

Appunti di Teoria dei segnali

Stefano Rossini

26 febbraio 2025

Introduzione

Appunti ordinati, con approfondimenti passo-passo, del corso di Teoria dei segnali (ora Segnali Determinati e aleatori) per il corso di laurea in Ingegneria Elettronica presso l'Università Politecnica delle Marche.

Le fonti degli appunti sono le seguenti:

- Slide del corso del prof Franco Chiaraluce Segnali Determinati E Aleatori A.A. 2024/2025

Negli appunti ci saranno delle piccole appendici dentro a questi mini-paragrafi su come si leggono in italiano le varie formule matematiche, e lascerò link su possibili approfondimenti matematici usando le animazioni, così è più facile comprendere la materia.

Per le lettere greche che ci saranno nel corso, vi consiglio di visitare questo sito
https://www.rapidtables.org/it/math/symbols/greek_alphabet.html
in cui è disponibile anche la pronuncia vocale delle lettere.

Le figure senza l'indicazione sono presi dalle dispense del corso, sennò è esplicitato il link dell'immagine.

Gli appunti del corso scritti dal prof sono sufficienti per passare il corso e mi congratulo pubblicamente con il prof per essere un prof con la P maiuscola, ce ne sono veramente pochi che ti trasmettono cosa significa la passione dell'insegnamento.

Inoltre, dopo il ricevimento che ho avuto con il professore, per l'orale è necessario capire graficamente il concetto; le dimostrazioni matematiche servono, ma non sono utili per l'esame, basta solo capire, se ci vengono mostrati, perché si fanno quei passaggi e/o semplificazioni matematici.

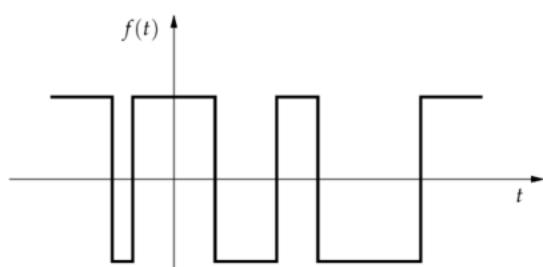
Questi appunti scritti dal sottoscritto sono degli approfondimenti in più, una sistemazione grafica diversa rispetto al prof e un riassunto.

Per qualsiasi domanda, scrivimi a rossini.stefano.appunti@gmail.com

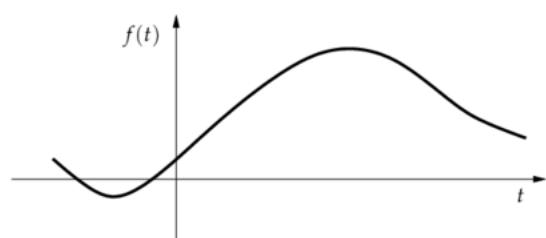
Buono studio e buona lettura

Capitolo 1

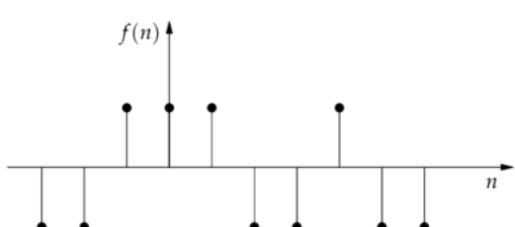
Classificazione dei segnali



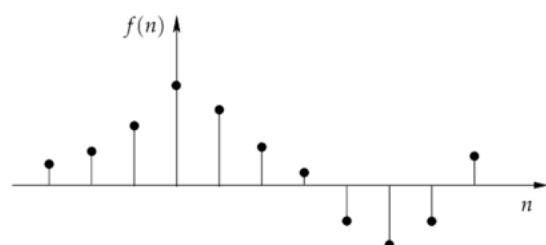
(a)



(b)



(c)



(d)

1.1 Introduzione ai segnali

Per segnale si intende una funzione del tempo che rappresenta l'evoluzione temporale di una grandezza fisica.

Nel corso, per semplicità, saranno trattati come adimensionali, quindi senza grandezza fisica.

A partire dal segnale adimensionale, è possibile moltiplicarlo per una grandezza fisica, come ad esempio Volt o Ampere rispettivamente per un segnale in tensione e per un segnale in corrente.

I segnali, dal punto di vista macro, si dividono in due tipi:

- Segnali determinati
- Segnali aleatori

I segnali, sia aleatori che determinati, sono funzioni che possono essere a valori reali e/o a valori complessi.

Le funzioni sono continue e limitate.

I segnali determinati sono quei segnali in cui si conosce a priori il loro andamento temporale, quindi possiamo esplicitare il loro andamento per ogni t che va da $t = \infty$ a $t = -\infty$: questi segnali sono studiati grazie alla Teoria dei segnali.

Invece, i segnali aleatori sono quei segnali in cui non si conosce esplicitamente il loro andamento temporale, bensì, si utilizzano i concetti della Teoria della probabilità, per capire a priori la probabilità che un segnale possa essere in certi intervalli.

Un segnale determinato non porta informazione perché non ha alcuna incertezza a priori: esso è semplicemente noto per qualunque istante di tempo.

Per essere informativo, il segnale non deve essere noto a priori.

L'obiettivo dei sistemi di telecomunicazioni è quello di inviare informazioni, quindi soprattutto i segnali aleatori.

I segnali possono essere classificati in base alla loro variabile indipendente (generalmente il tempo) e alla loro grandezza che rappresentano (quindi l'ampiezza):

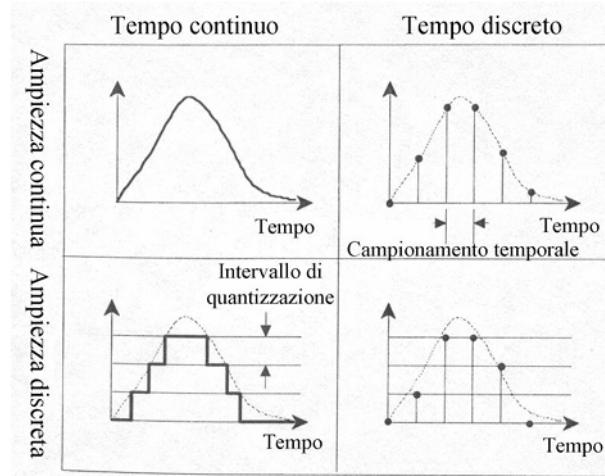
- Segnali a tempo continuo ed ampiezza continua
- Segnali a tempo continuo ed ampiezza discreta
- Segnali a tempo discreto ed ampiezza continua
- Segnali a tempo discreto ed ampiezza discreta

I segnali a tempo continuo ed ampiezza continua sono detti analogici e sono associati a fenomeni naturali (come un'onda acustica).

I segnali in cui le ampiezze sono discrete sono segnali in cui si è svolta l'operazione di quantizzazione, in cui il segnale reale analogico è stato trasformato in un numero.

Se anche il tempo è discreto, si definisce il segnale come digitale, che è comunemente impiegato nei sistemi digitali come i computer, microprocessori, ecc...

Il processo di discretizzazione del tempo è detto campionamento.



1.2 Segnali periodici: cosa sono e quali sono i parametri utili

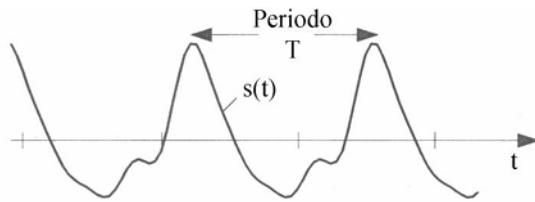
I segnali periodici sono segnali che si ripetono in ogni intervallo T .

T prende il nome di periodo del segnale.

In formule matematiche, un segnale è periodico se $\forall t \in [-\infty, +\infty]$:

$$s(t + T) = s(t) \quad (1.1)$$

Un esempio di segnale periodico:



Inoltre, viene definito come frequenza fondamentale f_0 l'inverso di T , cioè:

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad (1.2)$$

Generalmente t viene misurato in secondi, mentre la frequenza in Hertz:

$$[Hz] = \frac{1}{s} \quad (1.3)$$

In questo corso si predilisce utilizzare la pulsazione.

Si definisce la pulsazione fondamentale come:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad (1.4)$$

e si misura in radianti al secondo:

$$[\omega_0] = \frac{rad}{s} \quad (1.5)$$

Se il segnale è a tempo discreto, si predilisce utilizzare le parentesi quadre.

Se il segnale a tempo discreto è periodico, lo si può scrivere come:

$$s[n + N] = s[n] \quad (1.6)$$

dove N è un numero intero.

Dato un segnale $s(t)$ è possibile definire il suo valore medio temporale come:

$$\overline{s(t)} = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} s(t) dt \quad (1.7)$$

In un segnale periodico:

$$\Delta T = kT \quad (1.8)$$

Svolgendo alcuni passaggi algebrici che trovate nelle dispense del prof, avremo che:

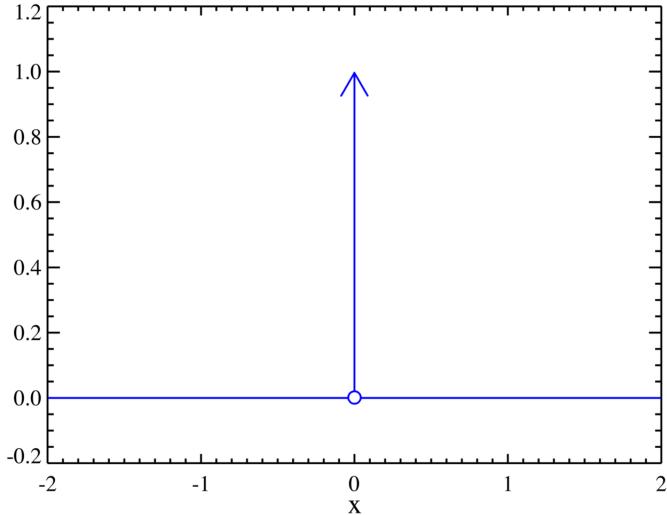
$$\overline{s(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt \quad (1.9)$$

Questa equazione è anche ovvia per definizione perchè, essendo un segnale periodico, se si conosce il suo valore medio temporale nel periodo T , lo si conosce $\forall T \in [-\infty, +\infty]$

1.3 Delta di Dirac

La delta di Dirac è un impulso matematico definita come:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} rect_{\Delta t}(t) \quad (1.10)$$



¹

La Delta di Dirac gode di queste proprietà:

$$\begin{cases} \delta(t = 0) = \infty \\ \delta(t \neq 0) = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ indica che l'area della Delta di Dirac è unitaria.

Se l'area è diversa da uno, basta moltiplicare la Delta di Dirac per un coefficiente moltiplicativo A.

La Delta di Dirac può trovarsi anche in un istante diverso da zero:

$$t_0 \neq 0 \rightarrow \delta(t - t_0) \quad (1.12)$$

o, in altri termini, possiamo vederla come una delta di Dirac shiftata nel tempo t_0 .

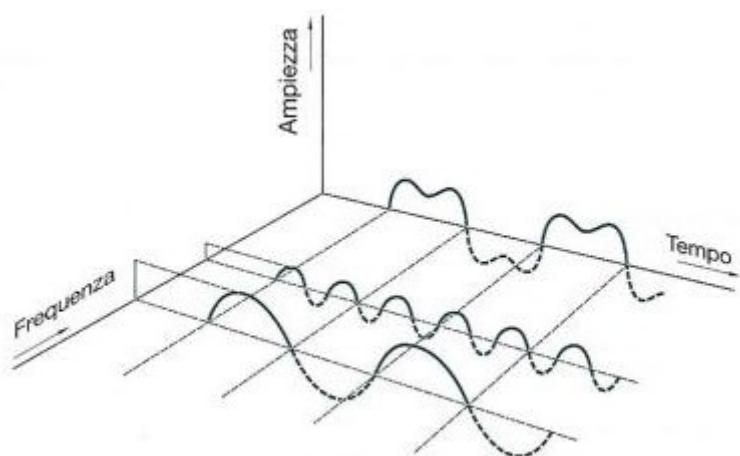
Grazie alla Delta di Dirac shiftata nel tempo t_0 , possiamo svolgere un campionamento ideale di un segnale $s(t)$ all'istante t_0 come:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - t_0) dt = s(t_0) \quad (1.13)$$

¹Wikipedia - Delta di Dirac

Capitolo 2

Segnali periodici nel dominio della frequenza



2.1 Sviluppo in serie di Fourier

Diverse volte è utile osservare lo stesso segnale in altre rappresentazioni equivalenti.

Per rappresentazione di un segnale si intende una qualsiasi modalità idonea alla sua individuazione biunivoca.

La rappresentazione può comportare un cambiamento del dominio di definizione.

Quindi, grazie ad una rappresentazione, si può passare da un dominio all'altro dello stesso segnale.

Se il segnale $s(t)$ è periodico con periodo T e pulsazione fondamentale ω_0 , possiamo definire una rappresentazione nota come Sviluppo in serie di Fourier.

Il dominio non sarà il tempo, bensì la frequenza (cioè l'inverso del tempo).

$s(t)$ può essere visto come, grazie alla formula di sintesi dello sviluppo in serie di Fourier:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\kappa\omega_0 t} \quad (2.1)$$

in cui:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (2.2)$$

e C_k viene calcolato dall'analisi dello sviluppo in serie di Fourier:

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\kappa\omega_0 t} dt \quad (2.3)$$

Ricordando, dalla matematica:

$$j^2 = -1 \quad (2.4)$$

$e^{j\kappa\omega_0 t}$ rappresenta una sinusoida e ponendo:

$$\omega_k = k\omega_0 \quad (2.5)$$

possiamo dire che qualsiasi segnale $s(t)$ può essere visto come una successione di sinusoidi di diversa pulsazione.

In formule:

$$s(t) \leftrightarrow \{C_k\} \quad (2.6)$$

dove per $\{C_k\}$ si intendere la lista dei coefficienti che formulano il segnale $s(t)$.

Siccome $\{C_k\}$ sono dei coefficienti che rappresentano delle sinusoidi, i coefficienti avranno una parte reale e una parte immaginaria.

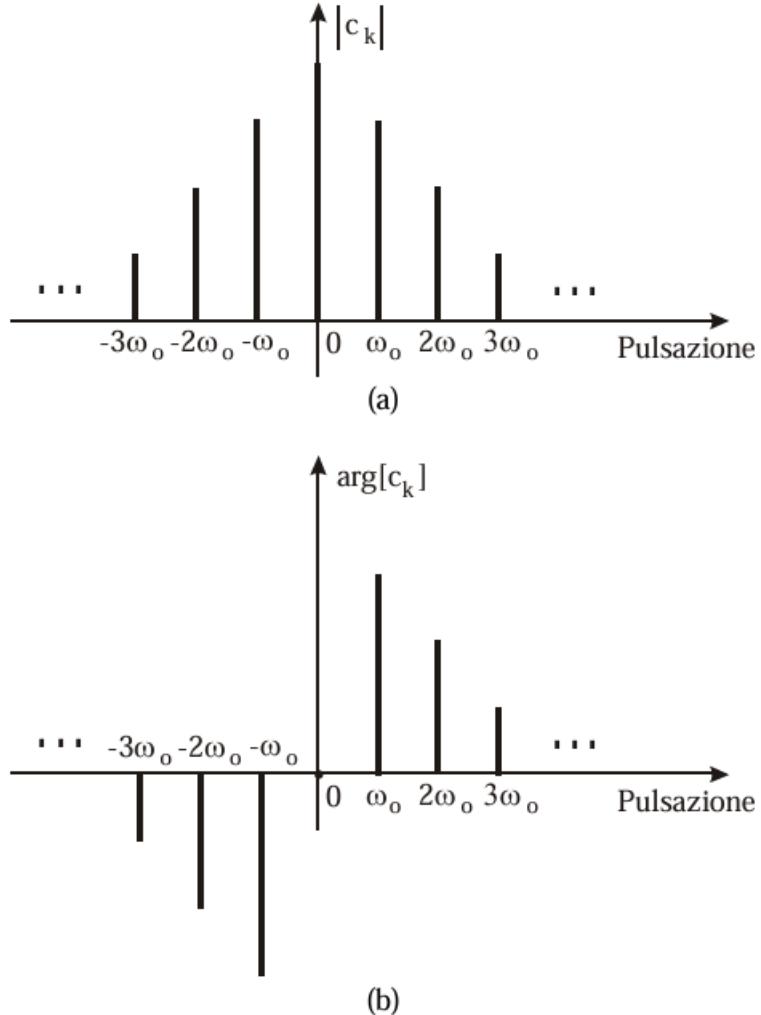
Il singolo coefficiente C_k avrà la parte reale, scritta come $\text{Re}[C_k]$ oppure $|C_k|$, e la parte immaginaria del coefficiente sarà indicata come $\text{Im}[C_k]$ oppure $\arg[C_k]$.

$|C_k|$ prende anche il nome di modulo di C_k , mentre $\arg[C_k]$ prende il nome di fase di C_k .

Dal punto di vista grafico, possiamo visualizzare tutti i moduli e le fasi dei coefficienti C_k usando lo spettro.

Lo spettro dei moduli di C_k prende il nome di spettro di ampiezza, mentre lo spettro delle fasi prende il nome di spettro di fase.

Un esempio di spettro di ampiezza e spettro di fase:



Come si vede dalla figura, nello sviluppo in serie di Fourier, gli spettri sono a righe perché le armoniche sono discrete, armoniche multiple della frequenza fondamentale.

Con i puntini si intendono armoniche infinite, nella realtà si prenderanno le armoniche significative.

2.2 Criterio di Dirichlet

Dal punto di vista matematico, non tutti i segnali periodici possono essere rappresentati usando la rappresentazione della serie di Fourier.

Il segnale $s(t)$ deve soddisfare il criterio di Dirichlet cioè:

- se $s(t)$ è assolutamente integrabile sul periodo T , o in formula:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)| dt < \infty \quad (2.7)$$

- se $s(t)$ è continua o presenta un numero finito di punti di discontinuità di prima specie
- se $s(t)$ presenta in un periodo T un numero finito di massimi e minimi

Allora, se $s(t)$ soddisfa questi criteri, la serie di Fourier converge al valore assunto dalla funzione $s(t)$ nei punti in cui questa è continua e alla semisomma del limite destro e sinistro nei punti in cui $s(t)$ presenta le eventuali discontinuità di prima specie.

I segnali che vedremo nel corso soddisfanno il criterio di Dirichlet.

2.3 Ortogonalità tra due segnali

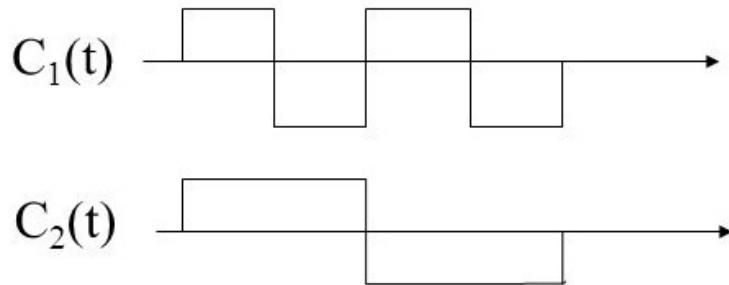
Due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$, in genere complessi, risultano ortogonali nell'intervallo $A \leq t \leq B$ se:

$$\int_A^B x_1(t)x_2^*(t)dt = 0 \quad (2.8)$$

in cui il simbolo * indica l'operazione di coniugato complesso.

Un esempio di sequenze ortogonali:

■ sequenze ortogonali:



Possiamo avere anche che:

$$\begin{cases} A = -\infty \\ B = \infty \end{cases} \quad (2.9)$$

Nel caso specifico, la condizione di ortogonalità tra due generiche funzioni espansione è verificata:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\kappa\omega_0 t} e^{-jh\omega_0 t} = \begin{cases} T & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h \neq k \end{cases} \quad (2.10)$$

Questa equazione è valida solo se $s(t)$ è un segnale reale.

2.4 Come ricavare moduli e fase in una serie di Fourier

Grazie alle formule di Eulero, possiamo scrivere la formula di sintesi della Serie di Fourier da:

$$s(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} C_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\kappa\omega_0 t} \quad (2.11)$$

Essendo un segnale $s(t)$ reale, e che quindi per $\kappa \leq 0$ si rispecchia quello che succede in $\kappa \geq 0$, la sommatoria possiamo scriverla da $\kappa \geq 0$, cioè:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{+\infty} [a_\kappa \cos(\kappa\omega_0 t) + b_\kappa \sin(\kappa\omega_0 t)] \quad (2.12)$$

o in alternativa:

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{+\infty} A_\kappa \cos(\kappa\omega_0 t - \phi_\kappa) \quad (2.13)$$

Per ricavare i coefficienti indicati nelle equazioni, possiamo usare le prossime equazioni:

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{T}} C_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt \quad (2.14)$$

$$a_\kappa = \frac{2}{\sqrt{T}} \operatorname{Re}[C_\kappa] = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(\kappa\omega_0 t) dt \quad (2.15)$$

$$b_\kappa = -\frac{2}{\sqrt{T}} \operatorname{Im}[C_\kappa] = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(\kappa\omega_0 t) dt \quad (2.16)$$

$$A_\kappa = \sqrt{a_\kappa^2 + b_\kappa^2} \quad (2.17)$$

$$\arctan\left(\frac{b_\kappa}{a_\kappa}\right) \quad (2.18)$$

Se il segnale è reale, è molto utile perchè gode di simmetria:

- se $s(t)$ è reale pari, quindi per un qualsiasi t ,

$$s(-t) = s(t) \quad (2.19)$$

lo sviluppo in serie di Fourier sarà anche pari, quindi si svolgeranno gli a_k in cui è presente un $\cos(\kappa\omega_0 t)$

- se $s(t)$ è reale dispari, quindi per un qualsiasi t ,

$$s(-t) = -s(t) \quad (2.20)$$

lo sviluppo in serie di Fourier sarà anche dispari, quindi si svolgeranno gli b_k in cui è presente un $\sin(\kappa\omega_0 t)$

Se $s(t)$ ha valore medio nullo, allora:

$$C_0 = a_0 = A_0 = 0 \quad (2.21)$$

2.5 Proprietà dello sviluppo di una serie di Fourier

Se $s(t)$ è un segnale periodico e soddisfa il criterio di Dirichlet, allora possiamo rappresentarlo nello sviluppo di una serie di Fourier.

Considerando un segnale $s(t)$ rappresentato in uno sviluppo di una serie di Fourier, il nuovo segnale $s'(t)$ gode delle seguenti proprietà:

Proprietà della traslazione temporale

Considerando τ un tempo costante, allora:

$$s'(t) = s(t - \tau) \leftrightarrow c'_\kappa = c_\kappa e^{-j\kappa\omega_0\tau} \quad (2.22)$$

Proprietà della traslazione in frequenza

Considerando:

$$\omega_A = n\omega_0 \quad (2.23)$$

in cui n è un numero, allora:

$$s'(t) = s(t)e^{j\omega_A t} \leftrightarrow c'_\kappa = c_{\kappa-n} \quad (2.24)$$

Proprietà di inversione dell'asse temporale

$$s'(t) = s(-t) \leftrightarrow c'_\kappa = c_{-\kappa} \quad (2.25)$$

Proprietà del coniugo

$$s'(t) = s^*(-t) \leftrightarrow c'_\kappa = c_{-\kappa}^* \quad (2.26)$$

Proprietà della derivazione

Considerando m un coefficiente di un numero intero,

$$s'(t) = \frac{d^m s(t)}{dt^m} \leftrightarrow c'_\kappa = c_{-\kappa} (j\kappa\omega_0)^m \quad (2.27)$$

Proprietà dell'integrazione

Se il valore medio del segnale è nullo, cioè:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt = 0 \quad (2.28)$$

allora:

$$s'(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^t s(t) dt \leftrightarrow \begin{cases} c'_0 = \sum_{\kappa \neq 0} \frac{c_\kappa}{j\kappa\omega_0} (-1)^\kappa \\ c'_\kappa = \frac{c_\kappa}{j\kappa\omega_0} \end{cases} \quad (2.29)$$

Proprietà di linearità

Considerando due segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$, di periodo T con i rispettivi coefficienti dello sviluppo della serie di Fourier $c_{1\kappa}$ e $c_{2\kappa}$:

$$s(t)' = A_1 s_1(t) + A_2 s_2(t) \leftrightarrow c'_\kappa = A_1 c_{1\kappa} + A_2 c_{2\kappa} \quad (2.30)$$

Proprietà della convoluzione

Considerando la convoluzione tra i due segnali nel periodo T,

$$C(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(\tau)s_2(t - \tau)d\tau \leftrightarrow c'_\kappa = c_{1\kappa}c_{2\kappa}\sqrt{T} \quad (2.31)$$

Per visualizzare graficamente cosa significa fare una convoluzione, ti lascio un video:

But what is a convolution? by 3Blue1Brown

<https://www.youtube.com/watch?v=KuXjwB4LzSA&t=129s>

Proprietà del prodotto

$$s'(t) = s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow c'_\kappa = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} c_{1h}c_{2(\kappa-h)} \quad (2.32)$$

Questa proprietà può essere vista anche come convoluzione discreta tra $c_{1\kappa}$ e $c_{2\kappa}$

Capitolo 3

Segnali aperiodici nel dominio della frequenza



3.1 Trasformata di Fourier

Dai segnali periodici del capitolo precedente, passiamo ora ai segnali aperiodici.

I segnali aperiodici possono essere visti come segnali periodici con T che tende ad infinito:

$$T \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \omega_0 \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

Non possiamo definire uno sviluppo in serie di Fourier, bensì la nuova rappresentazione per un segnale aperiodico si chiamerà trasformata di Fourier definita come:

$$S(\omega) = F[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.2)$$

L'anti-trasformata di Fourier, cioè l'inverso della trasformata di Fourier, è definito come:

$$s(t) = F^{-1}[S(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3)$$

Quindi possiamo vedere lo stesso segnale come:

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega) \quad (3.4)$$

Come lo sviluppo in serie di Fourier, possiamo definire lo spettro di ampiezza e di fase per una trasformata di Fourier:

$$S(\omega) = |S(\omega)|e^{j\theta_s(\omega)} \quad (3.5)$$

A differenza della serie di Fourier, gli spettri non saranno a righe, bensì continui.

3.2 Caratteristiche di un segnale Fourier trasformabile

Come nel caso dei segnali in serie di Fourier, non tutti i segnali possono essere Fourier trasformabili.

I segnali devono essere assolutamente integrabili:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty \quad (3.6)$$

I segnali che sono assolutamente integrabili vengono detti impulsivi.

Se il segnale $s(t)$ è reale:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[S(-\omega)] = \operatorname{Re}[S(\omega)] \\ \operatorname{Im}[S(-\omega)] = -\operatorname{Im}[S(\omega)] \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} |S(-\omega)| = |S(\omega)| \\ \theta_s(-\omega) = -\theta_s(\omega) \end{cases} \quad (3.7)$$

dove:

$$\operatorname{Re}[S(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(\omega t) dt \quad (3.8)$$

$$\operatorname{Im}[S(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} -s(t) \sin(\omega t) dt \quad (3.9)$$

Se $s(t)$ è reale pari, la sua trasformata è reale pari:

$$\operatorname{Re}[S(\omega)] = \operatorname{Re}[S(-\omega)] \quad (3.10)$$

$$\operatorname{Im}[S(\omega)] = 0 \quad (3.11)$$

Se $s(t)$ è reale dispari, la sua trasformata è immaginaria dispari:

$$\operatorname{Re}[S(\omega)] = 0 \quad (3.12)$$

$$\operatorname{Im}[S(\omega)] = -\operatorname{Im}[S(-\omega)] \quad (3.13)$$

3.3 Proprietà della trasformata di Fourier

Anche questo tipo di rappresentazione, ammette delle proprietà:

Proprietà della traslazione temporale

$$s'(t) = s(t - \tau) \leftrightarrow S'(\omega) = S(\omega)e^{-j\omega\tau} \quad (3.14)$$

Proprietà della traslazione in frequenza

Considerando ω_1 la frequenza traslata, possiamo dire che:

$$s'(t) = s(t)e^{j\omega_1 t} \leftrightarrow S'(\omega) = S(\omega - \omega_1) \quad (3.15)$$

Proprietà di inversione dell'asse temporale

$$s'(t) = s(-t) \leftrightarrow S'(\omega) = S(\omega) \quad (3.16)$$

Proprietà del coniugo

$$s'(t) = s^*(t) \leftrightarrow S' = S^*(-\omega) \quad (3.17)$$

Proprietà della derivazione

$$s'(t) = \frac{d^m s(t)}{dt^m} \leftrightarrow S'(\omega) = S(\omega)(j\omega)^m \quad (3.18)$$

Proprietà dell'integrazione

Se il valore medio è nullo:

$$S(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = 0 \quad (3.19)$$

allora:

$$S'(t) = \int_{-\infty}^t s(t) dt \leftrightarrow S'(\omega) = \frac{S(\omega)}{j\omega} \quad (3.20)$$

Grazie alla proprietà dei segnali impulsivi, quindi all'introduzione della Delta di Dirac, possiamo definire la trasformata di Fourier generalizzata anche per segnali con valore medio non nullo:

$$s'(t) = \int_{-\infty}^t s(t) dt \leftrightarrow S'(\omega) = \frac{S(\omega)}{j\omega} + \pi S(\omega = 0) \delta(\omega) \quad (3.21)$$

Proprietà della moltiplicazione per t

$$s'(t) = t^m s(t) \leftrightarrow S^\omega = j^m \frac{d^m S(\omega)}{d\omega^m} \quad (3.22)$$

Proprietà di dualità

Dato un segnale $s(t)$ la cui trasformata sia $S(\omega)$, la trasformazione di $S(t)$ risulta $2\pi s(-\omega)$:

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega) \text{ implica } S(t) \leftrightarrow 2\pi s(-\omega) \quad (3.23)$$

Questa proprietà è molto importante perché l'andamento del segnale di inizio del tempo alla rappresentazione in trasformata di Fourier è uguale all'andamento del segnale da trasformata di Fourier al segnale nel tempo sono uguali a meno di un fattore di 2π .

Quindi t e ω sono interscambiati.

Proprietà di linearità

$$s'(t) = A_1 s_1(t) + A_2 s_2(t) \leftrightarrow S'(\omega) = A_1 S_1(\omega) + A_2 S_2(\omega) \quad (3.24)$$

Proprietà della convoluzione

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \\ &= s_1(t) \otimes s_2(t) \\ &\uparrow \\ C(\omega) &= S_1(\omega) S_2(\omega) \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'integrazione viene svolta su τ e t viene visto come parametro nella formula di integrazione.

Proprietà del prodotto

$$s'(t) = s_1(t) s_2(t) \leftrightarrow S'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\theta) S_2(\omega - \theta) d\theta \quad (3.26)$$

L'integrazione viene svolta su θ e ω viene visto come parametro nella formula di integrazione.

A meno della costante $\frac{1}{2\pi}$, questa proprietà si dimostra grazie alla proprietà di dualità.

3.4 Altre caratteristiche sulla dualità tempo-frequenza

Di seguito verranno elencate alcune caratteristiche sulla dualità tempo-frequenza.

- Un segnale $s(t)$ che è limitato nel tempo, ha spettro illimitato sull'asse delle pulsazioni
- Un segnale con spettro delle pulsazioni limitato, ha un'evoluzione temporale illimitata in t .
(Questo si dimostra grazie alla proprietà di dualità tempo-frequenza spiegato nella sezione precedente)
- Possiamo definire B_ω la larghezza significativa di un segnale, cioè l'intervallo di pulsazioni in cui il modulo di $S(\omega)$ assume valori non trascurabili, maggiori di una soglia minima prefissata:
quanto maggiore risulta B_ω , $s(t)$ varierà più rapidamente.
- Possiamo definire D_t la durata significativa come l'intervallo di tempo in cui il segnale assume valori non trascurabili e definiamo Q come parametro di qualità.

In formule:

$$B_\omega D_t \geq Q \quad (3.27)$$

Generalmente:

$$Q = 2\pi \quad (3.28)$$

3.5 Teorema del cambiamento di scala

Un teorema che è importante sulla dualità tempo-frequenza è il seguente.

Consideriamo il segnale:

$$y(t) = s(\alpha t) \quad (3.29)$$

Se consideriamo $S(\omega)$ la trasformata di Fourier di $s(t)$, e α un parametro.

Al cambiare di α , ci saranno degli effetti diversi sullo spettro di $S(\omega)$:

- $|\alpha| > 1 \rightarrow$ compressione della scala dei tempi
- $|\alpha| < 1 \rightarrow$ dilatazione della scala dei tempi
- $\alpha < 0 \rightarrow$ inversione della scala dei tempi

Facendo la trasformata di Fourier di $y(t)$, avremo che:

$$y(t) = s(\alpha t) \leftrightarrow Y(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (3.30)$$

Si nota che una dilatazione dell'asse dei tempi comporta una compressione dell'asse delle pulsazioni e viceversa.

3.6 Teorema della modulazione

Consideriamo il segnale originale $s(t)$ e consideriamo il nuovo segnale $s'(t)$ e la sua trasformata di Fourier come:

$$\begin{aligned} s'(t) &= s(t) \cos(\omega_0 t) \\ &\quad \uparrow \\ S'(\omega) &= \frac{1}{2}[S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \tag{3.31}$$

3.6.1 Dimostrazione del teorema della modulazione

Utilizzando la formula di Eulero e l'argomento $\omega_0 t$:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t) = j(-1)^{\omega_0 t} \tag{3.32}$$

Possiamo riscrivere:

$$s'(t) = s(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow s'(t) = s(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \tag{3.33}$$

Di qui, applicando le proprietà di linearità e di traslazione in frequenza, si ottiene:

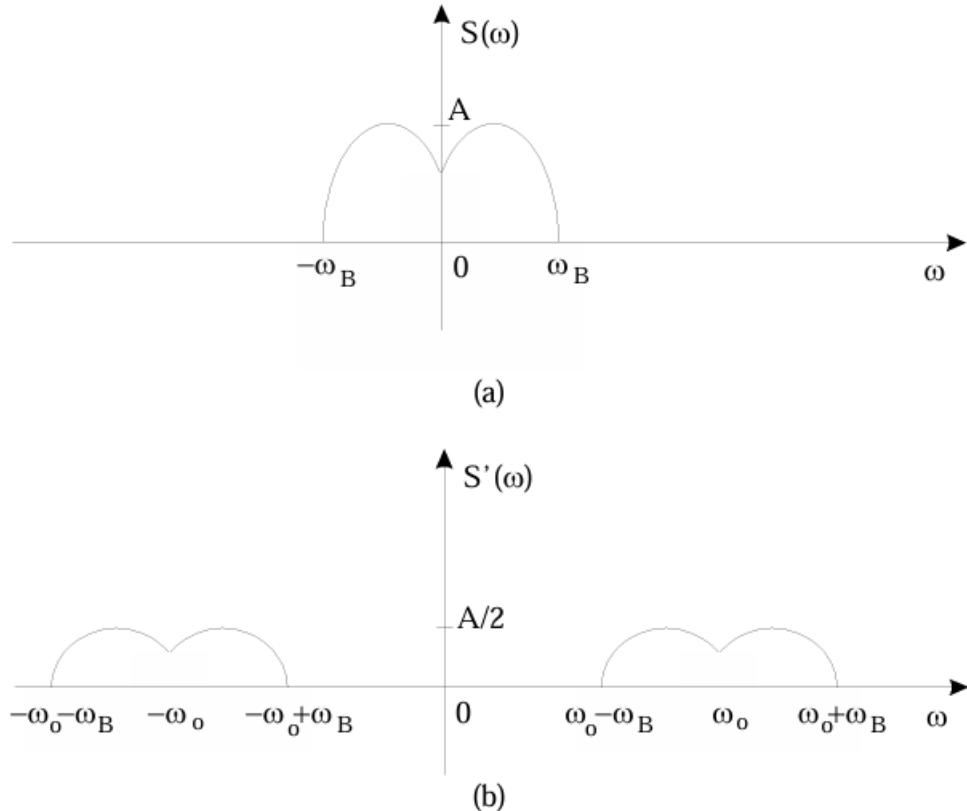
$$\begin{aligned} S'(\omega) &= \frac{S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)}{2} \\ &= \frac{1}{2}[S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \tag{3.34}$$

3.6.2 Considerazioni sul teorema della modulazione

Dal teorema della modulazione, notiamo che se la trasformata di Fourier del segnale $s(t)$ si espanderà nella banda $[-\omega_B, +\omega_B]$, lo stesso segnale si troverà centrato a destra in ω_0 con banda $[\omega_0 - \omega_B, \omega_0 + \omega_B]$, lo stesso accade a sinistra dello spettro.

Il segnale sarà lo stesso di quello originario centrato in $-\omega_0$ e ω_0 moltiplicato per $\frac{1}{2}$.

La figura seguente, spiega il teorema dal punto di vista grafico:



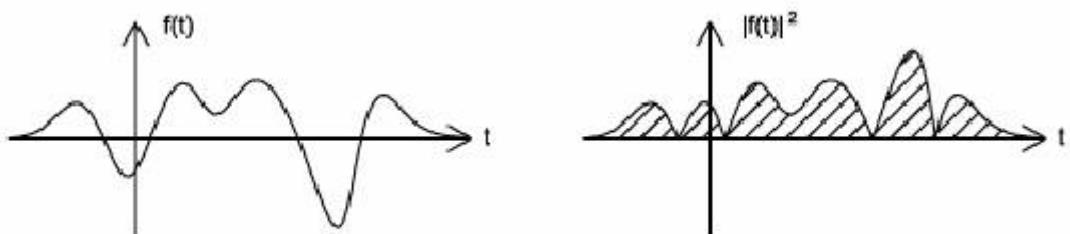
La figura in alto viene definita come il segnale in banda base, cioè la banda in cui è $s(t)$; mentre $S'(\omega)$ viene definita come il segnale in banda traslata.

La porzione di spettro in cui $|\omega| > \omega_0$ viene definita come banda laterale superiore, mentre la porzione di spettro per $|\omega| < \omega_0$ prende la banda laterale inferiore.

Se il segnale $s(t)$ è reale, allora le due sottobande godono di simmetria e lo spettro complessivo è simmetrico rispetto all'origine.

Capitolo 4

Proprietà di correlazione



4.1 Energia e potenza di un segnale nel tempo

Per conoscere un segnale, non ci serve sapere tutto il segnale, bensì ci possono essere utili solo alcune sue caratteristiche.

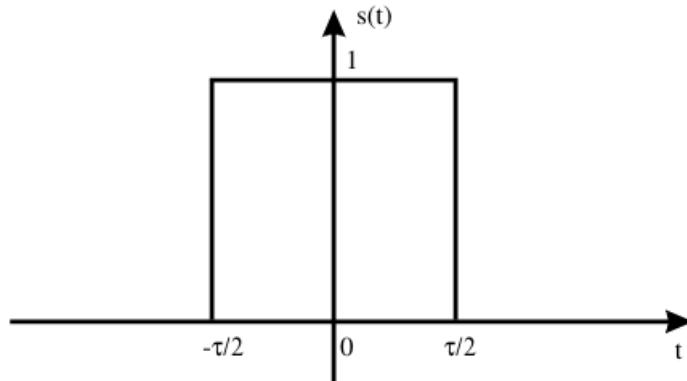
Dato un segnale $s(t)$ reale o complesso, si definisce energia totale E del segnale la seguente grandezza reale (se esiste):

$$\begin{aligned} E &= \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} s(t) \cdot s^*(t) dt \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |s(t)|^2 dt \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

E può essere visto come l'energia totale dissipata da un resistore di 1Ω quale ai suoi capi sia applicata la tensione $s(t)$ [V].

E può essere infinito, ma se $E > 0$, allora si dice che $s(t)$ è un segnale ad energia finita (o, sinteticamente, segnale di energia).

Un esempio di segnale di energia è l'impulso rettangolare con $E = \tau$ come il seguente:



Se due segnali sono ortogonali, quindi:

$$\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt = 0 \quad (4.2)$$

allora, l'energia totale è la somma delle energie dei due segnali.

In formule:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
E &= \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} [s_1(t) + s_2(t)] \cdot [s_1^*(t) + s_2^*(t)] dt \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |s_1(t)|^2 dt + \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |s_2(t)|^2 dt + 2 \operatorname{Re} \left[\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt \right] \\
&= E_1 + E_2 + 0 \\
&= E_1 + E_2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dato un segnale $s(t)$ reale o complesso, possiamo definire la potenza totale P del segnale la grandezza reale:

$$\begin{aligned}
P &= \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} s(t) \cdot s^*(t) dt \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |s(t)|^2 dt \geq 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Se P risulta finito e maggiore di zero, il segnale si dice di potenza finita (o sinteticamente, segnale di potenza).

Un segnale di potenza ha sempre energia infinita, mentre non sempre è vero il viceversa.

D'altro canto, un segnale ad energia finita ha potenza nulla.

Quindi, la potenza e l'energia sono due caratteristiche diverse di un segnale.

4.2 Energia e potenza di un segnale in frequenza

4.2.1 Teorema di Parseval

Possiamo esprimere l'energia e la potenza di un segnale $s(t)$ anche utilizzando il dominio della frequenza:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

Se $s(t)$ è un segnale periodico, per definizione, possiamo integrare nel periodo, quindi:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} |c_\kappa|^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Considerando la relazione tra pulsazione e frequenza:

$$\omega = 2\pi f \quad (4.8)$$

possiamo esprimere E in funzione di f :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \quad (4.9)$$

Questa ultima espressione prende il nome di densità spettrale, misurata in Hz.

4.2.2 Dimostrazione del Teorema di Parseval

Consideriamo due segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ e consideriamo le loro trasformate $S_1(\omega)$ e $S_2(\omega)$:

$$\begin{aligned} F[s_1(t) \cdot s_2(t)] &= \frac{1}{2\pi} S_1(\omega) \otimes S_2(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\Omega) \cdot S_2(\omega - \Omega) d\Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

dove \otimes indica l'espressione di convoluzione e ω è usato come parametro.

Dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\Omega) S_2(\omega - \Omega) d\Omega \quad (4.11)$$

Ponendo:

$$\omega = 0 \quad (4.12)$$

l'integrale in frequenza sarà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\Omega) S_2(-\Omega) d\Omega \quad (4.13)$$

Ponendo:

$$s_1(t) = s_2^*(t) = s(t) \leftrightarrow S_1(\omega) = S_2^*(\omega) = S(\omega) \quad (4.14)$$

l'integrale si riduce in:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (4.15)$$

4.2.3 Definizione di potenza in frequenza

Definiamo un segnale troncato $s_\Delta(t)$:

$$s_\Delta(t) = \begin{cases} s(t) & \text{in } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{in } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (4.16)$$

Dal punto di vista grafico, andremo a considerare la porzione di questo segnale di esempio:



L'energia di questo segnale sarà:

$$\begin{aligned} E_\Delta &= \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |s(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |S_\Delta(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (4.17)$$

in cui $S_\Delta(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $s_\Delta(t)$.

Ora possiamo definire la potenza di un segnale anche in frequenza:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{E_\Delta}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_\Delta(\omega)|^2 d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{|S_\Delta(\omega)|^2}{\Delta t} d\omega \end{aligned} \quad (4.18)$$

Quindi possiamo definire:

$$p(\omega) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{|S_\Delta(\omega)|^2}{\Delta t} d\omega \quad (4.19)$$

$p(\omega)$ prende il nome di densità spettrale di potenza.

P, usando la densità spettrale di potenza, sarà definita come:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) d\omega \quad (4.20)$$

Utilizzando la frequenza, in particolare lo spettro di potenza, possiamo definire la potenza come:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} p(f) df \quad (4.21)$$

4.3 Relazione tra energia, potenza, spettri e autocorrelazione

Definiamo l'autocorrelazione di un segnale di energia $s(t)$ come:

$$R_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)s(t + \tau)dt \quad (4.22)$$

Se $\tau = 0$:

$$R_s(\tau = 0) = E \quad (4.23)$$

Se $s(t)$ è un segnale reale, possiamo definire l'autocorrelazione del segnale come:

$$R_s = s(t) \otimes s(-t) \quad (4.24)$$

Quindi, dal punto di vista computazione è come la convoluzione tra due segnali, ma in questo caso, non viene fatta nessuna inversione dell'asse temporale, bensì la funzione viene solo traslata per τ .

Se il segnale $s(t)$ è reale pari, $R_s(\tau)$ coincide esattamente con la convoluzione del segnale con se stesso.

Applicando la proprietà della convoluzione, possiamo scrivere che:

$$F[R_s(t)] = |S(\omega)|^2 \quad (4.25)$$

Dunque, la trasformata di Fourier della funzione autocorrelazione, coincide con lo spettro di energia del segnale.

Per segnali di potenza, la definizione di autocorrelazione deve essere modificata come:

$$R_s(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} s^*(t)s(t + \tau)dt \quad (4.26)$$

Se $\tau = 0$:

$$R_s(\tau = 0) = P \quad (4.27)$$

Come l'autocorrelazione, facendo la trasformata di Fourier di $R_s(\tau)$ di un segnale di potenza, avremo che:

$$F[R_s(\tau)] = p(\omega) \quad (4.28)$$

Nel caso di segnali periodici, avremo che:

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^*(t)s(t + \tau)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} c_\kappa^* \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j\kappa\omega_0 t} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} c_h \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jh\omega_0(t+\tau)} dt \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} c_\kappa^* c_h e^{-j\kappa\omega_0 \tau} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\kappa\omega_0 t} e^{jh\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

Grazie alla proprietà di ortogonalità tra le due funzioni sinusoidali, visto anche nella sezione "2.3 Ortogonalità tra due segnali", abbiamo che:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\kappa\omega_0 t} e^{jh\omega_0 t} dt = \begin{cases} T & \text{se } \kappa = h \\ 0 & \text{se } \kappa \neq h \end{cases} \quad (4.30)$$

Sostituendo questa proprietà di ortogonalità tra le due funzioni sinusoidali, avremo che:

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s^*(t) s(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} |c_\kappa|^2 e^{j\kappa\omega_0 \tau} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Considerando la trasformata di Fourier di $R_s(\tau)$, abbiamo che:

$$F[R_s(\tau)] = p(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} |c_\kappa|^2 \delta(\omega - \kappa\omega_0) \quad (4.32)$$

dove $\delta(\omega)$ è l'impulso matematico, o Delta di Dirac.

Ponendo, $\Delta t = NT$ dove N è un numero intero e T è il periodo del segnale, abbiamo che la potenza del segnale periodico è:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{NT} \int_{-\frac{NT}{2}}^{\frac{NT}{2}} |s(t)|^2 dt \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{NT} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sapendo inoltre che, per un segnale periodico:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} |c_\kappa|^2 \quad (4.34)$$

e che per definizione l'integrale della Delta di Dirac da $[-\infty, +\infty]$ è uguale a uno, possiamo esprimere la potenza di un segnale periodico come:

$$P = \frac{\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} |c_\kappa|^2}{T} \quad (4.35)$$

Invece, per due segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$, possiamo definire la correlazione mutua, che possiamo vederla come la generalizzazione dell'autocorrelazione, come:

$$R_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t + \tau) s_2^*(t) dt \quad (4.36)$$

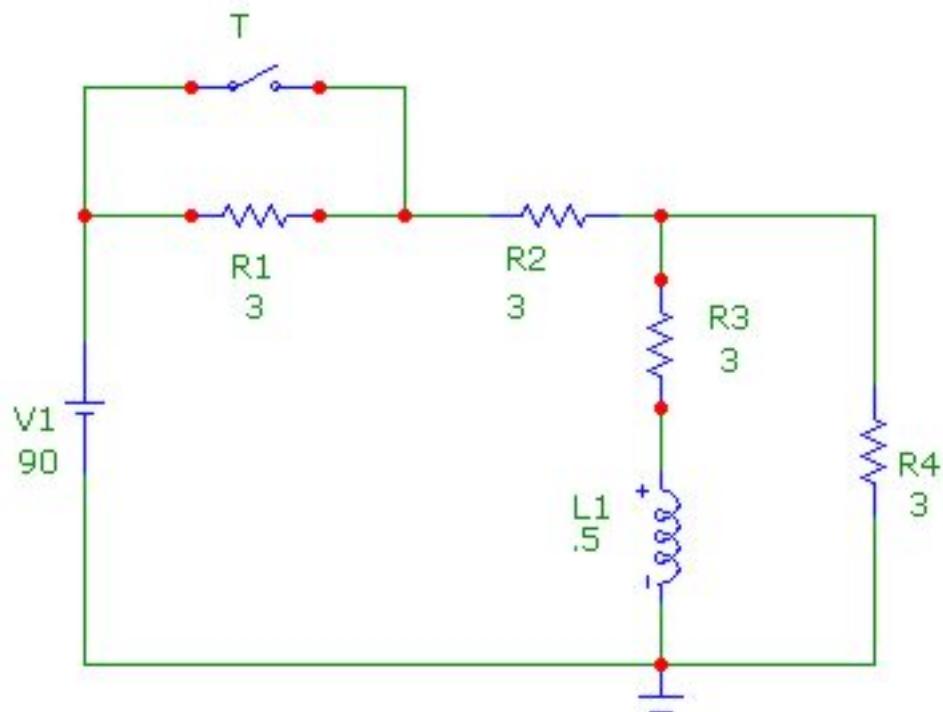
Con la stessa procedura della correlazione, abbiamo che:

$$F[R_{12}] = S_{12}(\omega) = S_1(\omega)S_2^*(\omega) \quad (4.37)$$

dove, $S_{12}(\omega)$ prende il nome di spettro di energia mutua di due segnali.

Capitolo 5

Sistemi lineari

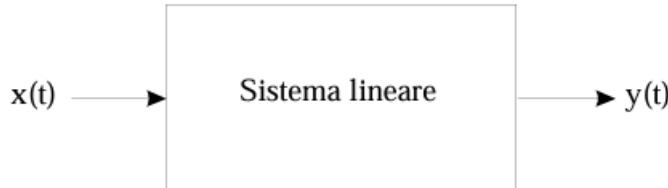


5.1 Cosa è un sistema lineare e cosa rappresenta

È detto sistema lineare un sistema descritto da un'equazione integro-differenziale lineare, che leggi un segnale di ingresso $x(t)$ (detto anche sollecitazione) al corrispondente segnale in uscita (o risposta) $y(t)$.

Se l'equazione integro-differenziale è a coefficienti costanti, il sistema risulta invariante nel tempo (detto anche sistema permanente).

Il problema fondamentale consiste nel determinare l'evoluzione dell'uscita $y(t)$ a partire dalla conoscenza dell'ingresso $x(t)$.



Il problema consiste nel descrivere opportunatamente il blocco lineare intermedio e nel mettere in relazione le due funzioni $x(t)$ e $y(t)$.

I sistemi lineari sono molto comodi perché, grazie al principio della sovrapposizione, è possibile sapere $y(t)$ come combinazione lineare di $y_1(t)$ e $y_2(t)$, che, rispettivamente, sono le uscite dei segnali di ingresso $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

Grazie alla proprietà di campionamento della delta di Dirac, possiamo scrivere che:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (5.1)$$

Questa formula ci spiega che $x(t)$ può essere vista come somma di un'infinità non numerabili di impulsi matematici $\delta(t - \tau)$ disposti in $t = \tau$ di area pari a $x(\tau)d\tau$, τ varia da $[-\infty, +\infty]$.

Indichiamo con $h(t)$ la risposta del sistema ad un impulso matematico in $t = 0$, cioè:

$$y(t) = h(t) \leftrightarrow x(t) = \delta(t) \quad (5.2)$$

Se il sistema è permanente, la risposta ad un impulso matematico allocata in $t = \tau$ sarà $h(t - \tau)$.

Grazie al principio della sovrapposizione degli effetti, possiamo scrivere che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (5.3)$$

$y(t)$ esprime la relazione ingresso-uscita ed è chiaramente un integrale di convoluzione.

Quindi possiamo applicare tutte le proprietà che abbiamo visto nei capitoli precedenti.

Possiamo esprimere la risposta impulsiva di un sistema come:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (5.4)$$

Nel corso degli appunti, \otimes o $*$ saranno segni interscambiabili per indicare una convoluzione tra i segnali

Come visto nella convoluzione, è conveniente esprimere e fare i calcoli in frequenza piuttosto che nel tempo.

La trasformata dell'uscita $y(t)$ sarà:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (5.5)$$

in cui $Y(\omega)$, $X(\omega)$ e $H(\omega)$ sono rispettivamente le trasformate di Fourier dell'uscita, dell'ingresso e della risposta impulsiva del sistema.

Sapendo $Y(\omega)$ è possibile riportare l'uscita nel dominio del tempo, anti-trasformando $Y(\omega)$:

$$y(t) = F^{-1}[Y(\omega)] = F^{-1}[X(\omega)H(\omega)] \quad (5.6)$$

La funzione $H(\omega)$ prende il nome di funzione di trasferimento del sistema.

$H(\omega)$ modifica lo spettro del segnale di ingresso, eliminando parte dello spettro originale: ecco perchè un sistema lineare viene definito anche come filtro.

Idealmente, le frequenze che passano nel filtro non sono modificate dal sistema-lineare, nella realtà ci saranno alcune modifiche.

Quindi, possiamo dividere i filtri in due categorie:

- filtri fisicamente realizzabili
- filtri idealmente realizzabili

In un filtro vero, vale a dire costruito con componenti reali, la risposta non può precedere la sollecitazione.

Sapendo che $h(t)$ è la risposta impulsiva in $t = 0$, ciò comporta che, in un filtro "vero" debba essere:

$$h(t) = 0 \text{ per } t < 0 \quad (5.7)$$

Questa proprietà va sotto il nome di principio di causalità e rappresenta la condizione necessaria affinché un filtro idealmente lo sia anche fisicamente.

5.2 Densità spettrale di energia e di potenza in un filtro

Essendo:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (5.8)$$

le densità spettrali di energia (ove applicabili) dei segnali in ingresso e in uscita sono tra loro legate dalla seguente relazione:

$$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)X(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 \cdot |X(\omega)|^2 \quad (5.9)$$

Una relazione analoga vale per gli spettri di potenza, indicati con $p_x(\omega)$ (per l'ingresso) e $p_y(\omega)$ (per l'uscita):

$$p_y(\omega) = |H(\omega)|^2 p_x(\omega) \quad (5.10)$$

Dunque, la densità in uscita si ottiene moltiplicando la densità in ingresso per il modulo al quadrato della funzione di trasferimento.

Sapendo la relazione tra densità spettrale e funzione di auto-correlazione di un segnale, possiamo conoscere la relazione ingresso-uscita anche nel dominio del tempo.

Anti-trasformando $|Y(\omega)|^2$ e $p_y(\omega)$ otteniamo che:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_h(t)R_x(\tau - t)dt \quad (5.11)$$

dove:

$$R_h(\tau) = h(t) * h^*(-t) \quad (5.12)$$

ovvero la funzione auto-correlazione della risposta impulsiva del sistema .

5.3 Il problema della distorsione

Come detto precedentemente, il sistema lineare può causare delle distorsioni nello spettro.

Un sistema lineare può solo togliere e/o mantenere parte dello spettro, non può aggiungere: in questo ultimo caso, il sistema viene definito non lineare.

Ci sono diversi tipi di distorsioni, quelli che andremo ad analizzare sono i seguenti.

- Distorsione lineare
- Distorsione non lineare
- Distorsione causata da percorsi multipli
- Canali con fading

5.3.1 Distorsione lineare

Per un dato sistema lineare, ad esempio un canale di trasmissione, un ingresso $x(t)$ produce un'uscita $y(t)$ viene "processato" secondo le seguenti caratteristiche.

Supponiamo lo spettro del segnale di ingresso come:

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta_x(\omega)} \quad (5.13)$$

e la funzione di trasferimento del sistema:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta_h(\omega)} \quad (5.14)$$

Allora, facendo la convoluzione nel tempo tra le due funzioni di trasferimento, quindi una moltiplicazione in ω , avremo che:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ &= |X(\omega)|e^{j\theta_x(\omega)} \cdot |H(\omega)|e^{j\theta_h(\omega)} \\ &= |X(\omega)| \cdot |H(\omega)|e^{j[\theta_x(\omega)+\theta_h(\omega)]} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dall'ultima equazione, notiamo che, attraverso il sistema lineare, lo spettro di ampiezza di $x(t)$ viene moltiplicato per il modulo della funzione di trasferimento e lo spettro di fase di $x(t)$ viene aumentato della fase della funzione di trasferimento.

Quindi, il segnale di uscita presenta, in genere, uno spettro diverso da quello del segnale di ingresso e risulta, rispetto a $x(t)$, distorto, quindi diverso.

Se si tratta di un sistema di comunicazione, generalmente, questa distorsione è voluta, ma, generalmente, non lo è.

Possiamo introdurre delle condizioni di non distorsione.

Il segnale risulta non distorto se viene amplificato o attenuato.

Considerando:

$$y(t) = Ax(t) \quad (5.16)$$

il segnale di ingresso viene moltiplicato se $A > 1$, viene attenuato se $A < 1$.

Inoltre, un'altra condizione per cui il segnale risulta non essere distorto se il segnale $x(t)$ risulta ritardato di un tempo costante t_d :

$$y(t) = Ax(t - t_d) \quad (5.17)$$

Nei sistemi reali, il ritardo è "fisiologico" in quanto legato al tempo di propagazione, e in certi casi ai tempi di elaborazione.

In assenza di distorsione, tutte le componenti del segnale di ingresso devono raggiungere l'uscita indistorte, mantenendo cioè i loro rapporti relativi.

In altri termini, significa che tutte le componenti in frequenza devono subire la stessa amplificazione o la stessa attenuazione.

Ciò implica che:

$$|H(\omega)| = A \quad (5.18)$$

Inoltre, per non avere distorsione, tutte le componenti in frequenza devono raggiungere l'uscita con lo stesso ritardo t_d .

Ad esempio, per un segnale cosinusoidale:

$$\cos(\omega t) \text{ con ritardo } t_d \rightarrow \cos[\omega(t - t_d)] = \cos(\omega t - \omega t_d) \quad (5.19)$$

Da questa breve dimostrazione, si conclude che un ritardo t_d comporta una variazione di fase pari a ωt_d .

Si conclude che, per un ritardo temporale t_d , la variazione di fase è proporzionale alla pulsazione ω .

Se $H(\omega)$ sia responsabile di un ritardo costante per tutte le componenti armoniche che l'attraversano, la sua fase deve essere proporzionale a ω .

Quindi:

$$\theta_h(\omega) = -\omega t_d \quad (5.20)$$

Da tutte queste osservazioni, si nota che, per non avere distorsioni $H(\omega)$ deve essere:

$$H(\omega) = A e^{j\omega t_d} \quad (5.21)$$

quindi, la trasformata di Fourier del segnale di uscita, sarà:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ &= X(\omega)A e^{j\omega t_d} \\ &= AX(\omega)e^{j\omega t_d} \end{aligned} \quad (5.22)$$

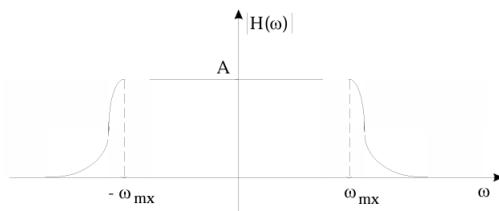
Riassumendo, esplicitando modulo e fase di $H(\omega)$, le condizioni di non distorsione lineare di un sistema sono le seguenti:

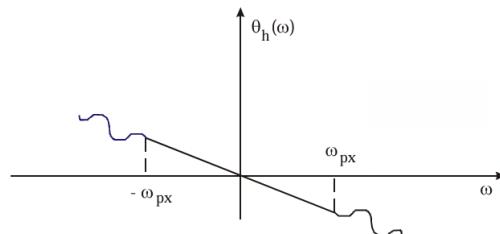
$$\begin{cases} |H(\omega)| = A \\ \theta_h(\omega) = -\omega t_d \end{cases} \quad (5.23)$$

Teoricamente, le condizioni appena citate dovrebbero valere per ogni pulsazione da $[-\infty, +\infty]$.

Nella pratica, considerando un filtro reale, queste condizioni saranno vere in una determinata banda del filtro, che possiamo nominare come $[-\omega_{mx}, +\omega_{mx}]$.

Un esempio dello spettro di un filtro reale:





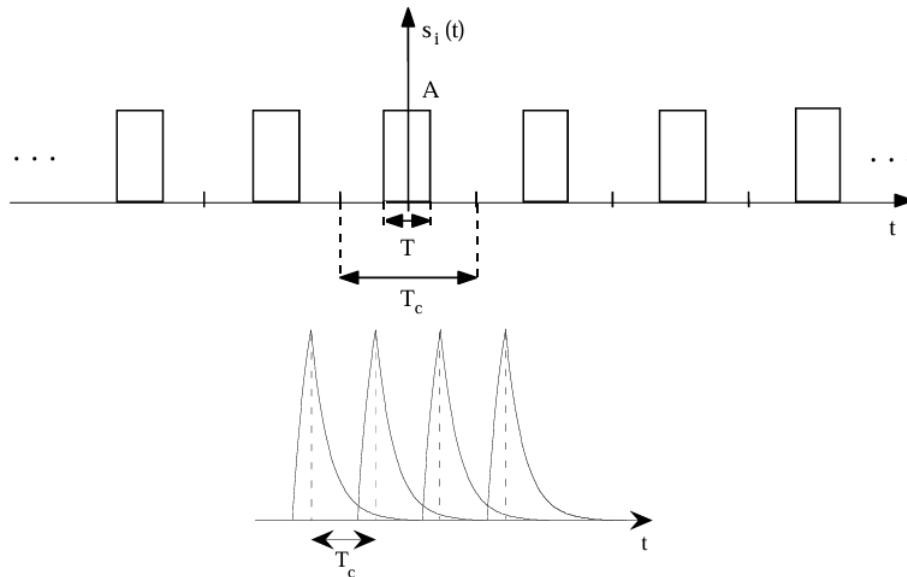
Praticamente, tutti i mezzi trasmissivi utilizzati nei sistemi di comunicazione presentano un comportamento passa-basso, e dunque eliminano le componenti ad alta frequenza del segnale che li attraversa.

Le componenti ad alta frequenza sono responsabili delle transizioni veloci.

Quindi, il segnale filtrato è costretto ad assumere un andamento più "smussato".

Definiamo come dispersione il meccanismo di allargamento nel tempo del segnale.

Gli effetti della dispersione sono particolarmente dannosi nelle trasmissioni numeriche, dove il segnale trasmesso è costituito da una sequenza di impulsi.



Le due figure mostrano, in alto, il segnale di ingresso, in basso, il segnale filtrato.

Dalla figura del treno di impulsi filtrato, notiamo che la coda del generico impulso si sovrappone agli impulsi successivi, determinando il fenomeno denominato "interferenza di intersimbolo" (o ISI).

Oltre ai filtri passa-basso, esistono anche i filtri passa-alto, che, a differenza dei filtri passa-basso, fanno passare le frequenze ad alta frequenza, non lasciando passare le frequenze a bassa frequenza.

Nella realtà, questi filtri non esistono, sono un'astrazione puramente matematica.

Nella realtà, oltre ai filtri-passa basso, avremo i filtri passa-banda (che a sua volta sono formati da due filtri passa-basso) che, come dicono il nome, fanno passare le componenti in frequenza di una certa banda.

Generalmente, nei mezzi trasmissivi e negli apparati ad essi collegati, il canale di trasmissione, oltre a bloccare la componente continua, $\omega = 0$, elimina le componenti ad alta frequenza, $\omega > \omega_{px}$.

Dunque, la migliore modellazione di un sistema di comunicazione è quella di un filtraggio passa-banda.

5.3.2 Distorsione non lineare

La proprietà di linearità di un dato sistema non è indipendente dal segnale di ingresso.

Il comportamento lineare vale sotto l'ipotesi di applicazione di (relativamente) piccoli segnali.

Quando l'ampiezza della sollecitazione diventa elevata, una descrizione accurata del sistema non può più prescindere dalle non linearità.

Quando l'ipotesi di piccoli segnali non può essere ritenuta valida, le non linearità devono essere introdotte nella descrizione del sistema e ne modificano significativamente la caratterizzazione.

Ci sono delle differenze rispetto alla distorsione lineare.

Il legame ingresso-uscita nel dominio del tempo non può più essere descritto da un integrale di convoluzione: è necessario specificare puntualmente il valore assunto dall'uscita in corrispondenza di un dato valore all'ingresso.

Supponendo che il legame sia instantaneo (sistema non lineare senza memoria), la caratteristica che lega il segnale di uscita $y(t)$ a quello di ingresso $x(t)$ può essere espressa come:

$$y(t) = f[x(t)] \quad (5.24)$$

dove f è una funzione generica non lineare.

Se f è una funzione non lineare, $y(t)$ possiamo esprimere con lo sviluppo in serie di Mac-Laurin come:

$$y(t) = a_0 + a_1x(t) + a_2x^2(t) + a_3x^3(t) + \dots + a_kx^k(t) + \dots \quad (5.25)$$

Se $y(t)$ è composto dai coefficienti a_0 e/o a_1 , allora possiamo dire che $y(t)$ è legato linearmente da $x(t)$, se $y(t)$ è composto da coefficienti maggiori di uno, allora $y(t)$ è legato da $x(t)$ da una relazione non lineare.

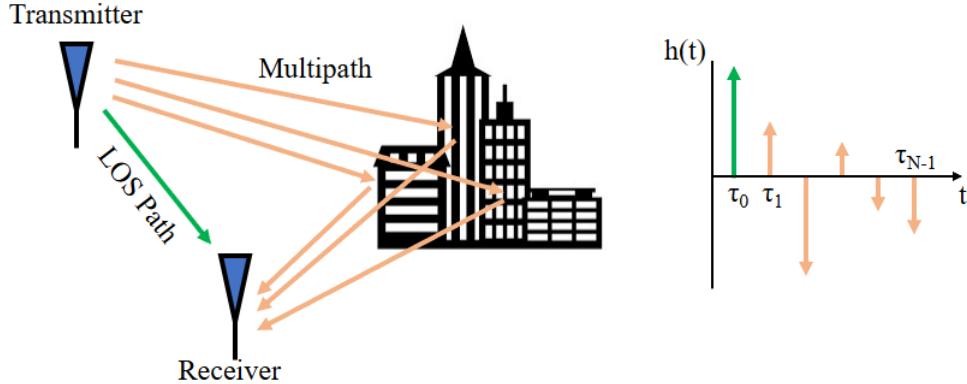
A causa della loro non linearità, per i sistemi non lineari non è definibile una funzione di trasferimento.

Per i sistemi non lineari, dovremo svolgere k convoluzioni per quanti sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Mac-Laurin di $y(t)$.

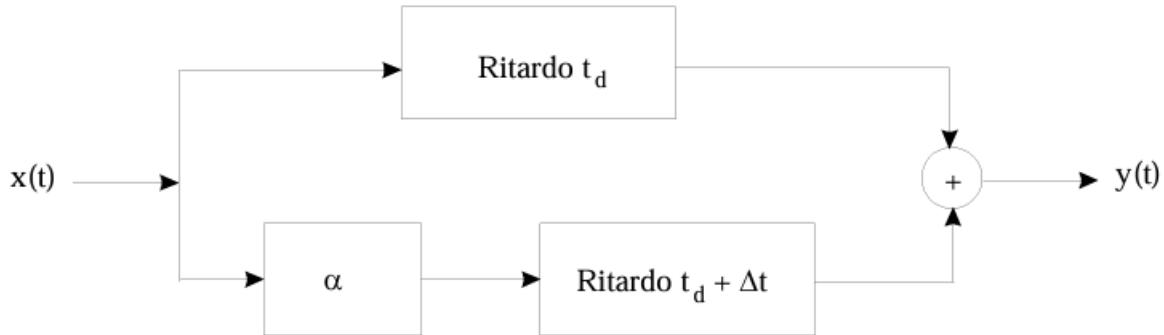
5.3.3 Distorsione causata da percorsi multipli

Una trasmissione a percorsi multipli (in inglese Multipath) ha luogo quando il segnale trasmesso arriva al ricevitore seguendo due o più percorsi caratterizzati da ritardi differenti.

Uno schema di quello che succede, ad esempio, in una trasmissione radio:



In presenza di percorsi multipli, il canale può essere schematizzato mediante più canali in parallelo, ciascuno con differente attenuazione relativa e differente ritardo temporale.



La seguente figura è un esempio di multipath con due soli percorsi:

- uno con guadagno unitario e ritardato di t_d
- l'altro con guadagno α e ritardato di $t_d + \Delta t$

Tipicamente, $\alpha < 1$: in questo caso si tratta, propriamente, di un'attenuazione; se $\alpha > 1$ si tratta di amplificazione, ma generalmente ciò non capita nel multipath.

Se consideriamo questo multipath, in frequenza, considerando i due cammini, avremo che:

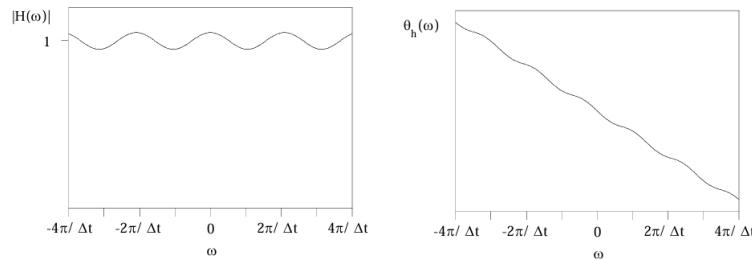
$$\begin{cases} H_1(\omega) = e^{-j\omega t_d} \\ H_2(\omega) = \alpha e^{-j\omega(t_d + \Delta t)} \end{cases} \quad (5.26)$$

Quindi, la funzione di trasferimento dell'intero sistema è:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_1(\omega) + H_2(\omega) \\ &= e^{-j\omega t_d} + \alpha e^{-j\omega(t_d + \Delta t)} \\ &= e^{-j\omega t_d} (1 + \alpha e^{-j\omega \Delta t}) \\ \text{Applicando la formula di Eulero} \quad &= e^{-j\omega t_d} [1 + \alpha \cos(\omega \Delta t) - j\alpha \sin(\omega \Delta t)] \quad (5.27) \\ &= \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(\omega \Delta t)} \cdot e^{-j[\omega t_d + \arctan \frac{\alpha \sin(\omega \Delta t)}{1 + \alpha \cos(\omega \Delta t)}]} \end{aligned}$$

Si può concludere che la trasmissione multipath dà luogo ad una funzione di trasferimento non ideale (sia nell'ampiezza che nella fase) ed è quindi responsabile di una particolare distorsione lineare.

In quanto tale, tale distorsione può essere almeno parzialmente corretta con l'uso di equilizzatori.



5.3.4 Canali con fading

Fino ad ora abbiamo assunto le caratteristiche del canale costanti nel tempo.

Tuttavia, nella pratica e nella vita reale, molti canali di trasmissione presentano proprietà variabili nel tempo.

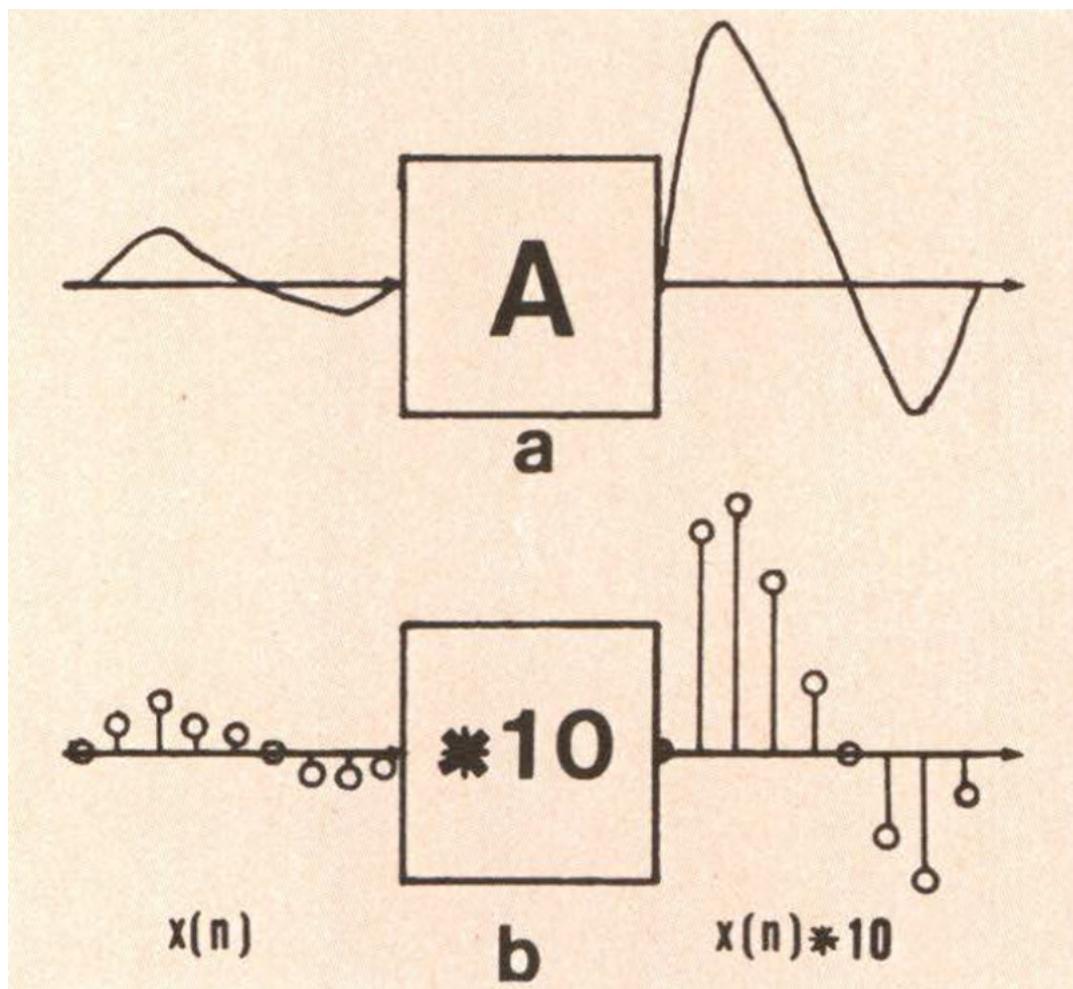
Il canale cambierà le sue proprietà nel tempo.

Perciò, la funzione di trasferimento del canale varia a sua volta nel tempo in maniera aleatoria, causando attenuazione pure aleatorie (o random in inglese) del segnale.

Questo tipo di fenomeno è noto come fading.

Capitolo 6

Cenni sulla sintesi dei filtri analogici e filtri numerici



6.1 Sintesi di un filtro

Idelmente, si progetta un filtro per eliminare parte del contenuto armonico di un segnale, lasciandone inalterata la porzione restante.

L'intervallo di frequenze del segnale in cui il filtro nominalmente non apporta delle modifiche prende il nome di banda passante del filtro.

Un filtro, in base al suo scopo, viene definito come:

- filtro passa-basso
- filtro passa-alto
- filtro passa-banda

Un filtro ideale dovrebbe essere caratterizzato da una funzione di trasferimento unitaria all'interno della banda passante, mentre la funzione di trasferimento dovrebbe essere identicamente nulla all'esterno della banda passante.

In altri termini, il filtro non dovrebbe attenuare le frequenze desiderate, mentre l'attenuazione dovrebbe essere infinita per quelle indesiderate.

Grazie alla definizione e spiegazione di cosa è un filtro, possiamo scrivere che è importante sia lo spettro di ampiezza della funzione di trasferimento che lo spettro di fase.

Idealmente, un filtro dovrebbe introdurre un ritardo costante su tutte le componenti armoniche entro la banda passante, e questo si traduce, notorialmente, in un andamento lineare della sua caratteristica di fase nello stesso intervallo di frequenze.

Il comportamento ideale, riguarda la transizione brusca da banda passante (in inglese pass band) a banda eliminata (stop band) può essere approssimato da un filtro reale.

La sintesi di un filtro comincia con l'assegnazione della cosiddetta "maschera" (mask) del suo spettro di ampiezza.

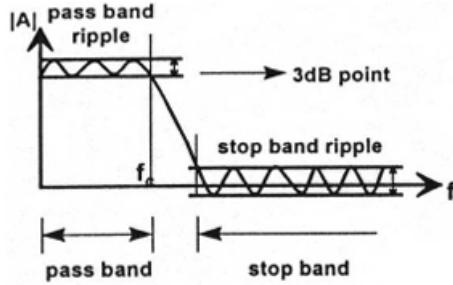
La maschera contiene le informazioni sul comportamento del filtro (quindi se è un filtro passa-alto, passa-basso, passa-banda) e le tolleranze ammissibili.

Siccome il comportamento ideale non porrà mai essere conseguito, si accettano i seguenti criteri:

- lo spettro di ampiezza (cioè il modulo della funzione di trasferimento) del filtro presenti una oscillazione (ripple) residua all'interno della banda passante
- la regione di transizione da banda passante a banda eliminata abbia estensione non nulla
- il comportamento in banda eliminata possa essere non ideale, con una oscillazione intorno allo zero, ovvero con una tendenza asintotica a zero

La maschera del filtro, impostata in fase di progetto, specifica i margini di accettabilità delle non idealità elencate.

6.1.1 Esempi di filtri passa-basso



Questo è un esempio di una maschera di un filtro passa-basso.

Possiamo notare che:

- il valore del guadagno in banda passante, idealmente dovrebbe essere uguale a uno, ma nella realtà può essere maggiore di 1 se il filtro amplifica o minore di 1 se il filtro attenua
 - la frequenza di taglio f_c del filtro, definita come il valore di frequenza per cui il guadagno è sceso di $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ volte il valore nominale all'interno della banda passante.
- In altri termini, considerando il guadagno del filtro $|A_0|$ si ha dunque $|H(f_c)| = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$ o, usando i db, $|H(f_c)|_{db} = |A_0|_{db} - 3_{db}$

Un filtro passa-basso di questo tipo può essere sintetizzato, quindi progettato e fisicamente realizzato, assemblando insieme componenti resistivi, capacitivi e induttivi, scegliendo a priori la frequenza di taglio desiderata.

Ci sono diverse famiglie di filtri.

Un esempio di famiglia di filtri passa-basso sono i filtri di Butterworth.

L'andamento del modulo, per questa famiglia di filtri, è del tipo:

$$|H_n(f)| = |A| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}} \quad (6.1)$$

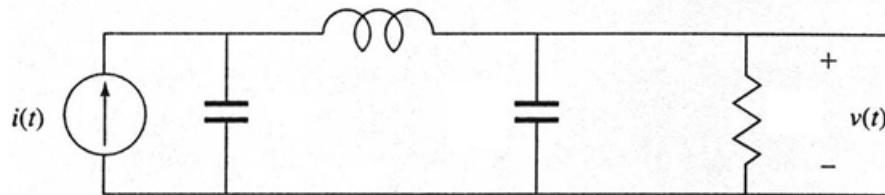
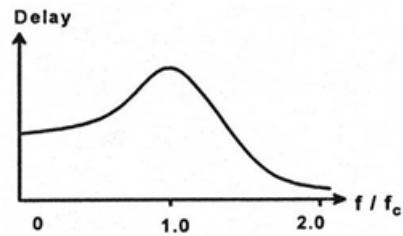
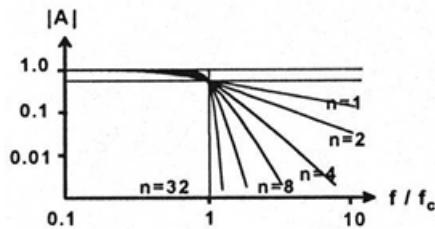
dove n è un numero intero e indica l'ordine del filtro: il suo valore determina l'estensione della regione di transizione da banda passante a banda eliminata.

Di seguito, il modulo, la fase e la realizzazione di un filtro di Butterworth:

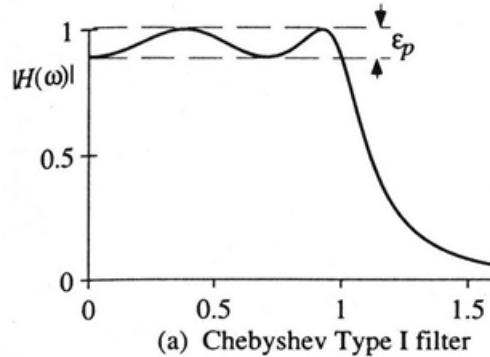
Un'altra famiglia di filtri passa-basso sono i filtri di Chebyshev.

Un filtro di Chebyshev è caratterizzato da un andamento dello spettro di ampiezza esprimibile come :

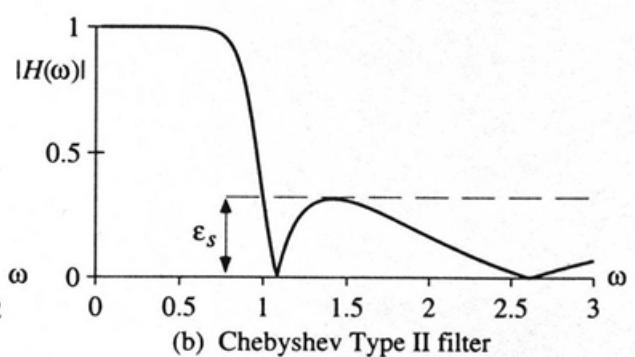
$$|H_n(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p C_n^2 \left(\frac{f}{f_s}\right)}} \quad (6.2)$$



Di seguito, lo spettro delle ampiezze di due filtri Chebyshev:



(a) Chebyshev Type I filter



(b) Chebyshev Type II filter

Un'altra famiglia di filtri sono quelli di Bessel, il cui modulo è costante per tutte le frequenze, ma è molto utile per migliorare la fase.

6.1.2 Esempi di filtri digitali

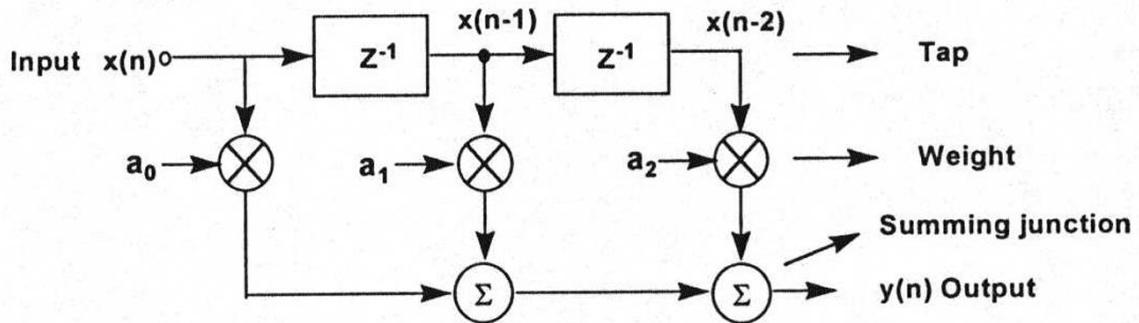
Se il segnale è digitale, quindi non è più analogico, avremo bisogno di filtri digitali, quindi non ci saranno più resistori, induttori e condensatori bensì efficienti programmi di calcolo chiamati software packages.

I filtri digitali prendono il nome anche di filtri numerici (in inglese digital filter).

Un filtro digitale è costituito da:

- $x[n]$, il segnale di ingresso, è costituito da una serie di campioni discreti, estratti da una forma continua alla frequenza di campionamento f_s in cui ogni $x[n_i]$ è contenuto in un regostro
- Blocchi z^{-1} che rappresentano un ritardo di simbolo, o periodo di campionamento $T_s = \frac{1}{f_s}$
- tap, che sono gli elementi di ritardo
- weight, o pesi in italiano, sono i coefficienti che moltiplicano le uscite dei tap
- sommatori (in inglese summing function) che sommano le uscite dei tap pesate dai wieght

Un esempio di filtro digitale:



La funzione di uscita del filtro di esempio è:

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n - 1] + a_2x[n - 2] \quad (6.3)$$

Come nel caso analogico, se il filtro è lineare, possiamo esprimere l'uscita di un filtro con la sua risposta impulsiva:

$$y[n] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[n]h[n - \kappa] \quad (6.4)$$

Questa equazione è la convoluzione in digitale, in cui $x[n]$ è la sequenza di ingresso e $h[n]$ è la risposta impulsiva.

In base alla risposta impulsiva del filtro, possiamo distinguere due categorie di filtri:

- i FIR, Finite Impulse Response
- gli IIR, Infinite Impulse Response

I FIR hanno questo nome perchè la loro risposta impulsiva è finita, quindi la loro uscita è del tipo:

$$y[n] = \sum_{\kappa=0}^M b_\kappa x[n - \kappa] \quad (6.5)$$

La loro risposta impulsiva è del tipo:

$$h[n] = \sum_{\kappa=0}^M b_\kappa \delta[n - \kappa] = \begin{cases} b_n & \text{se } 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (6.6)$$

Un filtro in cui la risposta dipende dall'uscita negli istanti precedenti è un filtro ricorsivo, o anche detto IIR.

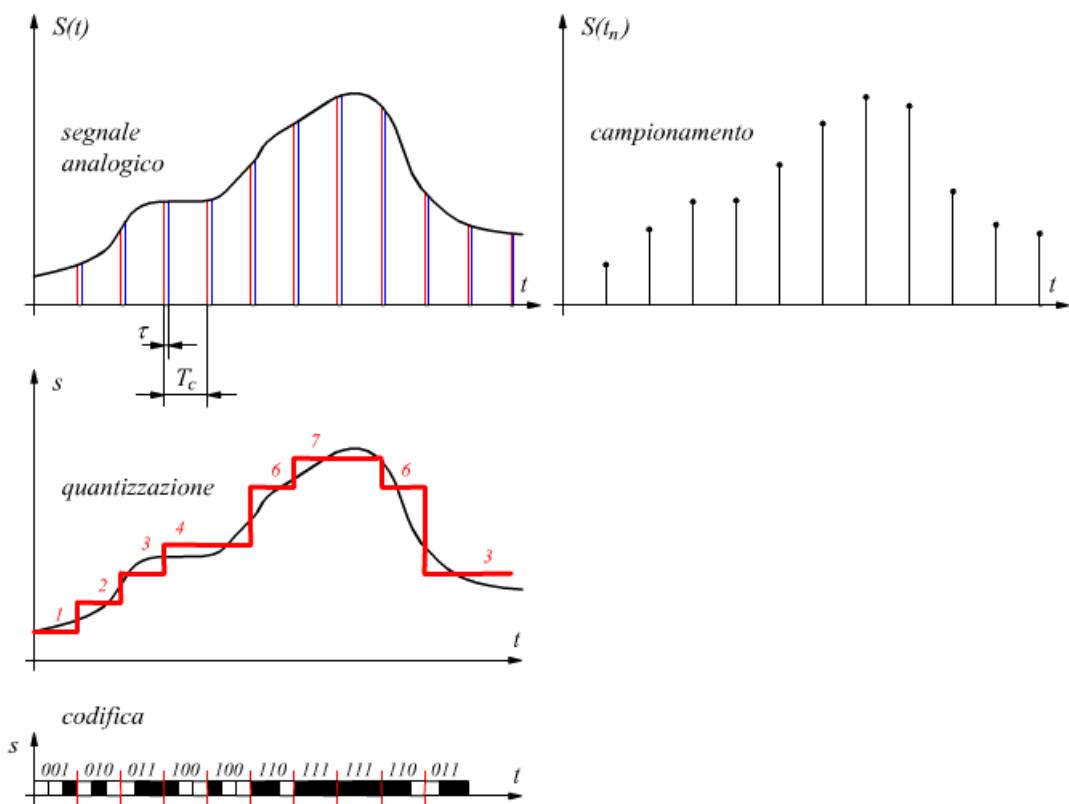
I filtri IIR sono, in linea di principio, più efficienti rispetto ai filtri FIR perché hanno bisogno di meno tap per avere lo stesso roll-off rate.

In certi casi, si preferiscono i filtri FIR grazie alla loro caratteristica di essere, per definizione, sempre stabili.

In generale, maggiori sono i registri, maggiore sarà il tempo di elaborazione.

Capitolo 7

Teorema del campionamento



7.1 Cosa è il campionamento e quali segnali soddisfano questo tipo di rappresentazione

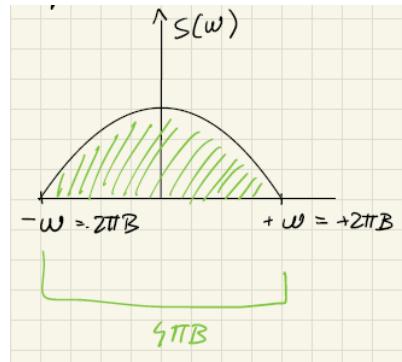
Come la trasformata di Fourier, anche il teorema del campionamento può essere visto come una possibile rappresentazione del segnale.

Il campionamento non modifica il dominio del segnale $s(t)$, quindi il dominio del segnale campionato rimane quello dei tempi.

I segnali che possono essere campionati sono quelli limitati in banda, con banda compresa (in pulsazione) tra $-2\pi B$ e $2\pi B$.

Se consideriamo B costante, appartengono alla classe i segnali che non vengono alterati nel transito attraverso un filtro passa-basso ideale con banda $2\pi B$.

Un esempio grafico di un segnale campionabile:



Il teorema del campionamento stabilisce che la conoscenza del segnale $s(t)$ è del tutto equivalente alla conoscenza dei suoi campioni $s(kT_c)$, con k variabile intera, ottenuti calcolando $s(t)$ per $t = kT_c$.

T_c prende il nome di intervallo (o tempo) di campionamento.

Il suo inverso

$$f_c = \frac{1}{T_c} \quad (7.1)$$

è la frequenza di campionamento e rappresenta il numero di campioni del segnale per unità di tempo che è necessario considerare ai fini della rappresentazione.

Quindi, grazie a questo teorema, conoscere i campioni ogni T_c è come conoscere tutto $s(t)$ continuo.

Come ogni rappresentazione, non solo è necessaria la procedura per definire i campioni dal segnale $s(t)$, ma è anche necessaria la procedura inversa.

Consideriamo il segnale $s(t)$ e la sua trasformata di Fourier $S(\omega)$.

Possiamo vedere $S(\omega)$ come alla rappresentazione elementare (all'interno di un periodo) di un segnale periodico in ω con periodo pari a $4\pi B$ in cui il segnale è centrato in $\omega = 0$.

Il segnale poi, viene periodicizzato nello spettro del segnale, proprietà molto importante nel campionamento.

In quanto periodica, la funzione così ottenuta può infatti essere sviluppata in serie di Fourier: rispetto alla notazione classica (in cui il segnale che viene sviluppato è una funzione del tempo) occorre sostituire t con ω e tener conto del fatto che il periodo vale $4\pi B$.

7.1. COSA È IL CAMPIONAMENTO E QUALI SEGNALI SODDISFANO QUESTO TIPO DI RAPPRESENTAZIONE

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi B}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{jk\omega}{2B}} \quad (7.2)$$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi B}} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S(\omega) e^{-\frac{jk\omega}{2B}} d\omega \quad (7.3)$$

7.1.1 Dimostrazione del Teorema del campionamento

Il segnale $s(t)$ può essere espresso come anti-trasformata di $S(\omega)$, cioè:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S(\omega) e^{\jmath\omega t} d\omega \quad (7.4)$$

Siccome il segnale $s(t)$ è limitato in banda, risulta che:

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{B}} s\left(-\frac{k}{2B}\right) \quad (7.5)$$

Sapendo che:

$$T_c = \frac{1}{2B} \quad (7.6)$$

possiamo scrivere:

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{B}} s(-kT_c) \quad (7.7)$$

Questa ultima equazione esprime esplicitamente il teorema del campionamento.

Se infatti è vero che la conoscenza dei coefficienti c_k è equivalente alla conoscenza della funzione $S(\omega)$ e quindi di $s(t)$, questa ultima equazione ci dimostra che questi coefficienti possono essere determinati campionando il segnale $s(t)$ in corrispondenza di multipli di T_c .

Un segnale limitato in banda non è necessariamente descritto dall'infinità non numerabili di valori che esso assume in ciascuno dei possibili istanti distinti nel tempo; per la sua completa conoscenza è sufficiente la determinazione dei valori che esso assume in corrispondenza di tutti e soli gli instanti multipli di $\frac{1}{2B}$.

7.2 Ricostruzione del segnale $s(t)$ partendo dai coefficienti

Partendo dalla definizione di segnale in ω :

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi B}} \int_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{j k \omega}{2B}} \quad (7.8)$$

e sapendo che c_k , per un segnale limitato in banda, vale:

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{B}} s(-kT_c) \quad (7.9)$$

possiamo scrivere che $S(\omega)$ diventa:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2B} s(-kT_c) e^{jk\omega T_c} \quad (7.10)$$

Considerando solo l'intervallo di frequenze $[-2\pi B, 2\pi B]$ in cui è allocato il segnale $s(t)$ e sostituendo $-k$ con k , avremo che:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2B} s(kT_c) e^{-jk\omega T_c} \text{ in } -2\pi B \leq \omega \leq 2\pi B \quad (7.11)$$

Anti-trasformando $S(\omega)$, abbiamo che:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_c) \frac{\sin[2\pi B(t - kT_c)]}{2\pi B(t - kT_c)} \quad (7.12)$$

Siccome $\frac{\sin[2\pi B(t - kT_c)]}{2\pi B(t - kT_c)}$, che prende il nome di funzione sinc, che ha massimo uguale a 1 in $t = kT_c$, prende il nome di funzione di campionamento.

Al variare di k , le funzione di campionamento che hanno la stessa struttura qualunque sia il segnale da rappresentare, sono tra loro ortogonali.

Si hanno dunque condizioni analoghe a quelle dei segnali con sviluppo in serie di Fourier.

I campioni del segnale prendono dunque il posto dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier.

7.3 Dualità tempo-frequenza nel campionamento

Un'ulteriore considerazione riguardo il valore di f_c è che, dalla definizione di f_c e la relazione con B , abbiamo che:

$$f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{1}{\frac{1}{2B}} = 2B \quad (7.13)$$

Quindi:

$$f_c \geq 2B \quad (7.14)$$

All'aumentare di B , anche f_c aumenta, tanto che al limite, per $B \rightarrow \infty$, il campionamento dovrebbe considerare tutti i possibili istanti temporali.

7.4 Tipi di campionamento

In questa sezione analizzeremo quattro tipi di campionamento:

- Campionamento ideale
- Campionamento naturale
- Campionamento istantaneo
- Campionamento di segnali passa-banda

7.4.1 Campionamento ideale

Per campionamento ideale si intende il campionamento di un segnale utilizzando il famoso impulso matematico (Delta di Dirac), la quale ha durata infinitesima, ma ampiezza corrispondente infinita.

Consideriamo una successione di impulsi matematici:

$$s_p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) \quad (7.15)$$

Moltiplicando s_p per $s(t)$, possiamo svolgere un campionamento ideale.

Il segnale campionato in modo ideale sarà:

$$\begin{aligned} s_c(t) &= s(t) \cdot s_p(t) \\ &= s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_c) \delta(t - kT_c) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Avendo a che fare con una Delta di Dirac, nella realtà non riusciremo mai a realizzare un campionamento ideale.

Andando nel dominio in ω , avremo che la successione di impulsi matematici $s_p(t)$ sarà:

$$S_p(\omega) = \omega_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_c) \quad (7.17)$$

in cui:

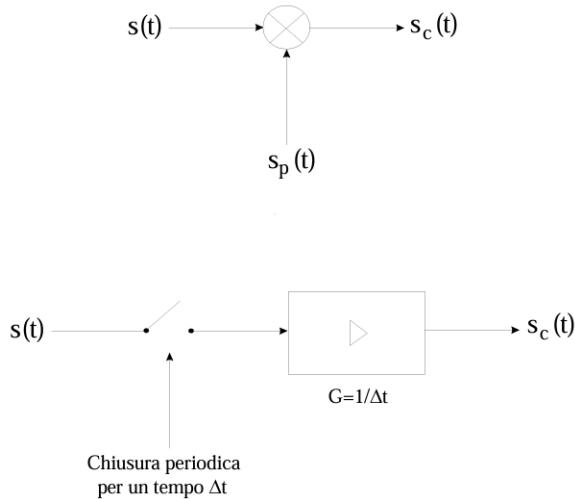
$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{2\pi}{T_c} \quad (7.18)$$

Quindi, la trasformata di Fourier della sequenza di impulsi matematici distanziati nel tempo di T_c è dunque, a sua volta, una sequenza di impulsi matematici distanziati in pulsazione di ω_c .

Ricordando la proprietà della delta di Dirac, in cui la convoluzione con una funzione generica restituisce la funzione stessa centrata dove era posizionata la delta di Dirac, si può concludere che:

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= \frac{\omega_c}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega - k\omega_c) \\ &= \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega - k\omega_c) \end{aligned} \quad (7.19)$$

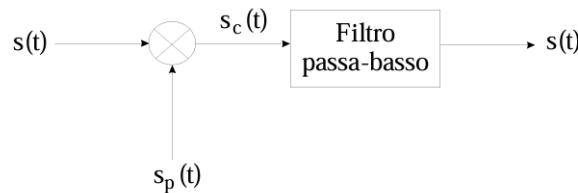
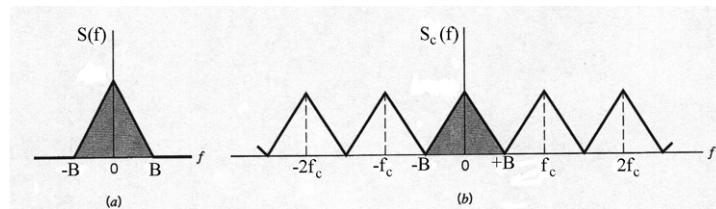
Questi schemi possono essere utili per visualizzare le equazioni:



Ora facciamo lo step inverso.

Partendo dai campioni, possiamo riottenere il segnale: per fare ciò, ci serve un filtro passa-basso.

Lo schema generale del sistema diventa:



Ponendo:

$$f_c = 2B \quad (7.20)$$

ci permette di non modificare il segnale originale senza avere distorsione.

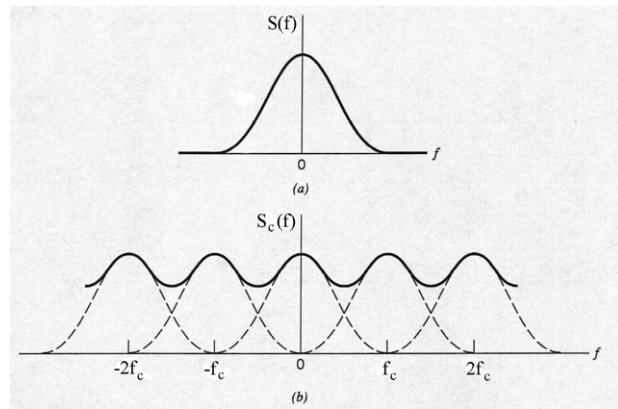
Se invece:

$$f_c < 2B \quad (7.21)$$

si sta svolgendo un sottocampionamento (undersampling in inglese).

Sottocampionando il segnale, questo ultimo avrà delle distorsioni, quindi degli effetti non lineari.

Un esempio di un sottocampionamento:



Se invece si sovra-campiona, quindi:

$$f_c > 2B \quad (7.22)$$

si sta sovraccampionando (in inglese oversampling) il segnale.

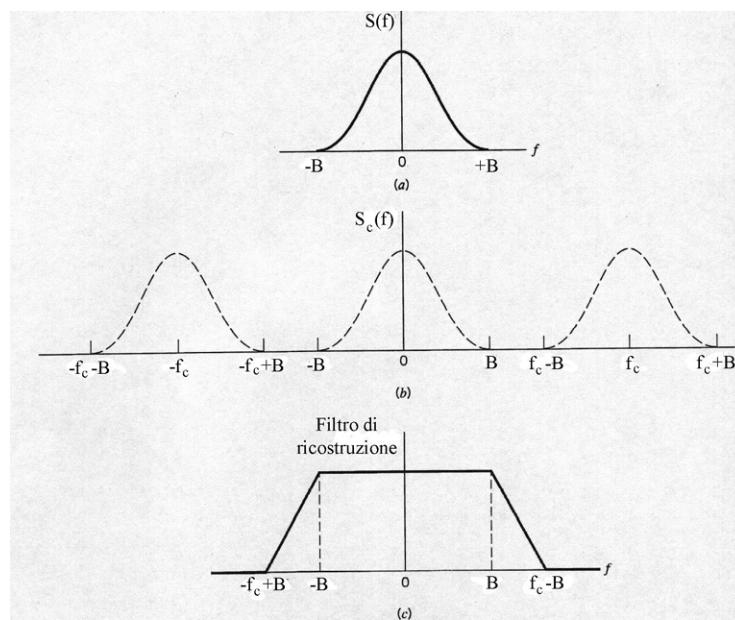
L'assunzione di una frequenza di campionamento f_c maggiore di quella strettamente necessaria, non altera le prestazioni del campionamento, anzi, ne semplifica l'implementazione pratica.

La condizione:

$$f_c \geq 2B \quad (7.23)$$

prende il nome di condizione di Nyquist.

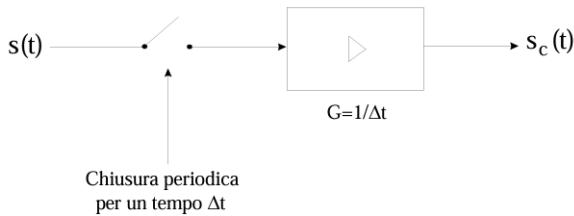
Un esempio di sovra-campionamento:



7.4.2 Campionamento naturale

L'idealità dello schema di campionamento ideale sta nella impossibilità di utilizzare come funzione campionante una successione di Delta di Dirac.

Considerando questo sistema:



e Δt un tempo infinitesimo, allora non avremo più una successione di impulsi, bensì una successione di impulsi rettangolari con seguente funzione:

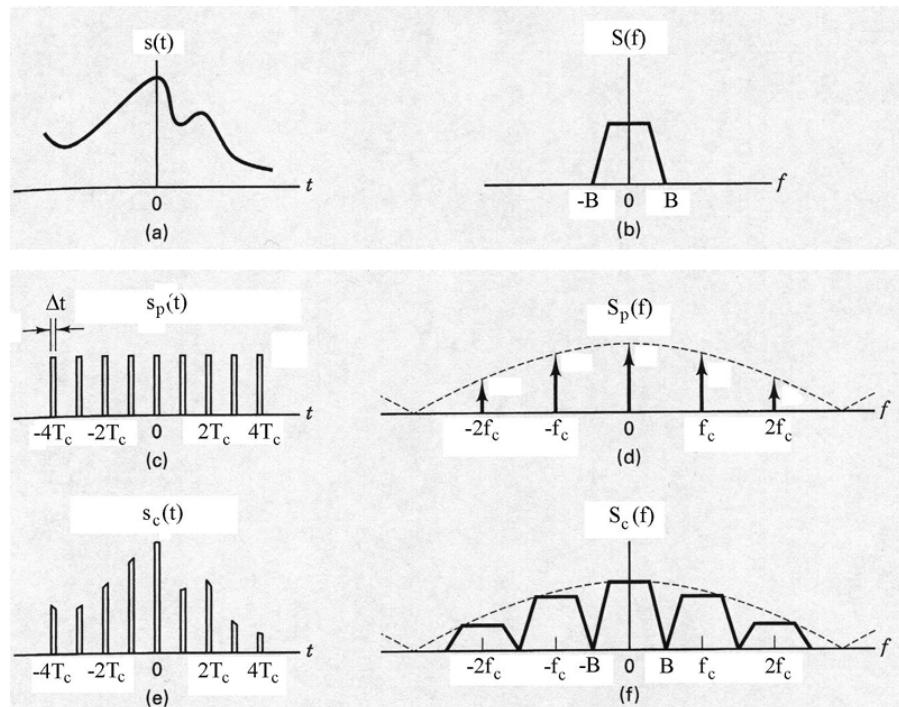
$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_l(t - kT_c) \quad (7.24)$$

in cui $s_l(t)$ è l'impulso rettangolare unitario:

$$s_l(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{se } |t| > \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (7.25)$$

Quando il segnale $s_p(t)$ è moltiplicato per $s(t)$, il segnale campionato segue esattamente l'andamento del segnale in ingresso, ma limitatamente agli intervalli, periodici, di durata Δt .

Dal punto di vista grafico, il campionamento naturale di un segnale sarà:



Più che una conoscenza puntuale del segnale $s(t)$, si può qui parlare di conoscenza "intervallata" in porzioni di tempo significativamente più piccole del dominio originale.

Rispetto al caso ideale, si ha una ridondanza di informazione.

L'espressione matematica del segnale campionato, è, in questo caso, data da:

$$\begin{aligned} s_c(t) &= s(t) \cdot s_p(t) \\ &= s(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_l(t - kT_c) \end{aligned} \quad (7.26)$$

Il segnale campionante $s_p(t)$ è periodico, e dunque la sua trasformata vale:

$$\begin{aligned} S_p(\omega) &= \omega_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_l(\omega) \delta(\omega - k\omega_c) \\ &= \omega_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta t \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\omega \frac{\Delta t}{2}} \delta(\omega - k\omega_c) \\ &= \omega_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta t \frac{\sin(k\omega_c \frac{\Delta t}{2})}{k\omega_c \frac{\Delta t}{2}} \delta(\omega - k\omega_c) \end{aligned} \quad (7.27)$$

Considerando $S_l(\omega)$ la trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare, il segnale campionato sarà del tipo:

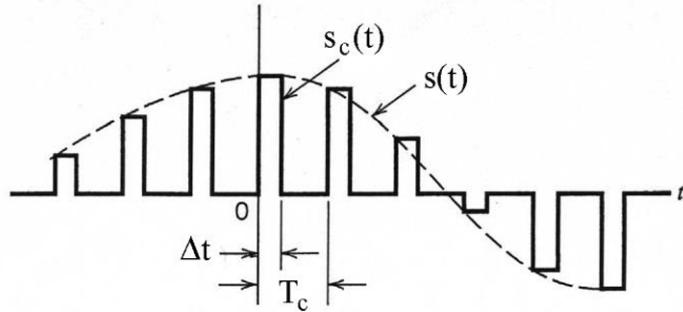
$$S_c(\omega) = \frac{\Delta t}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\omega_c \frac{\Delta t}{2})}{k\omega_c \frac{\Delta t}{2}} S(\omega - k\omega_c) \quad (7.28)$$

A meno del fattore Δt e il contributo per $k = 0$, le due repliche sono moltiplicate per $\frac{\sin(k\omega_c \frac{\Delta t}{2})}{k\omega_c \frac{\Delta t}{2}} < 1$, ma mantengono esattamente la forma dello spettro originale, e dunque non sono distorte.

7.4.3 Campionamento istantaneo

Un primo, ma importante, passo verso la numerizzazione del segnale si ottiene considerando il campionamento istantaneo.

Un esempio di campionamento istantaneo:

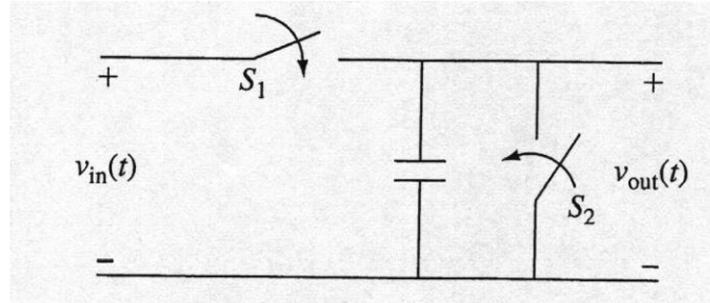


Rispetto al campionamento naturale, all'interno degli intervalli di durata Δt , il segnale campionato non segue il segnale originale, ma conserva il valore negli istanti di campionamento.

Quindi, il segnale con campionamento istantaneo è un segnale distorto, in altre parole, il segnale campionato in modo istantaneo è diverso da quello originale.

In pratica, il valore campionato nell'istante $t = kT_c$ viene prolungato per l'intero intervallo $kT_c \leq t \leq kT_c + \Delta t$.

Un esempio di circuito per un campionamento istantaneo è quello del sample and hold (in italiano campionamento e tenuta).



Il fatto che negli intervalli di durata Δt il segnale campionato non seguia l'andamento di $s(t)$ ma venga forzato a rimanere costante, introduce evidentemente un'alternazione che è ragionevole pensare possa tradursi in una distorsione del segnale ricostruito.

Per valutare l'entità di questa distorsione, scriviamo l'entità di questa distorsione, scriviamo l'espressione del segnale campionato nel cao di campionamento istantaneo:

$$s_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_c) s_l(t - kT_c) \quad (7.29)$$

Utilizzando la proprietà della convoluzione, $s_c(t)$ possiamo riscriverla come:

$$s_c(t) = s_l \otimes s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) \quad (7.30)$$

dove:

$$s_l(t) \otimes \delta(t - kT_c) = s_l(t - kT_c) \quad (7.31)$$

Applicando la proprietà della convoluzione e quella del prodotto, la trasformata di Fourier di $s_c(t)$ potrà riscriversi come:

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= \frac{1}{T_c} S_l(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c) \\ &= \frac{\Delta t}{T_c} \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\omega \frac{\Delta t}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Confronta i tre casi di campionamento in ω :

Campionamento istantaneo

$$S_c(\omega) = \frac{\Delta t}{T_c} \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\omega \frac{\Delta t}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c) \quad (7.33)$$

Campionamento naturale

$$S_c(\omega) = \frac{\Delta t}{T_c} \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{k\omega_c \frac{\Delta t}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c) \quad (7.34)$$

Campionamento ideale

$$S_c(\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c) \quad (7.35)$$

notiamo che le singole repliche dello spettro del segnale originale sono, in questo caso, moltiplicate non per un valore costante (come avviene nel caso di campionamento naturale) ma, nel campionamento instantaneo, lo spettro segnale viene moltiplicato per una funzione in ω .

In particolare, il filtro passa-basso di ricostruzione che isola la replica centrata nell'origine, darà in uscita un segnale $s'(t)$ il cui spettro vale:

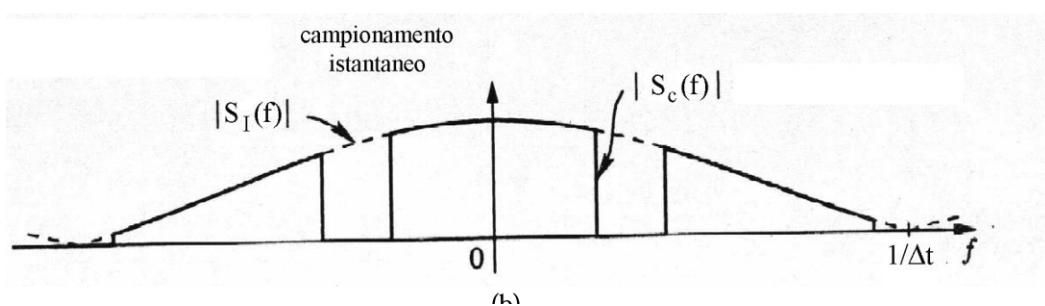
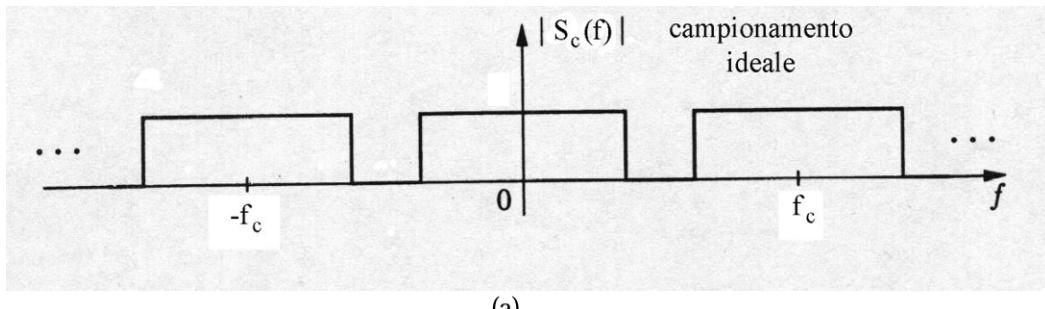
$$S'(\omega) = \frac{\Delta t}{T_c} \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\omega \frac{\Delta t}{2}} S(\omega) \quad (7.36)$$

Si tratta dunque dello spettro di $S(\omega)$ moltiplicato per la funzione $\text{sinc}(\omega \frac{\Delta t}{2})$.

Quindi, per riassumere, contrariamente agli altri tipi di campionamento, si avrà che:

$$s'(t) \neq s(t) \quad (7.37)$$

Un esempio dello spettro tra il campionamento ideale e campionamento istantaneo:



Da questo confronto, possiamo svolgere due considerazioni.

La prima considerazione da svolgere è che l'entità della distorsione è legata al valore di Δt .

Consideriamo il rapporto tra $|S'(\omega)|$ e $|S(\omega)|$:

$$\left| \frac{S'(\omega)}{S(\omega)} \right| = \frac{\Delta t}{T_c} \left| \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\omega \frac{\Delta t}{2}} \right| \quad (7.38)$$

Di conseguenza, in $\omega = 0$:

$$\left| \frac{S'(\omega)}{S(\omega)} \right|_{\omega=0} = \frac{\Delta t}{T_c} \quad (7.39)$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{S'(\omega)}{S(\omega)} \right|_{\omega=2\pi B} &= \frac{\Delta t}{T_c} \left| \frac{\sin(\pi B \Delta t)}{\pi B \Delta t} \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t}{T_c}\right) \end{aligned} \quad (7.40)$$

dove:

$$B = \frac{1}{2T_c} \quad (7.41)$$

e

$$\frac{\Delta t}{T_c} < 1 \quad (7.42)$$

Se consideriamo il rapporto tra i due rapporti di $S'(\omega)$ e $S(\omega)$:

$$\frac{\left| \frac{S'(\omega)}{S(\omega)} \right|_{\omega=2\pi B}}{\left| \frac{S'(\omega)}{S(\omega)} \right|_{\omega=0}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t}{T_c}\right)}{\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t}{T_c}} \quad (7.43)$$

Se:

$$\frac{\left| \frac{S'(\omega)}{S(\omega)} \right|_{\omega=2\pi B}}{\left| \frac{S'(\omega)}{S(\omega)} \right|_{\omega=0}} = 1 \quad (7.44)$$

la distorsione sarebbe nulla all'interno della banda del segnale.

Quanto minore è il rapporto $\frac{\Delta t}{T_c}$, tanto minore risulta la distorsione (si parla di effetto finestra).

Per alcune applicazioni un valore di $\frac{\Delta t}{T_c} < 0.1$ è già sufficiente per garantire distorsione trascurabile.

Un'altra considerazione tra campionamento ideale e campionamento instantaneo è la distorsione introdotta dall'effetto finestra, la quale è equalizzabile.

Visto che si conosce l'andamento in frequenza della funzione distorcente, è sufficiente incorporare nell'apparato di ricostruzione un filtro con funzione di trasferimento:

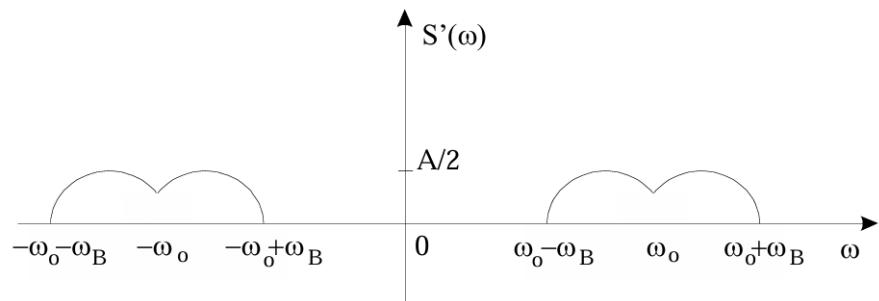
$$H_{eq}(\omega) = \frac{A e^{j\omega t_d}}{S_l(\omega)} \quad (7.45)$$

perchè la distorsione venga eliminata e si riottenga il segnale ricostruito come nel campionamento naturale.

Il termine $e^{j\omega t_d}$ è necessario per tener conto del ritardo necessariamente introdotto dall'equalizzazione reale; A è un coefficiente moltiplicativo.

7.4.4 Campionamento di segnali passa banda

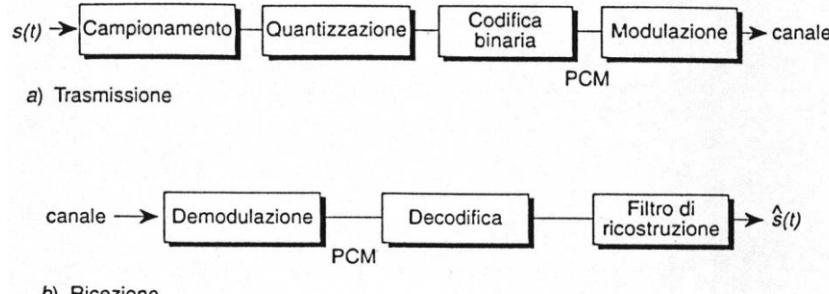
Si consideri il segnale la cui trasformata di Fourier è la seguente:



Si può campionare ad una frequenza minore della condizione di Nyquist grazie ai buchi nelle bande di frequenza.

7.5 Codifica PCM e sua applicazione a segnali di interesse pratico

Lo schema a blocchi di un sistema che utilizza la modulazione impulsiva codificata (PCM: Pulse Code Modulation):



Il punto di partenza è costituito da un segnale analogico $s(t)$ di banda limitata, che viene campionato, in accordo con il teorema di campionamento, con una frequenza almeno pari a $2B$.

In tal modo, il segnale variabile in modo continuo nel tempo viene trasformato in una sequenza, discreta, di campioni.

Le ampiezze dei campioni, peraltro, possono essere qualsiasi (compatibilmente con la dinamica del segnale $s(t)$).

Per ricavare la frequenza di cifra del segnale PCM, è sufficiente guardare alle operazioni che conducono dal segnale analogico $s(t)$ al segnale numerico PCM:

- il campionamento comporta che venga prelevato un campione ogni $T_o = \frac{1}{f_o} \leq \frac{1}{2B}[s]$ (la frequenza di campionamento è stata qui indicata con f_o)
- il tempo riservato alla trasmissione di un simbolo M-ario non può eccedere $\frac{1}{2B}$: si assume, di solito, il valore massimo
- sostituendo una sequenza binaria al generico simbolo M-ario, ciascuna cifra binaria avrà durata massima pari a $\frac{1}{2B \cdot \log_2 M}$ in quanto il tempo riservato alla trasmissione di un simbolo M-ario deve ora essere ripartito tra i $\log_2 M$ simboli binari

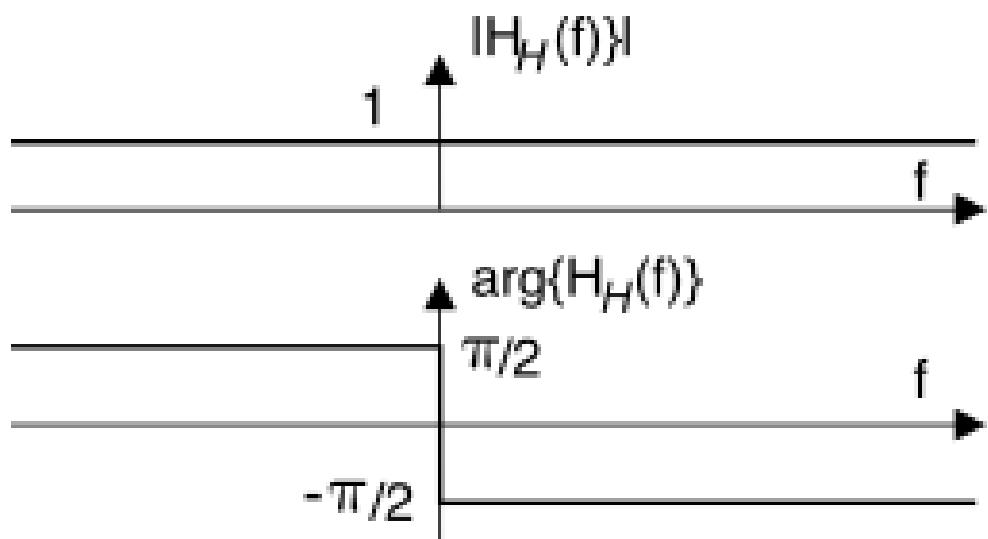
La frequenza di cifra del PCM sarà:

$$F_c = 2B \cdot \log_2 M \quad (7.46)$$

Per i segnali di interesse pratico, i valori di B e di M sono standardizzati.

Capitolo 8

Trasformata di Hilbert



8.1 Cosa è la trasformata di Hilbert

La trasformata di Hilbert è una particolare rappresentazione, che, contrariamente ad altre trasformate non realizza un cambiamento del dominio di definizione.

In altre parole, a partire da una funzione del tempo $s(t)$, la trasformata di Hilbert $s^\sim(t)$ è ancora una funzione del tempo.

$s^\sim(t)$ si ottiene come uscita da un filtro, detto filtro di Hilbert, caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$H_H(f) = \begin{cases} -j & \text{per } f > 0 \\ 0 & \text{per } f = 0 \\ j & \text{per } f < 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

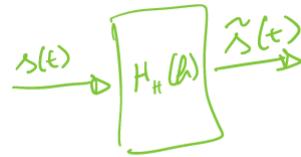
in termini di parte reale e parte immaginaria, avremo:

$$|H_H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{per } f \neq 0 \\ 0 & \text{per } f = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\arg H_H(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{per } f > 0 \\ 0 & \text{per } f = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } f < 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

in termini di parte reale e fase.

Schematizzando i filtri ed i segnali, avremo che:



Nel dominio della frequenza, si ha:

$$S^\sim(f) = H_H(f)S(f) \quad (8.4)$$

dove $S(f)$ è la trasformata di Fourier di $s(t)$ mentre $S^\sim(f)$ è la trasformata di Fourier di $s^\sim(t)$.

Sapendo la relazione tra frequenza e tempo, possiamo sapere che la risposta impulsiva del filtro di Hilbert nel tempo è:

$$h_H(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (8.5)$$

Grazie alle proprietà della trasformata di Fourier, sapendo che $H_H(f)$ è una funzione puramente immaginaria e dispari, anche $h_H(t)$ è puramente reale e dispari.

L'operazione di trasformazione inversa di Hilbert, che consente di riottenere il segnale $s(t)$ a partire da $s^\sim(t)$ richiede, in realtà, una nuova trasformata di Hilbert:

$$\begin{aligned}
 S^{\approx} &= H_H(f)S^{\sim}(f) \\
 &= H_H(f)H_H(f)S(f) \\
 &= -S(f)
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

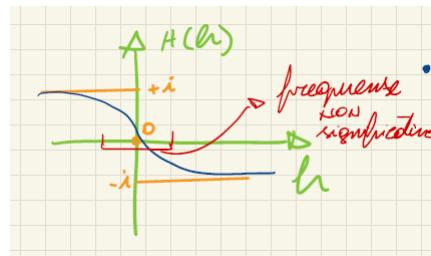
Questa relazione vale per tutti i valori $f \neq 0$.

In $f = 0$, il valore $S(0)$, se diverso da zero, viene annullato, e non potrà essere più recuperato.

In particolare, se il segnale ha valore medio diverso da zero, questo si tradurrebbe nella presenza di uno spettro di una delta di Dirac posizionata nell'origine.

Di conseguenza, possiamo concludere che la classe dei segnali per cui è applicabile la trasformata di Hilbert è quella dei segnali a valore medio nullo.

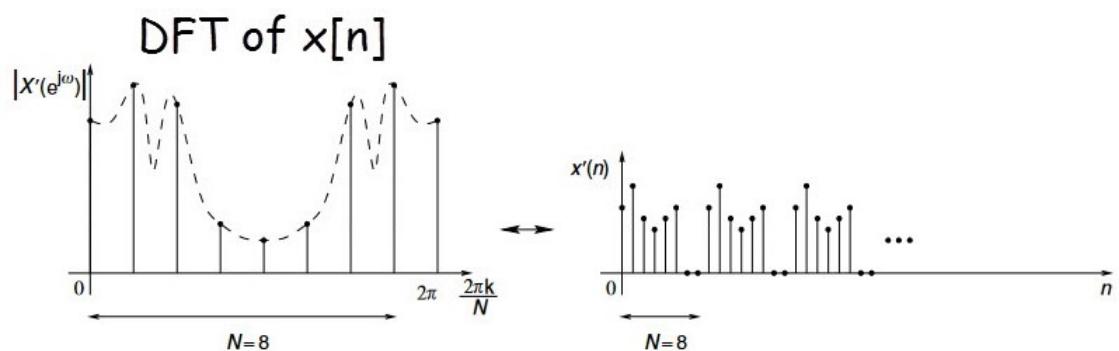
Dal punto di vista ingegneristico:



inoltre, è difficilmente realizzabile un filtro con una transizione così brusca, quindi, generalmente, la transizione è "smussata".

Capitolo 9

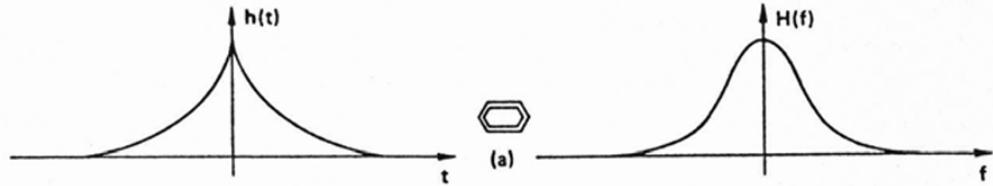
DFT



9.1 Introduzione alla trasformata discreta di Fourier (DFT)

La trasformata discreta di Fourier, comunemente nota in letteratura con l'acronimo DFT (Discrete Fourier Transform) risponde all'esigenza di implementare al calcolatore la trasformata di Fourier di una funzione del tempo.

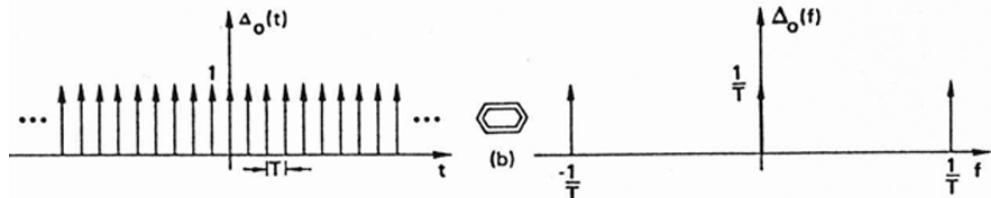
Si considerino la funzione $h(t)$ e la sua trasformata di Fourier $H(f)$ in figura:



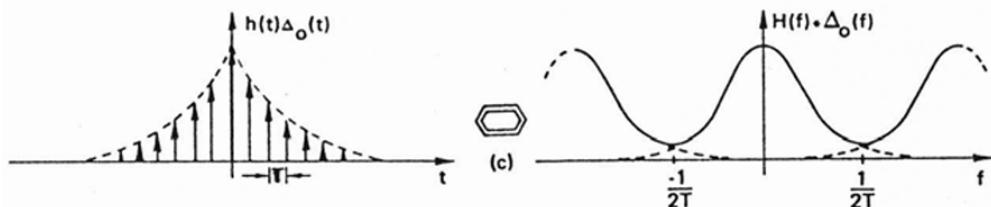
Per determinare la trasformata di Fourier di $h(t)$ mediante tecniche di analisi digitale, è necessario campionare la funzione $h(t)$.

Il campionamento è relaizzato moltiplicando $h(t)$ per la sequenza campionante $\Delta_o(t)$.

Quindi, sapendo che $\Delta_o(t)$ è la seguente:



$h(t) \cdot \Delta_o(t)$ sarà:

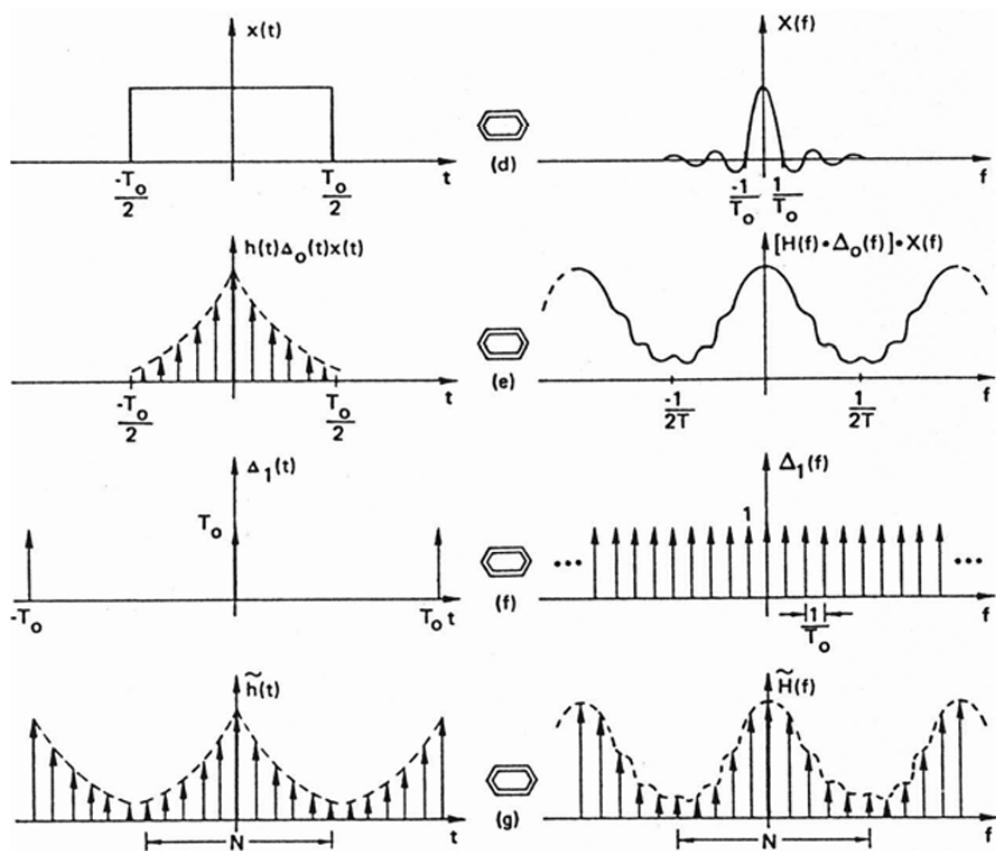


Analizzando la figura, notiamo che la sequenza è costituita da una sequenza di implusi matematici (Delta di Dirac) distanziati di T l'uno dall'altro.

Il risultato del campionamento è, in Fourier, il segnale originale replicato infinite volte, centrato su un multiplo della frequenza di campionamento $\frac{1}{T}$.

Se la frequenza non è sufficientemente grande, compare il fenomeno dell'aliasing, per cui tali repliche risultano sovrapposte.

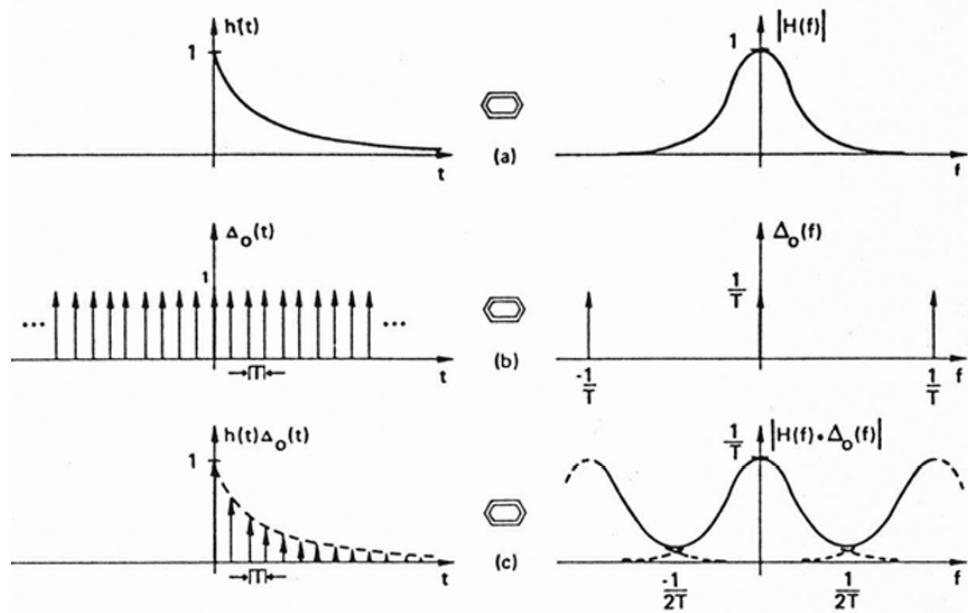
Procedendo coi passaggi, avremo che:



Come notiamo dalla figura, il campionamento nel dominio del tempo ha prodotto una funzione periodica in frequenza, mentre il campionamento nel dominio della frequenza ha prodotto una funzione periodica nel tempo.

Ciascun periodo, nel tempo e in frequenza, contiene N campioni.

Invece, analizzando un altro esempio di segnale, l'esponenziale bilaterale unilatera, e che quindi si sviluppa solo in $t \geq 0$ e ponendo la finestra di campionamento non centrata nell'origine, notiamo che:

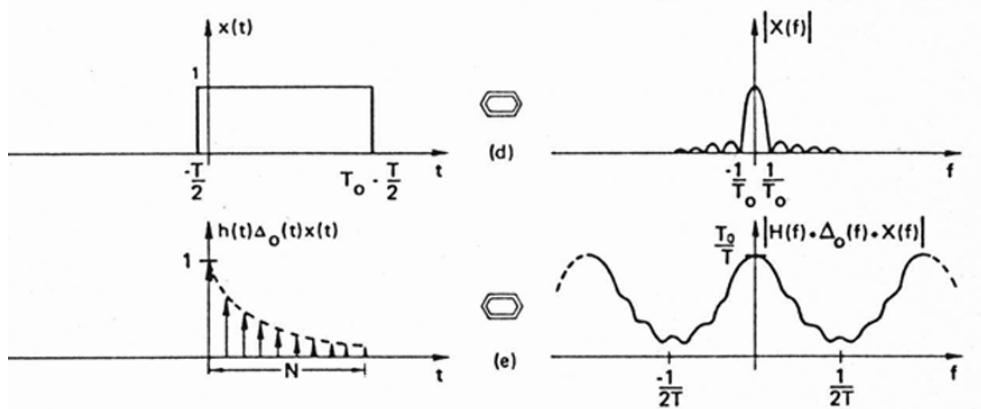


Formalizzando le figure in formule matematiche, notiamo che:

$$\begin{aligned} h(t)\Delta_o(t) &= h(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t - kT) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Assumendo N campioni, significa moltiplicare la funzione precedente per $x(t)$.

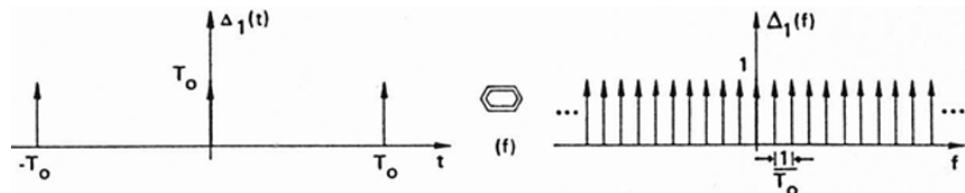
Utilizzando le figure:



Formalizzando:

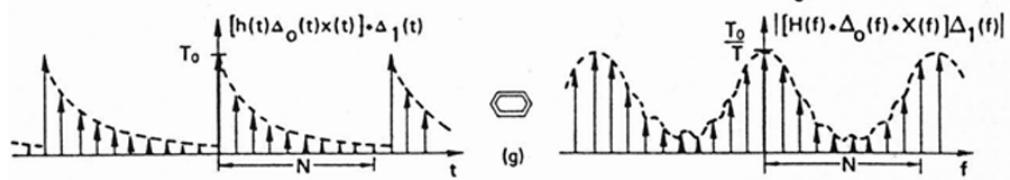
$$\begin{aligned} h(t)\Delta_o(t)x(t) &= [h(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)]x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT) \end{aligned} \quad (9.2)$$

Alla funzione campionante nel dominio della frequenza, $\Delta_l(f)$, corrispondente nel dominio del tempo:



$$\Delta_l(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0) \quad (9.3)$$

Facendo la convoluzione, notiamo che:

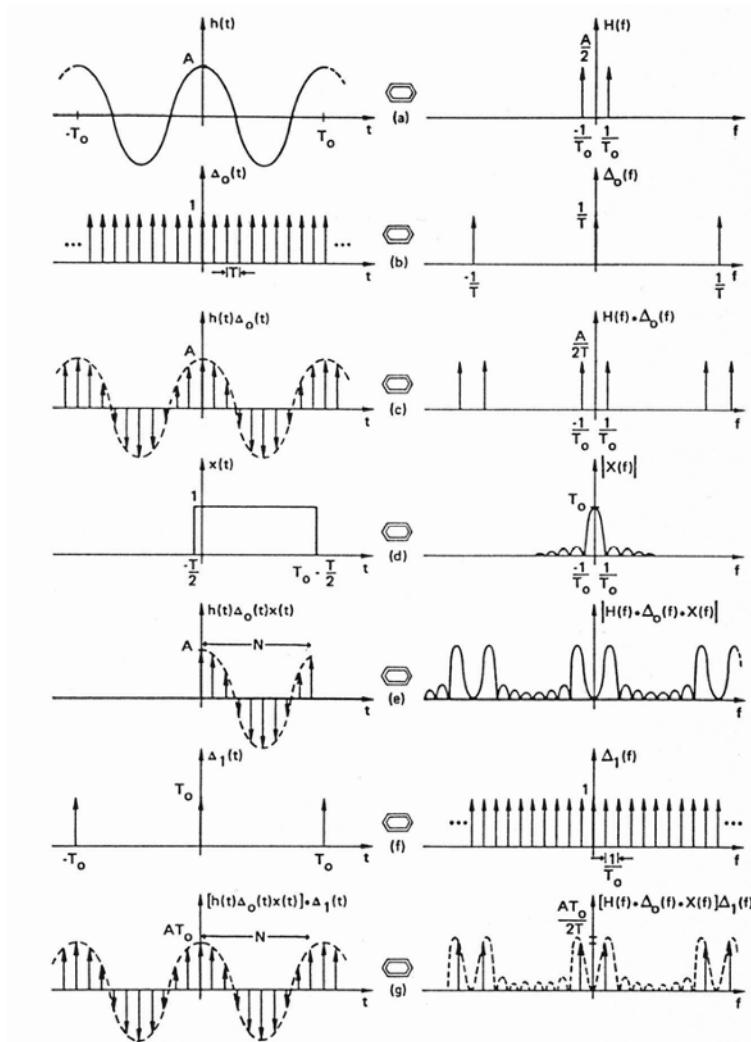


$$\begin{aligned}
 h^{\sim}(t) &= [h(t)\Delta_0(t)x(t)] * \Delta_l(t) \\
 &= \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT) \right] * \left[T_o \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_o) \right] \\
 &= T_o \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT - rT_o) \right]
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

9.2 Casi di pratico interesse interesse

Rispetto all'aspetto analitico, si prediligerà l'aspetto grafico nel tema della DFT.

9.2.1 Forme d'onda periodiche a banda limitata: finestra di campionamento uguale al periodo



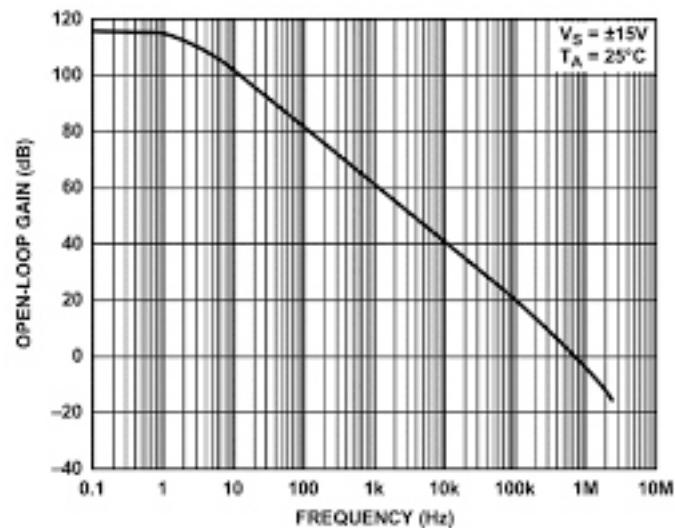
Scorrendo rapidamente le varie parti per produrre la DFT, notiamo che:

- il campionamento nel dominio del tempo non produce aliasing
- il campionamento nel dominio del tempo produce una scalatura delle ampiezze nel dominio delle frequenze, per cui l'area originale ($A/2$) della Delta di Dirac viene ridotta di un fattore $1/T$, quindi diventa $A/2T$
- la finestra di campionamento include esattamente un periodo della funzione cosinusoidale, e gli N campioni nel dominio del tempo sono contenuti entro questo periodo
- il risultato del prodotto nel dominio del tempo fra la forma d'onda campionata e la finestra di campionamento ha uno spettro fortemente distorto rispetto alla $H(f)$ originale
- quando, però, si effettua il campionamento nel dominio della frequenza, questa distorsione scompare

9.2.2 Forme d'onda periodiche a banda limitata: finestra di campionamento diversa dal periodo

Capitolo 10

Unità logaritmiche



10.1 Breve appendice sulle unità logaritmiche

Per esprimere guadagni e attenuazioni, nonchè cifre di rumore e rapporti segnale rumore, si usano frequentemente le unità logaritmiche.

Se consideriamo due segnali A_1 e A_2 , in db diventeranno:

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)_{db} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \quad (10.1)$$

Nel caso di due potenze P_1 e P_2 :

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)_{db} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad (10.2)$$

L'uso dei db è molto utile perchè semplifica le operazioni di questo tipo:

$$\log(X^\alpha) = \alpha \cdot \log X \quad (10.3)$$

$$\log(X_1 \cdot X_2) = \log X_1 + \log X_2 \quad (10.4)$$

$$\log\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \log X_1 - \log X_2 \quad (10.5)$$

Le proprietà appena elencate valgono per qualsiasi base usata nei logaritmi.

Se una grandezza è dimensionale ed è espressa in unità assolute (ad esempio una potenza P espressa in W), allora, possiamo convertirla in db:

$$(P)_{dbW} = 10 \cdot \log_{10}[(P)_W] \quad (10.6)$$

Se invece la voglia in milli Watt (mW) in db, avremo che:

$$(P)_{dBm} = 10 \cdot \log_{10}[(P)_{mW}] \quad (10.7)$$

Data una potenza P, possiamo scrivere questa relazione:

$$(P)_{dBm} = (P)_{dBW} + 30 \quad (10.8)$$

Capitolo 11

Interferenza di intersimbolo

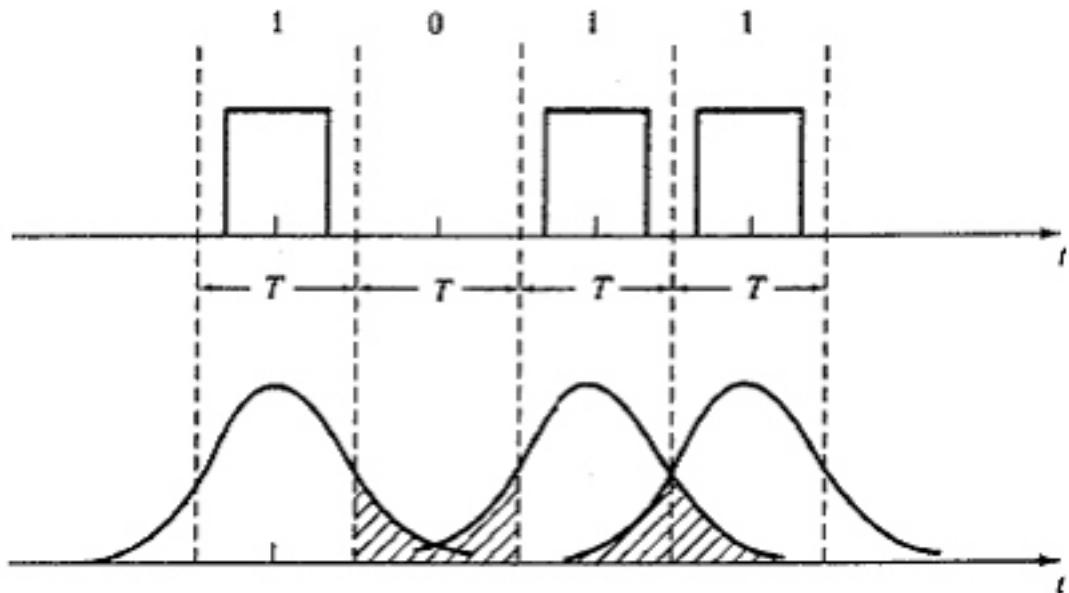
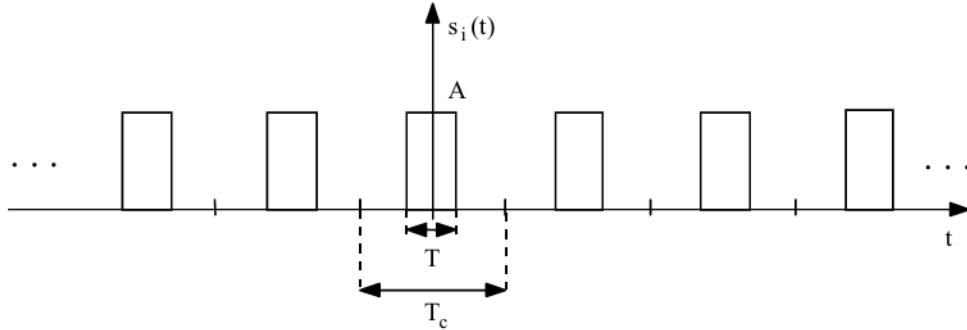


Fig. 5-12 Intersymbol interference in digital transmission

11.1 Da impulsi rettangolari alle forme d'onda reali

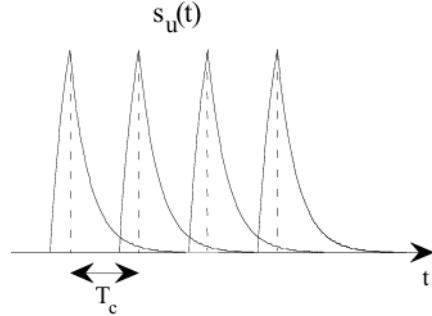
Nell'accezione comune, le forme d'onda utilizzate in una trasmissione numerica hanno durata finita; in particolare, è frequente il caso in cui si utilizzino impulsi rettangolari di durata uguale o minore di un intervallo caratteristico, denominato tempo di simbolo.



La trasmissione di un segnale numerico con queste caratteristiche avrebbe, a rigore, bisogno di una banda infinita perché ha fronti d'onda a pendenza elevata, nel caso di impulsi rettangolari la transizione è immediata, quindi banda illimitata.

Quando un segnale numerico si trova a transitare attraverso un filtro, ad esempio un canale di trasmissione, esso verrà inevitabilmente distorto.

Il segnale rettangolare visto in precedenza, dopo il passaggio ad un filtro, si può presentare come segue:



Confrontando lo stesso segnale, prima e dopo il filtro, notiamo che gli impulsi binari, che sono ben distinti nel segnale di ingresso $s_i(t)$ risultano sovrapposti nel segnale di uscita $s_u(t)$.

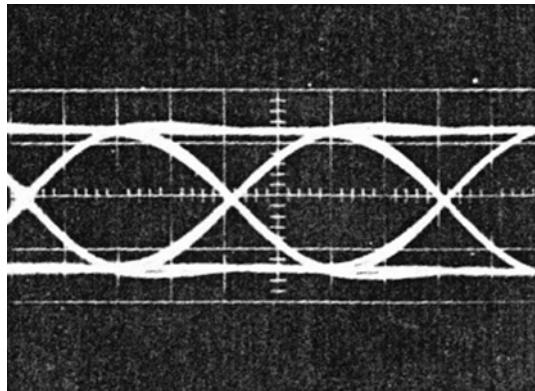
Trattandosi di un fenomeno (indesiderato) di interazione tra simboli, si è soliti parlare di interferenza intersimbolica (in inglese ISI: InterSymbol Interference).

I simboli interferenti possono riferirsi allo stesso (e unico) segnale, o, nel caso delle comunicazioni, il mezzo trasmissivo è condiviso tra più utenti a divisione di tempo, in cui si usa lo stesso mezzo trasmissivo tra sorgente-destinazioni: in questo caso ci saranno degli effetti di mutuo disturbo tra le diverse comunicazioni.

11.2 Diagramma ad occhio

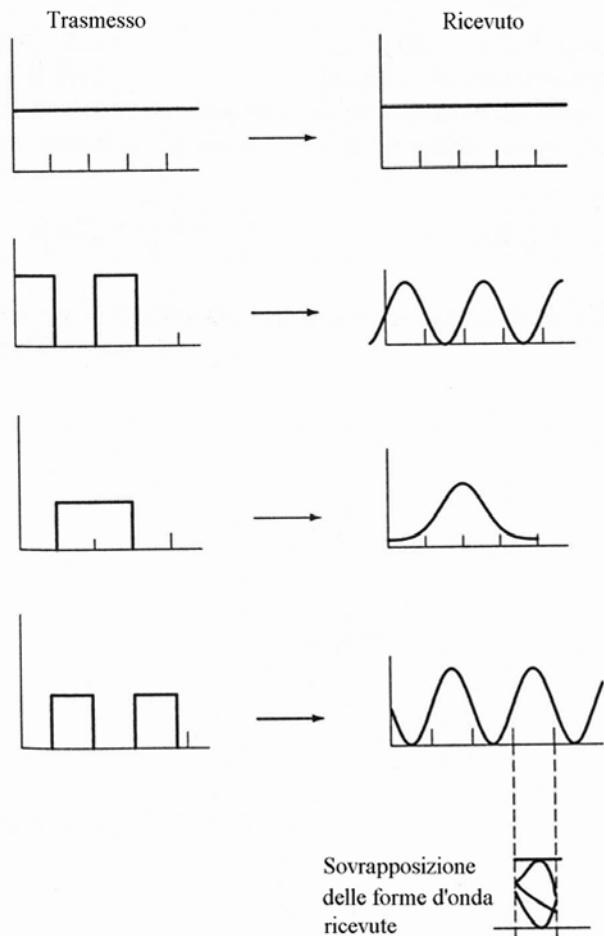
Uno strumento molto utile nel capire l'effetto dell'ISI in un segnale è quello del diagramma ad occhio.

Un esempio di diagramma ad occhio:

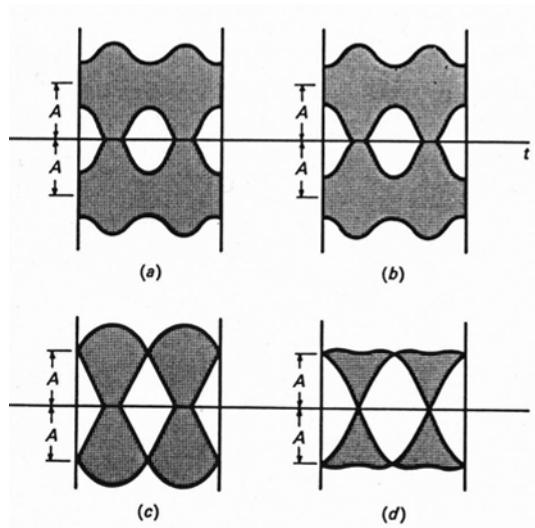


Dal punto di vista concettuale, il diagramma ad occhio si ottiene generando tutte le possibili sequenze di simboli binari e graficandone sovrapposti gli andamenti a valle del canale distorcente.

Un esempio di diagramma ad occhio step-by-step:



Confrontando diversi diagrammi ad occhio di diverse trasmissioni, possiamo avere i seguenti casi:



L'apertura dell'occhio dà la massima distanza tra i due livelli di decisione.

Quindi, i casi (c) e (d) sono migliori rispetto ai casi (a) e (b).

Diagramma ad occhio ideali possono essere ottenuti con una scelta adeguata della funzione di trasferimento del canale, ovvero introducendo una opportuna equalizzazione della funzione di trasferimento di un canale preassegnato.

11.3 Sintesi di un filtro per annullare l'ISI

Idealmente, è possibile annullare l'ISI; nella realtà, si cercherà di diminuirlo di tanto. Inoltre, l'annullamento non è sempre conseguibile.

In particolare se la banda B del canale è minore della metà della frequenza di simbolo del segnale numerico, in formule:

$$B < \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T_s} \quad (11.1)$$

l'obbiettivo dell'annullamento dell'interferenza di intersimbolo non potrà essere, in alcun modo, conseguito.

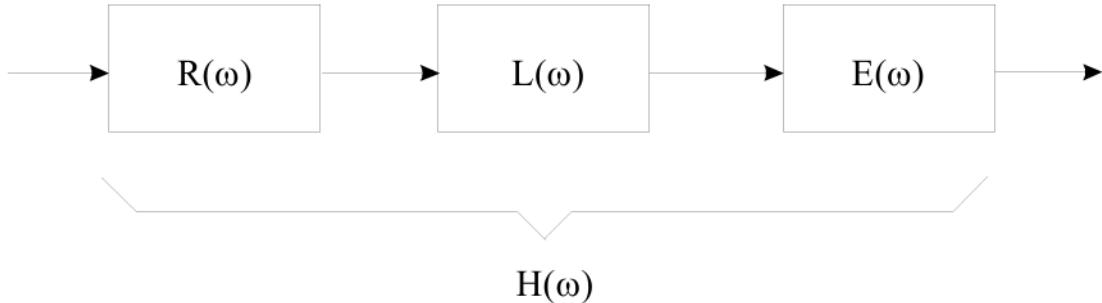
Per una data frequenza di simbolo, caratteristica della trasmissione, esiste una larghezza di banda minima per la banda del canale, al di sotto della quale l'ISI non può essere compensata.

Dualmente, un sistema caratterizzato da una banda B , se necessario opportunamente equalizzato, può annullare l'interferenza intersimbolica di sistemi con frequenza di simbolo al più uguale a $2B$, ma non maggiore.

Ad esempio, se $B = 1MHz$, non si può annullare l'ISI di un sistema con frequenza di simbolo $F_s > 2Mbit/s$.

Quindi, ponendo $B \geq \frac{F_s}{2}$, possiamo ora fornire alcuni esempi di funzioni di trasferimento in grado di annullare l'interferenza intersimbolica.

La funzione $H(\omega)$, rappresenta la funzione di trasferimento della cascata di reti 2-porte:



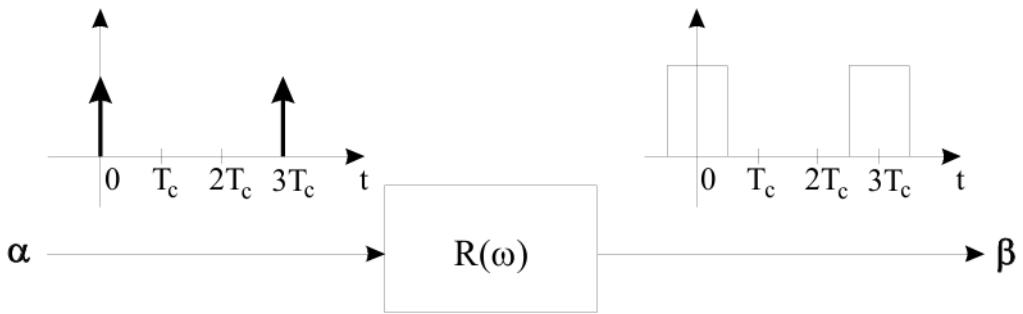
Analizzando la cascata di 2-porte, abbiamo che:

- la rete di formazione degli impulsi $R(\omega)$
- la funzione di trasferimento del mezzo trasmittivo $L(\omega)$
- la funzione equalizzatrice in ricezione $E(\omega)$

Quindi:

$$H(\omega) = R(\omega)L(\omega)E(\omega) \quad (11.2)$$

La rete di formazione degli impulsi, in particolare, trasforma una sequenza di Delta di Dirac in ingresso (cui è associata, in senso stretto, l'informazione) in una sequenza di impulsi di durata finita:



L'informazione trasmessa è chiaramente già contenuta nella successione di Delta di Dirac, ma tale successione non è un segnale fisico (in quanto un impulso matematico ideale non può essere ottenuto in pratica), mentre tale risulta la successione di impulsi rettangolari.

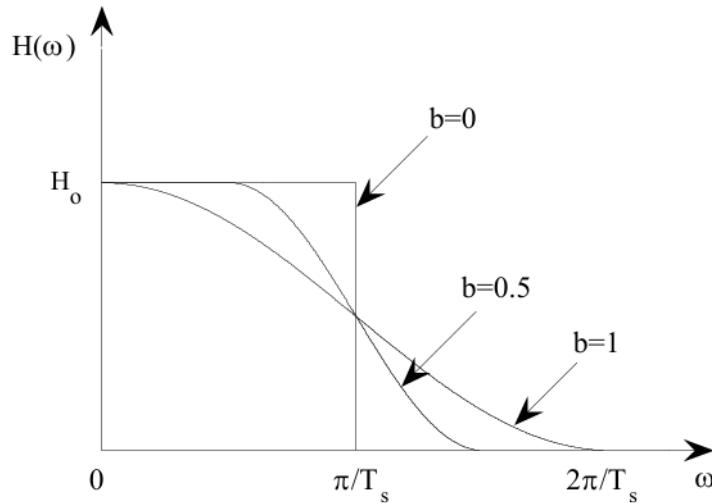
Una prima importante classe di funzioni in grado di annullare l'interferenza di intersimbolo è quella che va sotto il nome di "funzione di trasferimento a coseno rialzato".

L'espressione analitica di $H(\omega)$ per questa classe di funzioni è la seguente:

$$H(\omega) = \begin{cases} H_o & \text{per } |\omega| \leq \pi \frac{1-b}{T_s} \\ \frac{H_o}{2} \left[1 - \sin\left(\frac{|\omega|T_s - \pi}{2b}\right) \right] & \text{per } \pi \frac{1-b}{T_s} \leq |\omega| \leq \pi \frac{1+b}{T_s} \\ 0 & \text{per } |\omega| \geq \pi \frac{1+b}{T_s} \end{cases} \quad (11.3)$$

dove H_o è una costante reale, mentre b è detto "fattore di roll-off" e varia tra 0 e 1.

Dal punto di vista grafico e al variare di b , $H(\omega)$ sarà:



La larghezza di banda, espressa in Hz, della funzione di trasferimento a coseno rialzato, vale:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi \frac{1+b}{T_s} \right) \\ &= \frac{1+b}{2T_s} \end{aligned} \quad (11.4)$$

Il valore minimo di B è quando $b = 0$, che, appunto, è pari a $\frac{1}{2T_s}$.

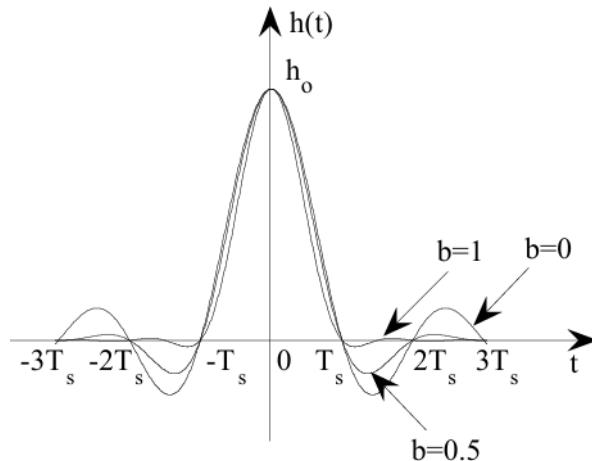
Ciò conferma le precedenti considerazioni sulla banda minima in grado di annullare l'ISI e, dall'altra, evidenzia che, se l'obiettivo è quello di minimizzare l'occupazione spettrale, la scelta $b = 0$ è la più conveniente.

Ma, $H(\omega)$ con $b = 0$ è impossibile da realizzare con componenti fisici reali (si tratterebbe di un filtro passa-basso ideale), mentre la funzione con $b = 1$ presenta una transizione più graduale, quindi sarà realizzabile in modo relativamente semplice ed efficiente.

Inoltre il valore b ottimo dipende non solo da quello che accade nel dominio di ω , bensì anche quello che succede nel dominio del tempo.

Anti-trasformando $H(\omega)$, avremo:

$$h(t) = H_o \frac{1}{T_s} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_s}t\right)}{\frac{\pi}{T_s}t} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{T_s}\right)bt}{1 - \frac{4}{T_s^2}b^2t^2} \quad (11.5)$$



$h(t)$ ha il significato di risposta impulsiva.

Dalla figura, notiamo che:

$$\begin{cases} h(0) = h_o \\ h(kT_s) = 0 \text{ per } k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (11.6)$$

Da queste equazioni, notiamo che, in $t = 0$ si annulla l'ISI, e negli altri istanti k non distorce la funzione di ingressi.

Inoltre, osservando la figura, notiamo che, all'aumentare di b , le code della $h(t)$ risultano maggiormente confinate intorno all'asse dei tempi.

Quindi, tipicamente, si sceglie un b compreso tra 0.6 e 0.8.

Inoltre, possiamo notare che la famiglia delle funzioni a coseno rialzato verifica la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} H_o(\omega_o) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega_o + n\frac{2\pi}{T_s}) \\ &= T_s h_o \text{ per } -\frac{\pi}{T_s} \leq \omega_o \leq \frac{\pi}{T_s} \end{aligned} \quad (11.7)$$

In altre parole, considerata una generica pulsazione ω_o nell'intervallo $[-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}]$ la funzione $H_o(\omega_o)$ che si ottiene sommando i valori assunti dalla $H(\omega)$ in ω_o ed in punti che distano da ω_o per multipli interi di $\frac{2\pi}{T_s}$ è costante.

Questa proprietà è nota come criterio di Nyquist, è di validità generale e consente di definire una famiglia di funzioni, appunto note come funzioni della classe di Nyquist, tutte in grado di annullare l'interferenza intersimbolica.

Ritornando a $H(\omega)$, $E(\omega)$ è la rete equilizzatrice in ricezione.

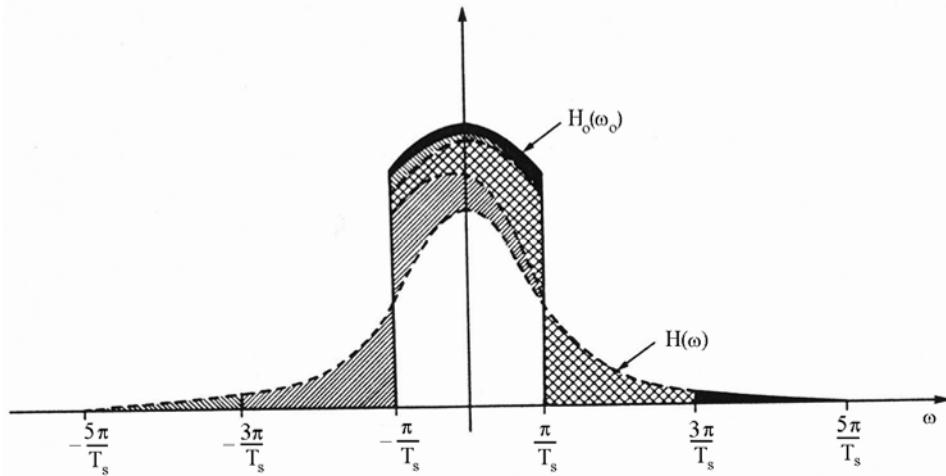
Una volta scelto il mezzo trasmissivo $L(\omega)$ è assegnata; ad esempio, nel caso di un cavo coassiale, sotto l'ipotesi di piccole perdite, si può scrivere:

$$L(\omega) = \exp \left[-\sqrt{\frac{\omega}{\omega_o}} (1 + j) - j\omega t_c \right] \quad (11.8)$$

dove ω_o è una pulsazione caratteristica, mentre t_c è il tempo di propagazione delle onde elettromagnetiche nel mezzo.

Il prodotto $R(\omega) \cdot L(\omega)$ appartiene alla classe di Nyquist; in generale, è quindi necessario introdurre l'opportuna correzione attraverso $E(\omega)$.

Graficamente:



Chiaramente deve essere:

$$E(\omega)R(\omega) = \frac{H(\omega)}{L(\omega)} \quad (11.9)$$

Una soluzione molto frequente è quella di porre:

$$|E(\omega)| = |R(\omega)| = \sqrt{\frac{|H(\omega)|}{|L(\omega)|}} \quad (11.10)$$

Scegliendo arbitrariamente la fase di $E(\omega)$.

Se il rapporto $\frac{H(\omega)}{L(\omega)}$ è reale, si può porre semplicemente:

$$E(\omega) = R^*(\omega) \quad (11.11)$$

Capitolo 12

Richiami di Teoria delle probabilità



Questo capitolo è da sapere come l'Ave Maria, perchè è l'argomento più importante di questo corso.
Se non sapete questo, è meglio non presentarsi all'orale.

12.1 Cosa è una variabile aleatoria

Classificando i segnali, all'inizio del corso, si è fatta distinzione tra segnali determinati e segnali aleatori.

Cominciamo con il ricordare la definizione di esperimento aleatorio: si definisce un "evento" di qualunque natura e consistenza il cui risultato non è certo a priori ma, può assumere una serie di esiti caratterizzati da un valore di probabilità.

Consideriamo un segnale aleatorio riguardo un esperimento aleatorio.

Un segnale del tipo

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (12.1)$$

ha diverse variabili:

- A (che indica l'ampiezza) e f_0 (frequenza) sono quantità determinate
- ϕ può assumere, con la stessa probabilità, un qualunque valore compreso tra 0 e 2π

Quindi, il valore di ϕ può assumere diverso ogni volta.

In questo caso ϕ prende il nome di variabile aleatoria.

La variabile aleatoria può essere:

- discreta, quando l'insieme dei valori che essa assume è discreto
- continua, quando l'insieme dei valori che essa assume è continuo

Se consideriamo l'esperimento del lancio del dado, i risultati dell'esperimento, cioè le facce del dado, sono aleatori discreti, invece, la variabile ϕ del segnale $s(t)$ è una variabile aleatoria continua compresa tra 0 e 2π .

In altri casi, si hanno variabili aleatorie miste, in cui alcuni valori (discreti) sono più importanti degli altri.

Spesso, a livello di notazione, per indicare la variabile aleatoria si utilizzano le lettere maiuscole, mentre le lettere minuscole stanno ad indicare un particolare esito dell'esperimento aleatorio (si parla di realizzazione o determinazione).

Quindi, nell'equazione del segnale $s(t)$ citato precedentemente, è più appropriato indicare ϕ come Φ :

$$\begin{cases} s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \\ \phi = \Phi \end{cases} \Rightarrow s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi) \quad (12.2)$$

Invece se indichiamo ϕ con la lettera minuscola, significa che la variabile aleatoria ha assunto il particolare valore ϕ .

Quindi, possiamo intuire che, la singola variabile aleatoria è associata un numero il quale esprime la probabilità che si ottenga proprio quel valore come risultato dell'esperimento.

12.1.1 Cosa è un evento

Oltre che i singoli risultati di un esperimento, è spesso importante considerare dei gruppi di risultati.

Consideriamo l'esperimento aleatorio che consiste nel contare il numero di persone che, in un ben determinato intervallo della giornata, si presentano alla cassa di un supermercato.

Questo è un esperimento aleatorio, in quanto, non è detto sapere a priori quale sarà tale numero.

Inoltre, si vuole considerare la probabilità che il numero di clienti nell'intervallo temporale considerato sia maggiore di 20.

L'interesse nell'esperimento potrebbe allora essere concentrato sul seguente evento: numero di clienti superiore a 20, nel qual caso i valori di interesse della variabile aleatoria, detta X , sarebbe solo quelli che soddisfano tale condizione.

Indicando dunque con Ω (la lettera greca Ω si legge Omega) l'insieme complessivo dei valori possibili (tale insieme si chiama spazio campione), gli eventi sono sottoinsieme dello spazio campione che verificano le seguenti condizioni:

1. se A è un evento, anche il suo complemento \bar{A} rispetto all'insieme Γ , è un evento
2. se A e B sono eventi, anche la loro unione $A \cup B$ è un evento
3. se A e B sono eventi, anche la loro intersezione $A \cap B$ è un evento
4. dato un evento A , gli insiemi $A \cup \bar{A}$ e $A \cap \bar{A}$ sono particolari eventi
 - (a) $A \cup \bar{A}$, che coincide con Ω (ovvero con lo spazio campione), è detto evento certo
 - (b) $A \cap \bar{A}$, che coincide con \emptyset e non contiene alcun risultato dell'esperimento, è detto evento impossibile

12.2 Teoria assiomatica di Kolmogorov

Assegnato un esperimento aleatorio con uno spazio comune Ω e l'insieme degli eventi ad esso relativi, detto classe degli eventi ed indicato con S , una legge di probabilità $\Pr\{\cdot\}$ è una corrispondenza che associa ad ogni elemento di S , e quindi ad ogni evento di interesse in una prova dell'esperimento, un numero reale che soddisfa i seguenti assiomi (cioè enunciati che non hanno bisogno di dimostrazione):

- la probabilità di un evento arbitrario A è non negativa, si ha cioè:

$$\Pr\{A\} \geq 0 \quad (12.3)$$

- la probabilità dell'evento certo è unitaria (assioma di normalizzazione), si ha cioè:

$$\Pr\{\Omega\} = 1 \quad (12.4)$$

- dati due eventi A e B mutuamente esclusivi (ovvero incompatibili, cioè tali che non possano verificarsi contemporaneamente) la probabilità dell'evento unione è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi, si ha cioè:

$$A \cup B = \emptyset \rightarrow \Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} \quad (12.5)$$

Da questi assiomi, si ricavano le seguenti proprietà:

- dato un evento A , la probabilità dell'evento complementare \bar{A} è data dal complemento a 1 della $\Pr\{A\}$, si ha cioè:

$$\Pr\{\bar{A}\} = 1 - \Pr\{A\} \quad (12.6)$$

- l'insieme impossibile ha la proprietà nulla di verificarsi, si ha cioè:

$$\Pr\{\emptyset\} = 0 \quad (12.7)$$

- la probabilità di un evento A non può assumere valore maggiore di 1, si ha cioè:

$$0 \leq \Pr\{A\} \leq 1 \quad (12.8)$$

- dati due eventi A e B , la probabilità dell'evento unione $A \cup B$ è espressa dall'uguaglianza:

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{A \cap B\} \quad (12.9)$$

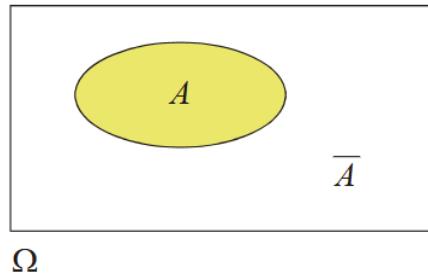
Data una coppia di eventi A e B , la probabilità dell'evento intersezione, spesso indicata semplicemente con $\Pr\{A, B\}$, è detta probabilità congiunta, mentre $\Pr\{A\}$ e $\Pr\{B\}$ hanno il significato di probabilità marginali.

Data una coppia di eventi A e B con $\Pr\{B\} \neq 0$, si definisce poi la probabilità condizionata:

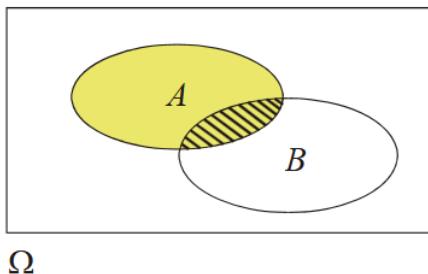
$$\begin{aligned} \Pr\{A|B\} &= \frac{\Pr\{A \cup B\}}{\Pr\{B\}} \\ &= \frac{\Pr\{A, B\}}{\Pr\{B\}} \end{aligned} \quad (12.10)$$

la quale esprime la probabilità dell'evento A condizionata al verificarsi dell'evento B (che ha dunque il significato di evento condizionante).

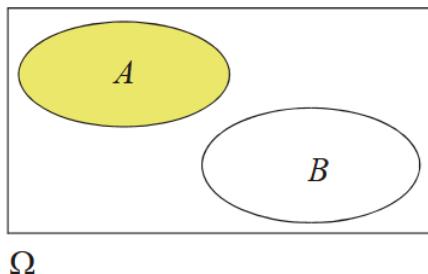
Utilizzando i diagrammi, possiamo capire meglio gli eventi.



La figura ci mostra il rettangolo Ω che rappresenta l'evento certo, il cerchio giallo A rappresenta l'evento A , lo spazio bianco del rettangolo Ω , cioè \bar{A} , rappresenta il complementare di A .



In questo caso, la figura dimostra l'evento $A \cup B$ ed è rappresentato dalla sovrapposizione dei diagrammi A e B ; semplicemente, le $\Pr\{A\}$ e $\Pr\{B\}$, la probabilità di $A \cap B$ verrebbe conteggiata due volte.



Se invece, come in figura, $A \cap B = \emptyset$, allora $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$.

12.3 Definizione classica di probabilità

In accordo con questa definizione storica attribuita a Laplace, la $\Pr\{A\}$ si calcola:

- individuando il numero $N_F(A)$ dei cosiddetti casi favorevoli ad A
- individuando il numero N_P dei cosiddetti casi possibili
- dividendo $N_F(A)$ per N_P

In formula:

$$\Pr\{A\} = \frac{N_F(A)}{N_P} \quad (12.11)$$

In pratica: N_P è il numero totale dei risultati contenuti in Ω , mentre $N_F(A)$ è il numero di risultati contenuti in A.

Se esiste l'equiprobabilità di un evento, allora possiamo utilizzare la definizione anche pratica oltre a quella classica.

Se non esiste l'equiprobabilità, ad esempio in un dado truccato, non si può utilizzare la definizione classica di probabilità.

12.4 Definizione frequentistica di probabilità di Von Mises

Questa definizione è simile a quella classica, ma ha il vantaggio di poter essere applicata anche nel caso di esperimento non simmetrico (cioè, in senso pratico, anche in un dado truccato).

Si esprime la probabilità come un rapporto, ma, in questo caso, le quantità a numeratore e denominatore sono ricavate sperimentalmente.

Per poter calcolare la $\Pr\{A\}$ nel caso sperimentale:

- si ripete l'esperimento aleatorio di un evento A
- si conta il numero di volte N_A in cui l'esperimento ha dato un esito favorevole ad A
- si divide N_A per N

Il punto rilevante è che il rapporto così ottenuto approssima la probabilità di errore corretta solo a patto di considerare un numero di ripetizioni dell'esperimento sufficientemente elevato (al limite tende all'infinito).

Si deve imporre:

$$\Pr\{A\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \quad (12.12)$$

Il passaggio al limite resta, essenzialmente, un'astrazione matematica, ragion per cui non sono rari i casi in cui l'uso della $\Pr\{A\}$ definita adesso fornisce solo un'approssimazione della probabilità cercata.

Ovviamente, nei casi in cui si è convinti della simmetria dell'esperimento, e dunque dell'equiprobabilità dei risultati, è conveniente ed opportuno l'uso della definizione classica di probabilità, assai più semplice da calcolare.

È anche importante evidenziare che, la definizione frequentistica non è in contrasto con quella assiomatica di Kolmogorov.

Infatti, la probabilità $\Pr\{A\}$ espressa adesso è:

- una quantità non negativa, poiché tradotta dal limite di un rapporto fra quantità positive
- se l'evento A coincide Ω , allora, banalmente, si ha $N_A = N$ e quindi $\Pr\{A\} = 1$
- se A e B sono due eventi che si escludono vicedevolmente (si dice mutualmente esclusivi), allora una prova dell'esperimento verificare $A \cup B$ dà un risultato che sta in A o in B, ma, che, non può stare in entrambi: ne consegue che $N_{A \cup B} = N_A + N_B$ e quindi

$$\begin{aligned} \Pr\{A \cup B\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{A \cup B}}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A + N_B}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_B}{N} \\ &= \Pr\{A\} + \Pr\{B\} \end{aligned} \quad (12.13)$$

I tre assiomi della teoria assiomatica di Kolmogorov rimangono verificati, e con loro anche le proprietà.

12.5 Eventi statisticamente indipendenti

Due eventi A e B sono indipendenti se il verificarsi dell'uno non ha alcuna implicazione sul verificarsi dell'altro.

Per eventi indipendenti:

$$\Pr\{A\} = \Pr\{A|B\} \quad (12.14)$$

$$\Pr\{B\} = \Pr\{B|A\} \quad (12.15)$$

Ricordando la definizione di probabilità condizionata:

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A, B\}}{\Pr\{B\}} \quad (12.16)$$

si può concludere che, per eventi indipendenti:

$$\Pr\{A, B\} = \Pr\{A\} \cdot \Pr\{B\} \quad (12.17)$$

e cioè, che la probabilità congiunta è uguale al prodotto delle probabilità marginali (dei singoli eventi).

Un altro importante risultato è il teorema (o formula) di Bayes, che può essere formalizzato nel modo seguente:

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{B|A\} \cdot \Pr\{A\}}{\Pr\{B\}} \quad (12.18)$$

La formula di Bayes è spesso usata in combinazione con il teorema della probabilità totale, che esaminiamo di seguito.

12.5.1 Teorema della probabilità totale

Costruiamo, preliminarmente, una partizione dello spazio Ω scegliendo N eventi B_i (con $i = 1, 2, \dots, N$) di S con le seguenti proprietà:

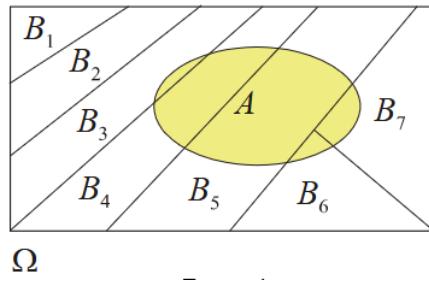
$$B_i \cap B_k = \emptyset \text{ se } i \neq k \quad (12.19)$$

$$\bigcup_{i=1}^N B_i = \Omega \quad (12.20)$$

$B_i \cap B_k = \emptyset$ se $i \neq k$ esprime il fatto che, gli elementi della partizione sono disgiunti.

Invece $\bigcup_{i=1}^N B_i = \Omega$ esprime il fatto che l'unione di tutti gli eventi della partizione restituisce lo spazio comune.

Un esempio dal punto di vista grafico di quello che abbiamo scritto in formule:



Nella stessa figura è anche rappresentato un generico evento A, che non è un elemento della partizione.

Ricordando l'assioma della teoria assiomatica di Kolmogorov:

$$A \cup B = \emptyset \rightarrow \Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} \quad (12.21)$$

allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \Pr\{A\} &= \Pr\{A \cup B\} \\ &= \Pr\left\{A \cap \bigcup_{i=1}^N B_i\right\} \\ &= \Pr\left\{\bigcup_{i=1}^N A \cap B_i\right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \Pr\{A \cap B_i\} \\ &= \sum_{i=1}^N \Pr\{A|B_i\} \cdot \Pr\{B_i\} \end{aligned} \quad (12.22)$$

Quindi dalla formula di Bayes del tipo:

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{B|A\} \cdot \Pr\{A\}}{\Pr\{B\}} \quad (12.23)$$

con un cambio di notazione, possiamo riscrivere la formula di Bayes come:

$$\Pr\{B_i|A\} = \frac{\Pr\{A|B_i\} \cdot \Pr\{B_i\}}{\Pr\{A\}} \quad (12.24)$$

Inoltre, grazie alla nuova formula di $\Pr\{A\}$ che abbiamo trovato, cioè $\Pr\{A\} = \sum_{i=1}^N \Pr\{A|B_i\} \cdot \Pr\{B_i\}$, possiamo riscrivere $\Pr\{B_i|A\}$ come:

$$\Pr\{B_i|A\} = \frac{\Pr\{A|B_i\} \cdot \Pr\{B_i\}}{\sum_{i=1}^N \Pr\{A|B_i\} \cdot \Pr\{B_i\}} \quad (12.25)$$

che è, in effetti, la formula ampiamente utilizzata nella pratica.

12.6 Esperimento di Bernoulli

Un esperimento aleatorio di grande importanza nella pratica è quello delle prove di Bernoulli (o prove ripetute binarie e indipendenti).

Si definisce tale un esperimento aleatorio a due soli esiti, indicati con x_1 e x_2 caratterizzati da:

$$\Pr\{x_1\} = p \quad (12.26)$$

$$\Pr\{x_2\} = q = 1 - p \quad (12.27)$$

Si considerano n ripetizioni dell'esperimento assicurandosi che la singola ripetizione non abbia alcuna relazione con le altre (ipotesi di indipendenza) e si considera l'evento:

$$A = x_1 \quad (12.28)$$

in cui x_1 si è presentato k volte nelle n prove ripetute.

In virtù dell'indipendenza, applicando ripetutamente il risultato

$$\Pr\{A, B\} = \Pr\{A\} \cdot \Pr\{B\} \quad (12.29)$$

all'evento A ed il suo complementare \bar{A} , si trova immediatamente:

$$\begin{aligned} \Pr\{A\} &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned} \quad (12.30)$$

Questa formula è definita come formula di Bernoulli.

Il termine $p^k q^{n-k}$ esprime il fatto che sono favorevoli all'evento A i casi in cui x_1 si è presentato k volte e, conseguentemente, x_2 si è presentato $(n - k)$ volte, mentre il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ tiene conto del numero di tali casi, potendosi disporre, nella sequenza delle repliche dell'esperimento, i k valori x_1 in un numero di modi che uguaglia le combinazioni semplici di classe k di n elementi.

12.7 Distribuzione di probabilità cumulativa e densità di probabilità

In molti contesti di interesse pratico, si pone il problema di calcolare la probabilità che una variabile aleatoria X assuma valori all'interno di un dato intervallo $(a, b]$, vale a dire la $\Pr\{a < X \leq b\}$.

Con la notazione $(\cdot, \cdot]$ si indica un intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra.

Per una variabile qualsiasi posta in questo intervallo, possiamo definire la distribuzione di probabilità cumulativa (o funzione di ripartizione):

$$F_X(x) = \Pr\{X \leq x\} \quad (12.31)$$

$F_X(x)$ esprime dunque la probabilità che la variabile aleatoria X assuma valori non maggiori del valore x assegnato.

$F_X(x)$ deve soddisfare le seguenti proprietà:

1. assume valori appartenenti all'intervallo $[0, 1]$, cioè:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (12.32)$$

2. il suo valore limite per $x \rightarrow +\infty$ è uguale a 1, cioè:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) &= F_X(+\infty) \\ &= \Pr\{X \leq +\infty\} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (12.33)$$

3. il suo valore limite per $x \rightarrow -\infty$ è uguale a 0, cioè:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) &= F_X(-\infty) \\ &= \Pr\{X \leq -\infty\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12.34)$$

4. è monotona non decrescente, cioè:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1) \quad (12.35)$$

5. se presenta una discontinuità di prima specie (cioè in quel punto si ha un salto e il limite destro e sinistro sono finiti ma diversi tra loro), nel punto $x = \bar{x}$, allora la differenza tra il suo limite destro e il suo limite sinistro, in tale punto è pari alla probabilità dell'evento $X = \bar{x}$, cioè:

$$\Pr\{X = \bar{x}\} = F_X(\bar{x}^+) - F_X(\bar{x}^-) \quad (12.36)$$

avendo indicato con $F_X(\bar{x}^+)$ il limite destro e con $F_X(\bar{x}^-)$ quello sinistro.

La seconda proprietà deriva dal fatto che l'evento $X \leq +\infty$ coincide con l'evento certo Ω .

Dualmente, la terza proprietà deriva dal fatto che l'evento $X \leq -\infty$ coincide con l'evento impossibile \emptyset .

Utilizzando la definizione di $F_X(x)$, è chiaro che si può scrivere:

$$\begin{aligned}\Pr\{a < X \leq b\} &= \Pr\{X \leq b\} - \Pr\{X \leq a\} \\ &= F_X(b) - F_X(a)\end{aligned}\tag{12.37}$$

Questa formula, risolve il problema su come calcolare la probabilità di $\Pr\{a < X \leq b\}$.

Quindi il calcolo di $\Pr\{a < X \leq b\}$ può essere risolto utilizzando un'altra funzione denominata come funzione densità di probabilità.

La funzione di densità di probabilità è legata alla distribuzione di probabilità cumulativa con la seguente legge:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}\tag{12.38}$$

Da questa relazione, possiamo scrivere la relazione inversa:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi\tag{12.39}$$

Anche la densità di probabilità deve soddisfare alcune proprietà; in particolare:

1. è una funzione non negativa, cioè:

$$f_X(x) \geq 0\tag{12.40}$$

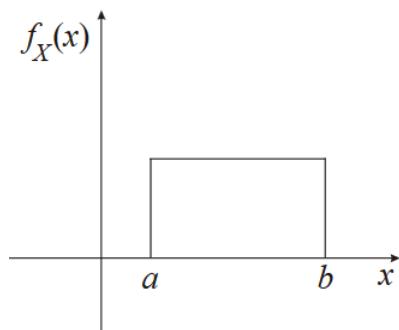
2. il suo integrale esteso all'interno dell'asse reale è uguale a 1, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1\tag{12.41}$$

L'ultima proprietà viene definita anche come condizione di normalizzazione.

Inoltre, costituisce il primo passo fondamentale per verificare se una funzione può rappresentare o meno una densità di probabilità.

Utilizzando i grafici:



l'area del rettangolo deve essere uguale a 1, inoltre, se consideriamo l'intervallo delle x tra a e b , allora l'altezza sarà $\frac{1}{b-a}$.

Utilizzando la $f_X(x)$, la $\Pr\{a < X \leq b\}$ può anche essere calcolata come:

$$\begin{aligned}\Pr\{a < X \leq b\} &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{-\infty}^b f_X(x)dx - \int_{-\infty}^a f_X(x)dx \\ &= \int_a^b f_X(x)dx\end{aligned}\tag{12.42}$$

12.8 Distribuzione di probabilità cumulativa nel dettaglio

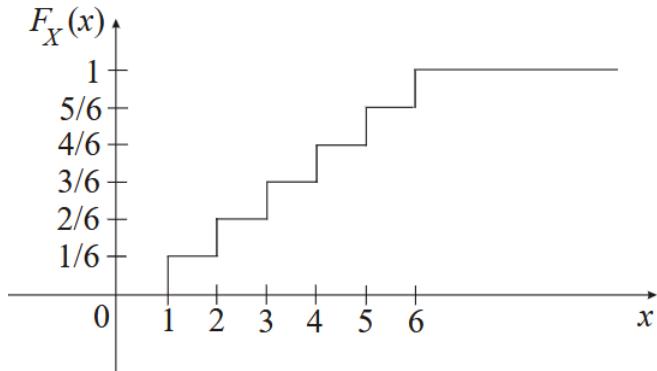
All'inizio della trattazione si è detto che una variabile aleatoria può essere:

- discreta, quando l'insieme dei valori che essa assume è discreto
- continua, quando l'insieme dei valori che essa assume è continuo

Per come sono definite, la distribuzione di probabilità cumulativa e la densità di probabilità sembrano "naturalmente" adattarsi al caso di variabile continua.

Per quanto riguarda la distribuzione di probabilità cumulativa, si tratta di una funzione che rimane costante nei tratti che separano due generici valori possibili, e che si incrementa in corrispondenza di ciascuno di questi valori, per una quantità pari alla probabilità che lo caratterizza.

Un esempio di probabilità cumulativa:



Generalizzando, la distribuzione di probabilità cumulativa per una variabile discreta è una funzione a gradini (costante a tratti), esprimibile come segue:

$$F_X(x) = \sum_k \Pr\{X = x_k\} u(x - x_k) \quad (12.43)$$

dove gli x_k sono i valori possibili e $u(x - x_k)$ è il gradino unitario che parte da x_k .

Con la notazione \sum_k si intendono tutti i possibili k disponibili, viene usata come notazione generale

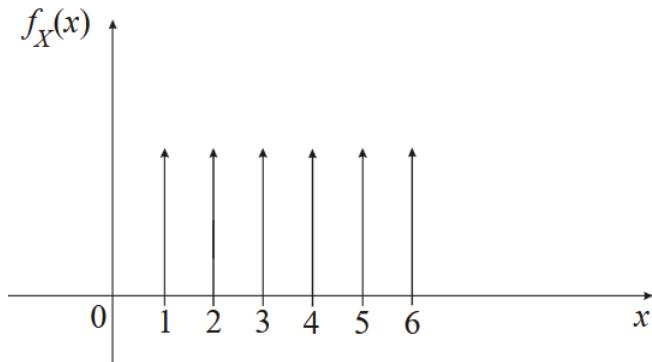
Per quanto riguarda la densità di probabilità di una variabile aleatoria discreta, essa, in senso stretto, sembrerebbe non definibile, visto che la formula di $F_X(x)$ appena citata non è derivabile.

Ma, grazie alla Delta di Dirac, possiamo definire la densità di probabilità per una variabile discreta, come:

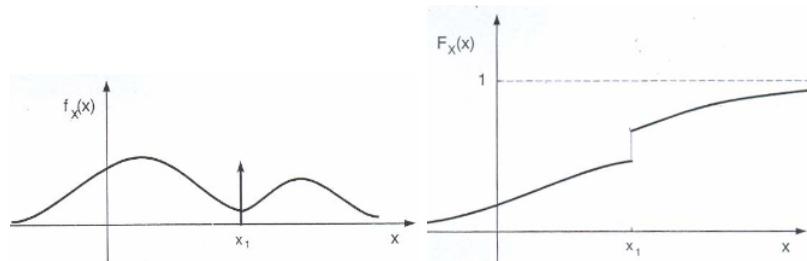
$$f_X(x) = \sum_k \Pr\{X = x_k\} \delta(x - x_k) \quad (12.44)$$

La densità di probabilità di una variabile discreta è data da una sequenza di Delta di Dirac centrate sui valori possibili della variabile e di area pari alla corrispondente probabilità.

In seguito una densità di probabilità riguardo al lancio di un dado:



Inoltre, le densità di probabilità possono essere miste:



Nel caso di variabile aleatoria continua, la probabilità che la X assuma un particolare valore \bar{x} è uguale a zero:

$$\Pr\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\} = \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \Delta x} f_X(x) dx \quad (12.45)$$

Se Δx è molto piccolo, questa espressione può essere approssimata con:

$$\Pr\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\} \approx f_X(\bar{x})\Delta x \quad (12.46)$$

che facendo tendere a Δx a zero, visto che $f_X(\bar{x})$ assume necessariamente un valore finito, dà come risultato:

$$\Pr\{X = \bar{x}\} = 0 \quad (12.47)$$

Nel caso di variabile discreta, la stessa conclusione vale per tutti i valori di X non ammissibili, mentre in corrispondenza dei valori ammissibili x_k si ha:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Pr\{x_k < X \leq x_k + \Delta x\} = \Pr\{X = x_k\} \quad (12.48)$$

Questa formula è uguale alla formula della densità di probabilità di una variabile discreta, quindi, tendendo Δx a zero nel caso continuo si avrà che:

$$\Pr\{x_k < X \leq x_k + \Delta x\} = \int_{x_k}^{x_k + \Delta x} \Pr\{X = x_k\} \delta(x - x_k) dx \quad (12.49)$$

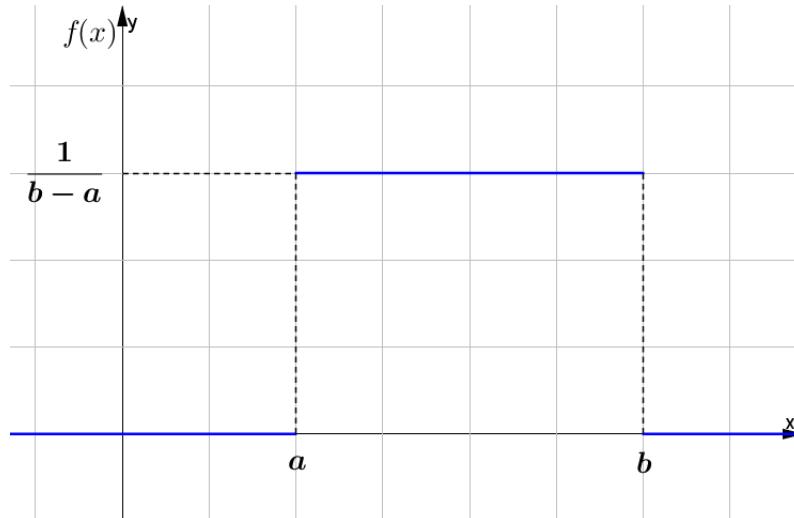
12.9 Esempi di variabili aleatorie

Si forniscono diversi tipi di esempi di variabili continue.

12.9.1 Variabile uniforme

Densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{per } x > b \end{cases} \quad (12.50)$$



Per integrazione, si ottiene:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{per } x > b \end{cases} \quad (12.51)$$

12.9.2 Esponenziale unilatera

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ a \cdot \exp(-ax) & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (12.52)$$

con $a > 0$.

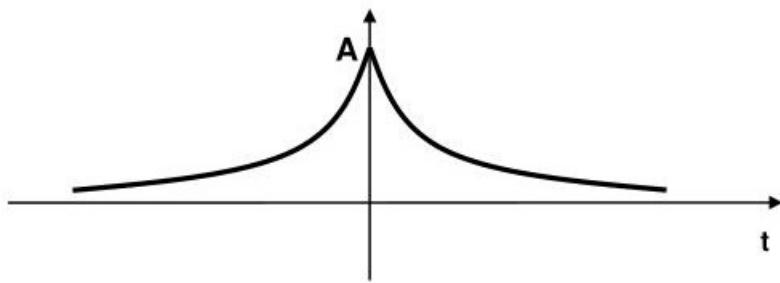
Per integrazione si avrà:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 - \exp(-ax) & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (12.53)$$

12.9.3 Esponenziale bilatera (di Laplace)

Si tratta di una variabile aleatoria continua caratterizzata dalla densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{a}{2} \exp(-a|x|) \text{ per } a > 0 \quad (12.54)$$



Per integrazione, si ottiene:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(ax) & \text{per } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \exp(-ax) & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (12.55)$$

12.9.4 Gaussiana

Si tratta di una variabile aleatoria continua caratterizzata dalla densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (12.56)$$

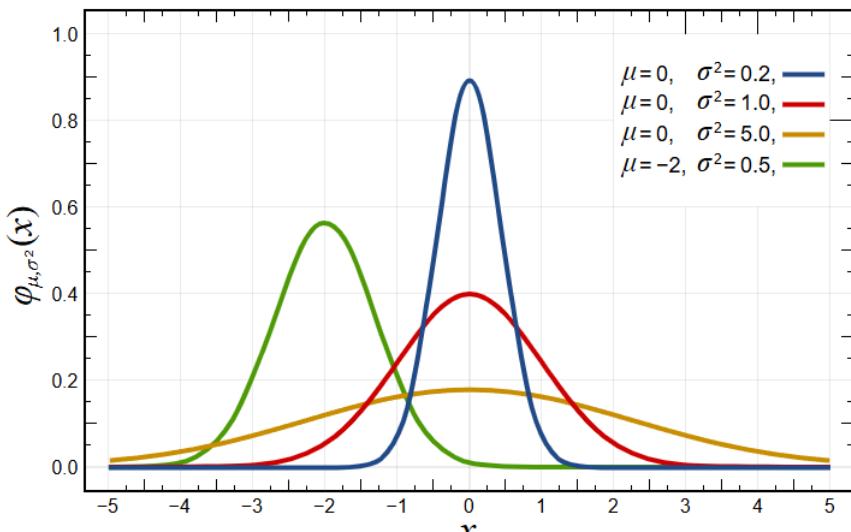
Alcune considerazioni riguardo alla formula della gaussiana.

$f_X(x)$ assume il valore massimo in $x = \mu$.

$(x - \mu)^2$ è una relazione quadratica, quindi è una relazione non lineare.

σ più è piccola, più è stretta la gaussiana.

Esempi di gaussiane con valori differenti:



Adesso proporemo a riscrivere $F_X(x)$ con una relazione "pseudo-lineare".

Introducendo il cambiamento di variabile:

$$y = \frac{\xi - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \rightarrow d\xi = \sqrt{2}\sigma dy \quad (12.57)$$

Grazie a questa sostituzione, possiamo avere $F_X(x)$ come:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \exp(-y^2) dy \quad (12.58)$$

Si consideri ora la seguente definizione di $\text{erfc}(x)$ (funzione errore complementare):

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-y^2) dy \quad (12.59)$$

Tale funzione verifica le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \text{erfc}(-\infty) = 2 \\ \text{erfc}(0) = 1 \end{cases} \quad (12.60)$$

Non è una densità di probabilità perchè la funzione a $-\infty \neq 1$.

Si può anche considerare la funzione $\text{erf}(x)$ (funzione errore), così definita:

$$\begin{aligned} \text{erf}(x) &= 1 - \text{erfc}(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-y^2) dy - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-y^2) dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy \end{aligned} \quad (12.61)$$

Utilizzando le funzioni $\text{erfc}(x)$ e $\text{erf}(x)$, possiamo riscrivere $F_X(x)$ come:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \exp(-y^2) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{+\infty} \exp(-y^2) dy \\ &= 1 - \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}[1 - \text{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)] \\ &= \frac{1}{2}[1 + \text{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)] \end{aligned} \quad (12.62)$$

Generalmente si prendere il valore di $\text{erfc}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$ da una tabella e si sostituisce alla formula $1 - \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$.

Inoltre, possiamo scrivere la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
erfc(-x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{\infty} \exp(-y^2) dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^0 \exp(-y^2) dy + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-y^2) dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy + 1 \\
&= 1 + \operatorname{erf}(x)
\end{aligned} \tag{12.63}$$

invece:

$$\begin{aligned}
\operatorname{erf}(-x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} \exp(-y^2) dy \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy \\
&= -\operatorname{erf}(x)
\end{aligned} \tag{12.64}$$

Da questa ultima equazione, notiamo che la funzione $\operatorname{erf}(x)$ è una funzione dispari.

Altra funzione $\operatorname{erfc}(x)$ che si considera la funzione $Q(x)$ così definita:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \tag{12.65}$$

Con un semplice cambiamento di variabile ($t = \frac{y}{\sqrt{2}}$), possiamo riscrivere $Q(x)$ come:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{12.66}$$

12.9.5 Rayleigh

Si tratta di una variabile aleatoria continua caratterizzata dalla densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \tag{12.67}$$

Per integrazione si ottiene:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \tag{12.68}$$

12.9.6 Binomiale

Si tratta di una variabile aleatoria discreta associata all'esperimento di Bernoulli:

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta(x - k) \tag{12.69}$$

dove $X = k$ comporta che, in n prove ripetute, per k volte si è avuto l'esito che ha la probabilità p di verificarsi.

Possiamo variare p .

Ponendo ad esempio $p = \frac{1}{2}$, $f_X(x)$ diventa:

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \delta(x - k) \quad (12.70)$$

Per integrazione, $F_X(x)$ sarà:

$$F_X(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u(x - k) \quad (12.71)$$

12.9.7 Poisson

Si tratta di una variabile aleatoria discreta caratterizzata dalla densità di probabilità:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \delta(x - k) \quad (12.72)$$

Per integrazione:

$$F_X(x) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} u(x - k) \quad (12.73)$$

12.10 Indicatori statistici

La conoscenza della funzione densità di probabilità (il che è lo stesso, della distribuzione di probabilità cumulativa) fornisce una descrizione completa del comportamento di una variabile aleatoria.

In molti casi, una conoscenza così dettagliata non è necessaria e ci si può accontentare della determinazione di alcuni parametri caratteristici, i quali verranno indicati di seguito.

12.10.1 Valore medio

Per una variabile aleatoria X con densità di probabilità $f_X(x)$, il valore è fornito dale seguente integrale:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (12.74)$$

In alcuni casi, si indica il valore medio con la lettera, con la lettera E (dall'inglese Expectation), oppure con le parentesi <>:

$$\langle X \rangle = E\{X\} = m_X \quad (12.75)$$

Il valore medio ha, essenzialmente, il significato di "baricentro" attorno al quale si distribuiscono i valori della variabile aleatoria.

Non sempre m_X coincide ad un valore possibile (si pensi ad esempio al m_x di un lancio del dado).

Se la variabile aleatoria è discreta, m_X si può scrivere come:

$$\begin{aligned} m_X &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_k p_k \delta(x - x_k) dx \\ &= \sum_k p_k \int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x - x_k) dx \\ &= \sum_k p_k x_k \end{aligned} \quad (12.76)$$

Inoltre, nell'ultimo passaggio, si è sfruttato la proprietà di campionamento della Delta di Dirac.

Per semplificare la notazione:

$$\Pr\{X = x_k\} = p_k \quad (12.77)$$

Per una funzione generale:

$$Y = g(X) \quad (12.78)$$

si può calcolare il valore della variabile media:

$$m_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (12.79)$$

Inoltre, si può calcolare la funzione di densità di probabilità di $f_Y(y)$ a partire dalla conoscenza della $f_X(x)$.

m_Y si può calcolare come:

$$m_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \quad (12.80)$$

La conoscenza di $f_Y(y)$ non è strettamente necessaria perché spesso si utilizza la formula di m_y usando f_X .

12.10.2 Valore quadratico medio

Si tratta di una particolare applicazione della $m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$ in cui:

$$Y = g(X) = X^2 \quad (12.81)$$

quindi possiamo scrivere che il valore quadratico medio $\langle X^2 \rangle$ come:

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx \quad (12.82)$$

Per una variabile discreta, il valore quadratico medio è:

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \sum_k p_k \delta(x - x_k) dx \\ &= \sum_k p_k \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \delta(x - x_k) dx \\ &= \sum_k p_k x_k^2 \end{aligned} \quad (12.83)$$

12.10.3 Varianza

Per una variabile aleatoria X con densità di probabilità $f_X(x)$, la varianza è fornita dal seguente integrale:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \langle (X - m_X)^2 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx \end{aligned} \quad (12.84)$$

La varianza misura il livello di dispersione della variabile aleatoria intorno al valore medio.

La sua radice quadrata σ prende il nome di deviazione standard (o scarto quadratico medio).

Inoltre, la relazione tra varianza, valore quadratico medio e valore medio è la seguente:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - 2m_X \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + m_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - 2m_X \cdot m_X + m_X^2 \cdot 1 \\
&= \langle X^2 \rangle - 2m_X^2 + m_X^2 \\
&= \langle X^2 \rangle - m_X^2
\end{aligned} \tag{12.85}$$

avendo sfruttato, nell'ultimo termine, anche la proprietà di normalizzazione.

12.10.4 Momenti e momenti centrali

Data una variabile aleatoria X con densità di probabilità $f_X(x)$, si definisce momento di ordine j di tale variabile il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
M_j &= \langle X^j \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^j f_X(x) dx \text{ per } j = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{12.86}$$

Per $j = 1$, si ha il valore medio, per $j = 2$ si ha il valore quadratico medio.

Per la stessa variabile aleatoria X , si definisce momento centrale di ordine j il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
\sigma_j &= \langle (X - m_X)^j \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^j f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_1)^j f_X(x) dx \text{ per } j = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{12.87}$$

per $j = 2$, si riottiene la varianza; si ha dunque $\sigma_2 = \sigma_X^2$.

Oppure, sviluppando la potenza j -esima, possiamo scrivere σ_j come:

$$\sigma_j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-M_1)^k M_{j-k} \text{ per } j = 2, 3, \dots \tag{12.88}$$

I momenti di una variabile aleatoria, oltre alle espressioni integrali precedentemente scritte, possono essere ricavati con la funzione caratteristica così definita:

$$\begin{aligned}
C_X(u) &= \langle \exp(jux) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(jux) f_X(x) dx
\end{aligned} \tag{12.89}$$

La formula appena scritta è simile alla formula della trasformata di Fourier, al posto della t c'è la variabile u , e al posto di ω c'è la variabile x .

Come la trasformata di Fourier, possiamo definire la sua anti-trasformata, quindi dai momenti j -esimi si può ricavare $f_X(x)$ come:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jux) C_X(u) du \quad (12.90)$$

Grazie a questo legame e alla funzione caratteristica, possiamo scrivere questa relazione:

$$M_j = (-j)^j \left. \frac{d^j C(u)}{du^j} \right|_{u=0} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots \quad (12.91)$$

Inoltre, grazie a questa relazione, possiamo anche scrivere la seguente relazione:

$$\begin{aligned} (-j)^j \left. \frac{d^j C(u)}{du^j} \right|_{u=0} &= (-j)^j \left. \frac{d^j}{du^j} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(jux) f_X(x) dx \right|_{u=0} \\ &= (-j)^j \left. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^j}{du^j} \exp(jux) f_X(x) dx \right|_{u=0} \\ &= (-j)^j (j)^j \left. \int_{-\infty}^{+\infty} x^j \exp(jux) f_X(x) dx \right|_{u=0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^j f_X(x) dx \\ &= M_j \end{aligned} \quad (12.92)$$

Per una variabile aleatoria discreta, la funzione caratteristica, ponendo

$$\Pr\{X = x_k\} = p_k \quad (12.93)$$

diventa:

$$C_X(u) = \sum_k p_k \exp(jux_k) \quad (12.94)$$

12.11 Funzioni di variabile aleatoria

In molti problemi di interesse pratico, nota che sia la descrizione statistica di una variabile aleatoria X, per esempio, tramite la conoscenza della densità di probabilità $f_X(x)$ si è interessati a risalire alla descrizione statistica di una variabile aleatoria Y legata a X dalla relazione:

$$Y = g(X) \quad (12.95)$$

Se $g(X)$ è una funzione monotona, crescente o decrescente, il problema può essere immediatamente risolto; si verifica infatti che risulta:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} \Big|_{x=g^{-1}(y)} \quad (12.96)$$

dove si è posto:

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} \quad (12.97)$$

e $g^{-1}(Y)$ la funzione inversa di $Y = g(X)$ (che esiste sicuramente perché la funzione è monotona).

L'equazione di $f_Y(y)$ sarà presa senza dimostrazione.

Nel caso in cui la funzione $g(x)$ non sia monotona, ma l'intervallo di variabilità della X decomponibile in un numero finito di regioni in cui la funzione è monotona, la densità di probabilità della variabile aleatoria Y può essere ricavata come:

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \Big|_{x_i=g^{-1}(y)} \quad (12.98)$$

dove l'insieme $\{x_i\}$ è costituito da tutte le soluzioni dell'equazione $g(x)$.

Esplicitamente, ciò equivale a dire che:

- si individuano i sottointervalli della variabile aleatoria X in cui $g(x)$ è monotona
- si determinano i corrispondenti intervalli della variabile aleatoria Y
- entro ciascun intervallo si applica la formula di $f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} \Big|_{x=g^{-1}(y)}$, che fornirà l'andamento "locale" della densità di probabilità cercata
- si sovrappongono i risultati parziali così ottenuti

12.12 Coppie di variabili aleatorie

Consideriamo una coppia di variabili aleatorie X e Y.

Singolarmente, esse saranno caratterizzate dalle rispettive densità di probabilità $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ o, il che è lo stesso delle rispettive densità di probabilità cumulativa $F_X(x)$ e $F_Y(y)$.

Ciò che però può essere di interesse è la descrizione statistica congiunta di queste variabili.

Possiamo definire la distribuzione di probabilità congiunta delle due variabili la seguente funzione:

$$F_{XY}(x, y) = \Pr\{X \leq x, Y \leq y\} \quad (12.99)$$

La valutazione della distribuzione di probabilità congiunta risulta particolarmente semplice nel caso in cui le variabili X e Y sono tra loro statisticamente indipendenti.

Grazie alla proprietà di indipendenza, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} F_{XY} &= \Pr\{X \leq x\} \cdot \Pr\{Y \leq y\} \\ &= F_X(x) \cdot F_Y(y) \end{aligned} \quad (12.100)$$

Come nel caso nelle funzioni ad una variabile, per $F_{XY}(x, y)$ possiamo determinare le proprietà statistiche marginali:

1. $F_{XY}(x, y)$ assume valori appartenenti all'intervallo $[0, 1]$, cioè:

$$0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1 \quad (12.101)$$

2. $F_{XY}(x, y_0)$ (si legge il valore di y_0 della variabile Y) è monotona non decrescente nella variabile X e continua da destra in questa variabile;
analogamente $F_{XY}(x_0, y)$, come si scelga il valore x_0 della variabile X, è monotona non decrescente nella variabile Y e continua da destra in questa variabile

3. $F_{XY}(x, y)$ soddisfa le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} F_{XY}(-\infty, y) &= \Pr\{X \leq -\infty, Y \leq y\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12.102)$$

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, -\infty) &= \Pr\{X \leq x, Y \leq -\infty\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12.103)$$

$$\begin{aligned} F_{XY}(-\infty, -\infty) &= \Pr\{X \leq -\infty, Y \leq -\infty\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12.104)$$

4. le distribuzioni di probabilità cumulative delle variabili X e Y (distribuzioni marginali) si ottengono come segue:

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) \text{ saturazione della variabile y} \quad (12.105)$$

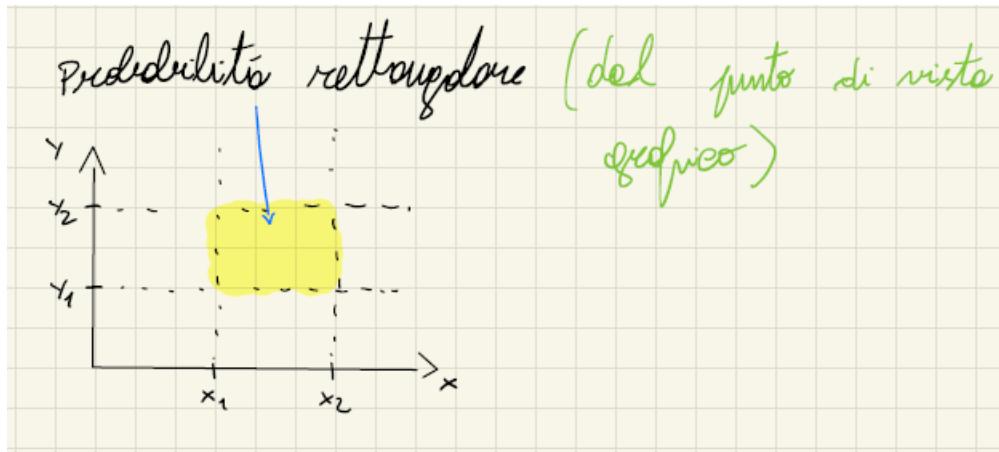
$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y) \text{ saturazione della variabile x} \quad (12.106)$$

5. il limite di $F_{XY}(x, y)$ quando sia x che y tendono a $+\infty$ è unitario, si ha cioè:

$$F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1 \text{ evento certo} \quad (12.107)$$

6. la probabilità dell'evento "rettangolare" : $\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}$ può essere calcolato mediante la relazione seguente:

$$\begin{aligned} \Pr\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} &= F_{XY}(x_2, y_2) \\ &\quad - F_{XY}(x_1, y_2) \\ &\quad - F_{XY}(x_2, y_1) \\ &\quad + F_{XY}(x_1, y_1) \end{aligned} \quad (12.108)$$



Quanto scritto sin qui per le distribuzioni di probabilità cumulativa può essere esteso alla densità di probabilità.

Definiamo allora la seguente densità di probabilità congiunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (12.109)$$

Possiamo calcolarci la funzione inversa per calcolarci la distribuzione di probabilità congiunta a partire dalla densità di probab:

$$F_{XY}(x, y) = \int_{\alpha=-\infty}^x \int_{\beta=-\infty}^y f_{XY}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (12.110)$$

Se le variabili sono statisticamente indipendenti, si ha:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (12.111)$$

Come la distribuzione di probabilità cumulativa, anche la densità di probabilità congiunta gode di una serie di proprietà gode di una serie di proprietà; le più importanti sono le seguenti:

1. $f_{XY}(x, y)$ assume valori non negativi, cioè:

$$f_{XY}(x, y) \geq 0 \quad (12.112)$$

2. l'integrale di f_{XY} sull'intero piano x-y vale 1 (proprietà di normalizzazione), cioè:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 \quad (12.113)$$

3. le densità di probabilità marginali delle variabili X e Y si ottengono come segue:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad (12.114)$$

Facendo l'integrale su dy, si satura y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \quad (12.115)$$

Facendo l'integrale su dx, si satura x

4. la probabilità di un evento $A = \{(X, Y) \in D\}$ individuato da un dominio D nel piano x-y, è data da:

$$\Pr(A) = \iint_D f_{XY}(x, y) dx dy \quad (12.116)$$

12.13 Densità di probabilità condizionata

Date due variabili aleatorie X e Y, si può introdurre la densità di probabilità condizionata della variabile aleatoria Y, rispetto all'evento $\{X = x\}$:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \quad (12.117)$$

Dall'altro canto, per definizione:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{dF_{Y|X}(y|x)}{dy} \quad (12.118)$$

e quindi, la distribuzione di probabilità condizionata della variabile aleatoria Y, rispetto all'evento $\{X = x\}$ risulta:

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y|x) &= \int_{\beta=-\infty}^y f_{Y|X}(\beta|x) d\beta \\ &= \int_{\beta=-\infty}^y \frac{f_{XY}(x,\beta)}{f_X(x)} d\beta \\ &= \frac{\int_{\beta=-\infty}^y f_{XY}(x,\beta) d\beta}{f_X(x)} \end{aligned} \quad (12.119)$$

Scambiando i ruoli X e Y, relazioni analoghe si trovano per la densità di probabilità condizionata della variabile aleatoria X, rispetto all'evento $\{Y = y\}$.

Nel caso di variabili aleatorie X e Y statisticamente indipendenti:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \quad (12.120)$$

e

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad (12.121)$$

Nel caso generale, quando X e Y possono essere anche non statisticamente indipendenti:

$$f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) \quad (12.122)$$

che a sua volta richiama la formula di Bayes.

12.14 Momenti congiunti e momenti centrali congiunti

Utilizzando le funzioni $F_{XY}(x, y)$ e $f_{XY}(x, y)$, le definizioni di momenti e momenti centrali fornite in precedenza per una variabile aleatoria possono essere estese a coppie di variabili aleatorie.

Si definisce un momento congiunto di ordine (j, k) della coppia di variabili aleatorie X e Y il seguente integrale:

$$\begin{aligned} M_{jk} &= \langle X^j Y^k \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} x^j y^k f_{XY}(x, y) dx dy \text{ per } j, k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (12.123)$$

Particolarmemente importante è il momento congiunto di ordine $(1, 1)$, il quale risulta:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \langle XY \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (12.124)$$

Il momento congiunto di ordine $(1, 1)$ prende il nome di correlazione.

Nel caso di variabili statisticamente indipendenti, avremo che:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \langle XY \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \int_{y=-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \\ &= m_X m_Y \end{aligned} \quad (12.125)$$

Se $M_{11} = m_X m_Y$ è verificata, si dice che le variabili X e Y sono tra loro incorrelate.

È certamente vero che la statistica indipendenza implica l'incorrelazione, non è detto il contrario.

Un caso particolare si verifica quando le variabili sono incorrelate e una di esse ha valor medio nullo; in questo caso:

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_X m_Y \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12.126)$$

Per estensione della terminologia introdotta nella teoria dei segnali determinati, si dice che le variabili X e Y, che verificano la condizione $M_{11} = 0$, sono tra loro ortogonali.

Quindi, l'ortogonalità può essere verificata anche se le variabili non sono incorrelate.

Dalla definizione di momento congiunto di ordine (j, k) , possiamo avere:

$$M_{10} = \langle X \rangle = m_X \quad (12.127)$$

$$M_{01} = \langle Y \rangle = m_Y \quad (12.128)$$

Si definisce momento centrale congiunto di ordine (j, k) il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk} &= \langle (X - m_x)^j (Y - m_Y)^k \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^j (y - m_Y)^k f_{XY}(x, y) dx dy \\ &\text{per } j, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12.129)$$

Anche qui riveste particolare importanza il caso $j = k = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \langle (X - m_x)(Y - m_Y) \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (12.130)$$

σ_{11} prende il nome di covarianza.

La covarianza, può essere espressa in funzione dei momenti definiti precedentemente:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \langle (X - m_x)(Y - m_Y) \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \\ &\quad - m_X \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy \\ &\quad - m_Y \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy \\ &\quad + m_X m_Y \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= M_{11} - m_X m_Y - m_Y m_X + m_X m_Y \cdot 1 \\ &= M_{11} - m_X m_Y m_X m_Y + m_X m_Y \\ &= M_{11} - m_X m_Y \end{aligned} \quad (12.131)$$

Se le variabili sono incorrelate (e lo sono certamente quando sono statisticamente indipendenti), è chiaro che risulta:

$$\sigma_{11} = 0 \quad (12.132)$$

Proprio in virtù di questo risultato, si conviene assumere σ_{11} come misura della correlazione statistica di due variabili aleatorie.

Generalmente, σ_{11} viene normalizzato e usa scegliere questo rapporto:

$$\begin{aligned}\rho_{XY} &= \frac{\sigma_{11}}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}\end{aligned}\tag{12.133}$$

ρ_{XY} prende il nome di coefficiente di correlazione.

Quando $|\rho_{XY}| = 1$, si dice che X e Y sono tra loro completamente correlate.

12.15 Funzione caratteristica congiunta

La funzione caratteristica ha, ovviamente, significato anche per una coppia di variabili aleatorie.

Si definisce funzione caratteristica congiunta delle variabili u e v:

$$\begin{aligned} C_{XY}(u, v) &= \langle \exp[j(ux + vy)] \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \exp[j(ux + vy)] f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (12.134)$$

$C_{XY}(u, v)$ può essere interpretata come un'antitrasformata di Fourier bidimensionale moltiplicata per $4\pi^2$.

La funzione che viene anti-trasformata è la densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$: u, x e v, y sono coppie di variabili congiunte.

La trasformazione inversa restituisce allora la densità di probabilità congiunta a parire dalla funzione caratteristica congiunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{u=-\infty}^{+\infty} \int_{v=-\infty}^{+\infty} C_{XY}(u, v) \exp[-j(ux + vy)] du dv \quad (12.135)$$

Come nel caso delle variabili singole, si possono ricavare i momenti da:

$$M_{jk} = (-j)^{j+k} \left. \frac{\partial^j \partial^k C_{XY}(u, v)}{\partial u^j \partial v^k} \right|_{u=0, v=0} \quad \text{per } j, k = 1, 2, \dots \quad (12.136)$$

Un'altra proprietà è la seguente: se le variabili X e Y sono statisticamente indipendenti, allora la funzione caratteristica congiunta è pari al prodotto delle funzioni caratteristiche delle singole variabili:

$$C_{XY}(u, v) = C_X(u) C_Y(v) \quad (12.137)$$

Tutte le definizioni fornite possono essere particolarizzate al caso di una coppia di variabili aleatorie discrete.

12.16 Variabili aleatorie gaussiane

Si può avere il caso anche di variabili aleatorie incorrelate non statisticamente indipendenti.

Considerando ora una coppia di variabili aleatorie X e Y e descritte da una densità di probabilità congiunta del tipo seguente:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\} \quad (12.138)$$

dove ρ è un opportuno parametro.

La densità di probabilità di probabilità marginali X e Y possono essere ricavate saturando l'altra variabile:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \quad (12.139)$$

$f_X(x)$ si è ricavata saturando la y dalla formula di $f_{XY}(x, y)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left[-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \quad (12.140)$$

$f_Y(y)$ si è ricavata saturando la x dalla formula di $f_{XY}(x, y)$

Variabili aleatorie caratterizzate dalla densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ si dicono gaussiane miste.

La loro peculiarità risiede nel fatto che, per essere l'incorrelazione implica la statistica indipendenza.

Se si calcola il coefficiente di correlazione, troveremo che:

$$\rho_{XY} = \rho \quad (12.141)$$

Le variabili sono incorrelate quando $\rho = 0$.

Quindi $f_{XY}(x, y)$ diventa:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\left[\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]\right\} = f_X(x)f_Y(y) \quad (12.142)$$

12.17 Estensione al caso di n variabili

Quanto detto per una coppia di variabile, può essere esteso a n variabili aleatorie X_1, X_2, \dots, X_n .

Se le variabili sono statisticamente indipendenti, avremo che la probabilità congiunta sarà formulata dal prodotto delle densità di probabilità marginali:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) \quad (12.143)$$

Grazie all'ipotesi di indipendenza statistica, possiamo scrivere che:

$$C_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{X_1}(x_1) C_{X_2}(x_2) \dots C_{X_n}(x_n) \quad (12.144)$$

Per ricavare la densità di probabilità di una delle variabili, basta saturare le altre, ad esempio:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} \int_{x_3=-\infty}^{+\infty} \dots f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n \quad (12.145)$$

12.18 Funzioni di due variabili aleatorie

Consideriamo un caso particolare:

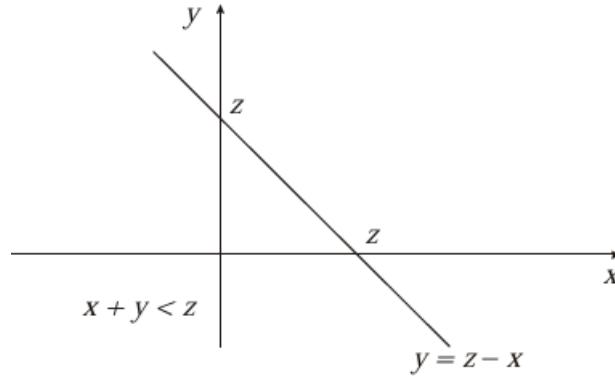
$$Z = X + Y \quad (12.146)$$

Si vuole esplicitare la densità di probabilità della variabile Z.

Quindi, possiamo considerare la distribuzione di probabilità cumulativa:

$$F_Z(z) = \Pr\{Z \leq z\} = \Pr\{X + Y \leq z\} \quad (12.147)$$

Quindi avremo questo tipo di figura:



La regione del piano x-y favorevole all'evento $F_Z(z)$ è quella al di sotto della retta $y = z - x$.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{x+y \leq z} f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{z-x} f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (12.148)$$

Da $F_Z(z)$ è possibile ricavare $f_Z(z)$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} \\ &= \frac{d}{dz} \left[\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{z-x} f_{XY}(x, y) dx dy \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, z-x) dx \end{aligned} \quad (12.149)$$

dove $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, z-x) dx$ è un'integrale di convoluzione.

Un caso ulteriore è quando le variabili X e Y sono statisticamente indipendenti:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \quad (12.150)$$

che ha, evidentemente, il significato di integrale di convoluzione tra le densità di probabilità dei singoli addendi.

Inoltre, possiamo ricavare valore medio:

$$\begin{aligned} m_Z &= \langle g(X, Y) \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (12.151)$$

E anche la varianza:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_Z^2 \rangle &= \langle [g(X, Y) - \langle g(X, Y) \rangle]^2 \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} [g(x, y) - \langle g(x, y) \rangle]^2 f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (12.152)$$

In particolare se $g(X, Y)$ è una somma:

$$m_Z = m_X + m_Y \quad (12.153)$$

Il valore medio della somma di due variabili aleatorie è dunque sempre uguale alla somma dei valori medi delle variabili singole.

Inoltre, sempre se esiste la somma:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{11} \quad (12.154)$$

Solo nel caso di variabili incorrelate, la varianza della somma di due variabili aleatorie è pari alla somma delle varianze delle singole variabili perché $\sigma_{11} = 0$.

In questo caso particolare, possiamo scrivere anche che:

$$C_Z(u) = C_X(u)C_Y(u) \quad (12.155)$$

12.19 Funzioni di n variabili aleatorie

Possiamo generalizzare il caso visto in due variabili a n variabili.

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| \quad (12.156)$$

dove:

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \right| \quad (12.157)$$

Sapendo la relazione tra X_j e Y_k possiamo esplicitare le variabili come:

$$X_1 = g_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad (12.158)$$

$$X_2 = g_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad (12.159)$$

...

$$X_n = g_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad (12.160)$$

12.20 Teorema del limite centrale

Consideriamo la variabile aleatoria:

$$Z_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad (12.161)$$

e supponiamo che le n variabili aleatorie X_1, X_2, \dots, X_n :

- siano tra loro statisticamente indipendenti
- abbiano tutte uguale densità di probabilità $f_{X_j}(x_j) = f(x)$, con valore medio $m_{X_j} = m$ e varianza $\sigma_{X_j}^2 = \sigma^2$

Per n che tende a ∞ , e considerando le ipotesi scritte precedentemente, possiamo scrivere che:

$$m_n = n \cdot m \quad (12.162)$$

$$\sigma_n^2 = n \cdot \sigma^2 \quad (12.163)$$

Dalla formula di Z_n , definiamo questo tipo di variabile:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{Z_n - m_n}{\sigma_n} \\ &= \frac{Z_n - n \cdot m}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \end{aligned} \quad (12.164)$$

Indipendentemente da n , è chiaro che S_n ha valor medio nullo e varianza unitaria.

A parte queste differenze, S_n ha le stesse proprietà statistiche di Z_n , in particolare lo stesso andamento della densità di probabilità.

Per $n \rightarrow \infty$ è fornita dalla seguente enunciato denominato teorema-limite centrale.

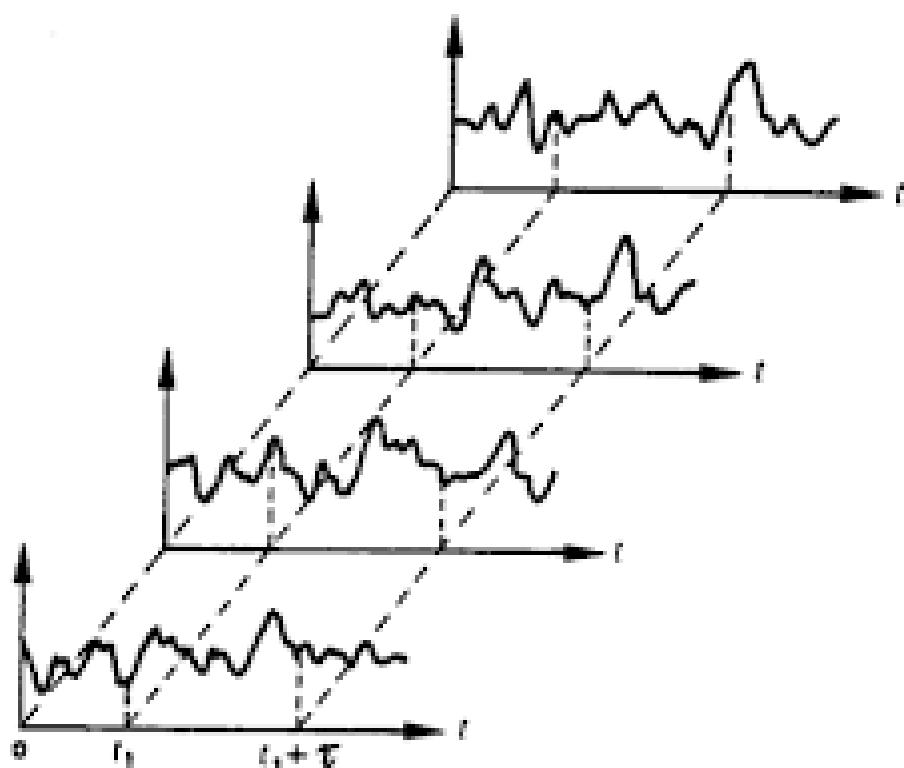
La densità di probabilità della variabile somma normalizzata S_n tende a una variabile gaussiana con valor medio nullo e varianza unitaria; si ha cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{S_n}(s_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s_n^2}{2}\right) \quad (12.165)$$

In particolare, questo risultato asserisce che la somma di un gran numero di variabili aleatorie indipendenti segue, con buona approssimazione, una legge gaussiana, e ciò indipendentemente dalla particolare distribuzione di ciascuna di esse.

Capitolo 13

Processi stocastici



13.1 Processi stocastici: cosa sono

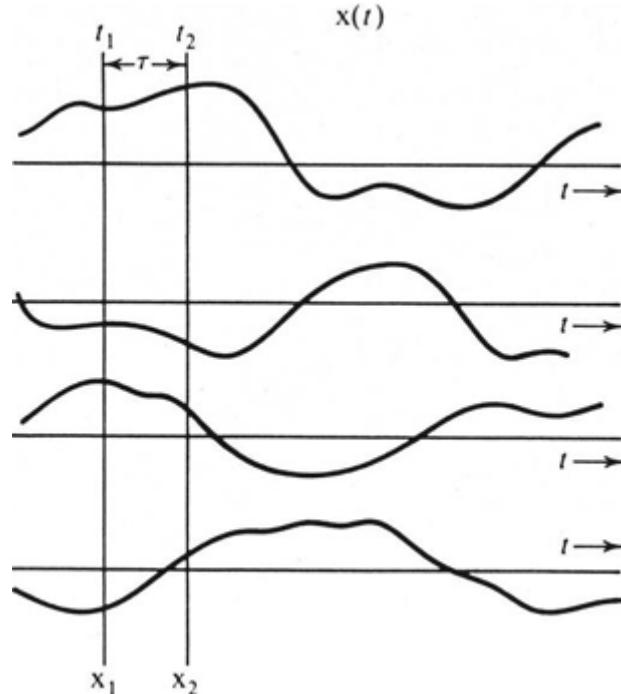
I segnali aleatori vengono comunemente denominati processi stocastici.

Per un processo stocastico non è definibile, e dunque calcolabile, la trasformata di Fourier perché la trasformata di Fourier presuppone la conoscenza dell'andamento del segnale.

L'evoluzione di un processo stocastico può essere descritto solo statisticamente.

Piuttosto che usare come dominio la frequenza e la trasformata di Fourier, per un processo stocastico si sceglierà di utilizzare lo spettro di potenza del processo.

Consideriamo la seguente figura:



Tutti questi andamenti sono di un processo stocastico $x(t)$.

Al fine di descrivere statisticamente il processo, si può fissare l'attenzione sul valore assunto da $x(t)$ in un generico istante (ad esempio t_1) e valutare la densità di probabilità $f_1(x_1; t_1)$ della variabile aleatoria estratta $x_1 = x(t_1)$.

Allo stesso modo si può considerare un altro istante t_2 e valutare la corrispondente $f_2(x_2; t_2)$, che in questo caso rappresenta la densità di probabilità della variabile aleatoria estratta $x_2 = x(t_2)$.

La procedura può essere estesa ad un numero arbitrario di istanti (e quindi di variabili aleatorie estratte).

Una descrizione più accurata si ottiene prendendo in esame, contemporaneamente, due istanti generici (ad esempio t_1 e t_2) e valutando la densità di probabilità congiunta $f_{12}(x_1, x_2; t_1, t_2)$.

La probabilità congiunta $f_{12}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ molte delle volte è una soluzione alla maggior parte dei problemi.

13.2 Medie di insieme

Per le variabili aleatorie estratte dal processo sono calcolabili le medie di insieme.

Consideriamo il valore medio in x_1 , che sarà dato da:

$$\langle x_1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1; t_1) dx_1 \quad (13.1)$$

Il momento congiunto di ordine (1, 1) delle variabili x_1 e x_2 si otterrà come:

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{12}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (13.2)$$

Il momento congiunto di ordine (1, 1), che rappresenta la correlazione tra le variabili aleatorie estratte x_1 e x_2 ; prende il nome di autocorrelazione statistica del processo e si indica con $R(t_1, t_2)$.

Si noti che nelle densità di probabilità, in $\langle x_1 \rangle$ e $\langle x_1 x_2 \rangle$ le variabili aleatorie sono le x_i mentre il tempo svolge il ruolo di parametro.

In generale, le densità di primo ordine sono diverse al variare dell'istante t_i considerato e le densità di ordine superiore dipendono singolarmente dagli istanti t_i, t_j, \dots, t_k .

Più frequentemente, si può ritenere vera la circostanza che una traslazione arbitraria dall'origine dei tempi dell'intero processo non ne modifichi le caratteristiche statistiche.

13.3 Stazionarietà e ergodicità

Con riferimento alle definizioni precedenti, ciò comporta che:

- la densità del primo ordine è indipendente da t , ed è quindi la stessa per ogni possibile variabile aleatoria estratta
- la densità del secondo ordine dipende solo dalla differenza $\tau = t_2 - t_1$
- la densità di probabilità di ordine n dipende solo dagli $n - 1$ parametri

Un processo di questo tipo si dice stazionario in senso stretto e, per esso, la densità di probabilità del primo e del secondo ordine si scrivono $f(x)$ e $f_{12}(x_1, x_2; \tau)$ rispettivamente.

Accanto alla stazionarietà in senso stretto, si può definire anche la stazionarietà in senso lato.

Si può definire un processo con stazionarietà in senso lato se ha valore medio $\langle x_1 \rangle$ è indipendente da t e la cui autocorrelazione statistica $\langle x_1 x_2 \rangle$ dipende solo dalla differenza $\tau = t_2 - t_1$.

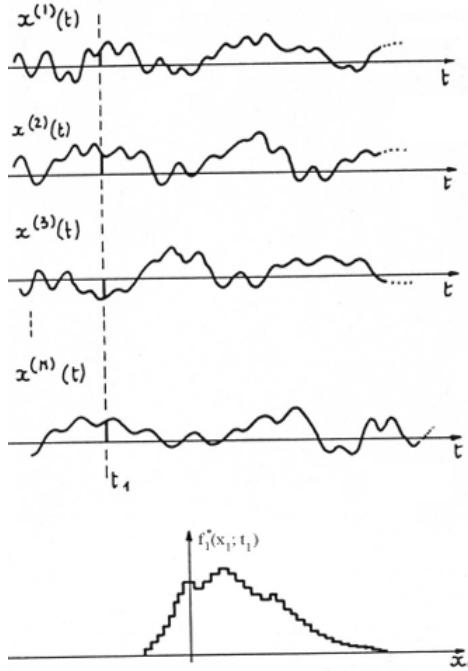
La stazionarietà in senso stretto implica, ovviamente, la stazionarietà, mentre non è vero il viceversa.

La proprietà di stazionarietà è propedeutica ad un altro fondamentale concetto: quello di ergodicità.

In un processo ergodico ogni realizzazione è tipica del processo, nel senso che la sua osservazione per un tempo sufficientemente lungo consente di estrarre tutte le proprietà del processo stesso.

L'accuratezza della stima può essere arbitrariamente migliorata aumentando il livello di risoluzione orizzontale (vale a dire, riducendo l'estensione degli intervalli) ed assumendo un valore di N via via più elevato.

In figura un esempio di intervalli sempre più stretti:



L'istogramma può essere utilizzato per stimare la densità di probabilità del secondo ordine o una qualunque media di insieme.

Un processo ergodico, in tutte le sue densità di probabilità di qualsiasi ordine, si dirà generalmente, ergodico.

Se le considerazioni qualitative precedenti fossero formalizzate in termini rigorosamente analitici, ci saremo resi conto che l'ergodicità presuppone la stazionarietà.

In altri termini, non può essere ergodico un processo che non è stazionario.

La maggior parte dei processi reali non sono intrinsecamente ergodici, ma, possono essere separati e/o ridotti in processi più semplici e singolarmente ergodici.

Per un processo stocastico, possiamo considerare anche le medie temporali.

Il valore medio temporale di una generica realizzazione del processo $x(t)$ è definito come:

$$\overline{x(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} x(t) dt \quad (13.3)$$

$\overline{x(t)}$ = $\langle x \rangle$ in parole, possiamo vedere il valore medio temporale come il valore medio statistico.

Invece, l'autocorrelazione temporale possiamo definirla come:

$$\overline{R(\tau)} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} x(t)x(t + \tau) dt \quad (13.4)$$

in cui $\tau = t_2 - t_1$ e $\overline{x(t)} = \langle x_1 x_2 \rangle$.

La generica realizzazione del processo, una volta specificata (vale a dire, misurata o registrata), può essere riguardata come un particolare segnale determinato a potenza finita.

Per esso si può definire una densità spettrale (o semplicemente spettro di potenza) $p(\omega)$ che, in accordo con i segnali determinati, sarà data da:

$$p(\omega) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{|X_\Delta(\omega)|^2}{\Delta t} \quad (13.5)$$

dove $X_\Delta(\omega)$ è la trasformata di Fourier del segnale che si ottiene considerando $x(t)$ entro un intervallo, centrato nell'origine e di estensione Δt .

13.4 Processo ergodico e il teorema di Wiener-Khintchine

Nel caso di un processo ergodico, le medie di insieme (vale a dire le medie statistiche) coincidono con le medie temporali e possono essere calcolate a partire da un'unica e generica realizzazione del processo.

Per questo tipo di processi, possiamo enunciare il seguente teorema, il teorema di Wiener-Khintchine: se il processo $x(t)$ è stazionario ed ergodico, almeno nella sua autocorrelazione, lo spettro di potenza del processo ad esso associato risulta la trasformata di Fourier della sua autocorrelazione statistica $R(\tau)$.

Sempre in virtù dell'ergodicità e delle proprietà ad esse associate, si può osservare che:

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} x^2(t) dt \\
 &= \overline{R(0)} \\
 &= R(0) \\
 &= \langle x_1^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{13.6}$$

Come nel transito di un segnale di potenza determinato attraverso un sistema lineare, anche lo spettro di potenza di un processo stocastico ergodico viene alterato come:

$$p_y(\omega) = |H(\omega)|^2 p_x(\omega) \tag{13.7}$$

13.5 Teorema di Weiner-Khintchine generalizzato

Possiamo definire il teorema di Weiner-Khintchine anche per fenomeni non ergodici, che prende il nome del Teorema di Weiner-Khintchine generalizzato.

Se per ogni valore di τ e ogni intervallo A di estensione pari a $|\tau|$, la funzione di autocorrelazione del segnale aleatorio $x(t)$ soddisfa la condizione:

$$\left| \int_A R_X(t + \tau, t) dt \right| < \infty \quad (13.8)$$

allora la densità spettrale di potenza di $x(t)$ è la trasformata di Fourier della funzione $R_X(t + \tau, t)$ mediata rispetto a t.

In formule:

$$S_X(f) = F[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_X(t + \tau, t) dt] \quad (13.9)$$

dove per $F[\cdot]$ si intende la trasformata di Fourier della funzione all'interno delle parentesi quadrate e $S_X(f)$ è la densità spettrale di potenza.

13.6 Segnali ciclostazionari

Un importante esempio di applicazione del teorema di Wiener-Khintchine generalizzato si ha con i segnali ciclostazionari.

Si definisce ciclostazionario un segnale aleatorio $x(t)$ il cui valore medio $E[x(t)]$ e la cui funzione di autocorrelazione $R_X(t + \tau, t)$ sono funzioni periodiche di periodo comune T_0 :

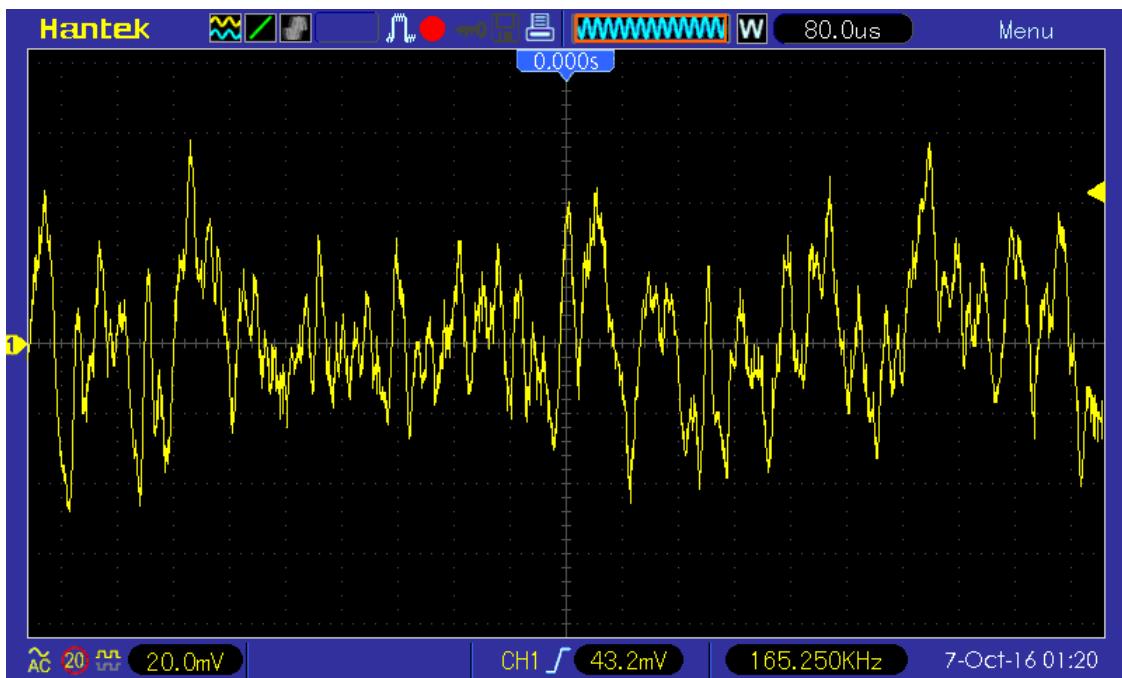
$$E[x(t + T_0)] = E[x(t)] \quad (13.10)$$

in altre parole, il valore medio è uguale ogni T_0 , inoltre:

$$R_X(t + \tau + T_0, t + T_0) = R_X(t + \tau, t) \quad (13.11)$$

Capitolo 14

Rumore termico



14.1 Un esempio di processo stocastico: il rumore termico

Un esempio molto importante di processo stocastico è costituito dal rumore termico.

Il rumore termico è dovuto all'agitazione termica degli elettroni liberi degli elettroni liberi nei conduttori.

Gli elettroni, infatti, trovandosi ad una temperatura diversa dallo zero assoluto ($T = 0^\circ K$ è l'unica condizione che consentirebbe di annullare il rumore termico) si muovono con moto caotico e disordinato producendo ai capi del conduttore una differenza di potenziale osservabile.

D'altro canto un rumore con caratteristiche analoghe a quelle del rumore termico è anche presente nelle reti attive, contententi generatori controllati o indipendenti, ove esso è dovuto, oltre che all'agitazione termica, anche alle fluttuazioni di corrente o di tensione dei generatori.

Si può affermare che si tratta di un processo stazionario ed ergodico, per cui la descrizione statistica del primo ordine è fattibile sulla base dell'osservazione del processo in un generico istante.

Per il fatto che la tensione di rumore è il risultato della somma di numerosissimi contributi, nessuno dei quali è dominante e che possono essere assunti, con buona approssimazione, tra loro indipendenti, è lecito applicare il teorema-limite centrale.

Considerando per una tensione v , per qualunque t , è una variabile gaussiana con valor medio nulla e varianza σ_v^2 .

Si ha dunque:

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) \quad (14.1)$$

Per completare la descrizione statistica, è necessario esplicitare il valore della varianza.

Essendo il valore medio uguale a zero, la varianza di v coincide con il valore quadratico medio; si ha cioè:

$$\sigma_v^2 = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = \langle v^2 \rangle \quad (14.2)$$

Essendo il processo ergodico, il valore ergodico, il valore quadratico medio coincide con la potenza del processo.

In definitiva, la varianza della variabile aleatoria v può essere estratta da una valutazione di potenza.

La potenza del segnale di rumore $v(t)$ può essere misurata e si scopre che essa cresce proporzionalmente con:

- il valore della resistenza R
- il valore della temperatura assoluta T a cui si trova la resistenza
- il valore della banda passante B del filtro interno all'apparato con cui si effettua la misura

La costante di proporzionalità è pari a $4K$, dove:

$$K = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{^\circ K} \quad (14.3)$$

è la costante di Boltzmann.

In definitiva si ha dunque:

$$\sigma_v^2 = 4RKTB \quad (14.4)$$

Invece per la corrente:

$$\sigma_i^2 = \frac{4KTB}{R} \quad (14.5)$$

Ovviamente, è interessante sapere anche le condizioni in cui si ha il massimo trasferimento di potenza.

Dall'elettrotecnica, potendo $R = R_L$, la potenza disponibile istantanea disponibile, vale:

$$P_n(t) = \frac{v^2(t)}{4R} = \frac{Ri^2(t)}{4} \quad (14.6)$$

Essendo $P_n(t)$ un processo stocastico, "considerando" $v(t)$ e $i(t)$ ergodici, il valore medio, indipendente dal tempo, è pari a:

$$\langle P_n \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{4R} = \frac{R \langle i^2 \rangle}{4} = KTB \quad (14.7)$$

Notiamo che $\langle P_n \rangle$ non dipende da R .

Come è consuetudine, chiameremo P_n semplicemente "potenza disponibile".

La densità spettrale di potenza sarà:

$$p(f) = \frac{KT}{2} \quad (14.8)$$

oppure possiamo scriverla come:

$$p(f) = \frac{1}{2} \frac{h|f|}{\exp\left(\frac{h|f|}{KT}\right) - 1} \quad (14.9)$$

Inoltre, anti-trasformando $p(f)$, si ottiene la funzione di autocorrelazione del processo:

$$\overline{R(\tau)} = R(\tau) = \frac{KT}{2} \delta(\tau) \quad (14.10)$$

Questa è una caratteristica peculiare del rumore termico "ideale" che per $B \rightarrow \infty$ è in effetti un rumore "bianco" (tutte le frequenze sono presenti ed hanno lo stesso peso).

