}
\nabla \cdot \vec{E} = 0 \\
\nabla \cdot \vec{H} = 0 \\
\nabla \times \vec{E} = \hat{x} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( -\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\
\nabla \times \vec{H} = \hat{x} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)
\end{array}
\right. \quad (1.13)$$

## 1.5 Equazioni di Maxwell per le onde piane in (x, y, z)

5

Considerando le onde piane, cioè onde in cui il fronte d'onda è infinito, possiamo calcolarci le equazioni di Maxwell per questo tipo d'onda.

Le onde piane, nella realtà, non esistono, ma ci sono utili per modellare le onde reali e per semplificarcisi i conti: da sei incognite delle equazioni di Maxwell trovate nella sezione precedente, passeremo a due, cioè  $E_x$  e  $E_y$ .

Gli altri componenti del campo elettromagnetico dipenderanno da queste due variabili indipendenti.

Ricordando che il fronte d'onda è infinito, le onde piane sono onde per cui non c'è variazione dell'onda lungo l'asse x e lungo l'asse y, quindi possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

$\nabla \times \vec{E}$  da:

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \quad (1.15)$$

diventa:

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{x}\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \hat{z}(0) \quad (1.16)$$

Dalle leggi di Maxwell nei materiali, sappiamo che:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.17)$$

Scomponendo questa equazione nei vari assi cartesiani, avremo che:

**Asse X**

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (1.18)$$

**Asse Y**

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (1.19)$$

**Asse Z**

$$0 = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (1.20)$$

Quello che abbiamo fatto per  $\nabla \times \vec{E}$ , possiamo farlo anche per  $\nabla \times \vec{H}$

---

<sup>5</sup>FWC - pag 132 — 3.9 Maxwell's equations and plane waves

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.21)$$

Scomponendo questa equazione nei vari assi cartesiani, avremo che:

**Asse X**

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (1.22)$$

**Asse Y**

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (1.23)$$

**Asse Z**

$$0 = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (1.24)$$

Scriverò un esempio che può essere applicato per tutte le altre eqazioni.

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

La derivata per z della componente sull'asse x del campo magnetico è uguale al prodotto tra la costante elettrica nel materiale e la derivata nel tempo della componente sull'asse y del campo elettrico

Considerando le equazioni sull'asse z, abbiamo che:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \\ -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_z = 0 \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Queste equazioni ci dicono che i campi sono trasversali rispetto alla direzione di propagazione (considerando l'asse z come asse di propagazione)

Da [https://it.wikipedia.org/wiki/Onda\\_trasversale](https://it.wikipedia.org/wiki/Onda_trasversale)

Un' onda trasversale è un'onda in movimento che è composta da oscillazioni che avvengono perpendicolari alla direzione del trasferimento di energia. Se un'onda trasversale si muove nella direzione positiva x, le sue oscillazioni sono nelle direzioni sopra e sotto che giacciono nel piano y-z.

Questo significa che  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  sono perpendicolari.

Analizzando le altre equazioni nel piano (x,y), notiamo che:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases} \quad (1.26)$$

Possiamo risolvere questo sistema per  $E_x$

Differenziando per  $\frac{\partial}{\partial z}$  nella prima equazione e  $\frac{\partial}{\partial t}$  nella seconda equazione, avremo che:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = -\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} \quad (1.27)$$

Sostituendo la seconda equazione alla prima, abbiamo che:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (1.28)$$

Questa indicata è l'equazione dell'onda a una dimensione lunga la direzione z.

Lo stesso procedimento svolto per trovare  $E_x$ , lo possiamo usare con  $E_y$

L'onda si propaga con velocità:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (1.29)$$

Per vedere un altro punto di vista dell'equazione dell'onda, puoi visualizzare questo video di

Ali the Dazzling - The Wave Equation simplified

<https://youtu.be/tGc4gb8n7gM?si=H4Jw0vzIKAW2jeqv>

Puttropo è in inglese e non ha i sottotitoli in italiano, ma il video è molto semplice e molto intuitivo

## 1.6 Equazioni di Maxwell in forma fasoriale

6

Oltre alle onde piane negli assi cartesiani, è possibile esprimere le onde usando i fasori.

Se non sai cosa è un fasore, puoi visualizzare questo video di

Elettronica-mente - Elettrotecnica - Lezione 15 - Fasori, Impedenza ed Ammettanza  
[https://youtu.be/\\_Yww5MfoPwI?si=7e-8G0q\\_gUF0cTev](https://youtu.be/_Yww5MfoPwI?si=7e-8G0q_gUF0cTev)

Ponendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \quad (1.30)$$

possiamo riscrivere le equazioni di Maxwell nei materiali come:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} \end{cases} \quad (1.31)$$

Per lo stesso principio, possiamo scrivere le sue componenti lungo (x,y, z) come:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (1.32)$$

**Asse X**

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega \mu H_x \quad (1.33)$$

**Asse Y**

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega \mu H_y \quad (1.34)$$

**Asse Z**

$$0 = j\omega \mu H_z \quad (1.35)$$

Invece per:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} \quad (1.36)$$

**Asse X**

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega \varepsilon E_x \quad (1.37)$$

**Asse Y**

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega \varepsilon E_y \quad (1.38)$$

**Asse Z**

$$0 = j\omega \varepsilon E_z \quad (1.39)$$

---

<sup>6</sup>FWC - pag 135 — 3.10 Uniform plane waves with steady-state sinusoids

L'equazione dell'onda, in forma fasoriale, diventa:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \varepsilon E_x \quad (1.40)$$

in cui

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad (1.41)$$

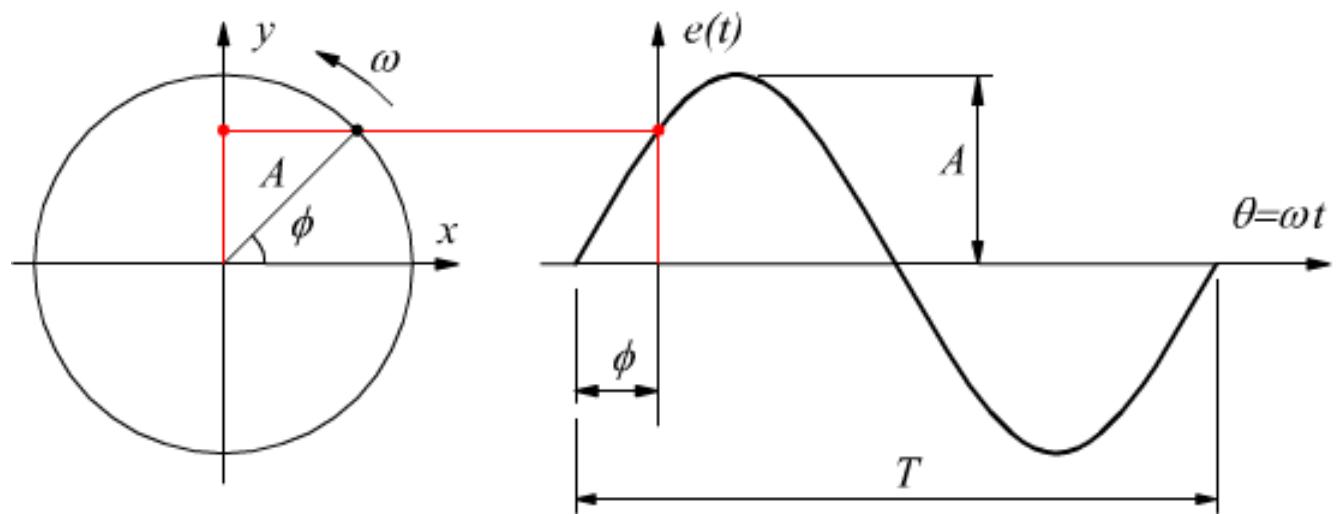
in forma fasoriale.

Come il caso delle equazioni di Maxwell delle onde piane nei materiali,

$$E_z = H_z = 0 \quad (1.42)$$

## Capitolo 2

# Onde in forma fasoriale



## 2.1 Equazioni dell'onda in forma fasoriale

1

Prendiamo una componente del campo elettrico, ad esempio  $E_x(z, t)$ . Essendo una sinusoida,  $E_x(z, t)$  possiamo scriverla nella forma:

$$E_x(z, t) = C_1 e^{-j\kappa z} + C_2 e^{j\kappa z} \quad (2.1)$$

in cui:

- $C_1$  e  $C_2$  sono numeri reali
- $C_1 = E_o^+$
- $C_2 = E_o^-$
- $\kappa = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v}$

Dalla matematica,  $\omega$  (si legge omega) è la frequenza dell'onda misurata in radianti al secondo [rad/s].

$$\omega = 2\pi f$$

dove  $f$  è la frequenza dell'onda o l'inverso di un periodo misurata in [Hz] (si legge Hertz) o [ $\frac{1}{s}$ ].

$j$  è l'unità immaginaria.

$$j^2 = -1$$

è il numero di Eulero.

Perchè scrivere le onde in forma fasoriale?

Tutto grazie alla formula di Eulero:

$$e^{jz} = \cos(z) + j \sin(z)$$

Se vuoi approfondire, ci sono due video molto interessanti riguardo al tema:

- Zech Star - Why do Electrical Engineers use imaginary numbers in circuit analysis?  
<https://youtu.be/FCNHN7B9iDM?si=9ECin22SXTxcp7-6>
- The Science Asylum - What the HECK is a Phasor? Alternating Current Explained.  
<https://youtu.be/7weMCsff0xw?si=Y9t8nKBIX3a1I5Z5>

$\kappa$  prende il nome di numero d'onda o costante di fase e si misura in [ $\frac{1}{m}$ ]; può essere vista anche come la costante del medio per una particolare frequenza (ricordando che  $\mu$  e  $\varepsilon$  dipendono rispettivamente da  $\mu_r$  e  $\varepsilon_r$  del materiale)

$E_x(z, t)$  è una funzione che dipende sia da  $z$  (nell'asse cartesiano) che da  $t$  (cioè il tempo).

Essa è la somma di un'onda progressiva, cioè un'onda lungo  $z$ , che viene indicata dalla notazione  $E_o^+ e^{-j\kappa z}$  e di un'onda regressiva, cioè un'onda lungo  $-z$ , che viene indicata dalla notazione  $E_o^- e^{j\kappa z}$ .

$E_o^+ e^{-j\kappa z}$  diventa negativa lungo l'asse  $z$ , con velocità  $v$ , mentre  $E_o^- e^{j\kappa z}$  diventa positiva lungo l'asse  $-z$  con velocità  $-v$ .

Moltiplicando l'equazione per  $e^{j\omega t}$ , è possibile convertirla in coordinate cartesiane e sapere come l'onda varia nel tempo:

<sup>1</sup>FWC - pag 135 — 3.10 Uniform plane waves with steady-state sinusoids

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \Re[E_x e^{j\omega t}] \\ &= \Re[C_1 e^{-j\kappa z} e^{j\omega t} + C_2 e^{j\kappa z} e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Prendendo  $C_1$  e  $C_2$  come reali, avremo che:

$$E_x(z, t) = C_1 \cos(\omega t - \kappa z) + C_2 \cos(\omega t + \kappa z) \quad (2.3)$$

Ricordando che:

$$\kappa = \frac{\omega}{v} \quad (2.4)$$

possiamo scriverla anche come:

$$E_x(z, t) = C_1 \cos \omega(t - \frac{z}{v}) + C_2 \cos \omega(t + \frac{z}{v}) \quad (2.5)$$

Nello scorso capitolo, le equazioni di Maxwell in forma fasoriale, abbiamo scoperto che:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (2.6)$$

Nell'asse  $y$  sappiamo la relazione tra  $E_x$  e  $H_y$ :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega \mu H_y \quad (2.7)$$

Dividendo l'equazione per  $-j\omega \mu$ , possiamo trovare  $H_y$ :

$$H_y = -\frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.8)$$

Ricordando che:

$$E_x(z, t) = C_1 e^{-j\kappa z} + C_2 e^{j\kappa z} \quad (2.9)$$

$H_y$  possiamo scriverla come:

$$H_y = \frac{\kappa}{\omega \mu} [E_o^+ e^{-j\kappa z} - E_o^- e^{j\kappa z}] \quad (2.10)$$

Sviluppando l'equazione, avremo che:

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [E_o^+ e^{-j\kappa z} - E_o^- e^{j\kappa z}] \quad (2.11)$$

In forma instantanea,  $H_y$  la possiamo scrivere come:

$$\begin{aligned} H_y(z, t) &= \Re[H_y(z) e^{j\omega t}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} [E_o^+ \cos(\omega t - \kappa z) - E_o^- \cos(\omega t + \kappa z)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove:

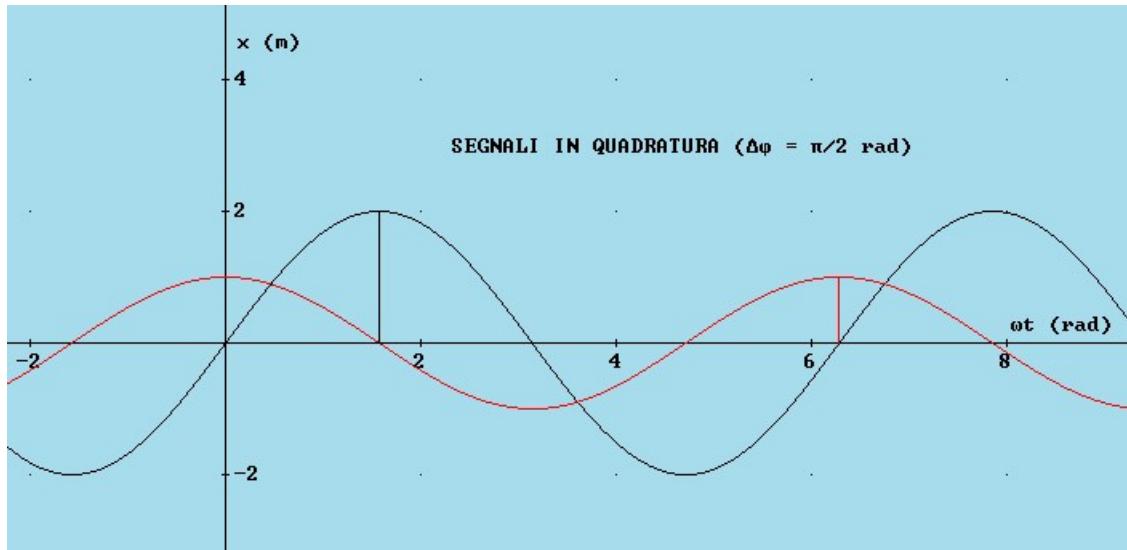
$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (2.13)$$

$\eta$  (si legge eta) prende il nome di impedenza d'onda.

Ritornando all'esempio nel piano in  $z=0$ ,

$$\begin{cases} E_x(z) = -2\eta E_0^+ \sin(\kappa z) \\ H_y(z) = 2\frac{E_0^+}{\eta} \cos(\kappa z) \end{cases} \quad (2.14)$$

Da queste due equazioni finali, notiamo che  $E_x(z)$  e  $H_y(z)$  sono in quadratura di fase, cioè sono sfasati di  $90^\circ$ .



2

Per riassumere, usando le leggi di Maxwell per le onde piane, possiamo scriverle anche come:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = -\kappa^2 \vec{E} \\ \nabla^2 \vec{H} = -\kappa^2 \vec{H} \end{cases} \quad (2.15)$$

dove:

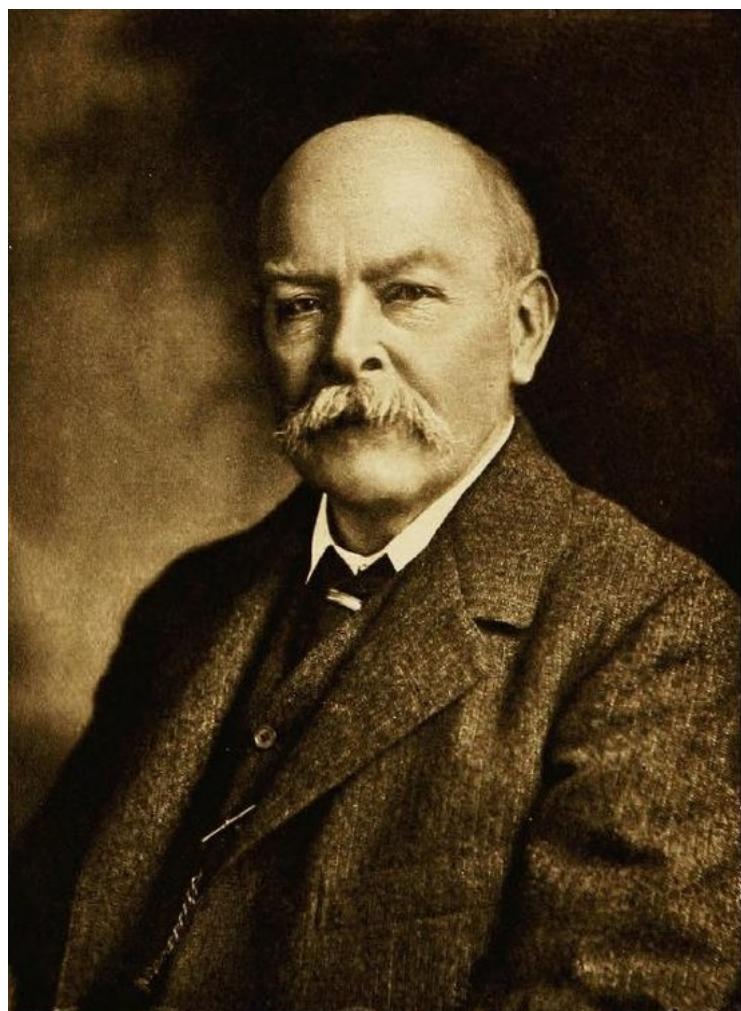
$$\kappa^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (2.16)$$

---

<sup>2</sup>Wikipedia - Fase (Fisica)

## Capitolo 3

# Teorema di Poynting



J.C. Poynting

### 3.1 Teorema di Poynting

1

Le onde elettromagnetiche possono portare energia.

Partendo dalle leggi di Maxwell generali:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.1)$$

Ricordando anche che:

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \quad (3.2)$$

Possiamo scrivere, applicando la proprietà dei vettori:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \quad (3.3)$$

Per approfondire questa proprietà vettoriale, puoi consultare questa pagina sul prodotto misto  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Prodotto\\_misto](https://it.wikipedia.org/wiki/Prodotto_misto)

Sviluppando i prodotti vettoriali, avremo:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (3.4)$$

Da forma vettoriale a forma integrale:

$$-\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV = \int_V (\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}) dV \quad (3.5)$$

$\int_V dV$  si chiama integrale di un volume. È come l'integrale visto in analisi matematica 1 a una dimensione, ma applicato in un volume. È un argomento di analisi matematica 2

Per approfondire questo argomento, consiglio questo video di

Clear Math - Dall'astratto alla Realtà: guida completa sugli Integrali Tripli per Analisi 2  
<https://youtu.be/4pDVpcJmnfY?si=pyKpC62rKZrk-i3L>

Inoltre, se vuoi capire come siamo passati dalla forma vettoriale  $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$  alla forma integrale  $-\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV$ , consiglio di vedere questo video sul Teorema di Stokes:

Clear Math - Devi saper fare questo esercizio sul Teorema di Stokes se vuoi passare Analisi 2  
[https://youtu.be/-r8Er68ZOFk?si=8XxzHIWmG\\_z9H179](https://youtu.be/-r8Er68ZOFk?si=8XxzHIWmG_z9H179)

Dal Teorema della divergenza, sappiamo che, dato un vettore  $\vec{F}$ :

---

<sup>1</sup>FWC - pag 139 — 3.12 Power flow in electromagnetic fields: Poynting's theorem

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (3.6)$$

dove  $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$  è un integrale di linea lungo una superficie chiusa.

Quindi, applicando il Teorema della divergenza, possiamo scrivere la precedente equazione come:

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}) dV \quad (3.7)$$

Quest'ultima equazione è il teorema di Poynting per qualsiasi mezzo.

Per mezzi lineari che non cambiano nel tempo, il teorema di Poynting lo possiamo scrivere in questa forma:

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_V [\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}) + \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2}) + \vec{E} \cdot \vec{J}] dV \quad (3.8)$$

Sostituendo dalla definizione di  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$  per mezzi lineari in assenza di cariche:

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \quad (3.9)$$

L'equazione precedente diventa:

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\int_V \epsilon |E|^2 dV + \int_V \mu |H|^2 dV] \quad (3.10)$$

$|E|$  e  $|H|$  rappresentano il modulo, detta anche lunghezza, rispettivamente, del vettore  $\vec{E}$  e del vettore  $\vec{H}$

Per approfondire <https://www.youmath.it/lezioni/algebra-lineare/matrici-e-vettori/691-vettori-e-versori.html>

Quindi,  $-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$  rappresenta l'energia che entra in un volume per unità di tempo.

In notazione matematica:

$$W = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (3.11)$$

dove:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.12)$$

è chiamato il vettore Poynting.

Dalla definizione di prodotto vettoriale, sappiamo che:

$$\vec{E} \times \vec{H} = |E| |H| \sin(\theta) \quad (3.13)$$

dove  $\theta$  (si legge theta), è l'angolo compreso tra  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$

$|P| = 0$  quando  $|E|$  e/o  $|H| = 0$ , oppure quando  $\vec{E} \parallel \vec{H}$  (si legge vettore E parallelo a vettore H) perché  $\theta = 180^\circ \rightarrow \sin(180^\circ) = 0$  sempre.

Inoltre, in un conduttore perfetto,  $|P| = 0$  sempre, perchè, in un conduttore perfetto, la componente tangenziale di  $\vec{E}$  è uguale a zero.

## 3.2 Perdite Ohmiche

2

Dato un conduttore cilindrico, possiamo avere  $I_z$  come corrente lungo l'asse z.

Se R è la resistenza per dZ, allora, utilizzando la legge di Ohm, avremo che:

$$E_z = I_z R \quad (3.14)$$

H è in una superficie radiale, fuori dal cilindro. Per un raggio r, possiamo esprimere  $H_\phi$  come:

$$H_\phi = \frac{I_z}{2\pi r} \quad (3.15)$$

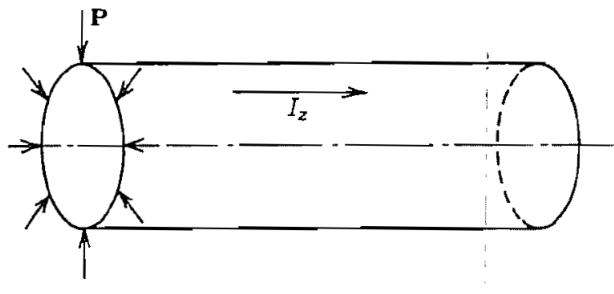
Usando il teorema di Poynting,  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ , quindi:

$$P_r = -E_z H_\phi = -\frac{RI_z^2}{2\pi r} \quad (3.16)$$

Ora possiamo integrare per la superficie chiusa, che in questo caso è un cerchio, in cui l'incognita è il raggio e avremo che:

$$W = 2\pi r (-P_r) = I_z^2 R \quad (3.17)$$

Grazie a questo esempio, possiamo pensare al vettore Poynting come la densità di flusso di potenza in un punto.



**FIG. 3.12** Round wire with Poynting vector directed radially inward to supply power for ohmic losses.

3

---

<sup>2</sup>FWC - pag 141 — Example 3.12a Ohmic loss  
<sup>3</sup>FWC pag 142

### 3.3 Teorema di Poynting per un'onda piana

4

Data un'onda piana sinusoidale che varia in x e y con:

$$\begin{cases} E_x = E_o \cos(\omega t - \kappa z) \\ H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_o \cos(\omega t - \kappa z) \end{cases} \quad (3.18)$$

che si propaga nella direzione z.

Dal teorema di Poynting:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = |E_x| |H_y| \sin(\theta) \quad (3.19)$$

Essendo

$$\theta = 90^\circ \rightarrow \sin(\theta) = 1 \quad (3.20)$$

quindi:

$$\begin{aligned} P_z &= E_x H_y \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_o^2 \cos^2(\omega t - \kappa z) \\ &= \frac{E_o^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \kappa z) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Utilizzando l'identità trigonometrica:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (3.22)$$

$P_z$  sarà:

$$\begin{aligned} P_z &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_o^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t - \kappa z) \right] \\ &= \frac{E_o^2}{\eta} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t - \kappa z) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Negli esercizi di esame, quando viene data la potenza dell'onda, il termine  $\left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t - \kappa z) \right] = 0$ , quindi

$$P_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_o^2 = \frac{E_o^2}{2\eta}$$

---

<sup>4</sup>FWC - pag 143 — Example 3.12c Poynting flow in a plane wave

### 3.4 Teorema di Poynting per i fasori

5

Rispetto all'equazione di Maxwell in forma fasoriale, non possiamo sostituire  $j\omega$  a  $\frac{\partial}{\partial t}$  per il Teorema di Poynting, quindi procediamo per step.

Prendendo le equazioni di Maxwell nella loro forma generale per i fasori:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \end{cases} \quad (3.24)$$

in cui, ricordiamo che:

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \quad (3.25)$$

Consideriamo l'identità vettoriale:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}^*) \quad (3.26)$$

dove l'asterisco denota il vettore complesso coniugato.

Dalla matematica, il vettore complesso coniugato è il vettore che ha lo stesso modulo del vettore originale, ma verso opposto della parte immaginaria.

Se vuoi approfondire:

<https://www.youmath.it/lezioni/analisi-matematica/numeri-complessi/3504-complesso-coniugato.html>

Applicando le equazioni di Maxwell in forma generale per i fasori, avremo che:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^* \cdot (-j\omega \vec{B}) - \vec{E} \cdot (\vec{J}^* - j\omega \vec{D}^*) \quad (3.27)$$

Integrando entrambi i membri per un volume V e applicando il teorema della divergenza a entrambi i membri dell'equazione, avremo che:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) dV &= \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} \\ &= - \int_V [\vec{E} \cdot \vec{J}^* + j\omega (\vec{H}^* \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{D}^*)] dV \end{aligned} \quad (3.28)$$

Questa è l'equazione generale del teorema Poynting in forma fasoriale.

Sapendo che in un mezzo lineare isotropico

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.29)$$

e che  $\sigma$ ,  $\mu$  e  $\epsilon$  sono scalari, possiamo riscrivere il teorema di Poynting in forma fasoriale come:

---

<sup>5</sup>FWC - pag 143 — 3.13 Poynting's theorem for phasors

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = - \int_V \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV - j\omega \int_V [\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^*] dV \quad (3.30)$$

$-\int_v \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV$  rappresenta il doppio della potenza media che si perde in un conduttore di corrente, quindi la potenza media è:

$$P_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (3.31)$$

$P_{av}$  si misura in  $[\frac{W}{m^2}]$   
(si legge Watt per metro quadro)

Per un mezzo lineare isotropico:

$$-j\omega \int_V [\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^*] dV = -j\omega \int_V \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon |E|^2 - \frac{1}{2} \mu |H|^2 \right] dV \quad (3.32)$$

Allora:

$$\operatorname{Im} \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} = 4\omega (U_{Eav} - U_{Hav}) \quad (3.33)$$

dove  $U_{Eav}$  e  $U_{Hav}$  sono rispettivamente l'energia immagazzinata di campo elettrico e di campo magnetico.

Quindi, la parte immaginaria del teorema di Poynting può essere vista come la potenza reattiva, cioè la potenza opposta alla direzione di propagazione dell'onda.

### 3.5 Potenza media in un'onda piana uniforme

6

Considerando le onde piane scritte in forma fasoriale:

$$\begin{cases} E_x = C_1 e^{-j\kappa z} + C_2 e^{j\kappa z} \\ H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [C_1 e^{-j\kappa z} + C_2 e^{j\kappa z}] \end{cases} \quad (3.34)$$

L'onda qui indicato è polarizzata linearmente per  $E_x$ .

La polarizzazione è un argomento che andremo ad affrontare in un capitolo futuro.

Il vettore Poynting in forma complessa è:

$$\vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [C_1 e^{-j\kappa z} + C_2 e^{j\kappa z}] [C_1^* e^{-j\kappa z} + C_2^* e^{j\kappa z}] \hat{z} \quad (3.35)$$

Quindi, la potenza media lungo la direzione z è:

$$P_{av} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [C_1 C_1^* - C_2 C_2^*] \quad (3.36)$$

$P_{av}$  esprime che la potenza media lungo z è uguale alla potenza dell'onda lungo z sottratto alla potenza dell'onda lungo -z.

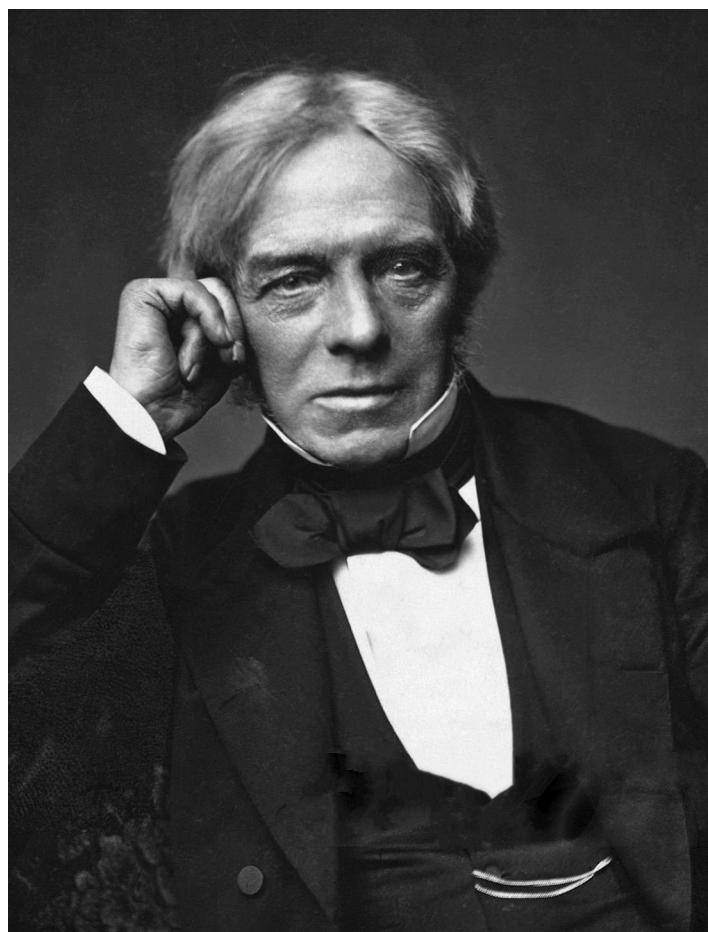
---

<sup>6</sup>FWC - pag 145 — Example 3.13 Average power in uniform plane waves



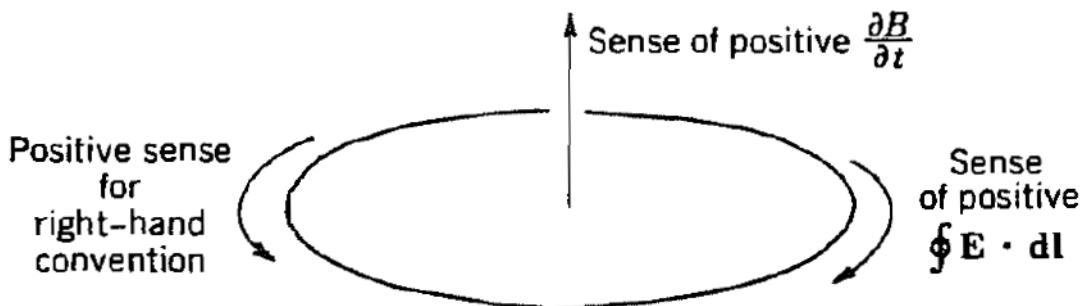
## Capitolo 4

# Continuità dei campi

A cursive signature of the name "Michael Faraday". The signature is fluid and elegant, with the "M" and "F" being particularly prominent. It is written in black ink on a plain white background.

## 4.1 Continuità dei campi in un confine

1

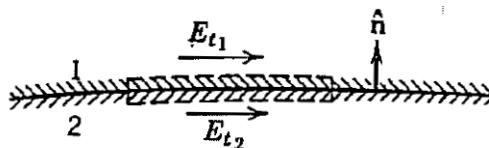


**Fig. 3.2a** Sense relations for Faraday's law.

2

Dalle leggi di Maxwell sappiamo che, la legge di Faraday da forma vettoriale a forma integrale è:

$$\nabla \times \vec{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.1)$$



**Fig. 3.14a** Continuity of tangential electric field components at a dielectric boundary.

3

Il confine divide due regioni di campo (nella figura indicati come 1 e 2).

Essendo  $\vec{E}$  un campo conservativo, possiamo scegliere il percorso chiuso: prenderemo un rettangolo.

Quindi, considerando il senso orario, l'integrale di linea sul percorso chiuso (detto anche circuitazione) scelto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_{T1} - E_{T2})\Delta l \quad (4.2)$$

dove:

$E_{T1}$  è la proiezione di  $\vec{E}$  del campo 1 lungo il confine

$E_{T2}$  è la proiezione di  $\vec{E}$  del campo 2 lungo il confine

$\Delta l$  è la distanza infinitesima (cioè che tende a zero) tra  $E_{T1}$  e  $E_{T2}$

Siccome  $d\vec{l}$  tende a zero:

<sup>1</sup>FWC - pag 145 — 3.14 Continuity conditions for AC fields at a boundary: uniqueness of solutions

<sup>2</sup>FWC - pag 117

<sup>3</sup>FWC - pag 146

$$\begin{cases} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow (E_{T1} - E_{T2})\Delta l = 0 \Rightarrow E_{T1} = E_{T2} \\ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Possiamo considerare lo stesso procedimento, ma per la legge di Ampere per un confine privo di cariche:

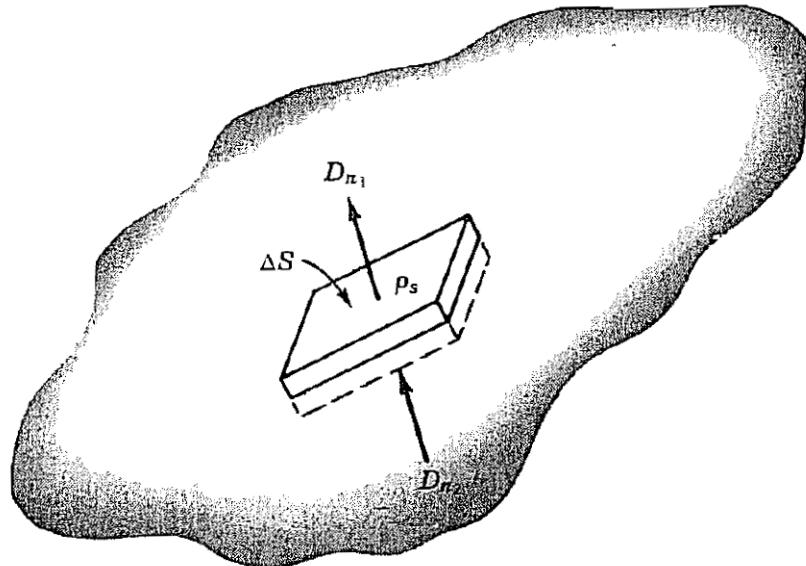
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \Rightarrow (H_{T1} - H_{T2})\Delta l = 0 \Rightarrow H_{T1} = H_{T2} \\ \vec{J} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Considerando il versore  $\hat{n}$  perpendicolare al confine, possiamo scrivere, in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Quindi, per esserci continuità tra due materiali, le componenti tangenziali di  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  nei due materiali devono essere uguali.

I passaggi visti per la legge di Ampere-Maxwell e la legge di Faraday al confine, possono essere applicati anche alle leggi di Gauss elettrica e legge di Gauss magnetica, considerando un'area infinitesima  $\Delta s$ , piuttosto che un  $\Delta l$  e un confine privo di cariche.



**Fig. 3.14b** Diagram showing how discontinuity in normal components of electric flux density at a boundary is related to surface charge density.

4

Considerando la legge di Gauss elettrica:

---

<sup>4</sup>FWC - pag 147

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{D} = \rho &\Rightarrow \Delta S(D_{n1} - D_{n2}) = \rho_s \Delta S \\
&\Rightarrow D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \\
&\Rightarrow D_{n1} - D_{n2} = 0 \\
&\Rightarrow D_{n1} = D_{n2} \\
&\Rightarrow \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Quindi, per un confine senza cariche, i componenti di  $\vec{E}$  perpendicolari alla superficie sono continui, mentre sono discontinui quando in un confine sono presenti delle cariche.

Considerando la legge di Gauss magnetica:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} = 0 &\Rightarrow \Delta S(B_{n1} - B_{n2}) = 0 \\
&\Rightarrow B_{n1} - B_{n2} = 0 \\
&\Rightarrow B_{n1} = B_{n2} \\
&\Rightarrow \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

## 4.2 Continuità dei campi in un confine di un conduttore perfetto

5

In un conduttore perfetto:

$$E_{T2} = 0 \quad (4.8)$$

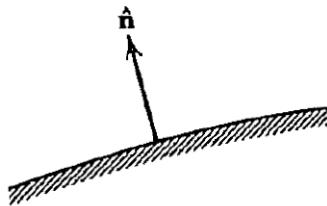
Dal capitolo precedente, sappiamo che:

$$E_{T1} = E_{T2} \Rightarrow E_{T1} = 0 \quad (4.9)$$

quindi anche fuori dal conduttore.

Per lo stesso principio:

$$D_{n2} = 0 \quad (4.10)$$



**FIG. 3.15** Conducting boundary with the normal unit vector.

6

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} = \vec{J} &\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{J} \cdot d\vec{l} \\ &\Rightarrow H_t dl = J_s dl \\ &\Rightarrow H_t = J_s \end{aligned} \quad (4.11)$$

Quindi, in un conduttore perfetto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \times \vec{E} = 0 \\ \hat{n} \cdot \vec{B} = 0 \\ \rho_s = \hat{n} \cdot \vec{D} \\ \vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

---

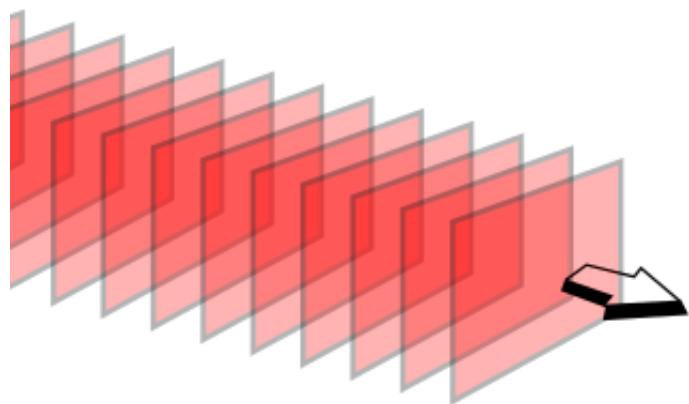
<sup>5</sup>FWC - pag 148 — Bounday conditions at a perfect conductor for AC fields

<sup>6</sup>FWC - pag 149



# Capitolo 5

## Onde piane



## 5.1 Onde piane - Equazioni e coefficienti

<sup>1</sup>

Ricordando le leggi di Maxwell, possiamo applicarle alle onde piane:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (5.1)$$

In fisica matematica, un'onda piana è un'onda a frequenza costante i cui fronti d'onda sono infiniti piani paralleli perpendicolari alla direzione di propagazione, e la cui distanza picco-picco è costante.

L'onda piana rappresenta un'astrazione matematica che non corrisponde ad alcun fenomeno fisico equivalente in senso stretto, poiché a partire da una descrizione analitica esatta si ottiene un'onda che per essere generata necessita di una sorgente di lunghezza infinita.

L'onda piana è tuttavia utilizzata per approssimare il caso in cui la sorgente dell'onda è posta a distanza infinita dal punto di osservazione del fronte d'onda considerato, che viene quindi assunto localmente piano.

Una caratteristica che la differenzia da altri tipi di propagazione ondosa, come l'onda sferica (tridimensionale) o quella circolare (in due dimensioni), è l'assenza di attenuazione isotropica nello spazio, in virtù della direzionalità dell'emissione e della propagazione di energia associata all'onda. L'unica attenuazione che si verifica è dovuta all'eventuale assorbimento da parte del materiale del mezzo di propagazione attraversato.  
<sup>2</sup>

Possiamo scrivere l'onda piana come un'onda che si propaga lungo l'asse z (asse scelto da noi come quello di propagazione, l'onda piana può propagarsi anche negli altri due assi) come:

$$E_x(z, t) = f_1(t - \frac{z}{v}) + f_2(t - \frac{z}{v}) \quad (5.2)$$

dove:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (5.3)$$

v è la velocità della luce nel mezzo.

Possiamo scrivere:

$$E_x^+ = f_1(t - \frac{z}{v}) \quad (5.4)$$

l'onda che si propaga lungo l'asse z.

$$E_x^- = f_2(t + \frac{z}{v}) \quad (5.5)$$

l'onda che si propaga lungo l'asse -z.

Con lo stesso principio, e sempre grazie alle leggi di Maxwell, possiamo scrivere:

---

<sup>1</sup>FWC - pag 275 — 6.2 Uniform plane waves in a perfect dielectric

<sup>2</sup>Wikipedia - Onde piane

$$\begin{aligned} H_y &= H_y^+ H_y^- \\ &= \frac{E_x^+}{\eta} - \frac{E_x^-}{\eta} \end{aligned} \quad (5.6)$$

dove:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (5.7)$$

$\eta$  si può ricavare anche come:

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} \quad (5.8)$$

Grazie a questo rapporto,  $\eta$  prende il nome di Impedenza intrinsica nel mezzo.

Nel vuoto:

$$\eta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 376,73[\Omega] \approx 120\pi[\Omega] \quad (5.9)$$

$\Omega$  (lettera greca Omega, ma in questo caso rappresenta l'unità di misura Ohm) è la stessa unità di misura usata nei circuiti elettronici.

Quello che abbiamo visto con  $E_x$  e  $H_y$ , è possibile anche con  $E_y$  e  $H_x$ .

$$\begin{cases} E_y = f_3(t - \frac{z}{v}) + f_4(t + \frac{z}{v}) = E_y^+ + E_y^- \\ H_x = -\frac{E_y^+}{\eta} + \frac{E_y^-}{\eta} \end{cases} \quad (5.10)$$

Quindi possiamo scrivere:

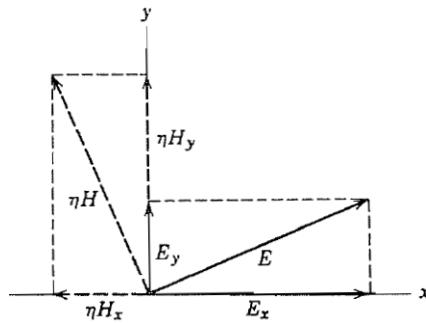
$$\begin{cases} \frac{E_x^+}{H_y^+} = -\frac{E_y^+}{H_x^+} = \eta \\ \frac{E_x^-}{H_y^-} = -\frac{E_y^-}{H_x^-} = -\eta \end{cases} \quad (5.11)$$

Da queste relazioni possiamo scrivere, se  $E$  è perpendicolare a  $H$ :

$$E = \eta H \quad (5.12)$$

Dal Teorema di Poynting, possiamo scrivere la potenza dell'onda lungo l'asse z come:

$$\begin{aligned} P_z^+ &= E_x^+ H_y^+ - E_y^+ H_x^+ \\ &= \frac{1}{\eta} (E_x^{+2} + E_y^{+2}) \end{aligned} \quad (5.13)$$



**Fig. 6.2a** Relations between  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{H}$  for a wave propagating in positive  $z$  direction (out of page).

## 5.2 Onde piane in forma fasoriale

4

Estendendo l'analisi in forma fasoriale:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x(z) = E_1 e^{-j\kappa z} + E_2 e^{j\kappa z} \\ \eta H_y(z) = E_1 e^{-j\kappa z} - E_2 e^{j\kappa z} \\ E_y(z) = E_3 e^{-j\kappa z} + E_4 e^{j\kappa z} \\ \eta H_x(z) = -E_3 e^{-j\kappa z} + E_4 e^{j\kappa z} \end{array} \right. \quad (5.14)$$

dove:

$$\kappa = \frac{\omega}{v} = v \sqrt{\mu \epsilon} \quad (5.15)$$

$\kappa$  è chiamata numero d'onda (in inglese wave number).

$\kappa$  è la fase dell'onda, in cui nelle onde piane è costante.

La lunghezza dell'onda  $\lambda$  (si legge lambda) è il valore di  $z$  in cui la fase cambia di  $2\pi$ .

$$\kappa \lambda = 2\pi \Rightarrow \kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.16)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{v}{f} \quad (5.17)$$

Per calcolare la lunghezza d'onda nel vuoto, possiamo sostituire a  $v$  la velocità della luce, indicata anche come  $c$ .

In ottica, si sceglie di indicare  $\lambda$  come  $n$ , dove  $n$  prende il nome di indice refrattivo (in inglese refractive index).

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_o \epsilon_o}} \quad (5.18)$$

Per molti materiali in ottica, e anche per materiali non magnetici,  $\mu = \mu_o$

---

<sup>4</sup>FWC - pag 275 — 6.2 Uniform plane waves in a perfect dielectric

### 5.3 Polarizzazione delle onde piane

5

Se diverse onde piane hanno la stessa direzione di propagazione, possiamo sovrapporre queste onde per un mezzo lineare.

L'orientazione dei campi vettoriali, sia della singola onda che delle altre, è descritta dalla polarizzazione delle onde (in questo inserto parleremo solo di onde della stessa frequenza).

Prendiamo solo un'onda lungo l'asse z, usando la rappresentazione fasoriale e assumiamo sia x e y componenti del campo elettrico.

L'espressione generale per quest'onda è la seguente:

$$\vec{E} = (\hat{x}E_1 + \hat{y}E_2 e^{j\psi} e^{-jkz}) \quad (5.19)$$

dove  $E_1$  e  $E_2$  sono reali e  $\psi$  (si legge psi) è l'angolo tra le componenti x e y.

Il corrispondente campo magnetico è:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}(-\hat{x}E_2 e^{j\psi} + \hat{y}E_1)e^{-jkz} \quad (5.20)$$

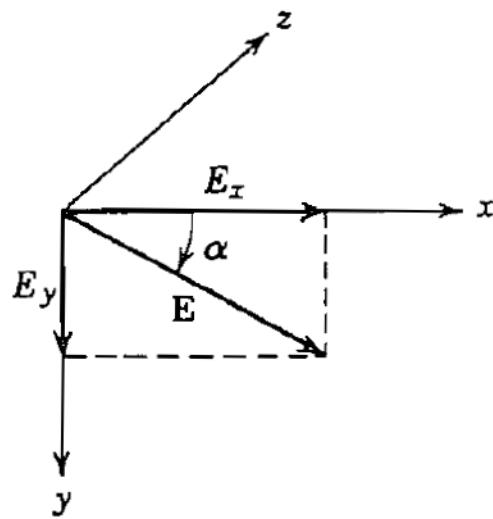
Le onde possono essere anche non polarizzate.

Ci sono diverse classi di polarizzazione che dipendono dalla fase e dalle ampiezze di  $E_1$  e  $E_2$ .

---

<sup>5</sup>FWC - pag 280 — 6.3 Polarization of plane waves

### 5.3.1 Polarizzazione lineare o planare



**FIG. 6.3a Components of a linearly (plane) polarized wave.**

6

Se i due campi sono in fase, cioè  $\psi = 0$ , ogni piano in  $z$  sarà definito da un angolo rispetto all'asse  $x$  chiamato  $\alpha$  (si legge alfa) come:

$$\alpha = \arctan \frac{E_y}{E_x} = \arctan \frac{E_2}{E_1} \quad (5.21)$$

arctan è l'inverso della funzione tangente.  
 $\arctan = \tan^{-1}$

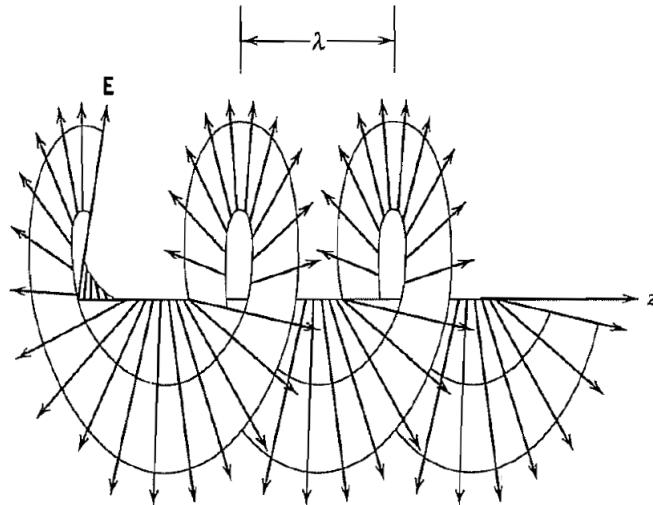
Questo angolo è reale, quindi è lo stesso per tutti i valori di  $z$  e  $t$ .

Siccome  $\vec{E}$  mantiene la sua direzione nello spazio, questa polarizzazione è chiamata lineare, o polarizzazione planare perché il vettore del campo elettrico definisce un piano che si propaga lungo la direzione  $z$ .

---

<sup>6</sup>FWC - pag 280

### 5.3.2 Polarizzazione circolare



**Fig. 6.3b** Circularly polarized wave. Terminus of the electric field vectors forms a spiral period equal to the wavelength at any instant of time. This spiral moves in the  $z$  direction velocity  $v$ , so that the vector in a given  $z$  plane traces out a circle as time progresses.

7

Nella polarizzazione circolare:

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \\ \psi = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5.22)$$

Quindi, con le dovute sostituzioni:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (\hat{x}E_1 + \hat{y}E_2 e^{j\psi} e^{-j\kappa z}) \\ \Rightarrow \vec{E} &= (\hat{x} + \pm j\hat{y})E_1 e^{-j\kappa z} \end{aligned} \quad (5.23)$$

L'ampiezza di  $\vec{E}$  è  $\sqrt{2}E_1$  e il vettore  $\vec{E}$  è un vettore che si muove in modo circolare.

La forma instantanea di un'onda polarizzata circolarmente:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \operatorname{Re}[(\hat{x} + \pm j\hat{y})E_1 e^{-j\kappa z}] \\ &= E_1[\hat{x} \cos(\omega t - \kappa z) \mp \hat{y} \sin(\omega t - \kappa z)] \end{aligned} \quad (5.24)$$

La somma del quadrato delle forme instantanee di  $E_x$  e  $E_y$  da:

$$\begin{aligned} E_x^2(z, t) + E_y^2(z, t) &= E_1^2[\cos^2(\omega t - \kappa z) + \sin^2(\omega t - \kappa z)] \\ &= E_1^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Equazione che definisce un cerchio.

L'angolo instantaneo  $\alpha$  rispetto all'asse x è:

---

<sup>7</sup>FWC - pag 281

$$\begin{aligned}
\alpha &= \arctan \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} \\
&= \arctan \left( \frac{\sin(\omega t - \kappa z)}{\cos(\omega t - \kappa z)} \right) \\
&= \mp(\omega t - \kappa z)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Dato un piano z, il vettore ruota con una velocità costante angolare di  $\alpha = \mp\omega t$ .

La propagazione dell'onda è di tipo epicicloidale (come il movimento di un cavatappi) lungo la direzione z con una velocità v.

Da notare che (per  $z = 0$ )

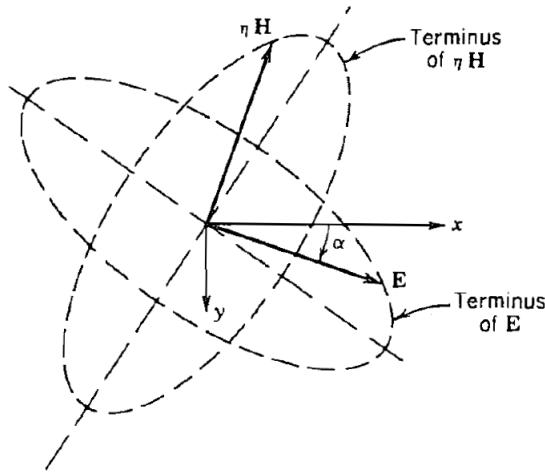
$$\begin{cases} \psi = +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = -\omega t \\ \psi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \omega t \end{cases} \tag{5.27}$$

Nel primo caso, l'onda si muove in senso anti-orario, nel secondo caso in senso orario.

Ricordando che se  $E_1 = E_2$  e  $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ , il relativo campo magnetico di un'onda polarizzata in modo circolare è:

$$\vec{H} = \frac{E_1}{\eta} (\mp j\hat{x} + \hat{y}) e^{-j\kappa z} \tag{5.28}$$

### 5.3.3 Polarizzazione elittica



**FIG. 6.3c** Elliptically polarized wave. The locus of the terminus of electric and magnetic field vectors is in each case an ellipse for a given  $z$  plane as time progresses.

8

Per il caso generale, con  $E_1 \neq E_2$  o  $E_1 = E_2$ , ma  $\psi$  è diverso da 0 o da  $\mp\frac{\pi}{2}$ .

Quindi, per il caso generale, l'onda descrive una traiettoria di un elisse, quindi il nome di questa polarizzazione è detta elittica.

La forma instantanea di questo tipo d'onda è:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \text{Re}[(\hat{x}E_1 + \hat{y}E_2 e^{j\psi})e^{j\omega t}e^{-jkz}] \\ &= \hat{x}E_1 \cos(\omega t - \kappa z) + \hat{y}E_2 \cos(\omega t - \kappa z + \psi)\end{aligned}\quad (5.29)$$

Per un qualsiasi piano, poniamo  $z=0$ ,

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_1 \cos(\omega t) \\ E_y(z, t) = E_2 \cos(\omega t + \psi) \end{cases}\quad (5.30)$$

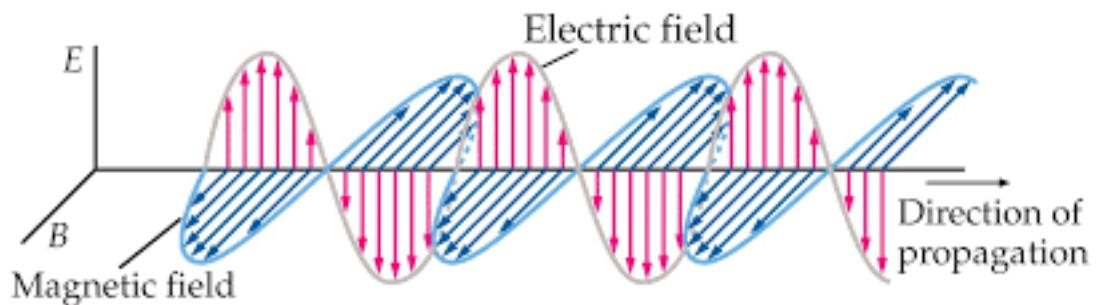
---

<sup>8</sup>FWC - pag 282



## Capitolo 6

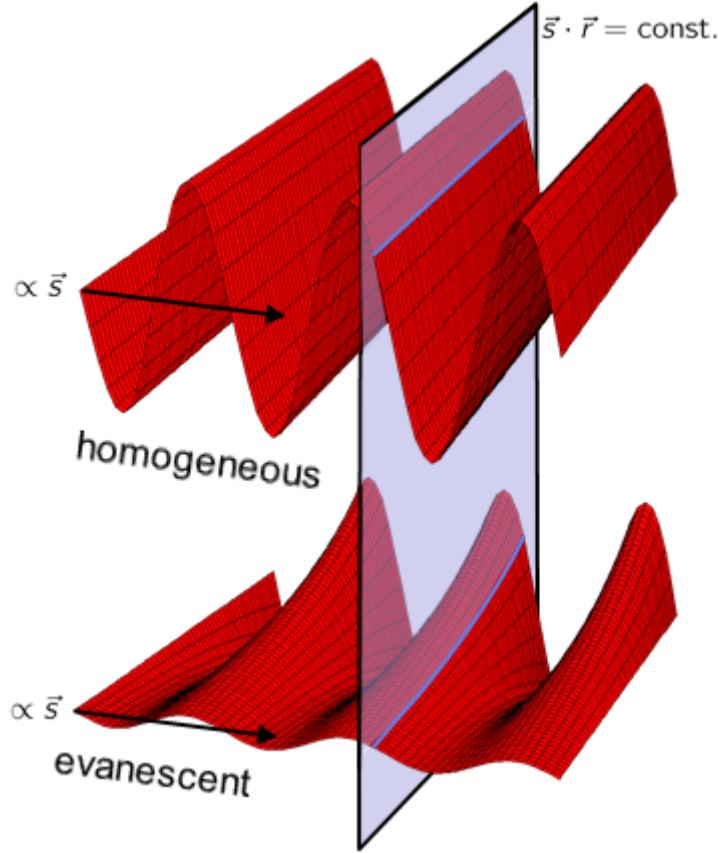
# Onde piane TEM tra due materiali



## 6.1 Riflessione e trasmissione delle onde piane con incidenza normale (TEM)

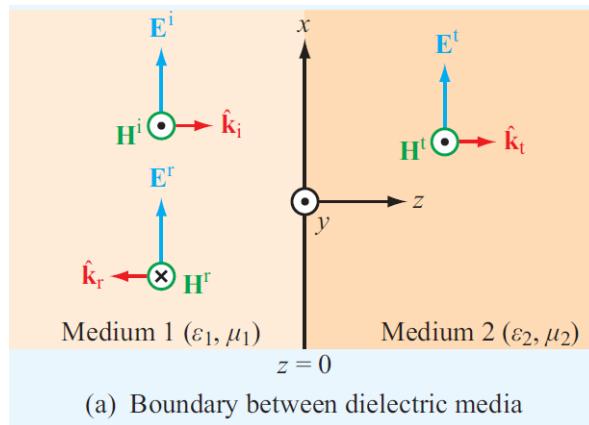
1

Per onde TEM (Transverse Electro-Magnetic Waves) si intendono onde in cui campi elettrico e magnetico hanno direzione ortogonale rispetto a quella del vettore di propagazione.



2

Consideriamo questo piano:



3

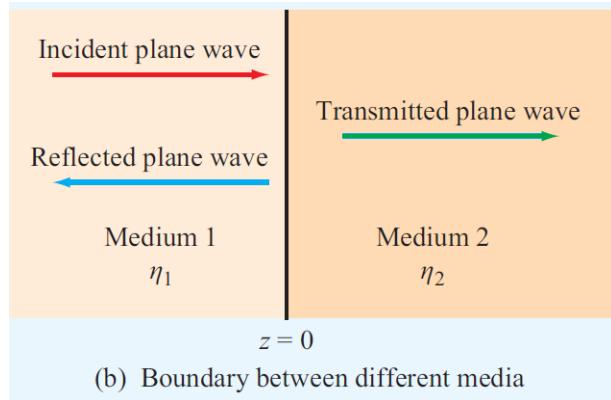
in cui il tondino con il punto indica che l'asse esce dal foglio.

<sup>1</sup>FCE - Pag 311 — 8.1.1 Interfaccia tra mezzi senza perdite  
FAE - Pag 339 — 8.1.1 Boundary between lossless media

<sup>2</sup><https://www.pvlighthouse.com.au/it/cms/lectures/altermatt/optics/planar-transversal-electromagnetic-waves>

<sup>3</sup>FAE - pag 340

Possiamo rappresentare, dal punto di vista grafico, anche in questa maniera:



4

Esplicitiamo le equazioni delle onde piane:

**Onda incidente:**

$$\begin{cases} \vec{E}^i(z) = \hat{x} E_o^i e^{-j\kappa_1 z} \\ \vec{H}^i(z) = \hat{y} \frac{E_o^i}{\eta_1} e^{-j\kappa_1 z} \end{cases} \quad (6.1)$$

**Onda riflessa:**

$$\begin{cases} \vec{E}^r(z) = \hat{x} E_o^r e^{j\kappa_1 z} \\ \vec{H}^r(z) = -\hat{y} \frac{E_o^r}{\eta_1} e^{j\kappa_1 z} \end{cases} \quad (6.2)$$

**Onda trasmessa:**

$$\begin{cases} \vec{E}^t(z) = \hat{x} E_o^t e^{-j\kappa_2 z} \\ \vec{H}^t(z) = \hat{y} \frac{E_o^t}{\eta_2} e^{-j\kappa_2 z} \end{cases} \quad (6.3)$$

dove:

$$\begin{cases} \kappa_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \\ \kappa_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \\ \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \\ \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \end{cases} \quad (6.4)$$

$E_o^i, E_o^r, E_o^t$  sono le ampiezze delle onde, rispettivamente, dell'onda incidente, riflessa e trasmessa.

I numeri dei coefficienti (1 e 2) indicano in quale piano si trovano le onde.

Dal capitolo 4 sulla continuità dei campi, sappiamo che il componente tangente di  $\vec{E}$  è sempre continuo in un'interfaccia tra due mezzi adiacenti.

Inoltre, in assenza di corrente sull'interfaccia, anche il componente tangenziale di  $\vec{H}$  è continuo tra due mezzi adiacenti.

Quindi nel mezzo 1, l'onda sarà:

---

<sup>4</sup>FAE - pag 339

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z) = \vec{E}^i(z) + \vec{E}^r(z) = \hat{x}(E_o^i e^{-j\kappa_1 z} + E_o^r e^{j\kappa_1 z}) \\ \vec{H}_1(z) = \vec{H}^i(z) + \vec{H}^r(z) = \hat{y} \frac{1}{\eta_1} (E_o^i e^{-j\kappa_1 z} + E_o^r e^{j\kappa_1 z}) \end{cases} \quad (6.5)$$

Per adesso, nel mezzo 2 è solo presente l'onda trasmessa, quindi:

$$\begin{cases} \vec{E}_2(z) = \vec{E}^t(z) = \hat{x} E_o^t e^{-j\kappa_2 z} \\ \vec{H}_2(z) = \vec{H}^t(z) = \hat{y} \frac{E_o^t}{\eta_2} e^{-j\kappa_2 z} \end{cases} \quad (6.6)$$

Ponendoci all'interfaccia  $z = 0$ , i componenti tangenziali dei campi elettrico e magnetico sono continui.

In formule:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z = 0) = \vec{E}_2(z = 0) \Rightarrow E_o^i + E_o^r = E_o^t \\ \vec{H}_1(z = 0) = \vec{H}_2(z = 0) \Rightarrow \frac{E_o^i}{\eta_1} - \frac{E_o^r}{\eta_1} = \frac{E_o^t}{\eta_2} \end{cases} \quad (6.7)$$

Risolvendo il sistema per ricavare  $E_o^r$  in funzione di  $E_o^i$  (quindi poniamo  $E_o^i$  come variabile indipendente), avremo che:

$$\begin{aligned} E_o^r &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_o^i \\ &= \Gamma E_o^i \end{aligned} \quad (6.8)$$

$\Gamma$  si legge gamma

Risolvendo il sistema per ricavare  $E_o^t$  in funzione di  $E_o^i$ , avremo che:

$$\begin{aligned} E_o^t &= \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_o^i \\ &= \tau E_o^i \end{aligned} \quad (6.9)$$

dove:

$$\Gamma = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (6.10)$$

$\Gamma$  prende il nome di coefficiente di riflessione.

$$\tau = \frac{E_o^t}{E_o^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (6.11)$$

$\tau$  prende il nome di coefficiente di trasmissione.

Se  $\eta_1$  e  $\eta_2$  sono reali, anche  $\Gamma$  e  $\tau$  lo sono.

$\tau$  si può esprimere come:

$$\tau = 1 + \Gamma \quad (6.12)$$

Si può esprimere  $\eta_1$  e  $\eta_2$  come:

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{\eta_o}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \\ \eta_2 = \frac{\eta_o}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} \end{cases} \quad (6.13)$$

dove:

$$\eta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} \approx 377[\Omega] \quad (6.14)$$

$\eta_o$  prende il nome di impedenza intrinsica nello spazio libero.

$\Gamma$  si può scrivere nei materiali non magnetici anche come:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \quad (6.15)$$

## 6.2 Flusso di potenza nei mezzi senza perdite

5

Utilizzando il teorema di Poynting, la densità media netta che fluisce nel mezzo 1 è:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{av_1} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}_1(z) \times \vec{H}_1^*(z)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{x} E_o^i (e^{-j\kappa_1 z} + \Gamma e^{j\kappa_1 z}) \times \hat{y} \frac{E_o^{i*}}{\eta_1} (e^{j\kappa_1 z} - \Gamma e^{-j\kappa_1 z})] \\ &= \hat{z} \frac{|E_o^i|^2}{2\eta_1} (1 - |\Gamma|^2) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$\vec{S}_{av_1}$  lo si può esprimere anche come:

$$\vec{S}_{av_1} = \vec{S}_{av}^i + \vec{S}_{av}^r \quad (6.17)$$

dove:

$$\begin{cases} \vec{S}_{av}^i = \hat{z} \frac{|E_o^i|}{2\eta_1} \\ \vec{S}_{av}^r = -\hat{z} |\Gamma|^2 \frac{|E_o^i|}{2\eta_1} = -|\Gamma|^2 \vec{S}_{av}^i \end{cases} \quad (6.18)$$

$\vec{S}_{av}^i$  è la densità di energia media dell'onda incidente nel mezzo 1, mentre  $\vec{S}_{av}^r$  è la densità di energia media dell'onda riflessa nel mezzo 1.

La densità di potenza media nel mezzo 2 è:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{av_2} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}_2(z) \times \vec{H}_2^*(z)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{x} \tau E_o^i e^{-j\kappa_2 z} \times \hat{y} \tau^* \frac{E_o^{i*}}{\eta_2} e^{j\kappa_2 z}] \\ &= \hat{z} |\tau|^2 \frac{|E_o^i|^2}{2\eta_2} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Nei mezzi senza perdite:

$$\frac{\tau^2}{\eta_2} = \frac{1 - \Gamma^2}{\eta_1} \quad (6.20)$$

da cui:

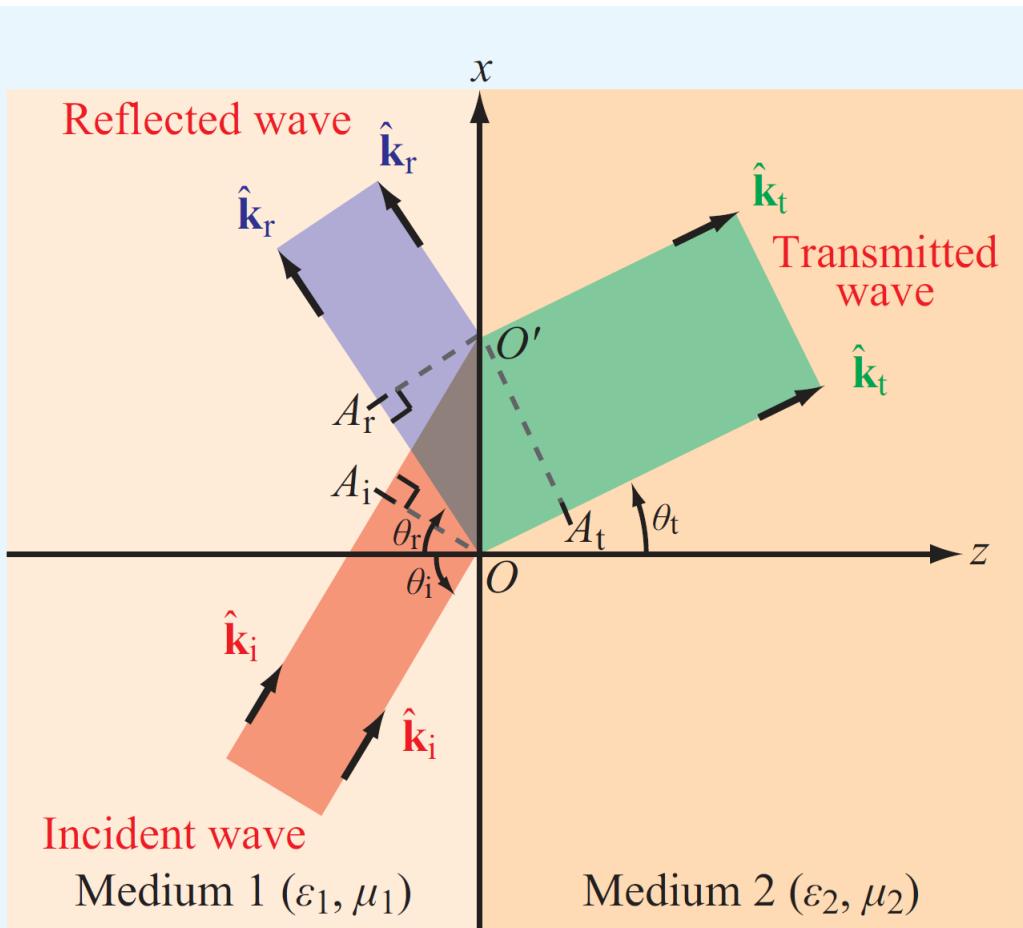
$$\vec{S}_{av_1} = \vec{S}_{av_2} \quad (6.21)$$

---

<sup>5</sup>FCE - pag 315 — 8.1.3 Flusso di potenza nei mezzi senza perdite  
FAE - pag 341 — 8.1.1 Power Flow in Lossless media

### 6.3 Leggi di Snell

6



**Figure 8-9** Wave reflection and refraction at a planar boundary between different media.

Considerando un'interfaccia a  $z = 0$  per due mezzi diversi, mezzo 1 con  $\varepsilon_1, \mu_1$  e mezzo 2 con  $\varepsilon_2, \mu_2$  e:

- $\theta_i$  angolo di incidenza
- $\theta_r$  angolo di riflessione
- $\theta_t$  angolo di trasmissione (o rifrazione)

Indicando con  $u_{p_1}$  e  $u_{p_2}$  le velocità dell'onda nei mezzi 1 e 2:

$$\begin{cases} u_{p_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} \\ u_{p_2} = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} \end{cases} \quad (6.22)$$

Possiamo esprimere le leggi di Snell:

---

<sup>6</sup>FCE - pag 322 — 8.2 Legge di Snell  
FAE - pag 349 — 8.2 Snell's Laws

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ \frac{\sin(\theta_t)}{\sin(\theta_i)} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} \end{cases} \quad (6.23)$$

La prima equazione prende il nome di Legge di Snell della riflessione, la seconda equazione prende il nome di Legge di Snell della rifrazione.

Per materiali non magnetici, dove  $\mu_1 = \mu_2$ , la legge di Snell della rifrazione diventa:

$$\frac{\sin(\theta_t)}{\sin(\theta_i)} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (6.24)$$

dove:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (6.25)$$

Ricordando che l'indice di rifrazione come:

$$n = \frac{c}{u_p} = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{\mu_o \varepsilon_o}} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \quad (6.26)$$

Si dice che un materiale è più denso se  $n_1 > n_2$ .

Utilizzando le leggi di Snell possiamo dire che se:

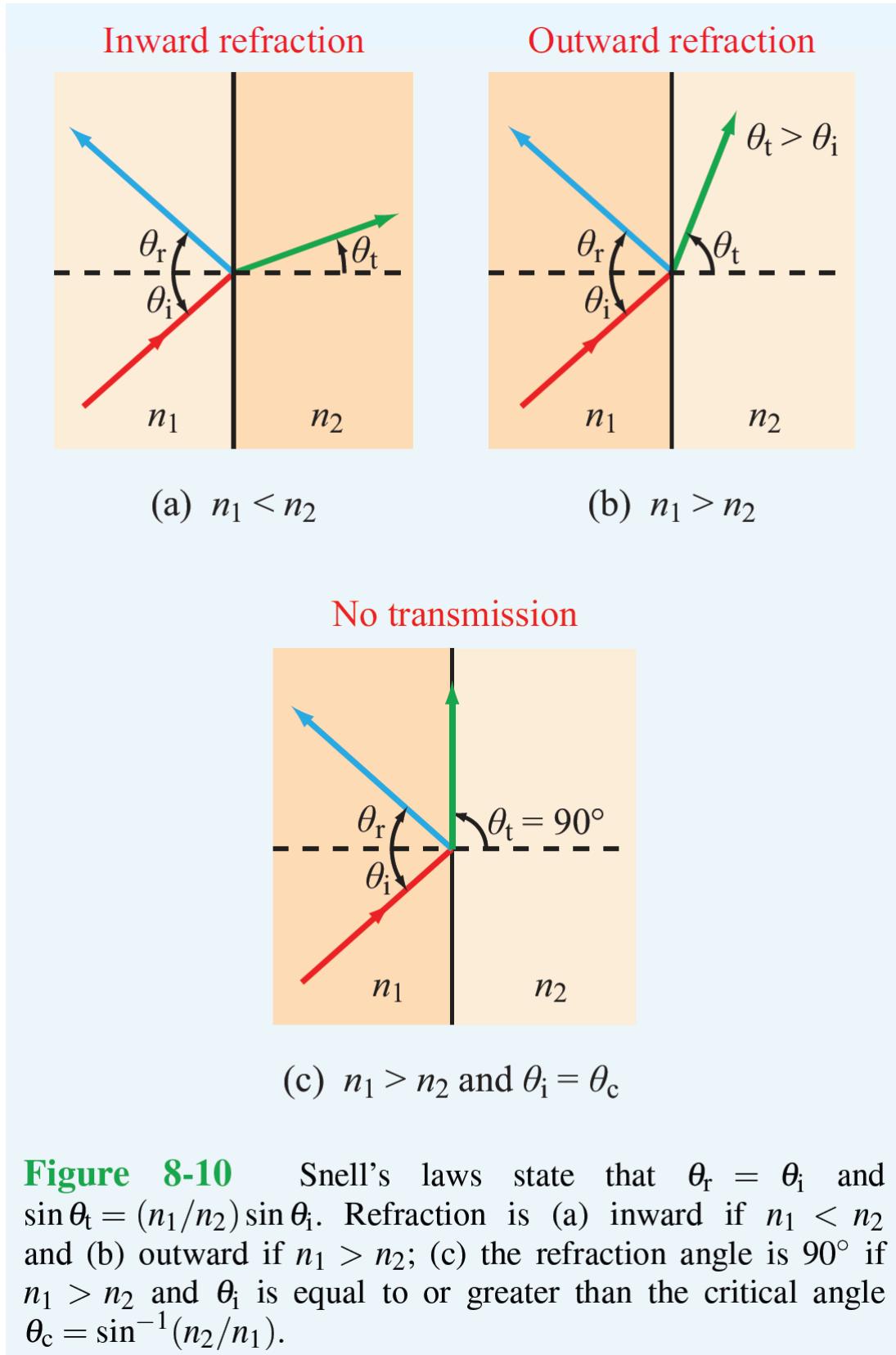
$$\begin{cases} \theta_i = 0 \Rightarrow \theta_t = 0 \\ \theta_t < \theta_i \Rightarrow n_2 > n_1 \\ \theta_t > \theta_i \Rightarrow n_2 < n_1 \\ \theta_t = \frac{\pi}{2} = E_o^t = 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Nell'ultimo caso  $\theta_t$  viene chiamato  $\theta_c$  (angolo critico) perchè è quell'angolo per cui l'onda non viene trasmessa nell'altro mezzo e viene completamente riflessa.

Per le onde TEM:

$$\sin(\theta_c) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} \quad (6.28)$$

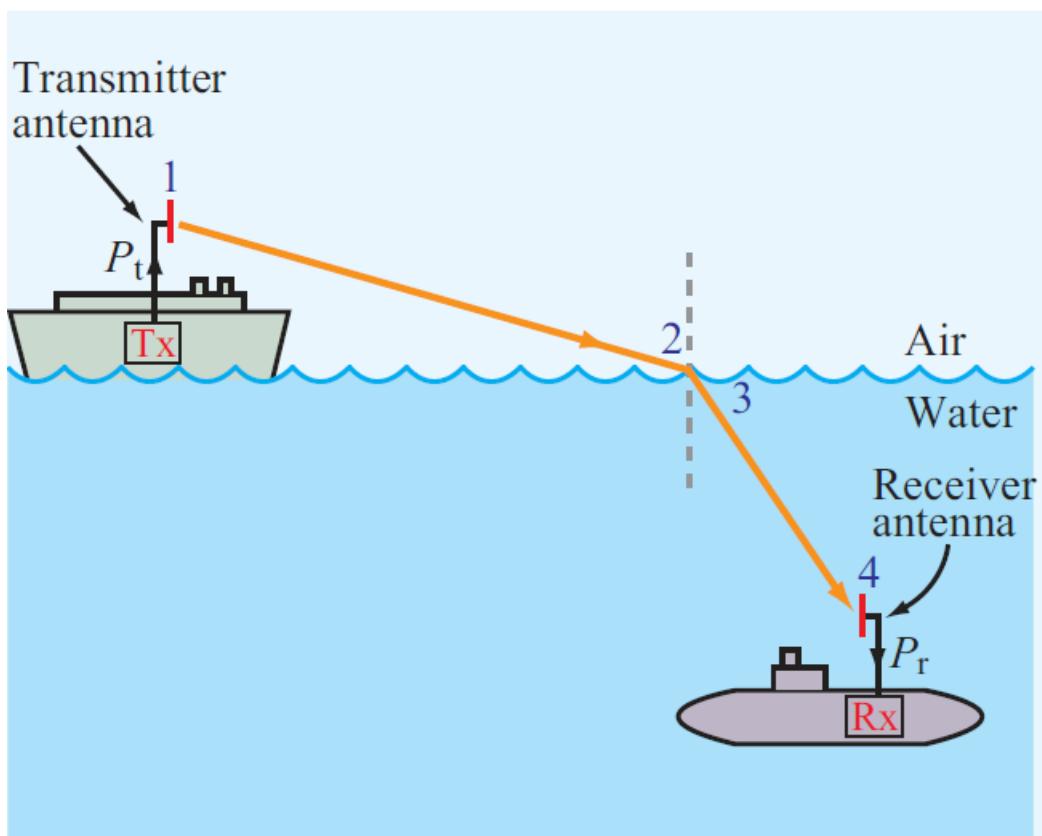
Se  $\theta_i > \theta_c$  allora l'onda viene completamente riflessa.





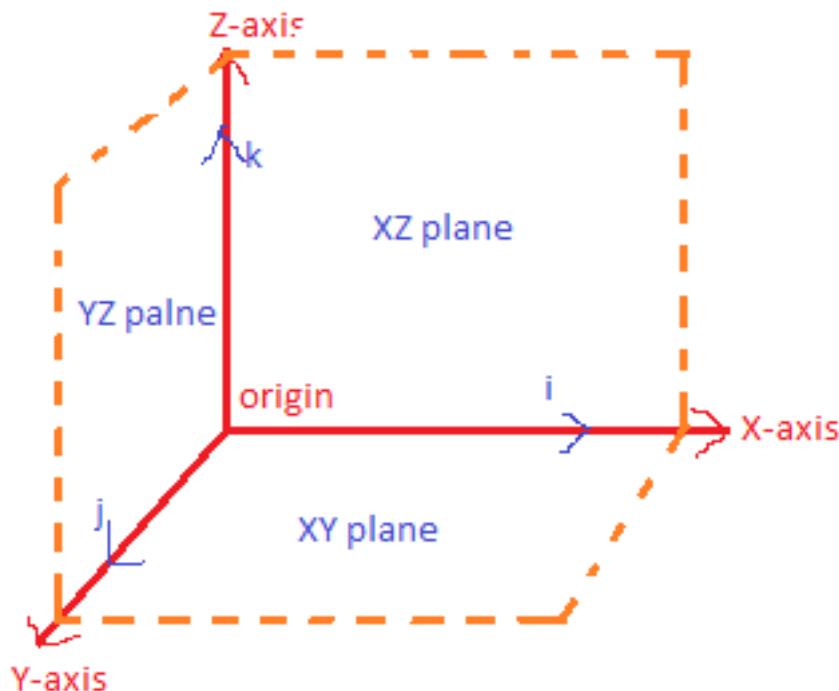
## Capitolo 7

# Onde piane TE e TM tra due materiali



## 7.1 Riflessione e trasmissione delle onde con incidenza obliqua

1



2

Definiamo il piano (x-z); possiamo definire due tipi di polarizzazione:

- quando  $\vec{E}$  è perpendicolare al piano (x-z), si definisce polarizzazione transversa elettrica (oppure polarizzazione TE)
- quando  $\vec{H}$  è perpendicolare al piano (x-z), quindi  $\vec{E}$  è parallelo al piano (x-z), viene definita come polarizzazione transversa magnetica (oppure polarizzazione TM)

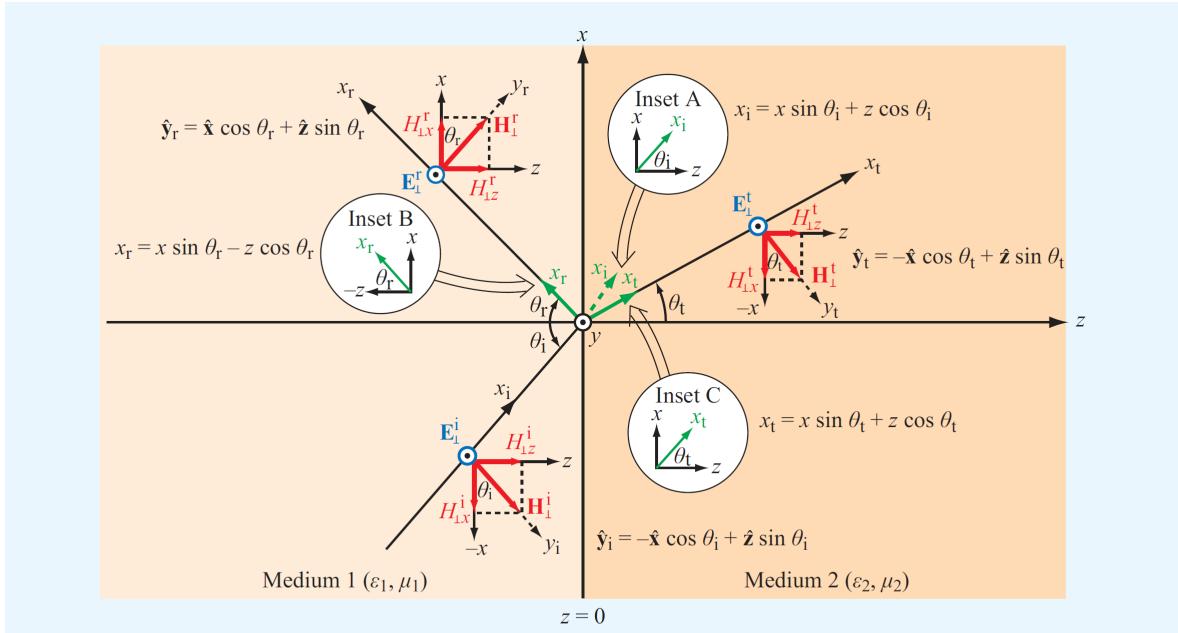
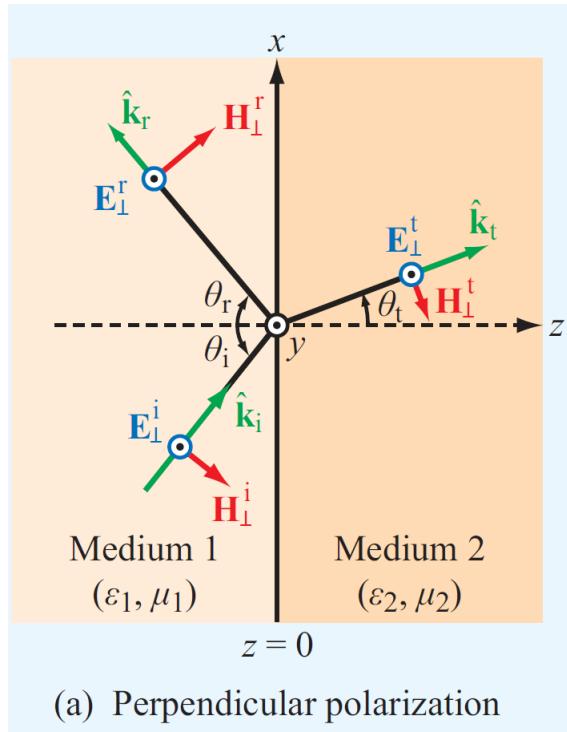
Sia nel caso TE e TM, ricordiamo che, dato un piano di incidenza, le componenti tangenziali di  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  nei due piani devono essere continue.

<sup>1</sup>FCE - pag 327 — 8.4 Riflessione e trasmissione delle onde con incidenza obliqua  
FAE - pag 353 — 8.4 Wave reflectaion and trasmission at oblique incidence

<sup>2</sup><https://www.vedantu.com/question-sets/0b332bea-6a22-4a13-971c-42e7b75218da6540201208005621542.png>

## 7.2 Onda piana TE

3



**Figure 8-15** Perpendicularly polarized plane wave incident at an angle  $\theta_i$  upon a planar boundary.

4

Nel mezzo 1 avremo:

- $\vec{E}_\perp^i$  punta in direzione  $y$
- $\vec{H}_\perp^i$  punta in direzione  $y_i$

<sup>3</sup>FCE - pag 328 — 8.4.1 Polarizzazione perpendicolare  
FAE - pag 354 — 8.4.1 Perpendicular Polarization

<sup>4</sup>FAE - pag 355

Un'onda di questo tipo è descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \vec{E}_\perp^1 = \hat{y} E_{\perp o}^1 e^{-j\kappa_1 x_i} \\ \vec{H}_\perp^1 = \hat{y}_i \frac{E_{\perp o}^1}{\eta_1} e^{-j\kappa_1 x_i} \end{cases} \quad (7.1)$$

dove:

$$\begin{cases} x_i = x \sin(\theta_i) + z \cos(\theta_i) \\ \hat{y}_i = -\hat{x} \cos(\theta_i) + \hat{z} \sin(\theta_i) \end{cases} \quad (7.2)$$

Scomponendo  $\vec{E}_\perp^1$  in onda incidente e onda riflessa, avremo che:

$$\vec{E}_\perp^1 = \vec{E}_\perp^i + \vec{E}_\perp^r \quad (7.3)$$

**Onda incidente:**

$$\begin{cases} \vec{E}_\perp^i = \hat{y} E_{\perp o}^i e^{-j\kappa_1 x_i} \\ \vec{H}_\perp^i = \hat{y}_i \frac{E_{\perp o}^i}{\eta_1} e^{-j\kappa_1 x_i} \end{cases} \quad (7.4)$$

**Onda riflessa:**

$$\begin{cases} \vec{E}_\perp^r = \hat{y} E_{\perp o}^r e^{-j\kappa_1 x_r} \\ \vec{H}_\perp^r = \hat{y}_r \frac{E_{\perp o}^r}{\eta_1} e^{-j\kappa_1 x_r} \end{cases} \quad (7.5)$$

dove:

$$\begin{cases} x_r = x \sin(\theta_r) - z \cos(\theta_r) \\ \hat{y}_r = \hat{x} \cos(\theta_r) + \hat{z} \sin(\theta_r) \end{cases} \quad (7.6)$$

Nel mezzo 2 avremo solo l'onda trasmessa.

**Onda trasmessa:**

$$\begin{cases} \vec{E}_\perp^t = \hat{y} E_{\perp o}^t e^{-j\kappa_2 x_t} \\ \vec{H}_\perp^t = \hat{y}_t \frac{E_{\perp o}^t}{\eta_2} e^{-j\kappa_2 x_t} \end{cases} \quad (7.7)$$

dove:

$$\begin{cases} x_t = x \sin(\theta_t) + z \cos(\theta_t) \\ \hat{y}_t = -\hat{x} \cos(\theta_t) + \hat{z} \sin(\theta_t) \end{cases} \quad (7.8)$$

Dal momento che i campi elettrici nel mezzo 1 e nel mezzo 2 presentano solo componenti lungo  $\hat{y}$ , la condizione al contorno di  $\vec{E}$  è:

$$(\vec{E}_{\perp y}^i + \vec{E}_{\perp y}^r)|_{z=0} = \vec{E}_{\perp y}^t|_{z=0} \quad (7.9)$$

Il simbolo matematico  $|$  indica che l'equazione e/o la formula a sinistra del segno viene calcolata, o propriamente si dice valutata, nel punto indicato in basso a destra del segno.

Per esempio:

$$E_{\perp_y}^t |_{z=0}$$

si legge:

la componente y del vettore del campo elettrico con polarizzazione TE trasmessa nella regione 2 viene valutata nel punto  $z = 0$

Svolgendo diversi passaggi algebrici, avremo che:

$$E_{\perp_o}^i e^{-j\kappa_1 x \sin(\theta_i)} + E_{\perp_o}^r e^{-j\kappa_1 x \sin(\theta_r)} = E_{\perp_o}^t e^{-j\kappa_2 \sin(\theta_t)} \quad (7.10)$$

La condizione al contorno del campo elettrico (cioè il campo lungo x) è:

$$(H_{\perp_x}^i + H_{\perp_x}^r) |_{z=0} = H_{\perp_x}^t |_{z=0} \quad (7.11)$$

In formule:

$$-\frac{E_{\perp_o}^i}{\eta_1} \cos(\theta_i) e^{-j\kappa_1 \sin(\theta_i)} + \frac{E_{\perp_o}^r}{\eta_1} \cos(\theta_r) e^{-j\kappa_1 \sin(\theta_r)} = -\frac{E_{\perp_o}^t}{\eta_2} \cos(\theta_t) e^{-j\kappa_2 \sin(\theta_t)} \quad (7.12)$$

Per soddisfare le due condizioni al contorno per ogni valore di x, tutti gli argomenti degli esponenziali devono essere uguali, quindi:

$$\kappa_1 \sin(\theta_i) = \kappa_1 \sin(\theta_r) = \kappa_2 \sin(\theta_t) \quad (7.13)$$

Questa triplice uguaglianza è detta condizione di phase-matching.

Sapendo che  $\theta_i = \theta_r$  e applicando il phase-matching, avremo che:

$$E_{\perp_o}^i + E_{\perp_o}^r = E_{\perp_o}^t \quad (7.14)$$

Cioè:

$$\frac{\cos(\theta_i)}{\eta_1} (-E_{\perp_o}^i + E_{\perp_o}^r) = -\frac{\cos(\theta_t)}{\eta_2} E_{\perp_o}^t \quad (7.15)$$

Da queste due equazioni, è possibile ricavare, come il caso TEM, il coefficiente di riflessione e di trasmissione.

$$\Gamma_{TE} = \frac{E_{\perp_o}^r}{E_{\perp_o}^i} = \frac{\eta_2 \cos(\theta_i) - \eta_1 \cos(\theta_t)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_t)} \quad (7.16)$$

Nel caso TEM:

$$\Gamma_{TEM} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$\tau_{TE} = \frac{E_{\perp_o}^t}{E_{\perp_o}^i} = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_t)} \quad (7.17)$$

Nel caso TEM:

$$\tau_{TEM} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

I due coefficienti sono legati da:

$$\tau_{TE} = 1 + \Gamma_{TE} \quad (7.18)$$

Utilizzando i coefficienti, possiamo scrivere la continuità in  $z = 0$  sapendo il valore di  $E_{\perp o}^i = E_1$  come:

$$E_1 \cos(1 + \Gamma_{TE}) = \tau_{TE} E_1 \cos(\theta_2) \quad (7.19)$$

Diventa:

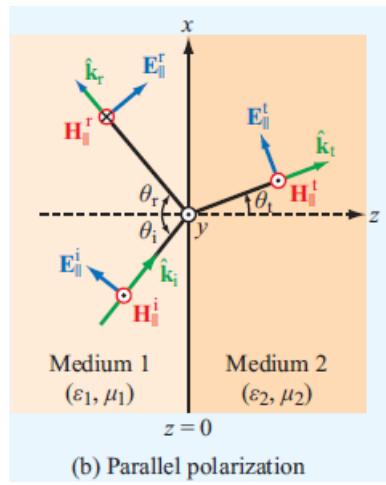
$$\frac{E_1}{\eta_1} (1 + \Gamma_{TE}) = \tau_{TE} \frac{E_2}{\eta_2} \quad (7.20)$$

Se il mezzo 2 è un perfetto conduttore ( $\eta_2 = 0$ ), allora  $\Gamma_{TE} = -1$  e  $\tau_{TE} = 0$ .

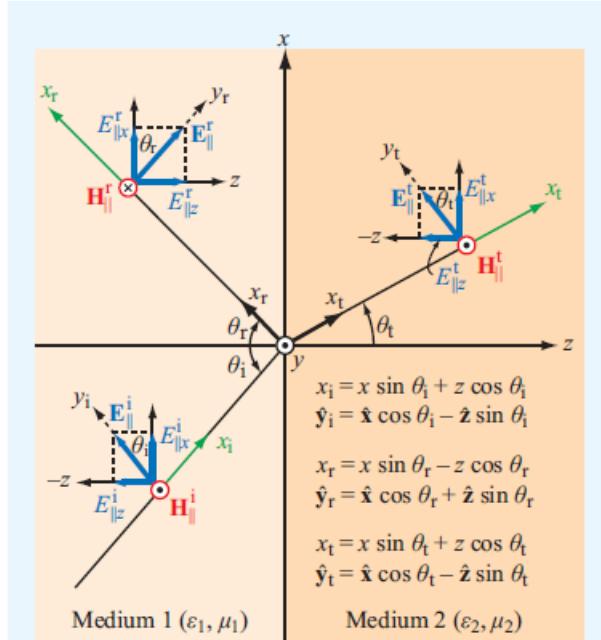
Ricordiamo che per materiali non magnetici,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$ , quindi si può esprimere  $\Gamma_{TE}$  grazie a queste sostituzioni.

### 7.3 Onda piana TM

5



6



**Figure 8-16** Parallel-polarized plane wave incident at an angle  $\theta_i$  upon a planar boundary.

Stesso principio della polarizzazione perpendicolare TE, quindi:

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel}^1 = \vec{E}_{\parallel}^i + \vec{E}_{\parallel}^r \\ \vec{H}_{\parallel}^1 = \vec{H}_{\parallel}^i + \vec{H}_{\parallel}^r \end{cases} \quad (7.21)$$

Onda incidente:

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel}^i = \hat{y}_i E_{\parallel o}^i e^{-j\kappa_1 x_i} \\ \vec{H}_{\parallel}^i = \hat{y} \frac{E_{\parallel o}^i}{\eta_1} e^{-j\kappa_1 x_i} \end{cases} \quad (7.22)$$

<sup>5</sup>FCE - pag 333 — Polarizzazione parallela  
FAE - pag 359 — 8.4.2 Parallel Polarization

<sup>6</sup>FAE - pag 354

dove:

$$\begin{cases} x_i = x \sin(\theta_i) + z \cos(\theta_i) \\ \hat{y}_i = \hat{x} \cos(\theta_i) - \hat{z} \sin(\theta_i) \end{cases} \quad (7.23)$$

**Onda riflessa:**

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel}^r = \hat{y}_r E_{\parallel o}^r e^{-j\kappa_1 x_r} \\ \vec{H}_{\parallel}^r = -\hat{y} \frac{E_{\parallel o}^r}{\eta_1} e^{-j\kappa_1 x_r} \end{cases} \quad (7.24)$$

dove:

$$\begin{cases} x_r = x \sin(\theta_r) - z \cos(\theta_r) \\ \hat{y}_r = \hat{x} \cos(\theta_r) + \hat{z} \sin(\theta_r) \end{cases} \quad (7.25)$$

**Onda trasmessa:**

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel}^t = \hat{y}_t E_{\parallel o}^t e^{-j\kappa_2 x_t} \\ \vec{H}_{\parallel}^t = \hat{y} \frac{E_{\parallel o}^t}{\eta_2} e^{-j\kappa_2 x_t} \end{cases} \quad (7.26)$$

dove:

$$\begin{cases} x_t = x \sin(\theta_t) + z \cos(\theta_t) \\ \hat{y}_t = \hat{x} \cos(\theta_t) - \hat{z} \sin(\theta_t) \end{cases} \quad (7.27)$$

Facendo la stessa cosa che abbiamo fatto con la polarizzazione TE per la continuità dei componenti trasversali di  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  in  $z = 0$ , possiamo ricavarci i coefficienti di Fresnel per la polarizzazione parallela.

$$\Gamma_{TM} = \frac{E_{\parallel o}^r}{E_{\parallel o}^i} = \frac{\eta_2 \cos(\theta_t) - \eta_1 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_t) + \eta_1 \cos(\theta_i)} \quad (7.28)$$

$$\tau_{TM} = \frac{E_{\parallel o}^t}{E_{\parallel o}^i} = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_t) + \eta_1 \cos(\theta_i)} \quad (7.29)$$

Si può dimostrare che:

$$\tau_{TM} = (1 + \Gamma_{TM}) \frac{\cos(\theta_i)}{\cos(\theta_t)} \quad (7.30)$$

Come il caso TE, se il mezzo 2 è un perfetto conduttore ( $\eta_2 = 0$ ), allora  $\Gamma_{TM} = -1$  e  $\tau_{TM} = 0$ .

Ricordiamo che per materiali non magnetici,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$ , quindi si può esprimere  $\Gamma_{TM}$  grazie a queste sostituzioni.

## 7.4 Angolo di Brewster

7

L'angolo di Brewster  $\theta_B$  è definito come l'angolo di incidenza  $\theta_i$  per il quale  $\Gamma = 0$ .

Dalla definizione di  $\Gamma_{TE}$ :

$$\Gamma_{TE} = \frac{E_{\perp o}^r}{E_{\perp o}^i} = \frac{\eta_2 \cos(\theta_i) - \eta_1 \cos(\theta_t)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_t)} \quad (7.31)$$

$$\Gamma_{TE} = 0 \iff \eta_2 \cos(\theta_i) - \eta_1 \cos(\theta_t) = 0 \iff \eta_2 \cos(\theta_i) = \eta_1 \cos(\theta_t) \quad (7.32)$$

$\iff$  è il simbolo matematico per dire "se e solo se"

Facendo le dovute sostituzioni (omesse per semplicità) a  $\Gamma_{TE}$  avremo che:

$$\sin(\theta_{B_{TE}}) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1}}{1 - (\frac{\mu_1}{\mu_2})^2}} \quad (7.33)$$

Per materiali non magnetici,  $\mu_1 = \mu_2$  quindi il denominatore della divisione è = 0, quindi  $\theta_{B_{TE}}$  non esiste.

Per le onde TM, si fa lo stesso procedimento e avremo che:

$$\sin(\theta_{B_{TM}}) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}}{1 - (\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})^2}} \quad (7.34)$$

Per materiali non magnetici,  $\mu_1 = \mu_2$  quindi:

$$\begin{aligned} \theta_{B_{TM}} &= \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}\right) \\ &= \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) \end{aligned} \quad (7.35)$$

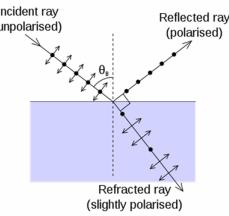
$\arcsin = \sin^{-1}$  cioè l'inverso della funzione sin

8

L'angolo di Brewster viene definito anche come angolo polizzatore perché se un'onda non polarizzata (quindi contiene sia un'onda TE che TM) è incidente a  $\theta_{B_{TM}}$ , allora la componente TM passa nel mezzo 2, mentre la componente TE viene riflessa e polarizzata.

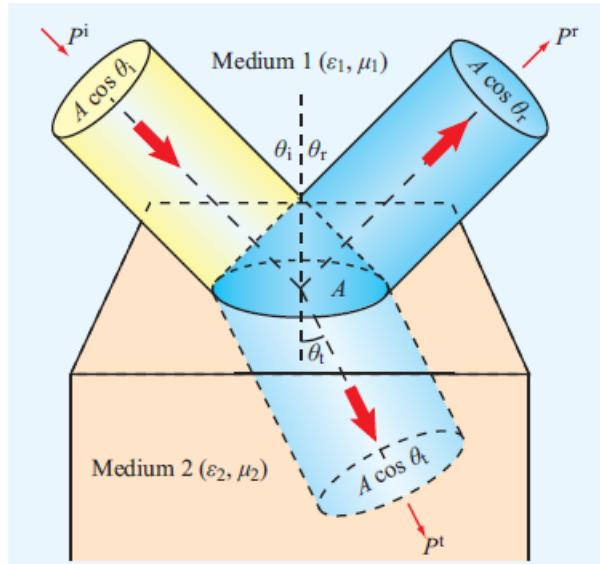
<sup>7</sup>FCE - pag 335 — 8.4.3 Angolo di Brewster  
FAE - pag 360 — 8.4.3 Brewster angle

<sup>8</sup>Slide prof — Incidenza obliqua su un piano di massa — Pag 20



## 7.5 Vettore di Poynting per onde TE e TM

9



**Figure 8-18** Reflection and transmission of an incident circular beam illuminating a spot of size  $A$  on the interface.

Consideriamo le onde con polarizzazione TE.

La densità di potenza dei fasci incidente, riflesso e trasmesso sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\perp}^i = \frac{|E_{\perp o}^i|^2}{2\eta_1} \\ S_{\perp}^r = \frac{|E_{\perp o}^r|^2}{2\eta_1} \\ S_{\perp}^t = \frac{|E_{\perp o}^t|^2}{2\eta_2} \end{array} \right. \quad (7.36)$$

Consideriamo  $A$  come la regione illuminata dalle onde, avremo:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i = A \cos(\theta_i) \\ A_r = A \cos(\theta_r) \\ A_t = A \cos(\theta_t) \end{array} \right. \quad (7.37)$$

Le potenze medie trasportate dalle onde saranno:

---

<sup>9</sup>FCE - pag 337 — 8.5 Riflettività e trasmissività  
FAE - pag 361 — 8.5 Reflectivity and Trasmissitivity

$$\begin{cases} P_{TE}^i = S_{\perp}^i A_i = \frac{|E_{\perp o}^i|^2}{2\eta_1} A \cos(\theta_i) \\ P_{TE}^r = S_{\perp}^r A_r = \frac{|E_{\perp o}^i|^2}{2\eta_1} A \cos(\theta_r) \\ P_{TE}^t = S_{\perp}^t A_t = \frac{|E_{\perp o}^t|^2}{2\eta_2} A \cos(\theta_t) \end{cases} \quad (7.38)$$

Definiamo R come indice di riflettanza:

$$R_{TE} = \frac{P_{TE}^r}{P_{TE}^i} = \frac{|E_{\perp o}^r|^2 \cos(\theta_r)}{|E_{\perp o}^i|^2 \cos(\theta_i)} = \left| \frac{E_{\perp o}^r}{E_{\perp o}^i} \right|^2 = |\Gamma_{\perp}|^2 \quad (7.39)$$

in cui  $\theta_r = \theta_i$ .

Indichiamo con T la trasmittanza:

$$T_{TE} = \frac{P_{\perp}^t}{P_{\perp}^i} = \frac{|E_{\perp o}^t|^2 \eta_1 A \cos(\theta_t)}{|E_{\perp o}^i|^2 \eta_2 A \cos(\theta_i)} = |\tau_{TE}|^2 \left( \frac{\eta_1 \cos(\theta_t)}{\eta_2 \cos(\theta_i)} \right) \quad (7.40)$$

Come il caso TE, possiamo esprimere la riflettanza e la trasmittanza nel caso TM:

$$\begin{cases} R_{TM} = \frac{P_{TM}^r}{P_{TM}^i} = |\Gamma_{TM}|^2 \\ T_{TM} = \frac{P_{TM}^t}{P_{TM}^i} = |\tau_{TM}|^2 \left( \frac{\eta_1 \cos(\theta_t)}{\eta_2 \cos(\theta_i)} \right) \end{cases} \quad (7.41)$$

Possiamo dire che, per la converzione dell'energia. che:

$$P_{TE}^i = P_{TE}^r + P_{TE}^t \quad (7.42)$$

cioè:

$$\begin{cases} R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \\ R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \end{cases} \quad (7.43)$$

Per  $\theta_B$ ,  $R_{TM} = 0$  e  $\tau_{TM} = 1$ .

Per riassumere:

10

**Table 8-2** Expressions for  $\Gamma$ ,  $\tau$ ,  $R$ , and  $T$  for wave incidence from a medium with intrinsic impedance  $\eta_1$  onto a medium with intrinsic impedance  $\eta_2$ . Angles  $\theta_i$  and  $\theta_t$  are the angles of incidence and transmission, respectively.

Property	Normal Incidence $\theta_i = \theta_t = 0$	Perpendicular Polarization	Parallel Polarization
Reflection coefficient	$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$	$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$	$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$
Transmission coefficient	$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$	$\tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$	$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$
Relation of $\Gamma$ to $\tau$	$\tau = 1 + \Gamma$	$\tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp}$	$\tau_{\parallel} = (1 + \Gamma_{\parallel}) \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$
Reflectivity	$R =  \Gamma ^2$	$R_{\perp} =  \Gamma_{\perp} ^2$	$R_{\parallel} =  \Gamma_{\parallel} ^2$
Transmissivity	$T =  \tau ^2 \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} \right)$	$T_{\perp} =  \tau_{\perp} ^2 \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i}$	$T_{\parallel} =  \tau_{\parallel} ^2 \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i}$
Relation of $R$ to $T$	$T = 1 - R$	$T_{\perp} = 1 - R_{\perp}$	$T_{\parallel} = 1 - R_{\parallel}$

Notes: (1)  $\sin \theta_t = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1 / \mu_2 \epsilon_2} \sin \theta_i$ ; (2)  $\eta_1 = \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$ ; (3)  $\eta_2 = \sqrt{\mu_2 / \epsilon_2}$ ; (4) for nonmagnetic media,  $\eta_2 / \eta_1 = n_1 / n_2$ .

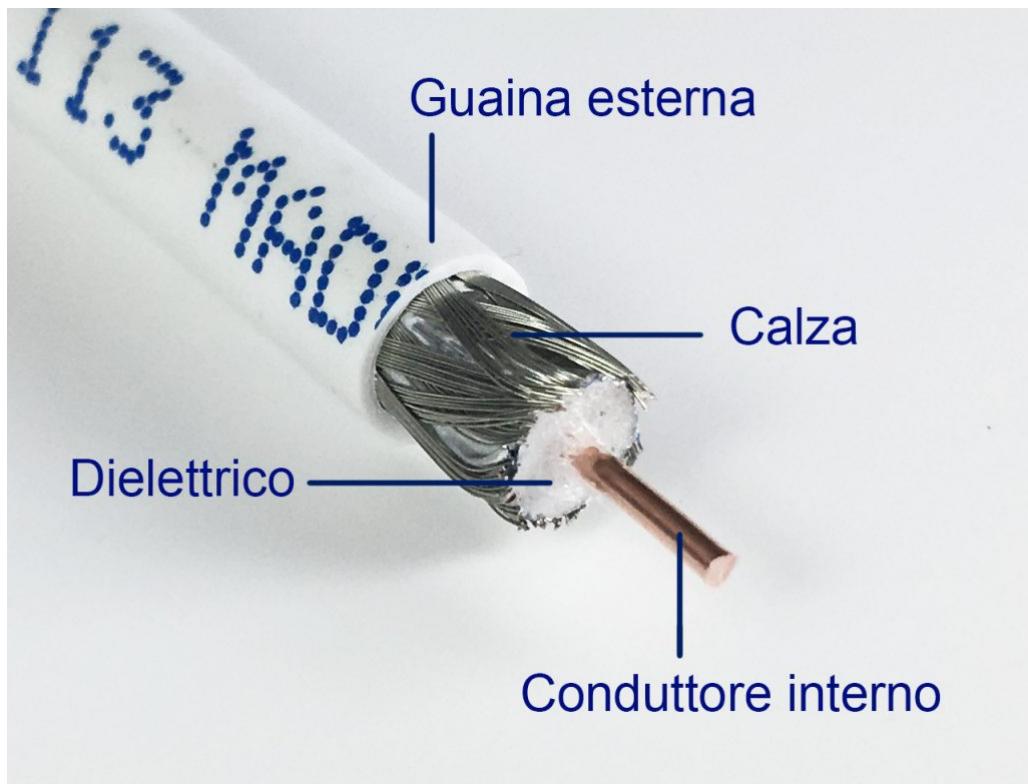
## Capitolo 8

### Cavo Coax



## 8.1 Campo EM in un cavo coax

1



2

Il cavo coassiale è un cavo cilindrico formato da (dall'interno all'esterno):

- condutore interno
- dielettrico di separazione
- calza conduttrice coassiale
- guaina di protezione

Essendo il cavo coassiale fisicamente di forma cilindrica, possiamo usare i fasori, in particolare le equazioni di Maxwell in forma fasoriale in assenza di sorgenti:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\gamma\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = \gamma\omega\varepsilon\vec{E} \end{cases} \quad (8.1)$$

Nella realtà non possiamo esprimere le equazioni delle onde in un cavo coassiale con le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti, ma adesso ci poniamo nel caso più semplice per svolgere i calcoli.

Sempre per quest'ultimo principio, consideriamo le onde polarizzate TEM, quindi:

$$\begin{cases} E_z = 0 \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

<sup>1</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 16 Mezzi trasmissivi 03 Maggio 23 — Pag 3-13

<sup>2</sup><https://www.sistemi-integrati.net/cose-un-cavo-coassiale/>

Considerando il cavo coassiale come cilindro, possiamo esprimere ogni punto del cavo in coordinate cilindriche:

$$(x, y, z) \Rightarrow (r, \phi, z) \quad (8.3)$$

Dall'analisi matematica:

- $r$  indica il raggio
- $\phi$  (si legge fi) indica i gradi

Per approfondire

<https://www.youmath.it/lezioni/analisi-due/varie/2282-coordinate-cilindriche.html>

In questa sezione la notazione dei vettori indica quella di un fasore.

Vogliamo trovare una soluzione che non dipenda da  $\phi$ , quindi:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \quad (8.4)$$

Essendo

$$E_z = 0 \quad (8.5)$$

$E_z$  è indipendente da  $\phi$ : questo principio prende il nome di simmetria azimutale.

Quindi possiamo scrivere che:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{E}_r(r, z)) \quad (8.6)$$

Da questa equazione, notiamo che  $\vec{E}$  dipende da  $r$  e da  $z$ .

Ritornando alla forma fisica del cavo coassiale, abbiamo due conduttori (il conduttore interno e la calza conduttrice coassiale) divisi da un dielettrico, proprio come un condensatore.

Per approfondire sui condensatori

[https://www.elettra2000.it/vdegliesposti/Dispense%20Propagazione/Richiami\\_Teoria\\_Dei\\_Circuiti.pdf](https://www.elettra2000.it/vdegliesposti/Dispense%20Propagazione/Richiami_Teoria_Dei_Circuiti.pdf)

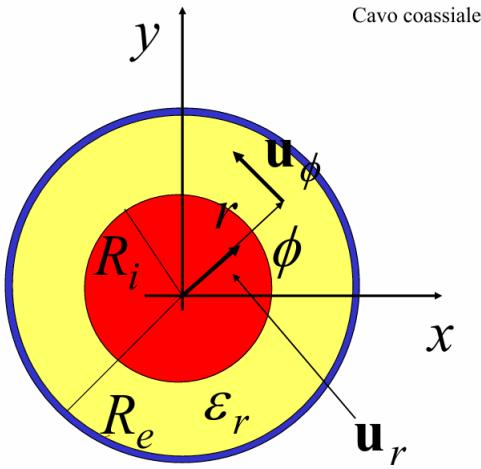
Applicando l'equazione costitutiva del condensatore al cavo coassiale, avremo che:

$$r \vec{E}_r(r, z) = Costante \cdot \vec{V}(z) \Rightarrow \vec{E}_r(r, z) = \frac{Costante}{r} \vec{V}(z) \quad (8.7)$$

3

Proprio come il condensatore, facciamo un'intergrale di linea di un percorso chiuso tra le due armature, in questo caso tra i due conduttori:

<sup>3</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 16 Mezzi trasmissivi 03 Maggio 23 — Pag 5



$$\begin{aligned}
 \int_{R_i}^{R_e} \vec{E}_r(r, z) dr &= \int_{R_i}^{R_e} \frac{\text{Costante}}{r} \vec{V}(z) dr \\
 &= \text{Costante} \cdot \vec{V}(z) \int_{R_i}^{R_e} \frac{1}{r} dr \\
 &= \text{Costante} \cdot \vec{V}(z) \cdot \ln |r| \Big|_{R_i}^{R_e} \\
 &= \text{Costante} \cdot \vec{V}(z) \cdot \ln |R_e| - \\
 &\quad \text{Costante} \cdot \vec{V}(z) \cdot \ln |R_i| \\
 &= \text{Costante} \cdot \vec{V}(z) (\ln |R_e| - \ln |R_i|) \\
 &= \text{Costante} \cdot \vec{V}(z) \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

$\text{Costante} \cdot \vec{V}(z)$

possiamo portarlo subito fuori dall'intergrale perchè sono costanti rispetto a dr (r è l'incognita dell'integrale)

Alla fine avremo:

$$\text{Costante} \cdot \vec{V}(z) \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right| = \vec{V}(z) \tag{8.9}$$

Per essere vera questa ultima equazione:

$$\text{Costante} = \frac{1}{\ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \tag{8.10}$$

Sapendo ora il valore della costante possiamo esprimere  $\vec{E}_r$  come:

$$\vec{E}_r(r, z) = \frac{\text{Costante}}{r} \vec{V}(z) \Rightarrow \vec{E}_r(r, z) = \frac{1}{\ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \frac{\vec{V}(z)}{r} \tag{8.11}$$

In "2.1 Equazioni dell'onda in forma fasoriale", abbiamo trovato che:

$$H_y = \frac{1}{-\jmath\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (8.12)$$

In coordinate cilindriche, possiamo sostituire le rispettive coordinate, quindi  $H_y$  diventa:

$$\vec{H}_\phi = \frac{1}{-\jmath\omega\mu} \frac{\partial E_r}{\partial z} \quad (8.13)$$

Sostituendo il valore di  $E_r$  trovato precedentemente,  $\vec{H}_\phi$  diventa:

$$\vec{H}_\phi = \frac{1}{-\jmath\omega\mu} \frac{1}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \frac{\partial \vec{V}(z)}{\partial z} \quad (8.14)$$

Ritornando alle equazioni in forma fasoriale in coordinate cartesiane, sapevamo che:

$$\nabla \times \vec{H} = \jmath\omega\varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\jmath\omega\varepsilon} \nabla \times \vec{H} \quad (8.15)$$

Sapendo il valore di  $\vec{H}$ , nell'asse x abbiamo che:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \jmath\omega\varepsilon E_x \Rightarrow E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \cdot \frac{1}{\jmath\omega\varepsilon} \quad (8.16)$$

Sostituendo a  $x \Rightarrow r$  e  $y \Rightarrow \phi$ , avremo che:

$$\vec{E}_r(r, z) = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \cdot \frac{1}{\jmath\omega\varepsilon} \quad (8.17)$$

Sapendo il valore di  $H_\phi$ , possiamo esprimere  $\vec{E}_r(r, z)$  come:

$$\vec{E}_r(r, z) = -\frac{1}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \vec{V}(z)}{\partial z^2} \quad (8.18)$$

Quindi è un'equazione che soddisfa l'equazione dell'onda:

$$\nabla^2 \vec{E} = -\kappa^2 \vec{E} \quad (8.19)$$

dove:

$$\kappa^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \quad (8.20)$$

## 8.2 Campo EM nel tempo

4

Siccome le equazioni del campo EM soddisfano l'equazione dell'onda, possiamo esprimere la tensione come una sinusode del tipo:

$$\vec{E}(z) = V^+ e^{-j\kappa z} + V^- e^{+j\kappa z} \quad (8.21)$$

Ricordando che:

$$\vec{V}(z) = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \vec{V}(z)}{\partial z^2} \quad (8.22)$$

e che:

$$\vec{E}_r(r, z) = \frac{1}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \vec{V}(z) \quad (8.23)$$

allora, possiamo convertire i fasori in quantità che variano nel tempo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}_r(r, z) e^{j\kappa z} \right\} &= \frac{1}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \operatorname{Re} \left\{ \vec{V}(z) e^{j\kappa z} \right\} \\ &= \frac{1}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} V(z, t) \end{aligned} \quad (8.24)$$

dove:

$$\begin{aligned} V(z, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \vec{V}(z) e^{j\kappa z} \right\} \\ &= V^+ \cos(\omega t - \kappa z) + V^- \cos(\omega t + \kappa z) \end{aligned} \quad (8.25)$$

Come nel caso delle onde piane in forma fasoriale, possiamo descrivere V come somma di un'onda progressiva in direzione z e un'onda riflessa in direzione -z

$$\begin{aligned} V(z, t) &= f^+(t - \frac{z}{v}) + f^-(t + \frac{z}{v}) \\ &= V^+ \cos[\omega(t - \frac{z}{v})] + V^- \cos[\omega(t + \frac{z}{v})] \end{aligned} \quad (8.26)$$

dove:

$$\begin{cases} v = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \\ \lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{v}{f} \end{cases} \quad (8.27)$$

Come le onde in forma fasoriale,  $\vec{H}_\phi$  sarà:

---

<sup>4</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 16 Mezzi trasmissivi 03 Maggio 23 — Pag 14 - 23

$$\begin{aligned}\vec{H}_\phi &= \frac{1}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} [V^+ e^{-j\kappa z} - V^- e^{j\kappa z}] \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} [V^+ e^{-j\kappa z} - V^- e^{j\kappa z}]\end{aligned}\quad (8.28)$$

Come nelle onde piane, si può esprimere l'impedenza d'onda come:

$$\frac{\vec{E}_r^+}{\vec{H}_\phi^+} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon}} = \eta \quad (8.29)$$

Nel dominio del tempo  $\vec{H}_\phi$  diventa:

$$\begin{aligned}\vec{H}_\phi(z, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \vec{H}_\phi e^{j\omega t} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} [V^+ \cos(\omega t - \kappa z) - V^- \cos(\omega t + \kappa z)]\end{aligned}\quad (8.30)$$

Sapendo ora il valore di  $\vec{H}_\phi$ , la corrente che fluisce nel conduttore interno è:

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \oint_{r=R_i} \vec{H}_\phi R_i d\phi \\ &= \vec{H}_\phi \Big|_{r=R_i} \cdot R_i \oint d\phi \\ &= \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} [V^+ \cos(\omega t - \kappa z) - V^- \cos(\omega t + \kappa z)] \right) \Big|_{r=R_i} \cdot R_i \cdot 2\pi \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{R_i \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} [V^+ \cos(\omega t - \kappa z) - V^- \cos(\omega t + \kappa z)] \cdot R_i \cdot 2\pi \quad (8.31) \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{\ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} [V^+ \cos(\omega t - \kappa z) - V^- \cos(\omega t + \kappa z)] \\ &= I^+ e^{-j\kappa z} + I^- e^{+j\kappa z}\end{aligned}$$

Calcolare l'integrale di linea del percorso chiuso di un cerchio, in formula matematica  
 $\oint d\phi$

significa calcolare quanti radianti ci sono in un cerchio perchè l'incognita è l'incognita  $\phi$  e l'integrale è in  $d\phi$ .

Dalla geometria, i radianti di un qualsiasi cerchio, indipendentemente dal suo raggio, sono di  $2\pi$

### 8.3 Costanti utili in un cavo coax

5

Una costante molto utile in un cavo coax è la sua impedenza caratteristica:

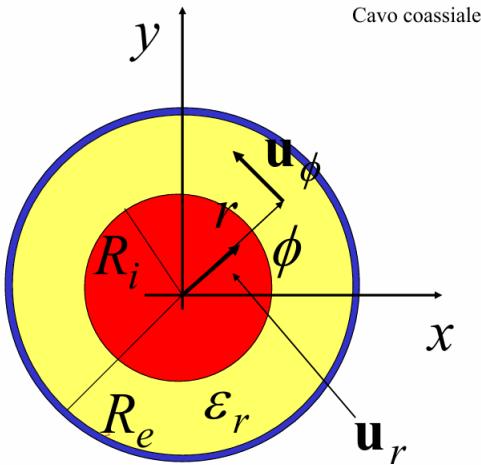
$$\begin{aligned} Z_o &= \frac{V^+ e^{-j\kappa z}}{I^+ e^{-j\kappa z}} = -\frac{V^- e^{+j\kappa z}}{I^- e^{+j\kappa z}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|}{2\pi} \end{aligned} \quad (8.32)$$

Una piccola precisazione:

l'impedenza caratteristica  $Z_o$  dipende dalla tensione e dalla corrente (da  $V$  e da  $I$ ), quindi  $Z_o$  dipende dal tipo di materiale utilizzato fisicamente nel cavo; a differenza dell'impedenza d'onda  $\eta$  che dipende dal campo elettrico e dal campo magnetico (da  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ ).

Quindi, possiamo esprimere la corrente in un punto  $z$  del cavo come:

$$\vec{I}(z) = \frac{1}{Z_o} [V^+ e^{-j\kappa z} - V^- e^{+j\kappa z}] \quad (8.33)$$



6

Visto che il cavo coassiale è formato da due conduttori, rispettivamente di raggio  $R_i$  per il conduttore interno e di raggio  $R_e$  per il conduttore esterno, divisi da un dielettrico, proprio come il condensatore, possiamo esprimere una carica per unità di lunghezza:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_l &= \epsilon \vec{E}_r(R_e, z) \hat{u}_r \cdot 2\pi R_e \hat{u}_r \\ &= \epsilon \frac{1}{R_e \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \vec{V}(z) \hat{u}_r \cdot 2\pi R_e \hat{u}_r \end{aligned} \quad (8.34)$$

dove l'unità di misura di  $\hat{\rho}_l$  è:

<sup>5</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 16 Mezzi trasmissivi 03 Maggio 23 — Pag 24 - 29

<sup>6</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 16 Mezzi trasmissivi 03 Maggio 23 — Pag 5

$$[\hat{\rho}_l] = \frac{C}{m} \quad (8.35)$$

Proprio come il condensatore, possiamo esprimere la capacità per unità di lunghezza come:

$$C = \frac{\hat{P}_l}{\hat{V}(z)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \quad (8.36)$$

dove l'unità di misura di C è:

$$[C] = \frac{F}{m} \quad (8.37)$$

Essendo il cavo composto da due conduttori, possiamo esprimere il flusso di campo magnetico come:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \mu_o \int_{R_i}^{R_e} \hat{H}_\phi dr \\ &= \mu_o \int_{R_i}^{R_e} \frac{\hat{I}(z)}{2\pi} dr \\ &= \mu_o \frac{\hat{I}(z)}{2\pi} \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right| \end{aligned} \quad (8.38)$$

Quindi, possiamo esprimere l'induttanza per unità di lunghezza come:

$$L = \frac{\phi_B}{\hat{I}(z)} = \frac{\mu_o \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|}{2\pi} \quad (8.39)$$

Grazie ai valori di L e C, possiamo esprimere la velocità v, la costante di propagazione k e l'impedenza caratteristica  $Z_o$ :

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon} \frac{\ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|}{2\pi}} \quad (8.40)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_o \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \cdot \frac{\ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|}{2\pi\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon}} \quad (8.41)$$

$$\kappa = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu_o \varepsilon} \quad (8.42)$$

## 8.4 Teorema di Poynting in un cavo coax

7

Il teorema di Poynting è valido anche in un cavo coassiale.  
Quindi, definiamo una superficie S ortogonale a  $\hat{z}$ :

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H}^* \\ &= \frac{\hat{r}V(z)}{r \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} \times \frac{\hat{\phi}}{2\pi r} I^*(z) \\ &= \frac{\hat{z}}{2\pi r^2 \cdot \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|} V(z) I^*(z)\end{aligned}\quad (8.43)$$

Dato S, possiamo calcolarci la potenza attiva trasportata da un'onda TEM in un cavo coax:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int \int \vec{S} \cdot \hat{z} ds \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \vec{S} \cdot \hat{z} r dr d\phi \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ V(z) I^*(z) \} \\ &= \frac{1}{2Z_o} (|V^+|^2 - |V^-|^2)\end{aligned}\quad (8.44)$$

---

<sup>7</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 16 Mezzi trasmissivi 03 Maggio 23 — Pag 34-35

## 8.5 Perdite nel dielettrico

8

I due conduttori che costituiscono un cavo coax sono tenuti da un dielettrico con bassa permeattività (ad esempio il teflon).

Da [https://it.wikipedia.org/wiki/Permittività\\_elettrica](https://it.wikipedia.org/wiki/Permittività_elettrica)

La permittività elettrica è una grandezza fisica che quantifica la tendenza del materiale a contrastare l'intensità del campo elettrico presente al suo interno. Descrive quindi il comportamento di un materiale in presenza di un campo elettrico. Viene anche comunemente chiamata costante dielettrica.

La permittività elettrica è strettamente legata alla suscettività elettrica, ovvero alla predisposizione del materiale a polarizzarsi quando viene applicato un campo elettrico. La polarizzazione di atomi e molecole produce un campo elettrico aggiuntivo nel materiale, descritto attraverso il vettore induzione elettrica, e la permittività elettrica ne quantifica l'entità per unità di carica elettrica.

Quindi, il campo elettrico tra questi due conduttori è:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_l \quad (8.45)$$

dove  $\vec{P}_l$  è la perdita del campo elettrico nel dielettrico.

Se il mezzo è lineare:

$$\vec{P}_l = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (8.46)$$

$\chi$  lettera greca che si legge chi

dove  $\chi_e$  tiene conto dell'energia EM dissipata sotto forma di calore.

Permeattività complessa:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0(1 + \chi_e) \\ &= \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j \tan \delta) \end{aligned} \quad (8.47)$$

$\delta$  lettera greca che si legge delta

dove:

$\delta$  è un parametro del dielettrico e non dipende dalla profondità di penetrazione.

Da <https://www.scienzaatscuola.it/fisica%205g/vivente3.html>

La quantità  $\delta$  è detta profondità di penetrazione e indica la distanza alla quale i campi si sono ridotti a circa il 37% e la densità di potenza si è ridotta a meno del 14% rispetto ai valori all'interfaccia.

Sapendo  $\delta$ , possiamo esprimere  $\kappa$  come:

<sup>8</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 20 Perdite nel dielettrico 17 maggio 23 — Pag 3-4

$$\begin{aligned}\kappa &= \omega \sqrt{\mu_o \epsilon} \\ &\approx \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o \epsilon_r} \left(1 - j \frac{\tan \delta}{2}\right)\end{aligned}\quad (8.48)$$

Inoltre, possiamo esprimere una costante di attenuazione del dielettrico  $\alpha_d$  come:

$$\alpha_d \approx \kappa \frac{\tan \delta}{2} \quad (8.49)$$

Oltre al dielettrico, il cavo coax presenta due conduttori, quindi possiamo esprimere una costante di attenuazione del conduttore  $\alpha_c$  come:

$$\begin{aligned}\alpha_c &= \frac{P_l(z)}{2P(z)} \\ &\approx \frac{\frac{R_s}{4\pi} \left[ \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e} \right]}{Z_o} \\ &= \frac{\frac{R_s}{4\pi R_i} \left[ 1 + \frac{R_i}{R_e} \right]}{\frac{\eta}{2\pi} \ln \left| \frac{R_e}{R_i} \right|}\end{aligned}\quad (8.50)$$

dove:

$$\begin{cases} R_s = \frac{1}{\sigma \delta} \\ \sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_o \sigma}} \end{cases} \quad (8.51)$$

$\sigma$  lettera greca si legge sigma

Spesso, è preferibile esprimere le perdite totali in un cavo coax in dB:

$$\alpha_{dB} = -20 \log e^{-(\alpha_c + \alpha_d)} \quad (8.52)$$

## 8.6 Perdite dipendenti dalla temperatura nel dielettrico

9

La temperatura influisce sul coefficiente elettrico di attenuazione  $\alpha(T)$ :

$$\alpha(T) = \alpha_{293K} \cdot \sqrt{1 + \sigma_P \left( \frac{T}{K} - 293 \right)} \quad (8.53)$$

dove:

- $\alpha_P$  è il coefficiente di resistività (è un parametro empirico riguardo al materiale del conduttore)
- $\alpha_{293K}$  è la resistività a 293 Kelvin

Se il cavo coax è corto circuitato:

$$V^+ = -V^- \quad (8.54)$$

Quindi:

$$V_{max} = 2 |V^+| \quad (8.55)$$

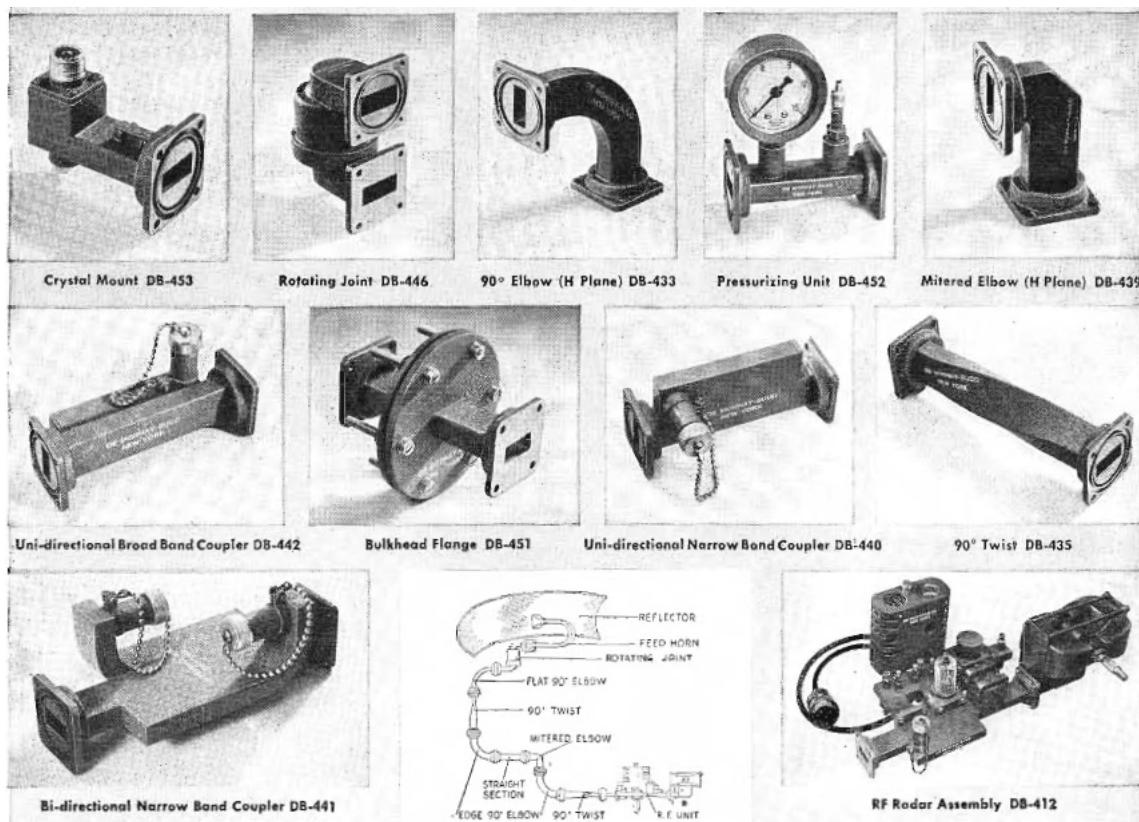
---

<sup>9</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 20 Perdite nel dielettrico 17 maggio 23 — Pag 15



# Capitolo 9

## Guide d'onda



## 9.1 Cosa sono le guide d'onda

<sup>1</sup>

La guida d'onda è una struttura, o parte di una struttura, che permette ad un'onda di propagarsi in una precisa direzione.

Se la guida d'onda cambia direzione, l'onda è costretta a seguirla.

I componenti trasversali dell'onda si propagheranno lungo la direzione di propagazione.

Generalmente, nelle analisi delle guide d'onda, siamo interessati alla distribuzione dei campi EM; ma, la cosa più importante è la dipendenza della costante di propagazione rispetto alla frequenza.

Dalla costante di propagazione è possibile calcolare la velocità dell'onda, la variazione di fase e l'attenuazione lungo la guida d'onda.

---

<sup>1</sup>FWC - pag 395  
8.1 Introduction

## 9.2 Equazioni delle guide d'onda per sistemi uniformi

2

Nelle guide d'onda considereremo onde del tipo:

$$e^{j\omega t - \gamma z} \quad (9.1)$$

quindi onde a tempo armonico  $j\omega t$  e che variano con la distanza  $-\gamma z$ .

$\gamma$  dall'alfabeto greco si legge gamma

La costante di propagazione  $\gamma$  sarà importante per le proprietà dell'onda, come ad esempio di quanto si attenua l'onda, la fase e la velocità di gruppo.

Assumiamo nessuna densità di carica in ingresso e considereremo i conduttori della guida d'onda soddisfino l'equazione:

$$\kappa^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \quad (9.2)$$

Le equazioni dell'onda, che si riducono alle equazioni di Helmholtz per i campi fasoriali, saranno:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = -\kappa^2 \vec{E} \\ \nabla^2 \vec{H} = -\kappa^2 \vec{H} \end{cases} \quad (9.3)$$

Nelle coordinate cartesiane,  $\nabla^2$ , chiamato anche operatore di Laplace, può essere suddiviso in due parti:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \\ &= \nabla_t^2 \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (9.4)$$

dove,  $\nabla_t^2$  lo definiamo come operatore di Laplace trasversale.

Assumendo la funzione di propagazione lungo l'asse  $x$   $e^{-\gamma z}$ , possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \gamma^2 \vec{E} \quad (9.5)$$

Uguagliando i due modi di esprimere  $\nabla^2 \vec{E}$  e sostituendo il valore di  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$ , possiamo scrivere la seguente equazione:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = -\kappa^2 \vec{E} \\ \nabla^2 \vec{E} = \nabla_t^2 \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \end{cases} \Rightarrow -\kappa^2 \vec{E} = \nabla_t^2 \vec{E} + \gamma^2 \vec{E} \quad (9.6)$$

Oppure, svolgendo diversi passi algebrici:

$$\begin{aligned}\nabla_t^2 \vec{E} &= -\kappa^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} \\ &= -(\kappa^2 + \gamma^2) \vec{E}\end{aligned}\tag{9.7}$$

I passaggi algebrici svolti per  $\nabla_t^2 \vec{E}$  possono essere svolti anche per  $\nabla_t^2 \vec{H}$ :

$$\nabla_t^2 \vec{H} = -(\kappa^2 + \gamma^2) \vec{H}\tag{9.8}$$

$\nabla_t^2 \vec{E}$  e  $\nabla_t^2 \vec{H}$  sono equazioni differenziali che devono essere soddisfatte nelle regione del dielettrico della linea di trasmissione o della guida d'onda.

La procedura standard è quella di trovare i componenti di  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  lungo l'asse z che soddisfano  $\nabla_t^2 \vec{E}$  e  $\nabla_t^2 \vec{H}$ , quindi le condizioni al contorno, oppure esplicitato in una maniera differente, troviamo  $E_z$  e  $H_z$  in modo tale che siano le variabili indipendenti del sistema.

Consideriamo le equazioni di  $e^{j\omega t - \gamma z}$  in forma fasoriale divise nei loro componenti.

Dalle leggi di Maxwell avremo:

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}\tag{9.9}$$

Svolgendo diversi passi algebrici:

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{x} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ E_y & E_z \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\gamma \\ E_x & E_z \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ E_x & E_y \end{vmatrix}\tag{9.10}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{x} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] - \hat{y} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right] + \hat{z} \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \right]\tag{9.11}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{x} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] + \hat{y} \left[ -\frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma E_x \right] + \hat{z} \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \right]\tag{9.12}$$

Dalle equazioni di Maxwell in forma fasoriale:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}\tag{9.13}$$

Dividendo questa equazione nei vari assi cartesiani:

**Asse X**

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega \mu H_x\tag{9.14}$$

**Asse Y**

$$-\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (9.15)$$

**Asse Z**

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (9.16)$$

Sostituendo  $\vec{H}$  ad  $\vec{E}$ , possiamo trovare le equazioni di Maxwell in forma fasoriale di:  
Dalle equazioni di Maxwell in forma fasoriale:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon \vec{E} \quad (9.17)$$

**Asse X**

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (9.18)$$

**Asse Y**

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \quad (9.19)$$

**Asse Z**

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \quad (9.20)$$

Ora è possibile trovare  $E_x, E_y, H_x, H_y$  in funzione di  $E_z$  e  $H_z$ .

I passaggi algebrici sono omessi, però basta sostituire i valori.

Alla fine troveremo i i valori di:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{1}{\gamma^2 + \kappa^2} (\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}) \\ E_y = \frac{1}{\gamma^2 + \kappa^2} (-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x}) \\ H_x = \frac{1}{\gamma^2 + \kappa^2} (-\gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} + j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y}) \\ H_y = -\frac{1}{\gamma^2 + \kappa^2} (\gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x}) \end{cases} \quad (9.21)$$

È conveniente scrivere:

$$\begin{cases} \gamma = j\beta \\ \kappa_c^2 = \gamma^2 + \kappa^2 = \kappa^2 - \beta^2 \end{cases} \quad (9.22)$$

Le equazioni precedentemente scritte, diventeranno:

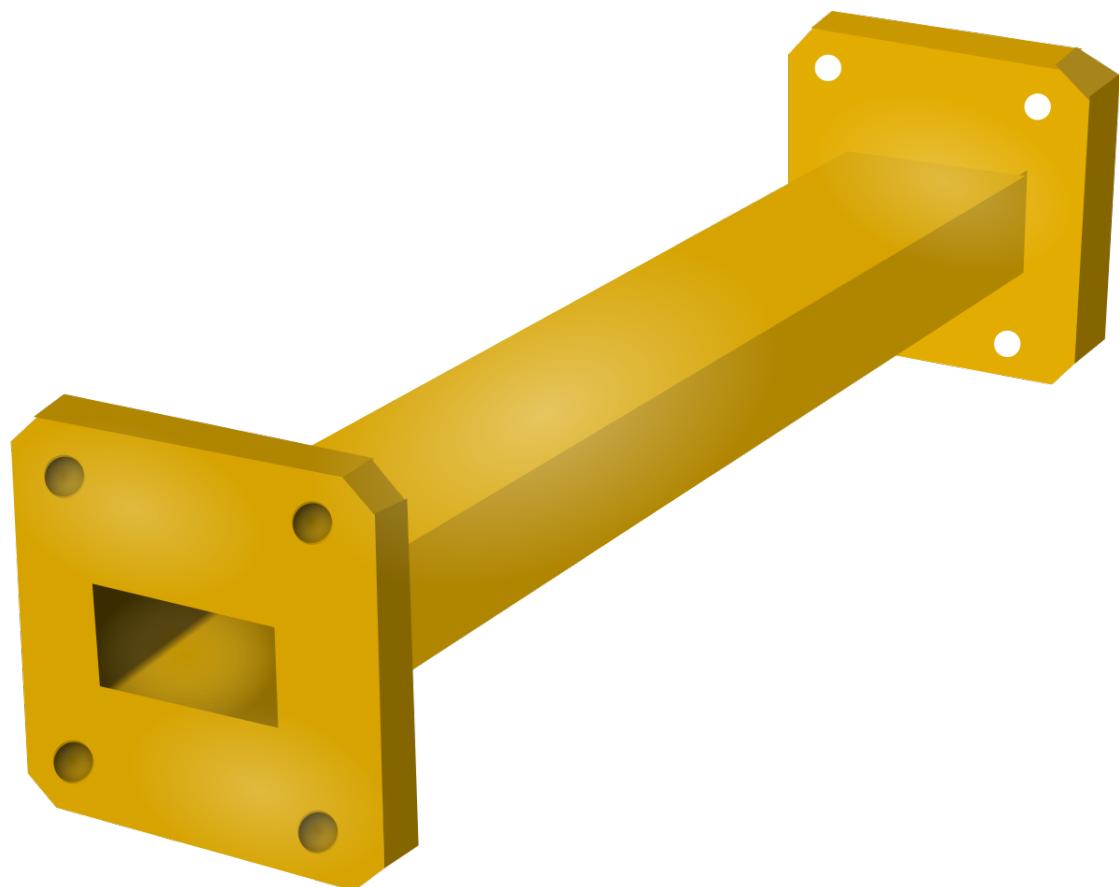
$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{\jmath}{\kappa_c^2} (\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y}) \\ E_y = \frac{\jmath}{\kappa_c^2} (-\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x}) \\ H_x = \frac{\jmath}{\kappa_c^2} (-\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} + \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y}) \\ H_y = -\frac{\jmath}{\kappa_c^2} (\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x}) \end{array} \right. \quad (9.23)$$

Inoltre possiamo scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t^2 E_z = -\kappa_c^2 E_z \\ \nabla_t^2 H_z = -\kappa_c^2 H_z \end{array} \right. \quad (9.24)$$

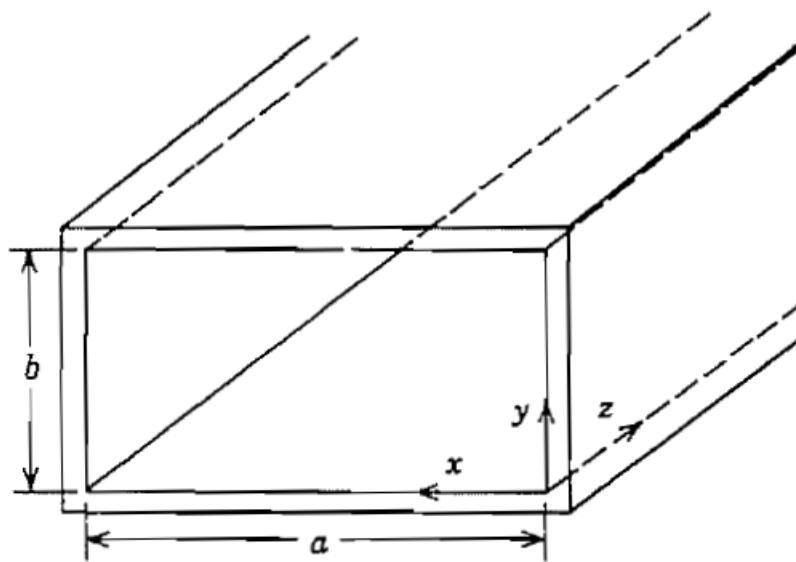
## Capitolo 10

# Guide d'onda rettangolari



## 10.1 Cosa sono le guide d'onda rettangolari

1



**Fig. 8.7a** Coordinate system for rectangular guide.

Le onde rettangolari sono un tipo d'onda in cui la sezione è formata da una regione dielettrica di larghezza  $a$  e di altezza  $b$  che si estende per una lunghezza infinita lungo la direzione  $z$ , regione dielettrica rivestita da quattro conduttori.

Non ci possono essere onde TEM perché la componente lungo  $z$  non varia (considerando che nella guida d'onda possono esistere onde del tipo  $e^{-j\omega t - \gamma z}$  e che quindi variano di  $\gamma$  lungo l'asse  $z$ ).

Onde TM e TE possono esistere in una guida d'onda rettangolare.

---

<sup>1</sup>FWC - pag 417  
8.7 Rectangular waveguides

## 10.2 Onde TM nelle guide d'onda rettangolari

<sup>2</sup>

Le onde TM, lungo la componente dell'asse z:

$$\begin{cases} H_z = 0 \\ E_z \neq 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

Dalle equazioni di Maxwell per le guide d'onda, abbiamo trovato che:

$$\nabla_t^2 E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\kappa_c^2 E_z \quad (10.2)$$

dove:

$$\kappa_c^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 \quad (10.3)$$

Quindi:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\kappa_c^2 E_z \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\kappa_x^2 - \kappa_y^2 E_z \quad (10.4)$$

Utilizzando la separazione delle variabili (x,y) possiamo portare questa equazione in un sistema per ogni variabile, cioè:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -\kappa_x^2 E_z \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\kappa_y^2 E_z \end{cases} \quad (10.5)$$

Il cui risultato è rispettivamente  
per l'asse x:

$$A' \sin(\kappa_x x) + B' \cos(\kappa_x x) \quad (10.6)$$

per l'asse y:

$$C' \sin(\kappa_y y) + D' \cos(\kappa_y y) \quad (10.7)$$

dove  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  sono coefficienti reali.

La separazione delle variabili ci impone di moltiplicare i risultati per l'asse x e l'asse y, quindi  $E_z$  diventa:

$$E_z = (A' \sin(\kappa_x x) + B' \cos(\kappa_x x))(C' \sin(\kappa_y y) + D' \cos(\kappa_y y)) \quad (10.8)$$

Siccome consideriamo le pareti della guida d'onda come perfetti conduttori,  $E_z = 0$  in:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (10.9)$$

---

<sup>2</sup>FWC - pag 418  
8.7 Rectangular waveguides - TM Waves

Allora:

$$\begin{cases} B' = 0 \\ D' = 0 \end{cases} \quad (10.10)$$

Ponendo:

$$A'C' = A \quad (10.11)$$

e considerando le semplificazioni svolti,  $E_z$  diventerà:

$$E_z = A \sin(\kappa_x x) \sin(k_y y) \quad (10.12)$$

Per  $A \neq 0$ ,  $E_z = 0$  non solo in  $(0, 0)$ , ma anche in:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \quad (10.13)$$

Essendo il sin una funzione sinusoidale, possiamo scrivere che  $E_z = 0$  non solo per in (a, b) ma anche in:

$$\begin{cases} \sin(\kappa_x x) = 0 \Rightarrow \kappa a = m\pi \\ \sin(\kappa_y y) = 0 \Rightarrow \kappa b = n\pi \end{cases} \quad (10.14)$$

dove m e n è un numero intero maggiore di 0.

Quindi per un'onda  $TM_{nm}$ , la frequenza di cut-off, cioè la frequenza per cui  $E_z = 0$  è:

$$\begin{aligned} \omega_{c_{m,n}} &= \frac{\kappa_{c_{m,n}}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Siccome sappiamo che:

$$\kappa_c^2 = \kappa^2 - \beta^2 \quad (10.16)$$

è possibile trovare la costante di fase per le frequenze

$$\begin{cases} \alpha = \kappa_{c_{m,n}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{c_{m,n}}}\right)} \text{ per } \omega < \omega_{c_{m,n}} \\ \beta = \kappa \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c_{m,n}}}{\omega}\right)} \text{ per } \omega > \omega_{c_{m,n}} \end{cases} \quad (10.17)$$

La velocità di fase di gruppo sono rispettivamente:

$$\begin{cases} v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c_{m,n}}}{\omega}\right)}} \\ v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c_{m,n}}}{\omega}\right)} \end{cases} \quad (10.18)$$

In fisica la velocità di fase è la velocità con cui si propaga la fase di un'onda, sia essa elettromagnetica o meccanica. La velocità di fase può essere visualizzata come la velocità di propagazione di una cresta dell'onda ma non coincide necessariamente con la velocità di propagazione di un segnale (che è più propriamente descritta dalla velocità di gruppo) e quindi può essere più alta della velocità della luce senza violare la relatività ristretta.

[https://it.wikipedia.org/wiki/Velocità\\_di\\_fase](https://it.wikipedia.org/wiki/Velocità_di_fase)

La velocità di gruppo di un'onda è la velocità con cui si propagano nello spazio le variazioni nella forma dell'ampiezza dell'onda.

La velocità di gruppo è spesso considerata la velocità a cui l'energia o l'informazione sono trasportate dall'onda. In molti casi questa è una visione accurata, e la velocità di gruppo può essere pensata come la velocità di segnale della forma d'onda.

[https://it.wikipedia.org/wiki/Velocità\\_di\\_gruppo](https://it.wikipedia.org/wiki/Velocità_di_gruppo)

### 10.3 Onde TE nelle guide d'onda rettangolari

3

Il procedimento sarà simile al caso precedente delle onde TM, ma cambieranno alcune cose.

Prima di tutto, nelle onde TE abbiamo che:

$$\begin{cases} H_z \neq 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (10.19)$$

Inoltre:

$$\nabla_t^2 H_z = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -\kappa_c^2 H_z \quad (10.20)$$

Facendo lo stesso procedimento della separazione delle variabili del caso TE, abbiamo che:

$$H_z = (A' \sin(\kappa_x x) + B' \cos(\kappa_x x))(C' \sin(\kappa_y y) + D' \cos(\kappa_y y)) \quad (10.21)$$

I vari componenti dell'onda saranno:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j\omega\mu}{\kappa_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ &= -\frac{j\omega\mu\kappa_y}{\kappa_c^2} (A' \sin(\kappa_x x) + B' \cos(\kappa_x x))(C' \cos(\kappa_y y) - D' \sin(\kappa_y y)) \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{j\omega\mu}{\kappa_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ &= \frac{j\omega\mu\kappa_x}{\kappa_c^2} (A' \cos(\kappa_x x) - B' \sin(\kappa_x x))(C' \sin(\kappa_y y) + D' \cos(\kappa_y y)) \end{aligned} \quad (10.23)$$

In questo caso, però:

$$\begin{cases} E_x = 0 \text{ per } (x, 0) \Rightarrow C' = 0 \\ E_x = 0 \text{ per } (0, y) \Rightarrow A' = 0 \end{cases} \quad (10.24)$$

Ponendo:

$$B = B' D' \quad (10.25)$$

$H_z$  diventa:

$$H_z = B \cos(\kappa_x x) \cos(\kappa_y y) \quad (10.26)$$

---

<sup>3</sup>FWC - pag 419  
8.7 Rectangular waveguides - TE Waves

Per  $E_x = 0$  in  $y = b$ , quindi:

$$\kappa_y b = n\pi \quad (10.27)$$

Per  $E_y = 0$  in  $x = a$ , quindi:

$$\kappa_x a = m\pi \quad (10.28)$$

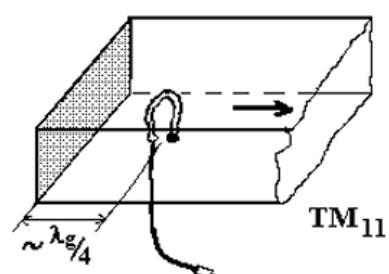
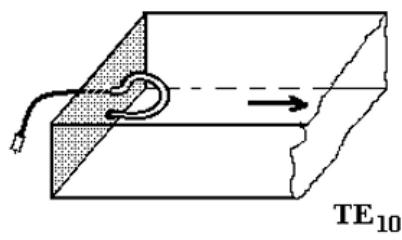
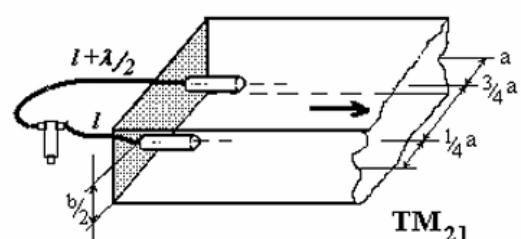
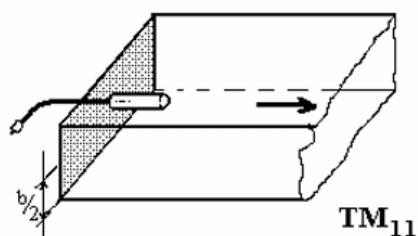
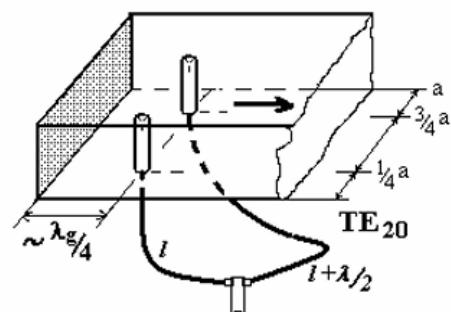
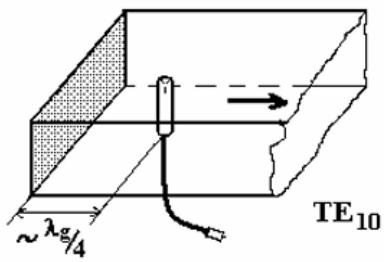
A differenza delle onde TM, basta solo che sia soddisfatta solo una delle due condizioni elencate precedentemente per avere continuità dell'onda.

$\omega_{c_{m,n}}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $v_p$  e  $v_g$  sono le stesse della  $TM_{n,m}$



## Capitolo 11

# Modi di guida d'onda rettangolare



## 11.1 Modo fondamentale: $TE_{10}$

1

$TE_{10}$  si legge TE uno zero, non TE dieci, si legge cifra per cifra

Le guide d'onda, come scritto precedentemente, possono essere  $TM_{n,m}$  o  $TE_{n,m}$  e variano in base ai parametri n e m.

$TE_{10}$ , o detto anche modo fondamentale, è il modo di guida d'onda per cui la frequenza di taglio è minore rispetto alle altre modalità.

In formule:

$$f_{c_{10}} = \frac{c}{2} \frac{1}{a} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (11.1)$$

Dal ricevimento con il prof:

Data la banda delle frequenze operative (cioè quelle che vogliamo trasmettere nel sistema guida d'onda), chiamata anche finestra:

$$B = [f_1, f_2] \quad (11.2)$$

possiamo progettare le dimensioni della sezione della guida d'onda.

$f_2$  possiamo esprimere anche come:

$$f_2 = \frac{f_2}{f_1} \cdot f_1 = k \cdot f_1 \quad (11.3)$$

Se B è minore dell'intervallo di monomodalità, generalmente, è preferibile calcolare, dato B, la sezione di guida d'onda più grande possibile.

Coincidiamo l'estremo superiore della finestra con l'estremo superiore della banda di monomodalità, cosicché le perdite sono più basse possibili perché la finestra è più lontana possibile dalla frequenza di cut-off, ricordando più si avvicina alla frequenza di cut-off e maggiori sono le perdite.

Quindi:

$$f_2[GHz] = \frac{300}{a[mm]} \Rightarrow a[mm] = \frac{300}{f_2[GHz]} = \frac{300}{k \cdot f_1[GHz]} \quad (11.4)$$

e poi:

$$b = \frac{1}{2}a \quad (11.5)$$

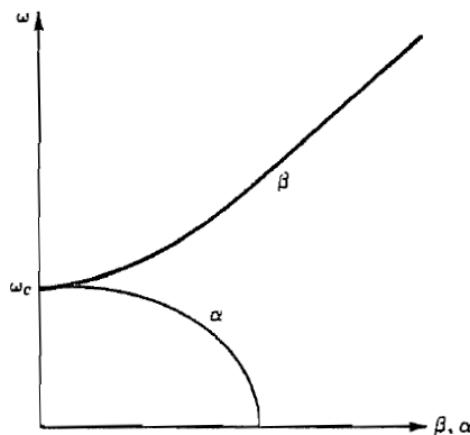
2

---

<sup>1</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 21 - 22 Guide rettangolari 22-24 maggio 2023 — Pag 13-20  
FWC - pag 422

FWC - 8.8 The  $TE_{10}$  wave in a rectangular guide - pag 423  
Ricevimento con prof

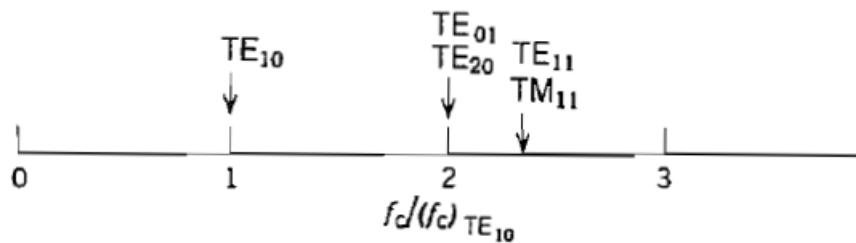
<sup>2</sup>FWE - pag 401



**FIG. 8.3a** Phase constant and attenuation as functions of frequency for a TM or TE waveguide mode.

Scritto in un'altra maniera, l'onda deve essere larga almeno  $\frac{\lambda}{2}$ , sennò non c'è propagazione.  
Per approfondire:

<https://www.ariparma.it/risorse/articoli/Guida%20di%20onda.pdf>



**FIG. 8.7b** Relative cutoff frequencies of waves in a rectangular guide ( $b/a = \frac{1}{2}$ ).

La figura indica le frequenze di cut-off di diversi modi di guida d'onda.  
Tipicamente, nella  $TE_{10}$ :

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad (11.6)$$

che è il valore tipicamente utilizzato nella realtà.

Normalmente, questo tipo d'onda è progettata in modo tala che la frequenza di cut-off sia il 30 per cento sotto la frequenza operativa.

In questo modo, solo un tipo d'onda si può propagare nella guida d'onda.

Non essendo troppo vicino alla frequenza di taglio, le dispersioni causate da diverse velocità di gruppo per diversi componenti di frequenze vengono minimizzati.

Inoltre, nel modo fondamentale, la polarizzazione dei campi è fissa, il campo elettrico passa dal basso all'alto della guida.

Questa polarizzazione potrebbe essere necessaria per qualche applicazione.

Generalmente, viene impegato il rame come componente per le guide d'onde, e data una frequenza, l'attenuazione non è eccessivamente bassa rispetto a guide di altre dimensioni.

Nel modo fondamentale, il campo EM è il seguente:

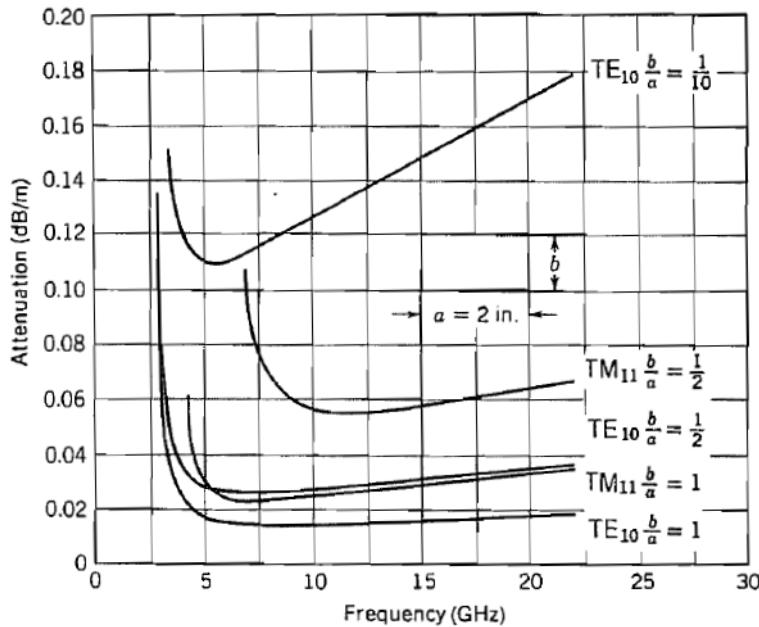


FIG. 8.7c Attenuation due to copper losses in rectangular waveguides of fixed width.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = H_y = E_z = 0 \\ H_x^\pm = \frac{j}{\kappa_c^2} \frac{\pi}{a} \beta A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) x e^{-\mp j\beta z} \\ E_y^\pm = -\frac{j}{\kappa_c^2} \omega \mu_o \frac{\pi}{a} A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) x e^{-\mp j\beta z} \end{array} \right. \quad (11.7)$$

in cui:

$$\beta = \sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (11.8)$$

L'impedenza d'onda è uguale a:

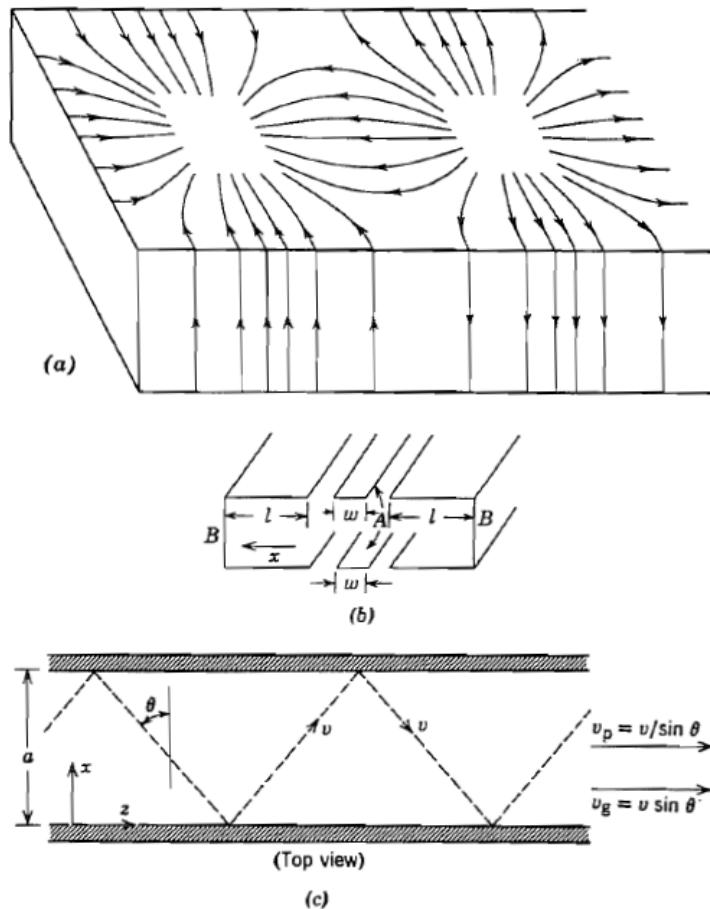
$$\begin{aligned} Z_{TE_{10}} &= -\frac{E_y}{H_x} \\ &= \frac{\omega \mu_o}{\beta} \\ &= \frac{\omega \mu_o}{\sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Dal Teorema di Poynting, il flusso di potenza attiva media è:

$$\begin{aligned}
 P_{10} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_0^a \int_0^b \vec{E} \times \vec{H}^* \hat{z} dx dy \right] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_0^a \int_0^b E_y H_x^* \cdot \hat{z} dx dy \right] \\
 &= \frac{\omega \mu a^3 b}{4\pi^2} |A_{10}|^2 \operatorname{Re}(\beta) \\
 &= \frac{\beta}{\omega \mu_0} \frac{|V^+|^2}{2}
 \end{aligned} \tag{11.10}$$

L'unico componente del campo elettrico è quello verticale  $E_y$  che passa dall'alto al basso della guida.

$E_y$  è massima al centro della guida e zero alle pareti della guida d'onda.  
 $H_x = 0$  alle due pareti e massimo al centro della guida, proprio come  $E_y$ .  
 $H_z$  è massima alle pareti e zero al centro.



**FIG. 8.8** (a) Current flow in walls of rectangular guide with  $TE_{10}$  mode. (b) Guide roughly divided into axial- and transverse-current regions. (c) Path of uniform plane-wave component of  $TE_{10}$  wave in rectangular guide.

## 11.2 Modo $TE_{20}$

<sup>3</sup>

Le guide d'onda sono dimensionate in modo tale che, alla frequenza di lavoro, ci sia solo un solo modo di propagazione, quindi:

$$a \geq 2b \quad (11.11)$$

La frequenza di cut-off per la  $TE_{20}$  è:

$$f_{c_{20}}[\text{GHz}] = \frac{300}{a[\text{mm}]} \quad (11.12)$$

Quindi l'intervallo di monomodalità, cioè l'intervallo di frequenze in cui l'onda si può propagare nel sistema guida d'onda così progettato è di:

$$\frac{300}{a[\text{mm}]} \geq f[\text{GHz}] \geq \frac{150}{a[\text{mm}]} \quad (11.13)$$

Se  $m = 0$ , la guida d'onda non dipende da b.

$\omega_{c_{n0}}$  aumenta al diminuire di b.

Quindi b può essere il più piccolo possibile.

Ma il campo max è inversamente proporzionale a  $\sqrt{b}$

$$\alpha_c \approx \frac{R_s}{a^3 b \kappa \eta} (2b\pi^2 + a^3 \kappa^2) \quad (11.14)$$

dove:

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} \quad (11.15)$$

Quindi tipicamente:

$$a \approx 2b \quad (11.16)$$

---

<sup>3</sup>Slide del prof — PPT: Lezione 21 - 22 Guide rettangolari 22-24 maggio 2023 — Pag 40-42