[redacted]

[redacted] **(MASA İMALAT ATÖLYESİ)** (Ara Snv)

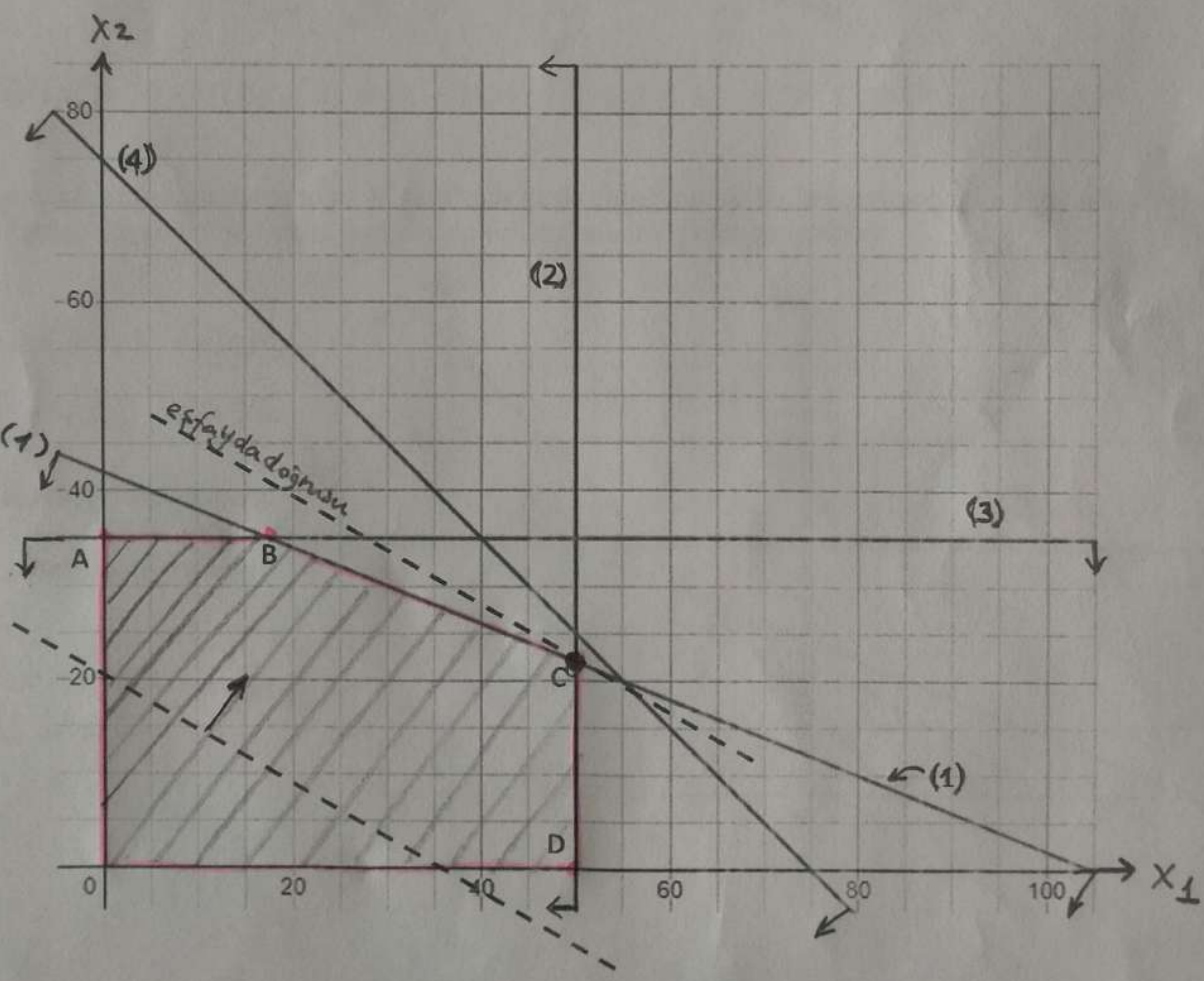
Bir masa imalat atölyesi iki tip dört ayaklı masa imal ederek müşterilere satmaktadır. Tip-1 masanın ahşap bir üst yüzeyi var, montajı 0,6 saat sürüyor ve tanesi 200 TL'ye satılıyor. Tip-2 masa, cam üst yüzeye sahip, montajı 1,5 saat sürüyor ve 350 TL'ye satılıyor. Her iki tip masanın ayakları da ahşap. Masa ayakları tek tip (her iki masa için ortak ayak stoğu kullanılıyor). Atölye deposunda stokta; 300 adet masa ayağı, 50 adet ahşap üst yüzey, 35 adet cam üst yüzey var. Montaj için, işçi sayısı ve çalışma sürelerine göre toplam en fazla 63 saatlik işçilik saati olacak. Problemin DP modeli aşağıda verilmiştir.

Karar Değişkenleri: x_1: Üretilecek tip1 masa adedi x_2: Üretilecek tip2 masa adedi

$\max Z = 200\, x_1 + 350\, x_2$

s.t. $0.6\, x_1 + 1.5\, x_2 \leq 63$	(1)	(Montajda harcanan toplam süre mevcut işçilik saatini aşamaz)
$x_1 \leq 50$	(2)	(Ahşap üst yüzey stok miktarından fazla üretim olamaz)
$x_2 \leq 35$	(3)	(Cam üst yüzey stok miktarından fazla üretim olamaz)
$4\, x_1 + 4\, x_2 \leq 300$	(4)	(Toplam kullanılan masa ayağı stok miktarından fazla olamaz)
$x_1 \;,\; x_2 \geq 0$	(5) (6)	(Karar değişkenleri değerleri negatif olamaz)

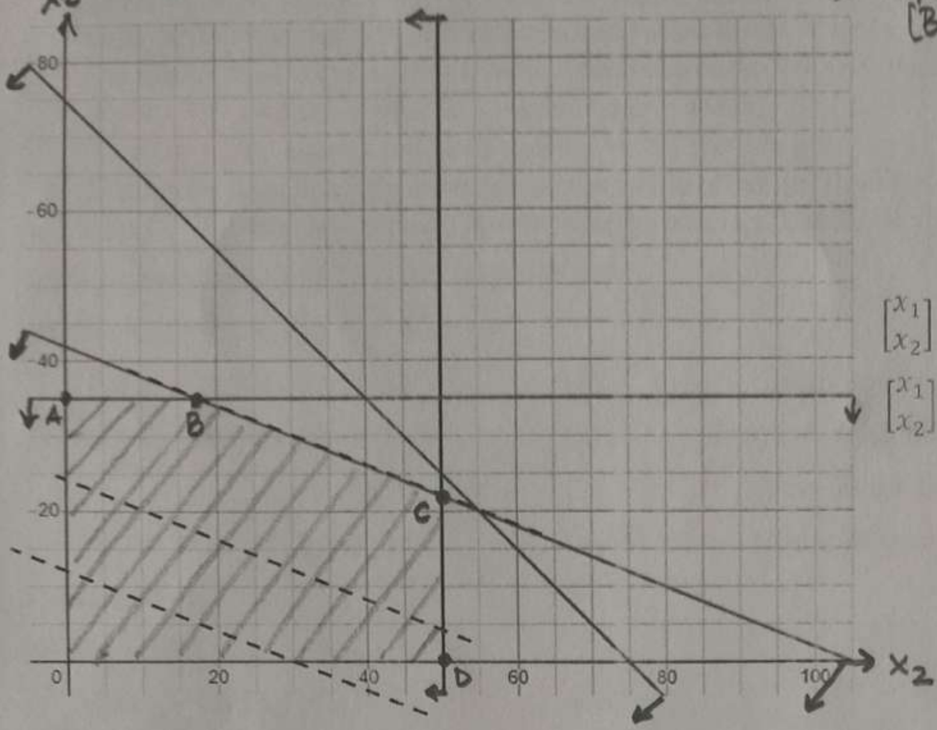
a) Modeli grafik yöntem ile çözün.



Olurlu bölgenin C köşesi

Çözüm : $x_1^* = 50 \quad x_2^* = 22 \qquad Z^* = 17\,700$

b) Modelde Tip-1 masa satış fiyatı 120 TL, tip-2 fiyatı 300 TL olursa, buna göre modeli tekrar grafik yöntemle çözün. olurlu bölge değişmedi ancak → eşfayda (isoprofit) doğrusu ile [B,C] kenarı çakışır.



Alternatif Çözüm olur.

$$x^{(1)^*} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)^*} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (\lambda)\begin{bmatrix} 17.5 \\ 35 \end{bmatrix} + (1-\lambda)\begin{bmatrix} 50 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 - 32.5\lambda \\ 22 + 13\lambda \end{bmatrix} \quad 0 \le \lambda \le 1$$

$$Z^* = [\,120 \quad 300\,]\begin{bmatrix} 50 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = 12\,600$$

Çözüm : $x_1^* = 50 - 32.5\lambda$ $x_2^* = 22 + 13\lambda$ $0 \le \lambda \le 1$ $Z^* = 12\,600$

c) Depodaki 300 masa ayağından 48 adedinin kırık olduğunu ve kullanılamayacağını öğrendiniz. Buna göre çözümü güncelleyin. (amaç fonksiyonu orijinal modelde olduğu gibidir)

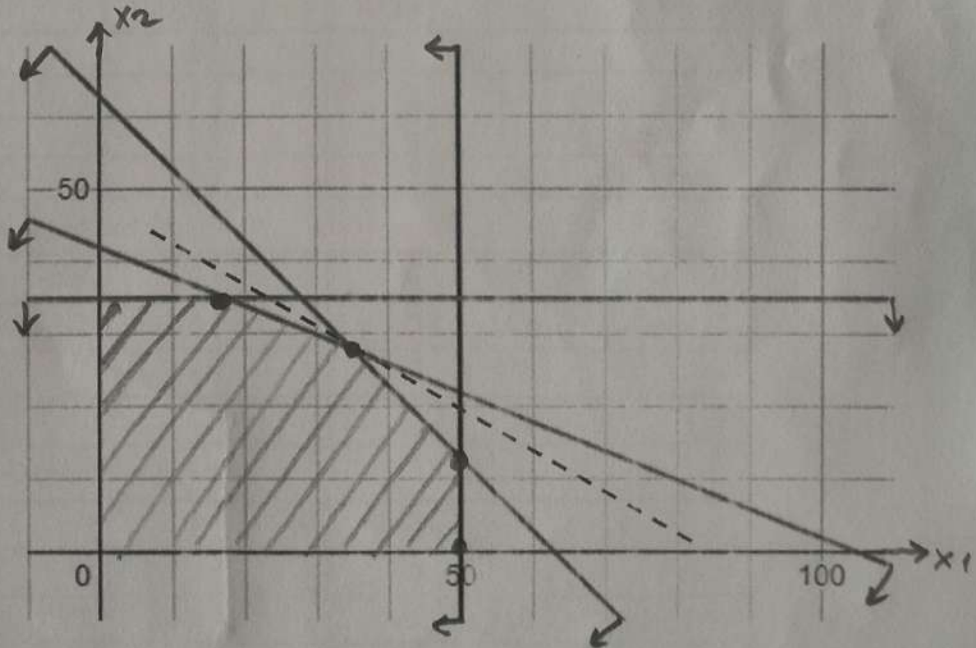
(4) nolu kısıt değişir:

$4x_1 + 4x_2 \le 252$

Diğer kısıtlar değişmez.

Problemin olurlu bölgesi değişir.

Yeni bir optimum nokta, sonucu çıkar.



Çözüm : $x_1^* = 35$ $x_2^* = 28$ $z^* = 16\,800$

d) Modeli aşağıda verilen hususlara göre güncelleyin, Simpleks ile çözün, Temel Çözümleri Gösterin, Dual Problemi yazın, primal çözümden faydalanarak dual problemi çözün, yorumlayın. (ÖDEV-3)

- Masa ayakları tanesi 5 TL ve tahta üst yüzey tanesi 30 TL'ye bir marangoz atölyesinden satın alınıyor. Bu marangozdan sınırsız miktarda masa ayağı ve tahta üst yüzey temin edilebilir.
- Üretilecek tip-1 masa adedinin toplam üretimin en az %60'ı olması isteniyor.
- Ayrıca Tip-1 masanın satış fiyatına %25 zam yapıldı.
- Cam üst yüzey sınırsız miktarda mevcut ve maliyeti de yok.
- Hafta sonu da çalışma ile ilave işçilik süresi elde edilebilir. İlave her bir işçilik saati kapasite artırımı için 12 TL ödenmesi gerekir. Ancak toplam ilave işçilik saati de 18 saati geçemez.

yeni karar değişkeni y : *ilave işçilik saati*

$\max z = 200\,x_1 + 330\,x_2 - 12y$

$0.6\,x_1 + 1.5\,x_2 - y \le 63$ (1) (işçilik saatini kısıtı)

$-0.4\,x_1 + 0.6\,x_2 \le 0$ (2) (tip-1 masa üretimi en az %60 0lmalı)

$y \le 18$ (3) (ilave işçilik kapasite üst limiti)

$x_1, x_2, y \ge 0$ (4) (5) (6) (Karar değişkenleri negatif olamaz)

Standart Form:

$\max z = 200\,x_1 + 330\,x_2 - 12y$

$0.6\,x_1 + 1.5\,x_2 - y + S_1 = 63$

$-0.4\,x_1 + 0.6\,x_2 + S_2 = 0$

$y + S_3 = 18$

$x_1, x_2, y, S_1, S_2, S_3 \ge 0$

Simpleks Başlangıç Tablosu

z	x_1	x_2	y	S1	S2	S3	RHS	Oran
1	- 200	- 330	12	0	0	0	0	
S1	0.6	1.5	- 1	1	0	0	63	63/1.5 = 42
S2	- 0.4	0.6	0	0	1	0	0	63/0.6 = 105
S3	0	0	1	0	0	1	18	Geçersiz

x_2 giren değişken, S1 çıkan değişken olur.

1.İterasyon Sonucu

1	-68	0	-208	220	0	0	13860	
x_2	4/10	1	- 2/3	2/3	0	0	42	Geçersiz
S2	-16/25	0	2/5	-2/3	1	0	126/5	63
S3	0	0	1	0	0	1	18	18

y giren değişken, S3 çıkan değişken olur.

2.İterasyon Sonucu

1	-68	0	0	220	0	208	17604	
x_2	4/10	1	0	2/3	0	2/3	54	135
S2	-16/25	0	0	-2/3	1	-2/5	18	Geçersiz
y	0	0	1	0	0	1	18	Geçersiz

x_1 giren değişken, x_2 çıkan değişken olur.

3.iterasyon Sonucu

1	0	170	0	340/3	0	340/3	26784	
x_1	1	5/2	0	5/3	0	5/3	135	
S2	0	8/5	0	2/5	1	2/3	54	
y	0	0	1	0	0	1	18	

Çözüm optimal. $x_1^* = 135 \quad x_2^* = 0 \quad y^* = 18 \qquad Z^* = 26784$

e) Bu DP'nin Dualini yazın ve primal sonucunu da kullanarak çözümü bulun.

Dual Problem

u_1 : 1. kısıta ait dual değişken (işçilik saati kaynağı)

u_2 : 2. kısıta ait dual değişken (tip1 ve tip2 masa üretim miktarları oransal farkı)

u_3 : 3. kısıta ait dual değişken (ilave işçilik kaynağı)

$$
\begin{aligned}
\min W &= 63\,u_1 + 18u_3 \\
s.t.\quad & 0.6\,u_1 - 0.4\,u_2 \geq 200 \\
& 1.5\,u_1 + 0.6\,u_2 \geq 330 \\
& u_1 - u_3 \leq 12 \\
& u_1, u_2, u_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Primal problem çözümünde $x_1^* > 0$ ve $y^* > 0$ olduğundan bu değişkenlere karşılık gelen dual kısıtlar aktif olmalı. Dual optimal amaç fonksiyonu değeri 26784 olmalı.

↳ Tümler gevşeklik (complementary slackness) ↳ Kuvvetli Dualite (Strong Duality)

$$
\begin{aligned}
0.6\,u_1 - 0.4\,u_2 &= 200 \\
u_1 - u_3 &= 12 \\
63\,u_1 + 18\,u_3 &= 26784
\end{aligned}
$$

$u_1 = 333.\overline{3} \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 321.\overline{3}$

$u_2 = 0$ olması primal problemde 2. kısıtın da gevşek olduğunu (aktif olmadığını) göstermektedir. (zaten $x_1^* = 135$ $x_2^* = 0$ olduğundan $0,4x_1 \geq 0.6x_2$ olacaktır)

[redacted] Simpleks Yöntemi (ÖDEV-3) (Ara Sınav Sonrasında revize yapılarak oluşturulmuştur)

Aşağıdaki tabloyu devam ettirerek çözümü bulun (MAX problemi)

	z	x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		oran
	1	0	-5	0	4	-1	-3	6	0	620	
	x_1	1	-1	0	0	6	-4	0	0	0	–
	x_3	0	1	1	3	1	0	3	0	6	6
←	x_8	0	3	0	-2	-3	-1	5	1	12	4^*

x_2 giren, x_8 çıkan değişken.

						↓			
	0	0	0	2/3	-6	-20/3	43/3	5/3	640
x_1	1	0	0	-2/3	5	-13/3	5/3	1/3	4
x_3	0	0	1	11/3	2	1/3	4/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	-2/3	-1	-1/3	5/3	1/3	4

x_6 giren, x_3 çıkan değişken.

								↓	
	0	0	20	222/3	34	0	223/3	-5	680
x_1	1	0	39	47	31	0	29	-4	30
x_6	0	0	3	11	6	1	4	-1	6
x_2	0	1	1	3	1	0	3	0	6

x_8 giren ancak çıkan değişken bulunamıyor.

Sınırsız çözüm (unbounded solution)

[redacted] (ÇİFTLİKTE YEM KARIŞIMI) (Ara Sınv)

Bir çiftlikte tavuklar için günlük en az 500 kg özel bir yem kullanılmaktadır. Bu özel yem, mısır, buğday ve arpa karışımından elde edilmektedir.

1 kg mısır içerisinde 120 g karbonhidrat ve 150 g yağ bulunmakta, protein bulunmamaktadır.

1 kg buğday içinde 200 g protein, 200 g karbonhidrat ve 20 g yağ bulunmaktadır.

1 kg arpa içerisinde 100 g protein, 150 g karbonhidrat ve 40 g yağ bulunmaktadır.

Mısırın kilogramı 3 TL , buğdayın kilogramı 2 TL ve arpanın kilogramı 2.5 TL'dir.

Hazırlanan günlük yem karışımı içerisinde; protein oranı en az %10, yağ oranı en fazla %5 olmalı, karbonhidrat miktarı protein ve yağ miktarı toplamının en fazla %50'si kadar olmalıdır.

Çiftlikte, arpa ve buğday aynı depoda saklanmaktadır. Bu deponun kapasitesi 400 kg dır.

Çiftlik sahibi minimum maliyetli günlük yem karışımını belirlemek istemektedir.

a) Bu problemin DP modelini oluşturun

Karar Değişkenleri:

x_1 : *Kullanılacak mısır miktarı (kg)*

x_2 : *Kullanılacak buğday miktarı (kg)*

x_3 : *Kullanılacak arpa miktarı (kg)*

Amaç Fonksiyonu:

$$\min Z = 3\,x_1 + 2\,x_2 + 2.5\,x_2$$

Kısıtlar:

(1) Günlük yem karışımı en az 500 kg olmalı

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 500$$

(2) Yem karışımının en az %10'u protein olmalı

$$0.2\,x_2 + 0.1\,x_3 \geq 0.1(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$-x_1 + x_2 \geq 0$$

(3) Yem karışımının en fazla %5'i yağ olmalı

$$0.15\,x_1 + 0.02\,x_2 + 0.04\,x_3 \leq 0.05(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$10\,x_1 - 3\,x_2 - x_3 \leq 0$$

(4) Yem karışımındaki karbonhidrat miktarı protein ve yağ toplamının en az %50'si olmalı

$$0.12\,x_1 + 0.2\,x_2 + 0.15\,x_3 \geq 0.5(0.2\,x_2 + 0.1\,x_3 + 0.15\,x_1 + 0.02\,x_2 + 0.04\,x_3)$$

$$4.5\,x_1 + 9\,x_2 + 8\,x_3 \geq 0$$

(5) Buğday ve arpa depo kapasitesi aşılamaz

$$x_2 + x_3 \leq 400$$

(6)(7)(8) Karar değişkenleri değerleri negatif olamaz

$$x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0$$

Kümeler:

i : *kullanılacak ürün* $i \in \{1,2,3\}$ 1: mısır 2 : buğday 3 : arpa

j : *besin tipi* $j \in \{1,2,3\}$ 1: protein 2 : karbonhidrat 3 : yağ

Parametreler:

c_i : *i ürünün birim maliyeti* (TL/kg)

$c_i \in C = [3 \quad 2 \quad 2.5]$

a_{ij} : *1 kglık i ürünün içerisinde bulunan j besin tipi miktarı* (kg)

$$a_{ij} \in A = \begin{bmatrix} 0 & 0.12 & 0.15 \\ 0.2 & 0.2 & 0.02 \\ 0.1 & 0.15 & 0.04 \end{bmatrix}$$

Karar Değişkenleri:

x_i : *Kullanılacak ürün i miktarı* (kg)

Amaç Fonksiyonu:

$$\min \sum_{i \in \{1,23\}} c_i x_i$$

Kısıtlar:

(1) Günlük yem karışımı en az 500 kg olmalı

$\sum_i x_i \geq 500$ veya $D=500$ yeni bir parametre tanımlanarak $\sum x_i \geq D$

(2) Yem karışımının en az %10`u protein olmalı

$\sum_i a_{i1} x_i \geq 0.1 \sum_i x_i$

(3) Yem karışımının en fazla %5`i yağ olmalı

$\sum_i a_{i3} x_i \leq 0.05 \sum_i x_i$

(4) Yem karışımındaki karbonhidrat miktarı protein ve yağ toplamının en az %50'si olmalı

$\sum_i a_{i2} x_i \geq 0.5 \sum_i (a_{i1} + a_{i3}) x_i$

(5) Buğday ve arpa depo kapasitesi aşılamaz

$x_2 + x_3 \leq 400$ veya $C=400$ yeni bir parametre tanımlanarak $X_2+X_3 \leq C$

(6)(7)(8) Karar değişkenleri değerleri negatif olamaz

$x_i \geq 0$

SU ŞEBEKESİ

(*) Bir şehire ait su dağıtım şebekesi 3 farklı su kaynağından beslenmektedir. Bu kaynaklardan suyun şehire taşınması 10 farklı pompa ile yapılmaktadır. Şehrin ihtiyacını karşılamak için 10 000 m^3/dk'lık akış sağlanak gereklidir. Her bir su kaynağından çekilebilecek su akışı kısıtlıdır:

1. kaynak : 3000 m^3/dk 2. kaynak : 2500 m^3/dk 3. kaynak : 7000 m^3/dk.

Aşağıdaki tabloda her bir pompanın hangi kaynağa bağlı olduğu, gönderebileceği max su miktarı ve birim maliyeti verilmiştir.

Pompa →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bağlı kaynak →	1	2	3	1	2	3	1	2	3	3
Max Akış (m^3/dk) →	1100	1100	1100	1500	1500	1500	2500	2500	2500	2500
maliyet (TL/m^3) →	0,05	0,05	0,05	0,07	0,07	0,07	0,13	0,13	0,13	0,13

Şehrin su ihtiyacını en az maliyetle karşılayabileceği amaç fonksiyonuna sahip, Doğrusal programlama modelini oluşturun.
(pompa ve kaynakları ayrı küme, indisler olarak gösterin, sayısal değerleri parametre olarak tanımlayın)

Kümeler (Sets)

i : kaynaklar $i \in I = \{1,2,3\}$

j : pompalar $j \in J = \{1,2,\dots 10\}$

Parametreler

m_j : j pompasına ait max akış (m^3/dk)

$m_j \in M = [1100\ 1100\ 1100\ 1500\ 1500\ 1500\ 2500\ 2500\ 2500\ 2500]$

c_j : j pompasının birim maliyeti (TL/m^3)

$c_j \in C = [0{,}05\ 0{,}05\ 0{,}05\ 0{,}07\ 0{,}07\ 0{,}07\ 0{,}13\ 0{,}13\ 0{,}13\ 0{,}13]$

s_i : i kaynağının tedarik kapasitesi (m^3/dk)

$s_i \in S = [3000\ 2500\ 7000]$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ kaynağı } j \text{ pompasına bağlı ise} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$a_{ij} \in A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D : şehrin su ihtiyacı (m^3/dk) $= 10000\ m^3/dk$

Karar Değişkenleri

x_j : j pompasından aktarılacak su (m^3/dk)

Amaç Fonksiyonu:

Toplam maliyeti en küçükle

$$\min Z = \sum_{j \in J} c_j \cdot x_j$$

Kısıtlar :

(1) Talep Karşılama kısıtı.

$$\sum_{j \in J} x_j \geq D$$

(2) Kaynak kapasiteleri kısıtları

$$\sum_{j \in J} a_{ij} \cdot x_j \leq s_i \quad , \forall i \in I$$

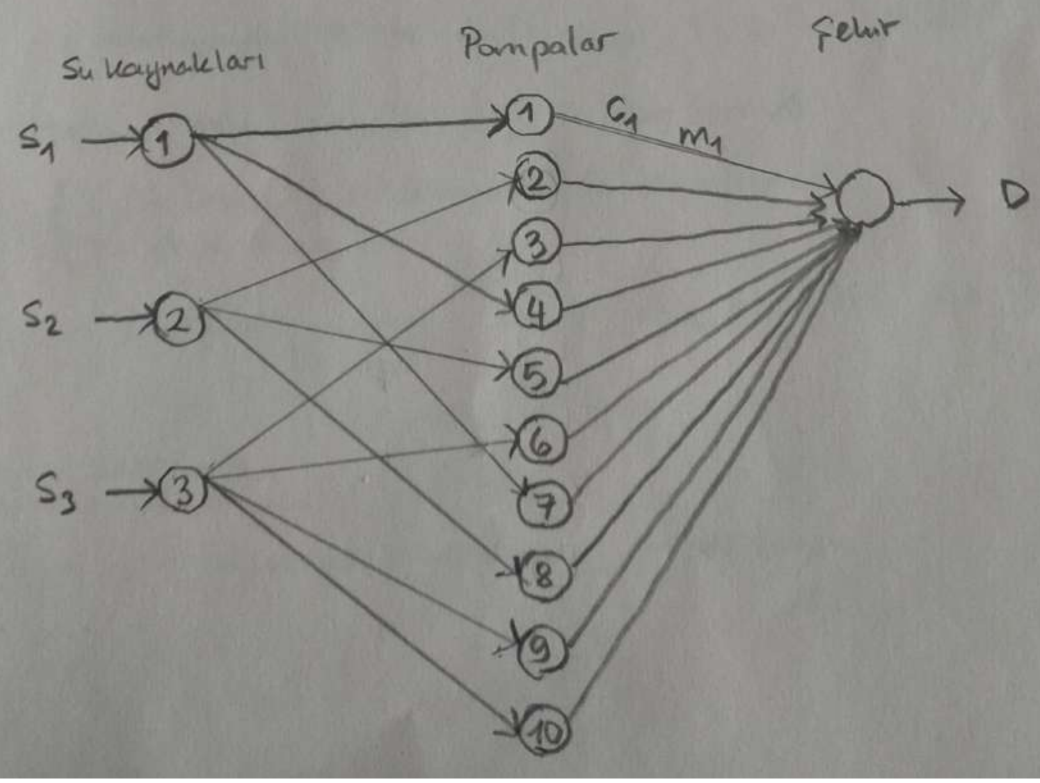
(3) Pompa Akış kısıtları.

$$x_j \leq m_j \quad , \quad \forall j \in J$$

(4)..

$$x_j \geq 0$$

Sistemin Ağ yapısı (Network) olarak gösterimi aşağıdadır:



ÜRETİM, DAĞITIM

Bir firma 3 tip ürün satmaktadır. (Tip 1, 2, 3) Tip-1 değeri: 50 TL/adet
2 değeri: 80 TL/adet
3 değeri: 40 TL/adet

üretim 4 farklı fabrikada yapılmaktadır:

Fabrika-1'de her üç ürün tipi de üretilebilir. (Buna göre maliyeler mevcut)

Fabrika-2'de sadece 1 ve 2. tip ürünler

Fabrika-3'de sadece 3. tip ürün

Fabrika-4'de sadece 1. ve 3. tip ürünler.

Her bir fabrikanın aylık üretim kapasitesi var (işçi, mk. vb nedenlerle)

Fab-1: 5000 saat Fab-2: 6000 saat Fab-3: 10 000 saat Fab-4: 2000 saat

Her bir ürün tipi için gerekli üretim süresi farklı:

Tip-1: 1 saat Tip-2: 2 saat Tip-3: 2,5 saat

Fabrikalardan ana depoya taşınma maliyeti farklı. (mesafeler vb.)

Fab-1: 0.2 TL/ürün Fab-2: 0.15 TL/ürün Fab-3: 0.1 TL/ürün Fab-4: 0.3 TL/ürün

Taşıma için ayrılan bütçe (para) belli: 20 000 TL.

Yukarıda verilen hususlara göre depoya ulaşacak ürünlerin toplam değerini edecek DP modelini oluşturun.

Kümeler (Sets)

i: ürünler $i \in I = \{1, 2, 3\}$

j: Fabrikalar $j \in J = \{1, 2, 3, 4\}$

Parametreler

S_j: j fabrikasının kapasitesi (saat) $S_j \in S = [5000 \quad 6000 \quad 10000 \quad 2000]$

m_i: i ürünü üretim süresi (saat) $m_i \in M = [1 \quad 2 \quad 2{,}5]$

c_j = j fabrikasından taşıma mly (TL/ürün) $c_j \in C = [0{,}2 \quad 0{,}15 \quad 0{,}1 \quad 0{,}3]$

B: toplam taşıma mly üst sınırı $B = 20000$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{i ürünü j fabrikasında üretilebiliyorsa} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

d_i: i ürününün değeri (TL/adet) $d_i \in D = [50 \quad 80 \quad 40]$

Karar Değişkenleri:

X_{ij}: j fabrikasında üretilecek i ürünü sayısı

Amaç Fonksiyonu

$$\max \ Z = \sum_{i} \sum_{j} d_i \cdot x_{ij}$$ (Toplam değeri maksimize et)

Kısıtlar

(1) $\sum_{i \in I} m_i \cdot x_{ij} \leq S_j \quad , \forall j \in J$ (Fabrikaların kapasiteleri aşılmamalı)

(2) $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_j \cdot x_{ij} \leq B$ (Taşıma bütçesi aşılmamalı)

$x_{ij} \leq a_{ij} \cdot S_j \quad \forall i,j$ (i ürününün j fabrikasında üretilebilmesi için $a_{ij} = 1$ olmalı)

$x_{ij} \geq 0$

Bu formülasyonda;

1. kısıt : $\sum_{i \in I} a_{ij} \cdot m_i \cdot x_{ij} \leq S_j \quad \forall j$ şeklinde yazılabilir

Bu durumda 3 kısıtı yazmaya gerek olmaz.

OTOMOBİL ÜRETİM VE STOK

Bir otomobil üreticisi 3 tip model üretmektedir.

Her bir otomobil modeline ait satış tahminleri (talep) aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	1.Ay	2.Ay	3.Ay	4.Ay	5.Ay	6.Ay
Model-1	50	50	–	60	60	40
Model-2	100	120	130	–	130	130
Model-3	–	–	80	80	80	80

Aylık üretim kapasitesi 200 araçtır.

Üretici, her ay her bir modelden kaç adet üreteceğine karar vermek istemektedir.

Bir ay içinde üretilen ancak satılmayan araçlar depoda beklemektedir.

Bir otomobilin depoda bekleme maliyeti 1000 TL'dir.

Herhangi bir ay bir modelin talebi karşılanamazsa cezası yoktur, bir sonraki ay karşılanır.

Halen depoda 20 adet model-1, 10 adet Model-2 ve 40 adet Model-3 vardır.

Model-1 otomobil 100 000 TL, Model-2 150 000, Model-3 120 000 TL.

6. ay sonunda tüm talepler karşılanmış olmalı ve depoda hiç stok bulunmamalıdır.

Kümeler

i : otomobil tipi $i \in \{1, 2, 3\}$

t : aylar $t \in T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

parametreler

D_{it} : i tip otomobilin t ayındaki talebi

$$D_{it} \in D = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 0 & 60 & 60 & 40 \\ 100 & 120 & 130 & 0 & 130 & 130 \\ 0 & 0 & 80 & 80 & 80 & 80 \end{bmatrix}$$

C_i : i tip otomobil satış fiyatı

$$C_i \in C = \begin{bmatrix} 100\,000 \\ 150\,000 \\ 120\,000 \end{bmatrix}$$

h : depoda bekleme maliyeti $h = 1000$ TL/birim.

S_i : mevcut tip i otomobil sayısı $S = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 40 \end{bmatrix}$

Karar Değişkenleri

X_{it} : t ayında üretilecek tip i otomobil adedi

Diğer Değişkenler

I_{it} : t ayı sonunda tip-i otomobilin depodaki adedi (inventory)

M_{it} : t ayında tip-i otomobilden karşılanamayan talep adedi

Z : toplam kâr

Amaç Fonksiyonu

$$\max z = \sum_{t\in T}\sum_{i\in\{1,2,3\}} c_i \cdot x_{it} - h\sum_{t\in T}\sum_{i\in\{1,2,3\}} I_{it}$$

Kısıtlar

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 + X_{11} - D_{11} = I_{11} \\ I_{11} + X_{12} - D_{12} = I_{12} \\ \vdots \\ I_{15} + X_{16} - D_{16} = 0 \end{array}\right\}$$

Tek bir model tipi için 6 aylık üretim, stok, talep denge kısıtları.

Tüm modellere ve aylara genellersek:

$$I_{i,t-1} + X_{i,t} - D_{it} - I_{it} = 0 \quad \forall i,t$$ (Her ay her model için; bir önceki aydan kalan − üretilen − talep = stok)

$$I_{i,0} = S_i \quad , \forall i$$ (1. ay başında depodaki otomobiller)

$$I_{i,6} = 0 \quad , \forall i$$ (6. ay sonu stok olmamalı)

$$\sum_i X_{it} \leq 200 \quad , \forall t$$ (Aylık üretim kapasitesi kısıtı)

$$x_{it} \geq 0 \quad \forall i,t$$

[redacted](DP'nin Simpleks ile Çözümü) (Ara Sınav)

$$Max\ Z = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 8x_4$$

$$\text{s.t. } 8x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 80$$

$$x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 \le 120$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Standart Form :

$$Max\ Z = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 8x_4$$

$$\text{s.t. } 8x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + s_1 = 80$$

$$x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + s_2 = 120$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \ge 0$$

Kısıt sayısı (m) = 2

Değişken sayısı (n) = 4 karar değ. + 2 dolgu değ. = 6

Temel Çözüm Sayısı $= \binom{n}{m} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	S1	S2	RHS
1	-4	-5	3	-8	0	0	0
S1	8	2	-4	2	1	0	80
S2	1	1	-6	1	0	1	120

BV = $\{s_1, s_2\}$ NBV=$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Girecek değişken olarak x_4 seçilir. (en küçük negatif katsayılı NBV)

Min oran testi : min { 80/2 , 120/1 } = 40 çıkan değişken S1 seçilir.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	S1	S2	
1	28	3	-13	0	4	0	320
x_4	4	1	-2	1	1/2	0	40
S2	-3	0	-4	0	-1/2	1	80

BV = $\{x_4, s_2\}$ NBV=$\{x_1, x_2, x_3, s_1\}$

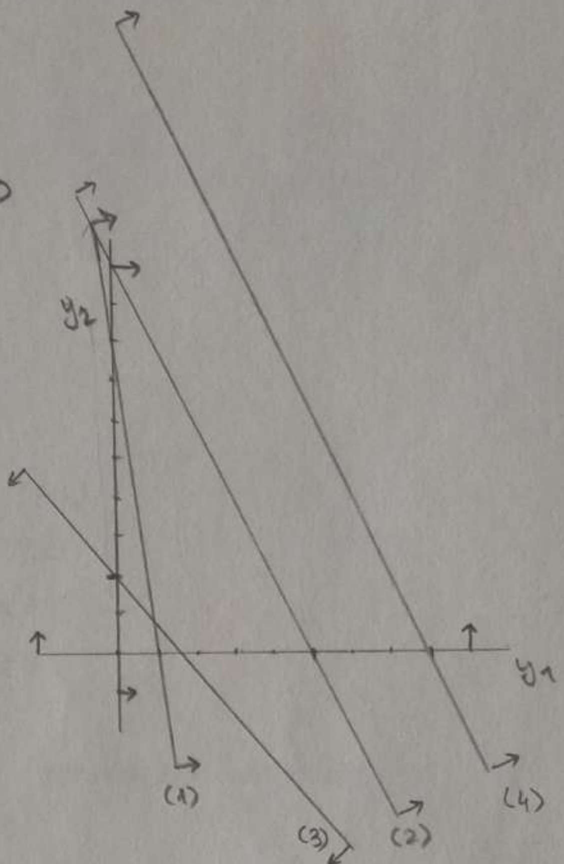
Girecek değişken olarak x_3 seçilir. (negatif katsayılı tek NBV)

Minimum oran testine girebilecek satır yok. Anahtar sütundaki her iki satır değeri de negatif.

Sınırsız Çözüm ! (Unbounded Solution)

$$(P)\quad \text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 8x_4$$
$$8x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 80$$
$$x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 \le 120$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

$$(D)\quad \min W = 80y_1 + 120y_2$$
$$8y_1 + y_2 \ge 4$$
$$2y_1 + y_2 \ge 5$$
$$4y_1 + 6y_2 \le 3$$
$$2y_1 + y_2 \ge 8$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$



Dual model → olursuz (infeasible)

Dual prb. olursuz ise
Primal prb. olursuz veya sınırsızdır.

Primal problem için $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ $Z = 0$ çözümü olurlu tekil bir çözümdür.
Yani primal problem olursuz değildir. O halde sınırsızdır.

[redacted] **(DP'nin Simpleks ile Çözümü)** (Ara Sınav)

$$Min\ Z = 0.5\,y - 6\,x_1 - 7.5x_2$$

$$-y + 10x_1 + 12x_2 \leq 2500$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 45$$

$$y, x_1, x_2 \geq 0$$

Standart Form :

$$Max - Z = 6\,x_1 + 7.5x_2 - 0.5y$$

$$10x_1 + 12x_2 - y + s_1 = 2500$$

$$x_1 + s_2 = 200$$

$$x_2 + s_3 = 45$$

$$x_1, x_2, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Kısıt sayısı (m) = 3 *Değişken sayısı (n) = 3 karar değ. + 3 dolgu değ. = 6*

Temel Çözüm Sayısı $= \binom{n}{m} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$

z	x_1	x_2	y	s_1	s_2	s_3		
-1	-6	-7.5	0.5	0	0	0	0	Oran
s_1	10	12	-1	1	0	0	2500	208.3
s_2	1	0	0	0	1	0	200	Geçersiz
s_3	0	1	0	0	0	1	45	45*

BV'ye girecek değişken olarak x_2 , BV'den çıkacak değişken olarak s_3 seçilir.

z	x_1	x_2	y	s_1	s_2	s_3		
-1	-6	0	0.5	0	0	7.5	337.5	
s_1	10	12	-1	1	0	-12	1960	196*
s_2	1	0	0	0	1	0	200	200
x_2	0	1	0	0	0	1	45	Geçersiz

BV'ye girecek değişken olarak x_1 , BV'den çıkacak değişken olarak s_1 seçilir.

z	x_1	x_2	y	s_1	s_2	s_3		
-1	0	0	-0.1	0.6	0	0.3	1513.5	
x_1	1	0	-0.1	0.1	0	-1.2	196	Geçersiz
s_2	0	0	0.1	-0.1	1	1.2	4	0.3*
x_2	0	1	0	0	0	1	45	45

BV'ye girecek değişken olarak y , BV'den çıkacak değişken olarak s_2 seçilir.

z	x_1	x_2	y	s_1	s_2	s_3	
-1	0	0	0	0.5	1	1.5	1517.5
x_1	1	0	0	0	1	0	200
y	0	0	1	-1	10	12	40
x_2	0	1	0	0	0	1	45

Tablo optimal ! Tekil Çözüm mevcut.

$x_1^* = 200$ $x_2^* = 45$ $y = 40$ $-Z^* = 1517.5$ $Z^* = -1517.5$

(*)

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \; 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\le 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Simpleks:

	Z	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	Oran
	1	-4	-5	-2	0	0	0	0	
x_4		2	-1	2	1	0	0	9	N/A
← x_5		3	5	4	0	1	0	8	8/5*
x_6		1	1	2	0	0	1	3	3/1
		-1 ↓	0	2	0	1	0	8	
x_4		13/5	0	14/5	1	1/5	0	53/5	53/13
← x_2		3/5	1	4/5	0	1/5	0	8/5	8/3
x_6		2/5	0	6/5	0	-1/5	1	7/5	7/2
		0	5/3	10/3	0	4/3	0	32/3	
x_4		0	-65/3	-2/3	1	-2/3	0	11/3	
x_1		1	5/3	4/3	0	1/3	0	8/3	
x_6		0	-2/3	2/3	0	-1/3	1	1/3	

optimum gözüm: $x_1^* = 8/3 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 0 \quad x_4^* = 11/3 \quad x_5^* = 0 \quad x_6^* = 1/3$

$$z^* = 32/3$$

DUAL. $\text{Min } W = 9u_1 + 8u_2 + 3u_3$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \; 2u_1 + 3u_2 + u_3 &\ge 4 \\ -u_1 + 5u_2 + u_3 &\ge 5 \\ 2u_1 + 4u_2 + 2u_3 &\ge 2 \\ u_1, u_2, u_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Optimal Simpleks tablodan $\longrightarrow$ $u_1 = 0 \quad u_2 = 4/3 \quad u_3 = 0$

$$w = 32/3$$

Yukarıdaki simpleks tablo gözümünde elde edilen 2. temel tabloyu cebirsel olarak ifade edin, olurluluk, ve optimalliği kontrol edin, bir sonraki adım için çıkan. giren değişkenleri tespit edin.

Temel Değ (BV) $=\{x_4, x_2, x_6\}$ Temel dışı (NBV) $=\{x_1, x_3, x_5\}$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53/5 \\ 8/5 \\ 7/5 \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \text{uygun çözüm.}$$

Optimallik kontrolü:

$$\bar{c}_1 = C_B.B^{-1}.A_1 - C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 = -1$$

$$\bar{c}_3 = C_B.B^{-1}.A_3 - C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 = 2$$

$$\bar{c}_5 = C_B.B^{-1}.A_5 - C_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

$\bar{c}_1 < 0$ olduğundan mevcut temel çözüm optimal değildir.

x_1 giren değişken seçilir.

$$u = B^{-1}.A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/5 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

Min oran testi:

$$\min\left\{ \frac{53/5}{13/5}, \frac{8/5}{3/5}, \frac{7/5}{2/5} \right\} = \min\left\{ \frac{53}{13}, \overset{*}{\frac{8}{3}}, \frac{7}{2} \right\} = \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 \text{ çıkan değişken olur.}$$

Yeni BV $=\{x_4, x_1, x_6\}$ NBV $=\{x_2, x_3, x_5\}$ $C_B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 8/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_2 = C_B.B^{-1}.A_2 - C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 = \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 = 5/3$$

$$\bar{c}_3 = C_B.B^{-1}.A_3 - C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 = 10/3$$

$$\bar{c}_5 = C_B.B^{-1}.A_5 - C_5 = \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 4/3$$

$\bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_5 > 0 \Rightarrow$ mevcut çözüm optimaldir!

$$Z^* = C_B.B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = 32/3$$

Bu problemde $BV=\{x_1, x_2, x_3\}$ olsaydı;

$$C_B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix}3/5 & 2/5 & -7/5\\ -1/5 & 1/5 & -1/5\\ -1/5 & -3/10 & 13/10\end{bmatrix}$$

$$X_B=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=B^{-1}\cdot b=\begin{bmatrix}3/5 & 2/5 & -7/5\\ -1/5 & 1/5 & -1/5\\ -1/5 & -3/10 & 13/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ 8\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22/5\\ -4/5\\ -3/10\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ <0\\ <0\end{matrix}$$

uygun çözüm değil!

Aynı problemde eğer $BV=\{x_3, x_4, x_5\}$ olsaydı;

$$C_B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1/2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix}9\\ 8\\ 3\end{bmatrix}$$

$$X_B=\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=B^{-1}\cdot b=\begin{bmatrix}3/2\\ 6\\ 2\end{bmatrix}>0$$ uygun çözüm.

$$\bar{c}_1=C_B\cdot B^{-1}\cdot A_1-c_1=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1/2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}-4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}-4=-3$$

$$\bar{c}_2=C_B\cdot B^{-1}\cdot A_2-c_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 5\\ 1\end{bmatrix}-5=-4$$

$$\bar{c}_6=C_B\cdot B^{-1}\cdot A_6-c_6=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}-0=1 \qquad Z=C_B\cdot B^{-1}\cdot b=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ 8\\ 3\end{bmatrix}=3$$

$\bar{c}_1, \bar{c}_2<0$ olduğundan optimum değil. x_2 temele giren olarak seçilir.

$$u: B^{-1}\cdot A_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1/2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$$

min oran testi: $\min\left\{\underbrace{\frac{3/2}{1/2}}_{x_3 \text{ için}},\ ,\ \underbrace{\frac{2^{*}}{3}}_{x_5 \text{ için}}\right\}$ x_5 çıkan değişken olur.

Yeni $BV=\{x_3, x_4, x_2\}$

$$C_B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 5\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1/6 & 5/6\\ 1 & 2/3 & -7/3\\ 0 & 1/3 & -2/3\end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix}9\\ 8\\ 3\end{bmatrix}$$

$$X_B=\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\\ x_2\end{bmatrix}=B^{-1}\cdot b=\begin{bmatrix}7/6\\ 7\\ 2/3\end{bmatrix}$$ uygun çözüm

$$Z=C_B\cdot B^{-1}\cdot b=\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7/6\\ 7\\ 2/3\end{bmatrix}=7/3+10/3=17/3$$

Bu çözüm optimal mi? İndirgenmiş maliyetleri kontrol edin....

- X_2'nin amaç fonksiyon katsayısı (C_2) hangi aralıkta iken mevcut temel değişmez?

X_2, optimum çözümde temel olmayan değişken.

Sadece $\bar{c}_2$ için hesaplama yapılır.

$$c_2 \to c_2 + \Delta$$

$$\bar{c}_2 = c_B \cdot B^{-1} \cdot A_2 - (c_2 + \Delta) \geq 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$X_B = \begin{bmatrix} X_4 \\ X_1 \\ X_6 \end{bmatrix} \quad C_B' = [0 \quad 4 \quad 0] \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B' \cdot B^{-1} = [0 \quad 4/3 \quad 0]$$

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 4/3 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 - \Delta = \frac{20}{3} - 5 - \Delta = \frac{5}{3} - \Delta > 0$$

$$\Delta < 5/3$$

yani $c_2 < 20/3$ oldukça mevcut temel değişmez.

- Aynı hesabı c_3 için yaparsak;

$$\bar{c}_3 = C_B' \cdot B^{-1} \cdot A_3 - (c_3 + \Delta) = [0 \quad 4/3 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 - \Delta = 10/3 - \Delta > 0$$

$$\Delta < 10/3$$

yani $c_3 < 16/3$ oldukça mevcut temel değişmez.

- x_1'in amaç fonk katsayısı c_1 için yaparsak;

(x_1 temel değişken olduğu için temel olmayan değişkenlerin indirgenmiş maly hesaplan

$$c_1 \to c_1 + \Delta$$

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 4+\Delta \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 = [0 \quad \frac{4+\Delta}{3} \quad 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 > 0$$

$$\frac{20+5\Delta}{3} - 5 > 0$$

$$15 + 5\Delta > 0$$

$$\Delta > -3$$

$$\bar{c}_3 = [0 \quad \frac{4+\Delta}{3} \quad 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 = \frac{16+4\Delta}{3} - 2 > 0$$

$$\Delta > -10/4$$

$$\bar{c}_5 = [0 \quad \frac{4+\Delta}{3} \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \frac{4+\Delta}{3} > 0$$

$$\Delta > -4$$

Bu üç eşitsizliğe göre;

$$\Delta > -10/4$$

yani $c > 3/2$ oldukça

mevcut temel değişmez

Sağ Taraf Değerlerinde Değişim :

- $b_2 \rightarrow b_2 + \Delta$ için

$X_B = B^{-1} \cdot b > 0$ olmalı $\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8+\Delta \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-16/3-2\Delta/3 \\ 8/3+\Delta/3 \\ -8/3-\Delta/3+3 \end{bmatrix} > 0$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{11}{3} - \frac{2\Delta}{3} > 0 \Rightarrow \Delta < 33/2 \\ &\frac{8}{3} + \frac{\Delta}{3} > 0 \Rightarrow \Delta > -8 \\ &-\frac{8}{3} - \frac{\Delta}{3} + 3 > 0 \Rightarrow \Delta < 1 \end{aligned}\right\} \quad -8 < \Delta < 1$$

yani $0 < b_2 < 9$ oldukça mevcut temel kalır (ama değerleri değişir)

örneğin $b_2 = 8.5$ olursa $X_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 17/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$ $z = 34/3$ ($y_2^* \cdot (1/2)$ kadar değişir!)

- $b_1 \rightarrow b_1 + \Delta$ için;

$X_B = B^{-1} \cdot b > 0$ olmalı $\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9+\Delta \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+\Delta-16/3 \\ 8/3 \\ -8/3+3 \end{bmatrix} > 0$

$\frac{11}{3} + \Delta > 0 \Rightarrow \Delta > -11/3$

yani $b_1 > 16/3$ oldukça mevcut temel kalır

ama değerler değişir örneğin $b_1 = 10$ ise $\begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/3 \\ 8/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ $z = 32/3$

z değişmedi!

çünkü $y_1^* = 0$

- $b_3 \rightarrow b_3 + \Delta$ için;

$X_B = B^{-1} \cdot b > 0$ olmalı $\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 3+\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 8/3 \\ 1/3+\Delta \end{bmatrix} > 0$

$1/3 + \Delta > 0 \Rightarrow \Delta > -1/3$

yani $b_3 > 8/3$ oldukça mevcut temel kalır

ama değerler değişir örneğin $b_3 = 4$ ise $\begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$ $z = 32/3$ (değişmedi)

çünkü $y_3^* = 0$

(✱) $\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

$\text{s.t.} \quad x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8$

$3x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Verilen DP modeline göre aşağıdaki soruları cevaplayın!

a) Standart Formunu Yazın; kısıtlara göre temel çözüm sayısını hesaplayın.

$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

$\text{s.t.} \quad x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8$

$3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

m: kısıt sayısı $m = 2$

n: değişken sayısı $n = 5$

Temel Çözüm Sayısı $= \binom{n}{m} = \binom{5}{2} = 10$

b) Probremin Dualini yazın ve çözün. (Grafik Yöntem ile çözülebilir)
Dual problemin çözümüne göre primal problemin çözümünü bulun.

(Dual) $\min w = 8y_1 + 8y_2$

$\text{s.t.} \quad y_1 + 3y_2 \geq 3 \quad (1)$

$3y_1 + y_2 \geq 2 \quad (2)$

$y_1 + 5y_2 \geq -1 \quad (3)$

$y_1, y_2 \geq 0$

$\min w = 8y_1 + 8y_2$

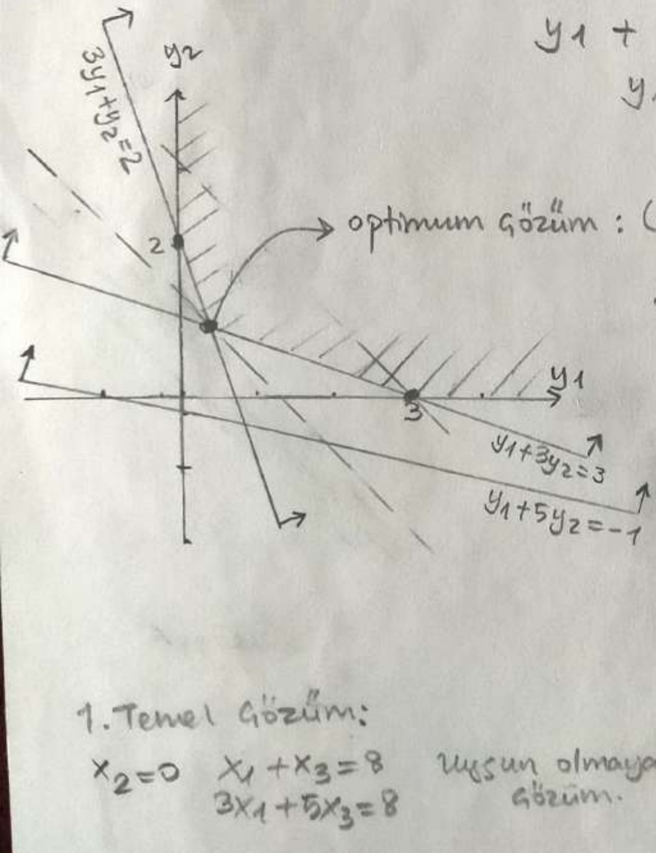
$\text{s.t} \quad y_1 + 3y_2 - y_3 = 3$

$3y_1 + y_2 - y_4 = 2$

$-y_1 - 5y_2 + y_5 = 1$

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$

23



optimum çözüm : (1) ve (2) nolu kısıtlar aktif (binding)

$y_1 + 3y_2 = 3$
$3y_1 + y_2 = 2$ $\Rightarrow y_1^* = 3/8 \quad y_2^* = 7/8$

$w^* = 8.(3/8) + 8.(7/8) = 10$

Öyleyse; $y_1, y_2 > 0$ olduğundan, primal problemin 2 kısıtı da aktiftir yani $x_4, x_5 = 0$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$

$3x_1 + x_2 + 5x_3 = 8$

$n=3$, $m=2$ $\binom{3}{2} = 3$ temel çözüm

1. Temel Çözüm:

$x_2 = 0 \quad x_1 + x_3 = 8$
$3x_1 + 5x_3 = 8$ uygun olmayan çözüm.

2. Temel Çözüm:

$x_1 = 0 \quad 3x_2 + x_3 = 8$
$x_2 + 5x_3 = 8$ $\quad x_2 = 16/7 \quad x_3 = 8/7$
$z = 24/7$

uygun çözüm ama optimum değil.
($w^* = 10$ olduğundan $z^* = 10$ olmalıdır)

3. Temel Çözüm:

$x_3 = 0 \quad x_1 + 3x_2 = 8$
$3x_1 + x_2 = 8$ $\quad x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad z = 10$
uygun ve optimal.

Primal Problemin Çözümü: $x_1^* = 2 \quad x_2^* = 2 \quad x_3^* = 0 \quad x_4^* = 0 \quad x_5^* = 0 \quad z^* = 10$

c) x_1 ve x_4 temel değişkenler olursa çözüm ne olur?
(Simpleks yöntemi cebirsel olarak uygulayın, 1 iterasyon yapın)

	Temel Değ.	Temel Olmayan Değ.	RHS
Z	$\bar{c}_j = 0$	$\bar{c}_j = C_B' \cdot B^{-1} \cdot A_j - c_j$	$C_B' \cdot B^{-1} \cdot b = Z$
Temel Değ. Satırları	I	$B^{-1} \cdot A_j$	$B^{-1} \cdot b = X_B$

$$\text{Max } C'X \quad\Rightarrow\quad \text{Max } C_B' X_B + \cancel{C_N' X_N}^{\,0}$$

$$\text{s.t. } AX = b \qquad \text{s.t. } B \cdot X_B + \cancel{N \cdot X_N} = b$$

$$X \geq A \qquad X_B \geq 0$$

$$X_N = 0$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad X_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{matrix} \\ [3 \ \ 2 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 0] \end{array} \quad C_B' = [3 \ \ 0] \quad C_N' = [2 \ \ -1 \ \ 0]$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 16/9 \end{bmatrix} > 0$$ uygun çözüm.

$$C_B' \cdot B^{-1} = [3 \ \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} = [0 \ \ 1]$$

$$Z = C_B' \cdot B^{-1} \cdot b = [0 \ \ 1] \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 8$$

$$\bar{c}_1 = \bar{c}_4 = 0$$

$$\bar{c}_2 = C_B' \cdot B^{-1} \cdot A_2 - c_2 = [0 \ \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 = -1$$

$$\bar{c}_3 = C_B' \cdot B^{-1} \cdot A_3 - c_3 = [0 \ \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} - (-1) = 6$$

$$\bar{c}_5 = C_B' \cdot B^{-1} \cdot A_5 - c_5 = [0 \ \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

$\bar{c}_2 < 0$ olduğundan mevcut temel optimal değildir. x_2 giren değişken olur.

$$B^{-1} \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 8/9 \end{bmatrix} \qquad \min\left\{ \frac{8/3}{1/3}, \frac{16/9}{8/9} \right\} = \min\{8, \overset{*}{2}\}$$

x_4 çıkan değişken

Yeni temel = $\{x_1, x_2\}$ Temel dışı = $\{x_4, x_3, x_5\}$

$$C_B = [3 \quad 2] \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{uygun çözüm}$$

$\bar{c}_1 . \bar{c}_2 = 0$ (Temel değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri 0 olur)

$$\bar{c}_3 = C_B . B^{-1} . A_3 - c_3 = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} - (-1)$$

$$= [3/8 \quad 7/8] \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + 1 = 38/8 + 1 = 46/8$$

$$\bar{c}_4 = C_B . B^{-1} . A_4 - c_4 = [3/8 \quad 7/8] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 3/8$$

$$\bar{c}_5 = C_B . B^{-1} . A_5 - c_5 = [3/8 \quad 7/8] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 7/8$$

$\bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5 > 0$ olduğundan mevcut çözüm optimaldir.

$$z^* : C_B . B^{-1} . b = [3/8 \quad 7/8] \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 10$$

veya $z^* : C_B . B^{-1} . b = C_B . X_B = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 10$

max prb. için
- Eğer $\bar{c}_j = c_j - C_B . B^{-1} . A_j$ olarak hesaplanırsa optimallik şartı $\bar{c}_j < 0$, $\forall j$
- Eğer $\bar{c}_j = C_B . B^{-1} . A_j - c_j$ olarak hesaplanırsa optimallik şartı $\bar{c}_j > 0$, $\forall j$

Min problemi için de $\bar{c}_j = C_B B^{-1} . A_j - c_j$ ise optimallik şartı $\bar{c}_j > 0$, $\forall j$ olur

Yukarıdaki çözümde $C_B . B^{-1}$ çarpımı dual değişkenlerin değerini vermektedir.

Dual problemin grafik yöntem ile çözümünde de $y_1^* = 3/8$ $y_2^* = 7/8$ bulunmuştu!

NOT: Simpleks yöntemin optimum sonucu veren son tablosunda;
artık değişkenlerin z satırı değerleri, dual değişkenlerin optimum değerlerini verir,
artık değişkenlerin sütununa ait ana tablo (satır değerleri) de B^{-1} matrisini verir.

Max $z = 3x + 2y$

s.t. $2x - y \leq 6$

$2x + y \leq 10$

$x, y \geq 0$

Standart Form

Max $z = 3x + 2y$

s.t. $2x - y + s_1 = 6$

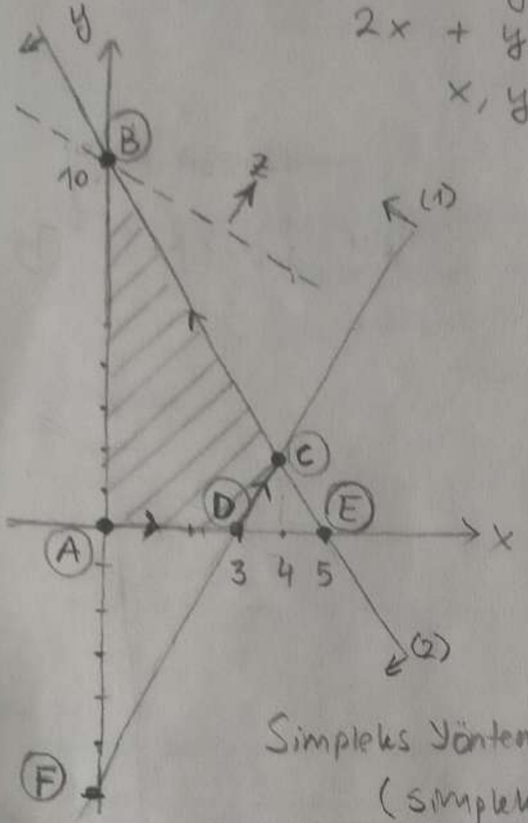
$2x + y + s_2 = 10$

$x, y, s_1, s_2 \geq 0$

n : değişken sayısı $n = 4$

m : denklem sayısı $m = 2$

Temel Çözüm Sayısı $= \binom{4}{2} = 6$



Ⓐ → $x = y = 0$ $s_1 = 6$, $s_2 = 10$ $z = 0$

Ⓑ → $x = s_2 = 0$ $y = 10$, $s_1 = 16$ $z = 20^*$ optimum.

Ⓒ → $s_1 = s_2 = 0$ $x = 4$, $y = 2$ $z = 16$

Ⓓ → $y = s_1 = 0$ $x = 3$, $s_2 = 4$ $z = 9$

Ⓔ → $y = s_2 = 0$ $x = 5$, $s_1 = -4$ uygun değil.

Ⓕ → $x = s_1 = 0$ $y = -6$, $s_2 = 16$ uygun değil.

Simpleks Yöntemi A→D→C→B yolunu izler.

(simpleks yöntemi her zaman en kısa yolu seçemiyor)

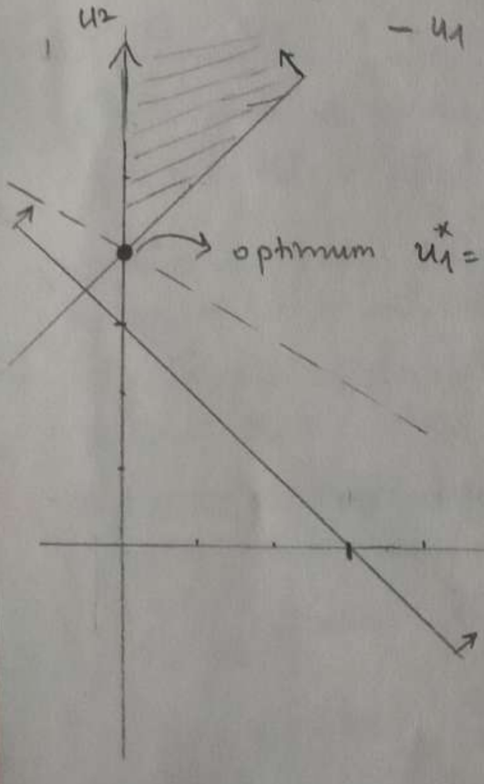
Ama optimuma ulaşmayı garanti eder. (Eğer tekil bir optimum varsa)

Dual min $w = 6u_1 + 10u_2$

s.t $2u_1 + 2u_2 \geq 3$

$-u_1 + u_2 \geq 2$

$u_1, u_2 \geq 0$



→ optimum $u_1^* = 0$ $u_2^* = 2$ $w^* = 20$

Primal prb. optimal çözümünde $s_1 > 0$ olduğundan $u_1 = 0$ olmalıydı zaten!

Buna göre; $\left.\begin{array}{l} 2u_2 \geq 3 \\ u_2 \geq 2 \end{array}\right\} u_2 \geq 2$

min $10u_2$ için $u_2^* = 2$ $w^* = 20$ olur.

$$\text{Max } z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Standart Form.

$$\text{Max } z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Simpleks :

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
	1	-2	-2	-4	0	0	0	Oran
x_4		1	1	1	1	0	6	6/1
← x_5		1	2	3	0	1	12	12/3*
		-2/3	2/3	0	0	4/3	16	Oran
← x_4		2/3	1/3	0	1	-1/3	2	3
x_3		1/3	2/3	1	0	1/3	4	12
		0	1	0	[1	1]	18	
x_1		1	1/2	0	[3/2	-1/2]	3	
x_3		0	1/2	1	[-1/2	4/6]	3	

Tablo olurlu ve optimal.

$x_1^* = 3 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 3 \quad z^* = 18$

Yukarıdaki optimal simpleks tablosunda; x_4 ve x_5'in z satırı değerleri $[1, 1]$ bunlar dual değişkenlerin optimum değerleridir.

$y_1^* = 1 \quad y_2^* = 1$

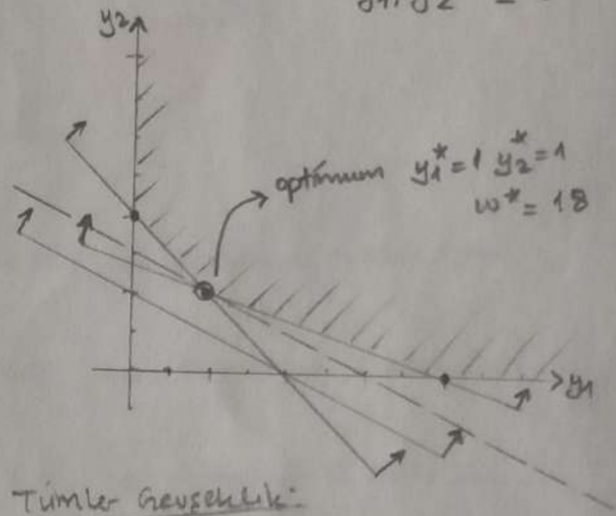
Ayrıca optimal simpleks tablonun x_4, x_5 sütunları altında kalan tablo değerleriyle oluşan $\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 4/6 \end{bmatrix}$ matris, B^{-1} matrisidir.

$BV = \{x_1, x_3\}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ olduğuna göre

$B^{-1} \cdot B = I$ olduğunu kontrol edin!

Dual Problem.

$$\text{Min } w = 6y_1 + 12y_2$$
$$y_1 + y_2 \ge 2$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 2$$
$$y_1 + 3y_2 \ge 4$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$



Tümler Gevşeklik:

(1) $(y_1 + y_2 - 2)\, x_1 = 0$

(2) $(y_1 + 2y_2 - 2)\, x_2 = 0$

(3) $(y_1 + 3y_2 - 4)\, x_3 = 0$

(4) $(6 - x_1 - x_2 - x_3)\, y_1 = 0$

(5) $(12 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)\, y_2 = 0$

$(y_1^* + y_2^* - 2) = 0$ olduğundan $x_1 \ge 0$

$(y_1^* + 2y_2^* - 2) > 0$ olduğundan $x_2 = 0$

$(y_1^* + 3y_2^* - 4) = 0$ olduğundan $x_3 \ge 0$

$y_1^* > 0 \Rightarrow 6 - x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$y_2^* > 0 \Rightarrow 12 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 3x_3 = 12$$

$$\Downarrow$$

$x_1^* = 3 \quad x_3^* = 3$

$z^* = 2.(3) + 4(3) = 18$

$w^* = z^*$ ✓

Büyük-M Yöntemi ile Çözüm

Dual Prb. standart Formu:

$$\min w = 6y_1 + 12y_2 + \qquad + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3$$

$$\text{s.t.} \quad y_1 + y_2 - e_1 + a_1 = 2$$

$$y_1 + 2y_2 - e_2 + a_2 = 2$$

$$y_1 + 3y_2 - e_3 + a_3 = 4$$

$$y_1, y_2, e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0$$

w	y_1	y_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	RHS
1	-6	-12	0	0	0	-M	-M	-M	
a_1	1	1	-1	0	0	1	0	0	2
a_2	1	2	0	-1	0	0	1	0	2
a_3	1	3	0	0	-1	0	0	1	4

→ Bu satırda temel değişkenlere ait indirgenmiş maliyetlerin 0 yapılması gerekir.

M(1.Satır) → 0.Satıra topla

M-6 M-12 -M 0 0 0 -M -M 2M → Güncelleme 1. Adım Sonu.

M.(2.Satır) → 0.Satıra topla

2M-6 3M-12 -M -M 0 0 0 -M 4M → Güncelleme 2. Adım Sonu.

M.(3.Satır) → 0.satıra topla

3M-6 6M-12 -M -M -M 0 0 0 8M → Güncelleme 3. Adım Sonu.

w	y_1	y_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	RHS	Oran
1	3M-6	6M-12	-M	-M	-M	0	0	0	8M	
a_1	1	1	-1	0	0	1	0	0	2	2/1
⇐ a_2	1	2	0	-1	0	0	1	0	2	2/2*
a_3	1	3	0	0	-1	0	0	1	4	4/3
	0	0	-M	2M-6	-M	0	(12-6M)/2	0	5M+12	
a_1	1/2	0	-1	1/2	0	1	-1/2	0	1	2
y_2	1/2	1	0	-1/2	0	0	1/2	0	1	-
⇐ a_3	-1/2	0	0	3/2	-1	0	-3/2	1	1	2/3*
	(2M-6)/3	0	-M	0	(M-12)/3	0	-2M	(12-4M)/3	16+2/3 M	
⇐ a_1	2/3	0	-1	0	1/3	1	0	-1/3	2/3	1
y_2	1/3	1	0	0	-1/3	0	0	1/3	4/3	4
e_2	-1/3	0	0	1	-2/3	0	-1	2/3	2/3	-
	0	0	-3	0	-3	3-M	-M	3-M	18	
y_1	1	0	-3/2	0	1/2	3/2	0	-1/2	1	
y_2	0	1	1/2	0	-2/3	-1/2	0	-2/3	1	
e_2	0	0	-1/2	1	-1/2	1/2	-1	1/2	1	

Tablo optimal.

$$y_1^* = 1 \quad y_2^* = 1 \quad e_2 = 1 \quad w^* = 18$$

7

$$\min \ z = 4x_1 + 6x_2 - 9x_3$$

$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

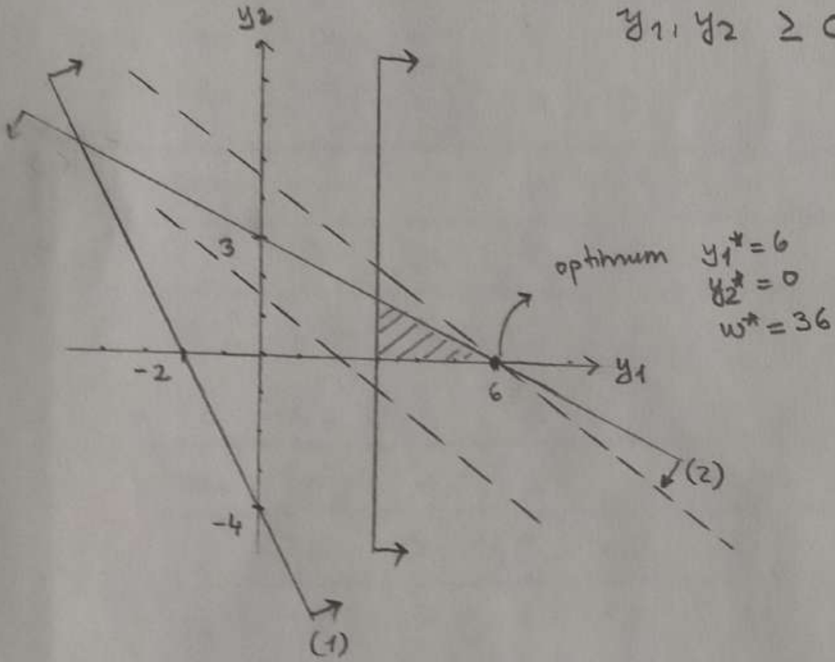
(Dual) $\max \ w = 6y_1 + 8y_2$

$$\text{s.t.} \quad -2y_1 - y_2 \leq 4 \quad (1)$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 6 \quad (2)$$

$$-3y_1 \leq -9 \quad (3)$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$



$$(\underbrace{4 + 2y_1 + y_2}_{16 > 0})\, x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_1^* = 0$$

$$(\underbrace{6 - y_1 - 2y_2}_{= 0})\, x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_2^* \geq 0$$

$$(\underbrace{3y_1 - 9}_{9 > 0})\, x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_3^* = 0$$

$$(-2x_1 + x_2 - 3x_3 - 6)\, \underbrace{y_1}_{> 0} = 0$$

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 - 6 = 0$$

$$x_2^* = 6$$

$$z^* = 6.(6) = 36 = w^*$$

Dual Simpleks ile Çözüm

$$\min z = 4x_1 + 6x_2 - 9x_3$$

s.t. $2x_1 - x_2 + 3x_3 \le -6$

$x_1 - 2x_2 \le -8$

$$z - 4x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -6$$

$$x_1 - 2x_2 + x_5 = -8$$

z	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	RHS	
1	-4	-6	9	0	0	0	
x_4	2	-1	3	1	0	-6	
x_5	1	-2	0	0	1	-8	→
Oran	–	3	–	–	–		
	-7	0	9	0	-3	24	
x_4	3/2	0	3	1	-1/2	-2	→
x_2	-1/2	1	0	0	-1/2	4	
Oran	–	–	–	–	6		
	-16	0	-9	-6	0	36	
x_5	-3	0	-6	-2	1	4	
x_2	-2	1	-3	-1	0	6	

$x_1^* = 0 \quad x_2^* = 6 \quad x_3^* = 0 \quad z^* = 36$

- optimallik sağlanmamış
- olurluluk sağlanmamış.

x_5 çıkan değişken seçilir.
x_2 giren değişken.

- optimallik sağlanmadı
- olurluluk sağlanmadı.

x_4 çıkan değişken olur.
x_5 giren değişken olur.

optimallik sağlandı
olurluluk sağlandı.

(Eğer optimallik sağlanmasaydı normal simpleks uygulardık) Ama gerek kalmadı.