END303 SİSTEM BENZETİMİ

DERS NOTLARI

Müh.Alb. Engin ÇİÇEK

(Bu Sayfa Boş Bırakılmıştır)

İÇİNDEKİLER

1. Sistem Benztimi – Giriş

2. Girdi Modeli

3. Mantıksal Model

4. Çıktı Analizi

EKLER

(Bu Sayfa Boş Bırakılmıştır)

1. SİSTEM BENZETİMİ - GİRİŞ

Benzetim (simülasyon): Mevcut veya henüz ortada olmayan, tasarlama aşamasındaki bir sistemin benzeri, taklidi olarak tanımlanabilir. Benzetim modeli olarak da ifade edilir (sistem: belirli bir amacı yerine getirmek üzere birbirleri ile etkileşim içerisinde olan nesnelerin oluşturduğu yapı). Benzetim modeli, bir temsili gösterim ve bir deney ortamı ortamı olarak da ifade edilebilir.

Sistemin kendi iç dinamikleri olduğu kadar, sistem dışı çevrenin de sistem üzerine etkileri olabilir. Sistemin bir benzetimi modeli yapılarak, sistemin davranışları incenebilir. Bu model, sistemde yer alan unsurlar ve değişkenler arasındaki ilişkilerin matematiksel, mantıksal olarak belirli bir düzen içerisinde ifade edilmesi ile kurulur. Geliştirilen model, sistemin tüm detaylarını içermeyebilir ve modelin amaçlarına uygun olarak sistemin bir kısmı modelde basitleştirilebilir. Hangi detay seviyesinde çalışma yapıldığına göre benzetim modeli detayları da değişir.

Ayrıca, sistemin işleyişi ile ilgili bazı farz ve kabuller yapılarak benzetim modelinin tutarlı ve anlaşılır olması sağlanabilir. Geliştirilen model, gerçek veya tasarlanan sisteme yönelik "Eğer … Ne" (What .. if) soruları ile inceleme yapılması için kullanılabilir. Böylelikle, geröek sistem üzerinde canlı denemeler yapılmadan, olası değişikliklerin yaratabileceği sonuçlar görülebilir. Gerçek sistem üzerinde deneme yapmak çoğu zaman maliyetlidir, bazen de imkansız olabilir.

Benzetim Modelleri; karmaşık sistemlerin içerisindeki etkileşimleri incelemek, bunlar üzerinde deney yapmak, hipotezleri test etmek, yeni tasarım ve stratejilerin olası etkilerini, sistemdeki girdilerin çıktılara etkisi ile dar boğazları görmek için kullanılabileceği gibi, analitik çözüm yöntemleri ile elde edilen bazı sonuçları görselleştirmek, desteklemek, gerçeklemek, doğrulamak için de kullanılabilir.

Bunun yanında, benzetim, eğitim maksatlı olarak da kullanılan bir araçtır ve ayrıca devam etmekte olan süreçleri kesintiye uğratmadan, yapılacak değişiklerin sonuçlarını görmek veya gerçek olarak yapıldığında uzun sürecek durumlarda zamanı hızlandırarak bir çok sayıda ve uzun süreli gözlem yapabilmek bakımından da faydalı olabilir.

Yukarıda belirtilen hususlar ile uyumlu olarak, Benzetim Modellerinin kullanım maksatları aşağıda belirtilen madde başlıkları ile özetlenebilir.

Değerlendirme : Belirlenen kriterlere göre sistemin nasıl çalışacağının görülmesi/ tahmini

Karşılaştırma : Önerilen tasarım veya yaklaşımların karşılaştırılması

Duyarlık Analizi : Sistem performansı üzerinde hangi faktörlerin ne kadar etkili olduğu

Optimizasyon : En iyi performans değerini veren faktör düzeylerinin belirlenmesi

Dar Boğaz (Bottle-neck) Analizi : Sitemdeki dar boğazların tespit edilmesi

En İyi, En Kötü Durum ve Güven Aralığı Analizi

Gelecek projeksiyonu

Benzetim modellemesi özellikle şu durumlarda önemli ve faydalı bir araçtır :

- Gerçek sistem henüz kurulmamış ve tasarlama aşamasında ise veya
- Gerçek sistem mevcut olsa bile üzerinde denemeler yapmanın mümkün olmadığı durumlarda (örn. nükleer santral, deprem senaryoları vb.),
- Sistem ile ilgili çalışmanın çok uzun zaman alabileceği durumlarda (örn.ormanlarda yaşayan bitki ve hayvalara yönelik çalışmalar),
- Gerçek sistem üzerinde çalışma yapmanın maliyetinin yüksek olduğu durumlarda (örn. otomotiv fabrikası),
- Gerçek sistem çok karmaşık ve stokastik (olasılıksal) unsurlar, ilişkiler içerdiğinde analitik çözüme yönelik modelleme yapmanın güç olduğu durumlarda,

Benzetim Modeli Uygulama Alanları

Aşağıda, benzetim modelinin uygulanabileceği bazı alanlar belirtilmiştir. Ancak, kullanım alanı bunlar ise sınırlı olarak düşünülmemelidir.

–Üretim, İmalat (Production and Manufacturing)

–Tedarik Zinciri ve Lojistik (Supply Chain and Logistics)

–Ulaştırma ve Trafik (Transportation and Traffic)

–İş ve Yönetim Süreçleri (Business Processes)

–Askeri Harekatlar (Military Operations)

–Sağlık Hizmetleri (Health Care)

–Hizmet Sektörü (Yeme İçme, Konaklama, vb)

–Bankacılık ve Finans (Banking and Finance)

–Tarım ve Hayvancılık (Agriculture and Horticulture)

–Enerji

–İnsan Kaynakları ve Personel Yönetimi (Human Resources and Personnel Management)

–Bilişim Sistemleri

–Hava Durumu ve Doğal Afet Takip, Bilgi Sistemleri

Benzetim Modelinin Kullanmasının Tercih Edilmeyeceği Durumlar

–Çözüm basit mantık ile bulunabildiğinde veya analitik çözüm yeterli olduğunda

–Benzetim modellemesinin uzun zaman alacağı, maliyetli olacağı ve kısıtlı kaynak durumlarında

–Modelleme için gereken, sisteme ilişin verilerin yetersiz olması durumunda

–Modellemesi zor, insan davranışları gibi aşırı kompleks ve tahmin edilemez öğeler olduğunda

–Modelin doğrulama ve geçerlemesinin yapılması için yeterli zaman veya kaynak olmadığında

Sistem Benzetim Modeli Bileşenleri

Bir sistemi, benzetim ile modemek istediğimizde, belirli bileşneleri (modelde yer alacak çeşitli unsurları) belirlememiz gereklidir. Aşağıdaki tabloda, bir sistem benzetim modelinde yer alması gereken bileşenler verilmiştir. Benzetim modeli oluştururken bu bileşenlere karşılık gelen unsurların belirlenmesi önemlidir.

Bileşen		Tanım	Örnek
Varlıklar	Entities	Sistemde yer alan ve modelin ilgilendiği somut canlı, cansız veya sanal nesneler.	Müşteri, malzeme, parça, mesaj, talep, sipariş vb.
Kaynaklar	Resources	Varlıklar ile ilgili işlemleri/ faaliyetleri yapan unsurlar	Makine, Vinç, Görevli personel, Bilgisayar, vb.
Özellikler	Attributes	Varlıklara ve kaynaklara ait nitelikler, değişkenler	müşterinin yaşı, malzemenin ağırlığı, parça tipi, vb.
Faaliyetler	Activities	Belirli bir **<u>süre</u>** devam eden işlemler	paketleme, pişirme, yükleme, montaj, vb.
Olaylar	Events	Sistem durumunu değiştirebilecek, **<u>anlık</u>** olarak ortaya çıkan/ meydana gelen gelişmeler, vakalar	Yeni bir müşteri gelmesi, yeni bir sipariş alınması, yeni bir arızanın olması
Sistem Değişkenleri	System Variables	Sistemde farklı değerler alabilen değişkenlerdir. Bazı sistem değişkenleri varlıklara ait değişkenlerdir.	rüzgar şiddeti, hava durumu, trafik yoğunluğu, tamamlanan iş sayısı, vb.
Sistem Durumu	System State	Sistemi tanımlayan tüm nesnelerin (varlık ve kaynak) ve sistem değişkenlerinin her hangi bir t anında bulunduğu durum (sistemin anlık resmi). Sistem durumu, durum değikenleri ile gösterilir. Örnek durum değişkenleri : bekleyen müşteri sayısı, makine doluluk durumu, tamamlanan iş sayısı vb.	t = Pazartesi 08:32 1 nolu Makine : Dolu Kuyrukta Bekleyen : 5 2 nolu Makine : Dolu Kuyrukta Bekleyen : 0 3 nolu Makine : Boş Kuyrukta Bekleyen : 0 Tamamlanan İş : 271 En Fazla Bekleme: 1 nolu Makine, 36 dk

Sistem Bileşenleri için Örnekler

Sistem	Varlık	Kaynak	Özellik	Faaliyet	Olay	Durum Değişkeni
Banka (Şube)	Müşteriler	Banka Memuru, Bankamatik	Hesaptaki para miktarı	Para Yatırma veya Çekme	Bankaya geliş, İşlemin sona ermesi	Vezne Doluluk Durumu, Bekleyen müşteri sayısı
Banka (Kredi Sistemi)	Kredi Talebi	Banka Memuru, Online uygulama,	Kredi Miktarı, Kredi Vadesi, Aylık Ödeme	Talep değerlendirme, İcra İşlemleri	Kredi talebi gelmesi, Ödeme yapılması,	Batık kredi miktarı, kredi alan müşteri sayısı
Haberleşme	Mesajlar	Sunumcu (Server), Cihaz	Mesaj boyutu, Mesajın adresi	Mesajın gelmesi, iletilmesi	Mesaj gelmesi, mesajın işleminin bitmesi	Sunumcu doluluk durumu
Üretim	Parçalar	Makineler, İşçiler	Parça tipi, parça boyutu	Montaj, İşleme	Montaj bitişi, parça gelişi	Makine doluluk durumu, kuyruk uzunlukları
Üretim	Makineler	Tamirciler, Tamir Ekipmanı	Makine tipi, arıza tipi, arıza zamanı	Onarım, Test/kontrol	Arızalanma/ Bozulma	Makinaların durumları (Faal, Bozuk)
e-Ticaret	Online platform kullanıcıları	Online uygulama, Kargo Firması (Araç, Personel)	Aranan Ürün, Adres, Sipariş Miktarı (TL)	Online alışveriş, nakliye	Online platforma giriş, Sipariş verilmesi, Siparişin teslim edilmesi	Aktif kullanıcı sayısı, Teslim edilecek sipariş adedi, Ortalama sipariş miktarı
e-Ticaret	Sipariş	Kargo araçları, Depolar	Sipariş Ürünü, Adres	Online alışveriş, paketleme, nakliye	Sipariş verilmesi, Siparişin teslim edilmesi	Teslim edilecek sipariş adedi, Stok durumu
Denizde Arama Kurtarma	Aranan tekneler	Sahil Güvenlik Botları, Helikopterleri, Uçakları	Tekne tipi, son mevki, ayrılış limanı, yardım çağrısı zamanı	Bölgeye intikal, arama yapma, kurtarma, geri intikal	Kaza, Acil Çağrı haberi gelmesi, teknenin bulunması	Aktif arama sayısı, geçen süre, aktif bot sayısı

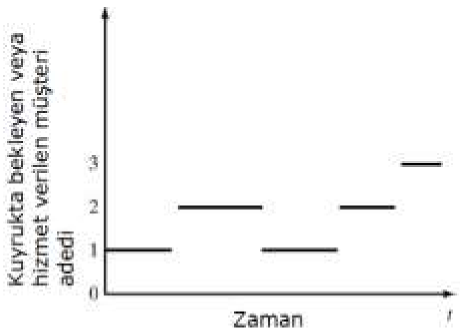
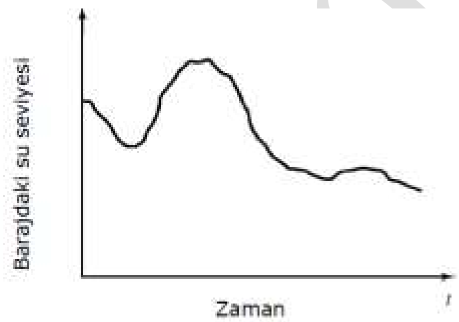
Yukarıda belirtilen örneklerdeki sütunlara yazılan unsurlar artırılabilir. Ayrıca, bu sistemler, farklı bakış açısına göre farklı tanımlanabilir. Bu tamamen yapılacak benzetim çalışma kapsamı, amacına bağlıdır. Örneğin; Banka, Üretim ve e-Ticaret sistemleri ile ilgili örneklerde sistem farklı yönlerden ele alınmıştır.

Ödev Çalışması – 1 .1 : Yukarıdaki tablodaki gibi, benzetim modellemesi yapılabilecek bir sistem bulun ve aynı başlıklarda tanımlamaları yapın (mümkün olduğunca içeriği zengin ve çeşitli tutmaya gayret edin)

Ödev Çalışması – 1 .2 : https://informs-sim.org/ adresinden Winter Simulation Conference arşivine ulaşın ve çeşitli yıllara ait çalışmları konu başlıkları ve alanları bakımından inceleyin.

Sistem ve Sistem Modeli Türleri

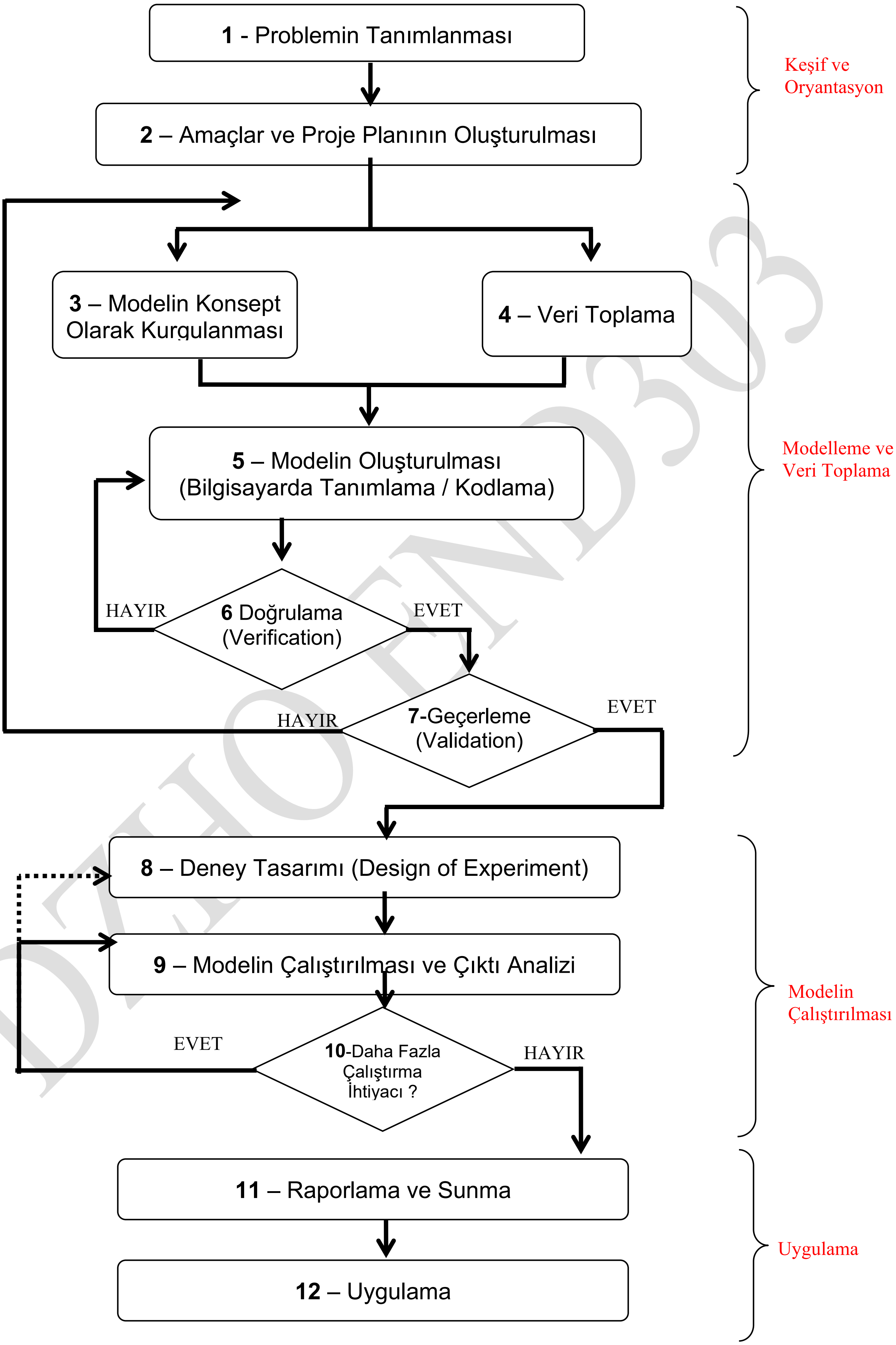
Benzetimde ele alınan sistemleri ve sistem modellerini 3 farklı açıdan sınıflandırmak mümkündür.

Kesikli (Discrete) Sistem	Sürekli (Continuous) Sistem
Sistemin durum değişkenleri, sadece zamanın belirli noktalarındaki olaylarda, tam sayılı olarak değişir Örneğin: Banka sistemi Durum değişkeni: müşteri sayısı (kişi)  	Sistemin durum değişkenleri zaman içerisinde sürekli bir değişimde olabilir Örneğin: Su barajı Durum değişkeni: Su seviyesi (metre) 

Statik Benzetim Modeli	Dinamik Benzetim Modeli
Sistemde zamanın sürekli akışının belirleyici bir rolü yoktur. Sistemin, belirli anlarda, turlarda, devrede gösterimi yapılır. Benzetimde zaman kavramı yok değildir ancak zamanda sabit aralıklar ile sistem durumu güncellenir. Örneğin: Yazı Tura Oyunu (Her oyun, tur ayrı), Envanter Kontrol (Her gün, her hafta veya ay), Torpido Atışı (her bir torpido atışı ayrı ayrı)	Sistemde zaman akışının rolü ve sürekliliği belirleycidir ve önemlidir. Sistemde zaman akışı içerisinde sabit olmayan, çoğu zaman da rassal olan aralıklarda durum değişir ve modelleme mantığı buna göre kurgulanır. Örneğin: Üretim hattı, lojistik sevkiyat (işlem süreleri belirleyicidir)

Deterministik Benzetim Modeli	Stokastik (Olasılıklı) Benzetim Modeli
Rassal değişken içermeyen, belirli girdi için belirli çıktı olan modellerdir. Örneğin: Doğrusal Programlama problemleri, Sisteme giriş ve işlem süreleri sabit olan sistemlerin modelleri.	Bir veya daha fazla rassal değişken içeren modellerdir. Rassal girdiler, rassal sonuçlar doğurur. Bu durumda çıktılar için belirlenen değerler da birer tahmindir. Örneğin: Sisteme gelişler arası geçen süreler rassal olan bir sistem, kalite kontrolden geçme durumu, hastanın iyileşme durumu rassal olan sistemlerin modelleri

BENZETİM MODELLEMESİ PROJESİ/ ÇALIŞMASININ ADIMLARI



1- Problemin Tanımlanması: Benzetim modellesi yapılacak sisteme yönelik problemlerin açık, anlaşılır ve üzerinde mutabık kalınacak şekilde tanımlanması. Diğer adımlara geçildikten sonra geriye dönerek güncellenebilir.

2- Amaçların ve Proje Planının Oluşturulması: Amaçlar, benzetim modeli ile yanıtlanmak istenen sorulara karşılık gelir. Bu aşamada, tanımlanan problem için bentezimin uygun bir yaklaşım olup olmayacağına da karar verilir. Uygun görülürse Proje Planı oluşturulur.

3- Konsept Modelin Kurgulanması: Bu adımda, her hangi bir yazılım kullanmadan modelin genel hatları tespit edilir. Modelin kullanıcısı olacak kişilerin katılımı ile yapılması faydalıdır. Basitten başyarak gerektiği ölçüde detaylandırmak önemlidir.

4- Veri Toplama: Modelde gerekli olan verilerin toplanmasıdır. Bu adım, bazı projelerde uzun zaman alacağından mümkün olduğunca erken başlanmalı, çalışma devam ederken ve model daha karmaşıklaştıkça tekrar veya yeni veriler toplanmalıdır.

5- Modelin Oluşturulması: Kurulanan modelin bilgisayarda tanımlanması, programlanmasıdır. Nasıl programlanacağı (kodlama) modelin karmaşıklık seviyesine ve modeli oluşturacak olan kişilerin bilgisine bağlıdır. Bu maksatla kullanılabilecek bir çok ticari yazılım programı mevcuttur.

6- Doğrulama (Verification): Hazırlanan program (kod), modellenmek istenen her şeyi doğru şekilde tanımlayıp tanımlamadığı kontrol edilir. Bunun için bir çok standart test prosedürleri vardır. (Modeli istediğimiz gibi oluşturduk mu? Hazırlanan bilgisayar programı doğru mu?) Model doğrulama testlerinden geçemez ise 5.Adıma dönülür.

7- Geçerleme (Validation): Model ile gerçek sistemin davranışlarının uyumlu olup olmadığının kontrolü yapılır. Modelimiz gerçek sistemi yansıtıyor mu ? Model doğrulama testlerinden geçemez ise 3 ve 4.Adım öncesine dönülür.

8- Deney Tasarımı (Design of Experiment): Benzetim modelindeki alternatifler, parametreler, faktör seviyeleri, başlangıç zamanı, tekrar sayıları, simülasyon süresi, vb. hususlar ile ilgili tasarım yapılır.

9- Modelin Çalıştırılması ve Çıktı Analizi: Tüm hazırlıklar yapıldıktan sonra model hazırlanan program üzerinden çalıştırılır ve çıktılar analiz edilir.

10- Daha Fazla Çalıştırma İhtiyacının Sorgulanması: Elde edilen sonuçlara göre, modelin tekrar çalıştırıması gerektiği sorgulanır ve gerekirse "Deney Tasarımı" veya "Modelin Çalıştırılması" adımlarına dönülür.

11- Raporlama ve Sunma: Raporlamadan kasıt, modelin ve ilgili programın aşamalarının dokümante edilmesidir. Hemen hemen her projede, ilk kurgulanan model ve kodlama ile sonuçta elde edilen farklıdır. Aradaki süreçte, ne, ne zaman, neden değişti, ilave edildi, çıkarıldı gibi sorulara cevap verecek şekilde (jurnal gibi) bir doküman hazırlanır. Sunum ise, modelin kullanıcısı olacak uzmanlara, birime veya üst yönetime sunumudur.

12- Uygulama: Proje sonucunda, benzetim modeli ile elde edilen sonuçların uygulamaya konulmasıdır. Bu adım, benzetim modeli projesi dışında gibi görünse de gerektiğinde ileriki çalışmalarda faydalanılması için uygulamadaki olumlu/ olumsuz hususlar da kayıt altına alınabilir.

Sistem Benzetimi dersinde ele alınacak olan benzetim modelleri;

- Kesikli, Statik / Stokastik Benzetim (Monte Carlo Benzetimi) :
  Tur, tekrar sayısı esasına göre işleyen Yazı-Tura, Hedefe Atış yapma benzeri problemler veya sabit aralıklı (günlük, haftalık, aylık) hesaplamalara dayalı Stok Kontrol benzeri modeller, Monte Carlo Benzetimine çok uygundur (Monte Carlo adı, Monaco-Monte Carlo şehrinden gelmektedir).

- Kesikli, Dinamik, Stokastik Benzetim (Kesikli Olay Benzetimi – Discrete Event Simulation) :
  Sistemin girdileri ve işleyişinde olaylar arasında geçen zaman da rassaldır. Sistem durumu, zaman içerisinde gelişen, ortaya çıkan olaylar ile değişir (Acil Servise hastaların gelmesi gibi)

Benzetim Modellemesi için Kullanılabilecek Araçlar

–Genel Maksatlı Programlar (**Microsoft Office Excel**)

–Genel Maksatlı Programlama Dilleri (Python, JAVA, C++, C#, Visual BASIC, vb.)

–Benzetim Maksatlı Özel Programlar (**ARENA**, Automod, Simul8, GPSS, Promodel, vb.)

Sistem Benzetimi dersinde, Excel ve ARENA Programları kullanılacaktır.

Stokastik Benzetim Modeli Genel Akışı

Stokastik benzetim modelleri, doğrusal programlama gibi kesin sonuç veren tekniklerden farklıdır. Çıktılar, benzetim modelinin çalıştırılması sonucunda ortaya çıkan değerlerdir ve modelin her çalıştırılmasında farklı çıktılar elde edilebilir. Bu yüzden, çıktılar gerçek sistemin ilgili performans göstergelerinin tahminleridir.

Bir programda (ARENA, Excel, C, vb.) oluşturulan ve doğrulama, geçerlemesi yapılan bir stokastik benzetim modelinin çalıştırılması bazen saniyeik çok kısa süre alırken bazen de çok uzun süreler (saatler) alabilir. Bu tamamen modelin büyüklüğü, detay seviyesi ile ilgilidir. Bazen, modelin çalışması özellikle yavaşlatılmış şekilde izlenmek istenebilir. Bu sayede, sistemin davranışları gözlenebilir.

Stokastik benzetim modeli çalıştırılması esnasında, program temel olarak aşağıda belirtildiği şekilde bir akış takip eder. Buna stokastik benzetim modeli genel akışı denir. Bu akışta temel olarak 3 ana model/prosedür bulunmaktadır. Sistem Benzetimi dersinde; farklı alanlarda, türlerde ve farklı araçlar ile benzetim modeli örnekleri olsa da, modelin çalışması esnasındaki akış temel olarak şu 3 öğe üzerine kuruludur: "Girdi Modeli", "Mantıksal Model" ve "Çıktı Analizi". ÖNEMLİ !

G	→	U	→		→	X	→		→	Y	→		→	Θ
Rassal Sayı Üretici		**Rassal Sayılar**		Girdi Modeli		**Rassal Değişken**		Mantıksal Model		**Çıktı**		Çıktı Analizi		**Tahmin**
Random Number Generator (RNG)		Random Numbers U (0,1)		Input Model		Random Variable		Logic Model		Output		Output Analysis		Estimate

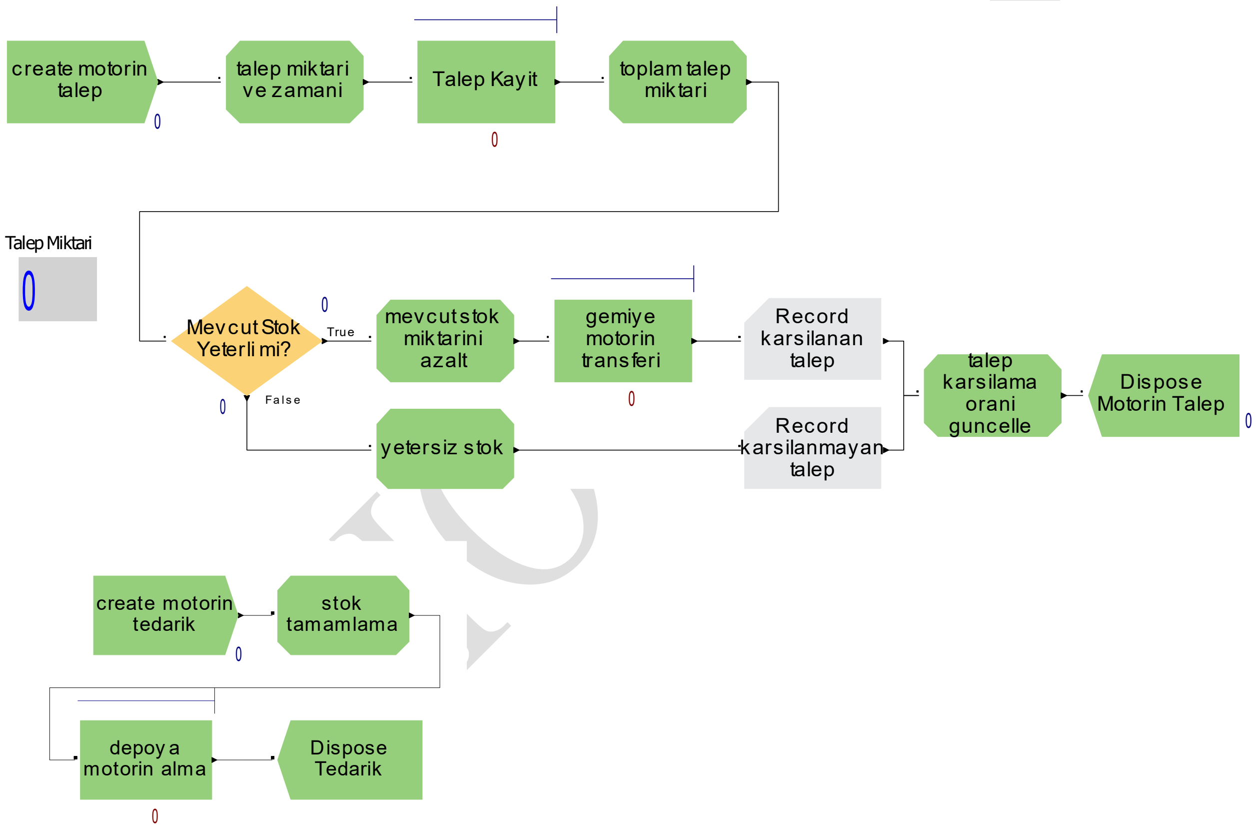
Örnek Benzetim Modelleri

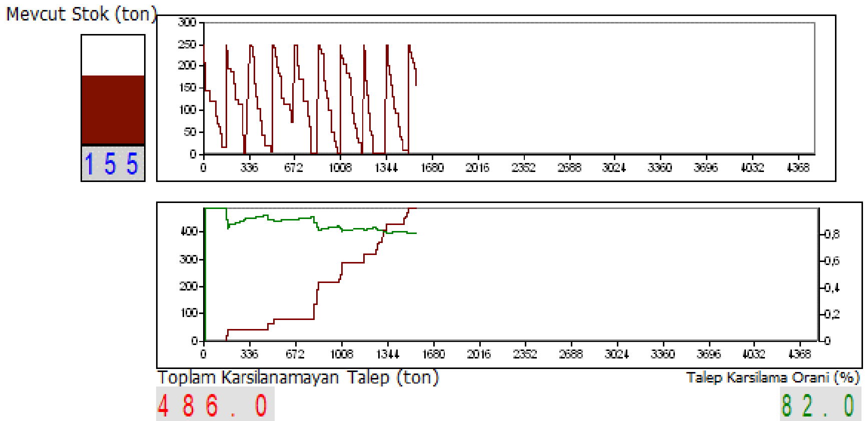
Motorin Deposu Envanter Takip Modeli

Aksaz Deniz Üs K.lığında konuşlu bulunan veya liman ziyaretine gelen gemilerin motorin taleplerini karşılayacak bir motorin deposu kurulması planlanmaktadır. Geçmiş dönem verilerine göre; motorin taleplerinin geliş zamanları ve miktarları rassaldır ve bunların olasılık dağılımları bilinmektedir.

Sahile kurulması planlanan yeni bir motorin deposu için; referans stok seviyesi, kurulumu yapılacak motorin tankı sayısı, dışarıdan depoya motorin tedariki periyodu, depoda görevli personel sayısı ve araç sayısının (kaynaklar) uygun olup olmayacağı analiz edilecektir. Analizde, gemilerin motorin taleplerinin ne oranda karşılanacağı, ne kadar motorin talebinin karşılanamadığı ve talep karşılama süreleri gibi performans göstergelerine dikkat edilecektir (Taleplerin %90 oranında karşılanması, taleplerin en fazla 8 saat içinde karşılanması hedeflenmektedir).

Bunun için bir ARENA programında bir benzetim modeli oluşturulmuştur.





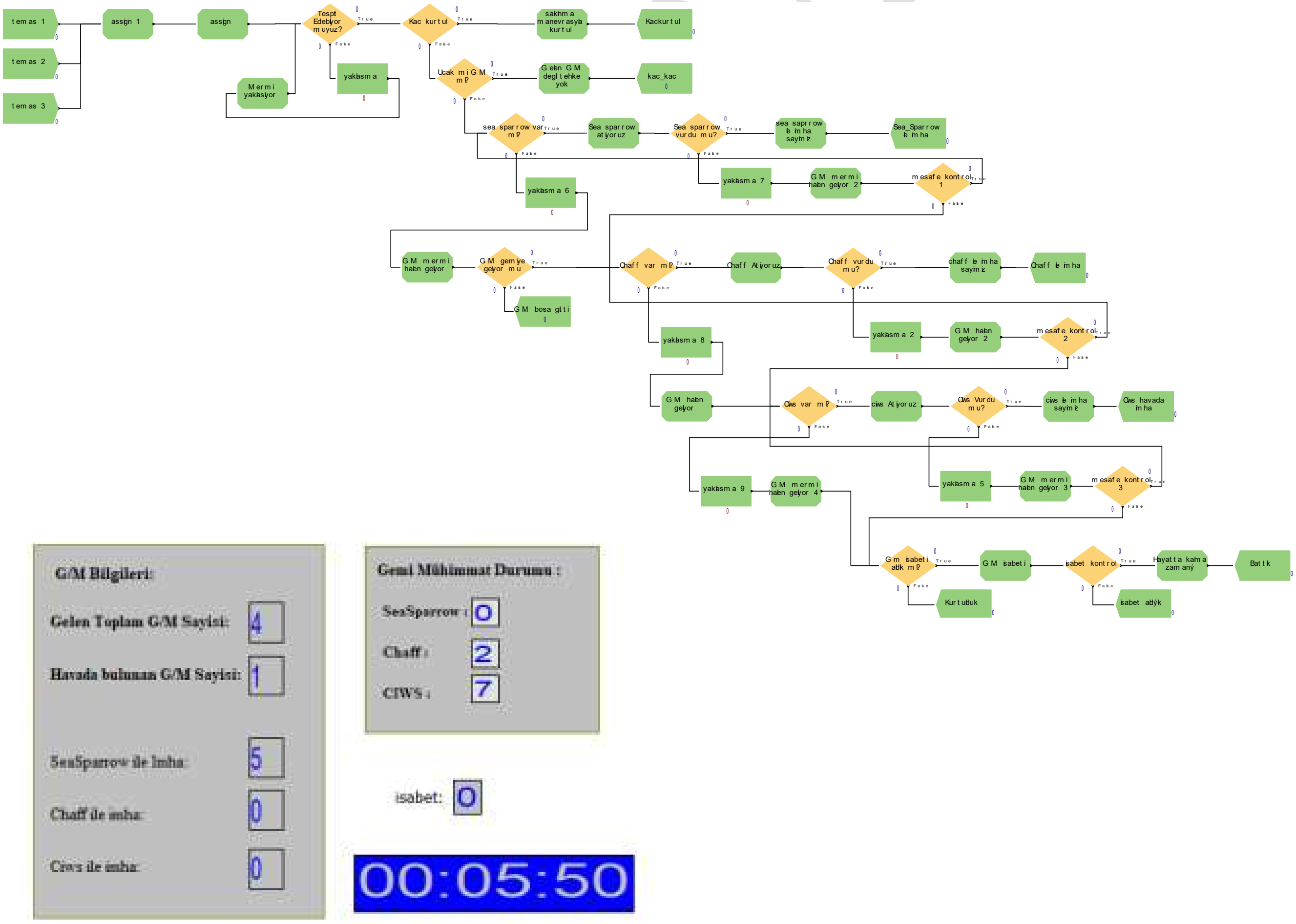
Hava Savunma Harbinde Güdümlü Mermilere Karşı Savunma

Suüstü gemilerine karşı en büyük tehditlerden birisi güdümlü mermilerdir. Bir geminin kendisine tehdit olabilecek güdümlü mermilere karşı her an tetikte olması gerekir.

Kendisine yaklaşmakta olan bir güdümlü mermiden sakınmak için yapılan tedbirlere kısaca GMKS (güdümlü mermiye karşı savunma) denir. Bunun için gemi platformu üzerinde, her biri farklı durumda devreye sokulabilecek silahlar, araçlar mevcuttur.

Bir fırkateynde; orta/uzun menzilden imha için SeaSparrow güdümlü mermisi, daha yakın mesafeler için CHAFF ile aldatma ve daha da yakın mesafeler için nokta savunma sistemi (CIWS : Close-in Weapon System) bulunur.

Çok tehditli bir harekat ortamında bulunan bir fırkateyn için, farklı ve rassal zamanlarda kendisine yönelen hava tehditlerine karşı GMKS tedbirlerini uygulamasını içeren bir benzetim modeli oluşturulmuştur. Bu model ile farklı senaryolar (farklı mühimmat stok durumu ve ihma olasılıkları) için fırkateynin ne kadar süre yara almadan görevine devam edebileceğine dair istatistikler ve olasılık tahminleri analiz edilmiştir.



LHD Gemisi ile Sahile Piyade Nakletme ve İntikal

LHD gemisinden nakliye helikoperleri ile Deniz Piyadeler 20'şerli gruplar halinde sahile nakledilecek, oradan da Zırhlı Amfibi Harekat Araçları (ZAHA) ile iç bölgedeki toplanma mevkisine intikal edilecektir.

Bir helikoperlerin gemiden kalkıp sahile iniş yapmasına kadar geçen süre 10-16 dk arası değişen Düzgün Dağılıma uymaktadır. Arazi koşullarından dolayı, zırhlı araçla toplanma bölgesine intikal süresi rassal olarak değişmektedir ve ortalaması 50 dk, std sapması 10 dk olan Normal Dağılıma uymaktadır.

Ayrıca, toplanma bölgesine intikal esnasında arazideki 4 ayrı geçitte, birbirinden bağımsız olarak pusu ihtimali vardır (düşman birliklerinin bölgedeki dumuna göre bir veya birkaçında veya hepsinde birden pusu olabilir yada hiç birinde de olmayablilir). Herhangi bir geçitte pusu olma olasılığı 0.3 olarak kabul edilmektedir. Pusu kurulmuş olması durumunda, zırhlı araç bir süre durmakta ve üzerinde bulunan silahları kullanarak atış yapmaktadır (Pusuda personel zayiat verilmediği, sadece intikal süresinde bir gecikme yaşanacağı kabul edilecektir). Bir pusunun neden olduğu gecikme sabit 20 dakikadır.

Taburdaki her 20'şerli grubun ayrı ayrı birbirinden bağımsız olarak toplanma bölgesine ulaşma süresi için istatistik ve olasılık tahminlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun için bir benzetim modeli oluşturulmuştur.

Not: Her bir 20'şerli grup için tahsis edilmiş helikopter ve zırhlı araç vardır. Hiç bir grup helikopter veya zırhlı aracın hazır olamasını beklemek durumunda kalmamaktadır (Kuyruk problemi değil).

Grup	Helo İntikal Süresi	Araç İntikal Süresi	u	Pusu Sayısı	Pusu Nedeniyle İlave Süre	Toplam Süre	(Top.Süre < 90) ?
1	13.31	50.56	0.18	0	0	63.87	DOĞRU
2	12.05	68.15	0.48	1	20	100.20	YANLIŞ
3	10.17	39.36	0.47	1	20	69.53	DOĞRU
4	14.31	39.94	0.52	1	20	74.25	DOĞRU
5	13.95	48.03	0.68	2	40	101.98	YANLIŞ
6	10.89	64.87	0.56	1	20	95.76	YANLIŞ
7	14.22	50.41	0.31	1	20	84.63	DOĞRU
8	11.71	50.10	0.42	1	20	81.82	DOĞRU
9	11.45	55.22	0.99	3	60	126.67	YANLIŞ
10	11.57	48.30	0.60	1	20	79.86	DOĞRU

Her satır, ayrı bir grubu (ayrı bir deneme, terkar) göstermektedir. Toplam süre sütunu; o satırdaki grubun gemiden ayrılışından toplanma mevkisine ulaşmasında kadar geçen süreyi ifade etmektedir.

Toplam Süre:		
Ortalaması	87.9	dakika
Std.Sapması	18.6	dakika
Minimum	63.9	dakika
Maksimum	126.7	dakika
Medyan	83.2	dakika
P(Toplam Süre < 90)	0.60	

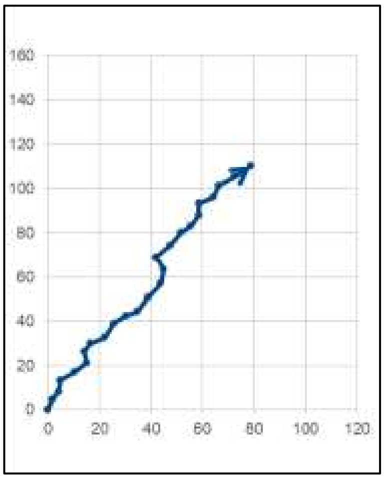
Denizde Arama Kurtarma için Can Salı Hareketi ve Menzil Tahmini (Monte Carlo Benzetimi)

Açık denizde, bir ticaret gemisi batmadan önce tek bir cansalını denize indirmiştir. Yardım çağrısı bildirmiş ancak can salı rüzgarın yönü ve şiddetine göre sürükleniyor. Bölgedeki rüzgar ve akıntı için olasılık dağılımları biliniyor.

rüzgar hızı (mph)	min	maks
Düzgün Dağ (uniform)	4	8
rüzgar yönü (degree)	ortalama	stdsap
Normal Dağılım	60	30

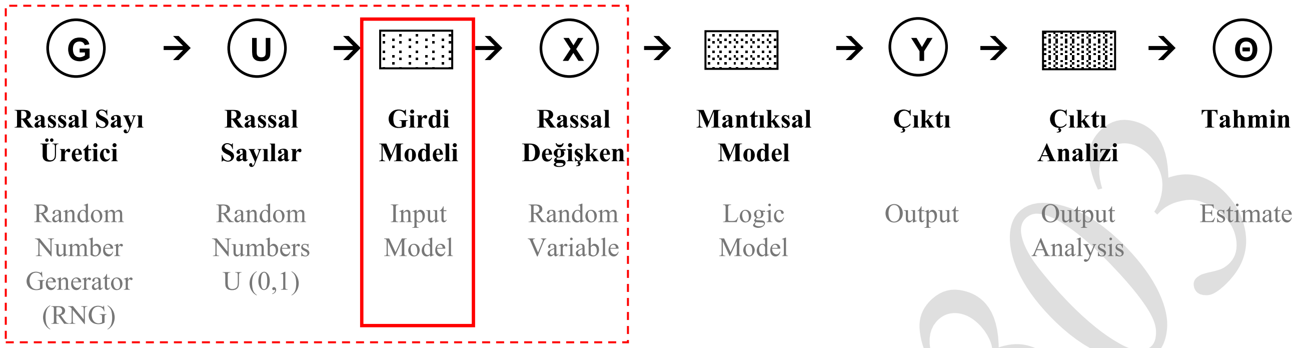
Rüzgar yönü, rüzgarın hangi dereceye doğru estiği olarak verilmiştir (örneğin; rüzgâr yönü 45 derece ise kuzey doğuya doğru esiyor demektir). 12 saat sonunda, cansalının ilk konumuna ne kadar uzakta olabileceğinin dağılımı tahmin edilmek isteniyor. (İlk konumdan mesafe en az, en çok, ortalama ne kadar, standart sapması, güven aralığı ne ?)

t (saat)	x1	y1	rüzgar hızı (mph)	Rüzgar Yönü (derece)	İlk Mevkiye Mesafe (mil)
0	0	0	5.1	71.2	0.00
1	1.63	4.79	4.3	55.4	5.06
2	4.10	8.36	5.1	82.4	9.31
3	4.77	13.37	6.5	33.3	14.20
4	10.22	16.95	6.6	41.3	19.79
5	15.16	21.29	5.0	101.8	26.14
6	14.13	26.21	4.4	59.1	29.78
7	16.40	30.00	6.4	25.0	34.19
8	22.22	32.71	7.2	62.3	39.54
9	25.58	39.12	5.8	35.1	46.74
10	30.37	42.48	4.9	22.3	52.22
11	34.91	44.35	7.6	59.3	56.44
12	38.82	50.93	7.9	52.0	64.03



Ödev Çalışması – 1.3 : İnternette bilgileri şu verilen makaleyi bulun ve okuyun (researchgate.net sitesinde tam makaleye ücretsiz erişim vardır): *"Some Myths and Common Errors In Simulation Experiments", 2001, Winter Simulation Conference,* ***Bruce W. Schmeiser***

2. GİRDİ MODELİ (INPUT MODEL)



Girdi modeli, benzetim modeline girdi olarak alınacak değişkenlerin neler olduğunu ve rassal değişkenler ise hangi olasılık dağılımına uygun olduğu, benzetim içerisinde nasıl üretileceğini açıklar ve istenilen bu değişkenleri üretir.

Bunun için, öncelikle, benzetimde girdi olarak kullanılacak rassal ve rassal olmayan değişken ve parametreler belirlenmelidir. Bu aşamada belirlenen değişken ve ilgili fonksiyonlar, bir sonraki aşamadaki mantıksal modeli doğrudan etkileyeceğinden, değişkenlerin belirlenmesinde modelde kurgulanacak olan olay, faaliyet, karar vb. unsurlar dikkate alınmalıdır.

Benzetim modeli, mevcut veya planlanan bir sistemi temsil edeceğinden, iyi bir girdi modelinde sisteme ait girdi değişkenlerinin tam ve doğru olarak tanımlanması gerekir. Ancak, bu sistemdeki tüm unsurların birer değişken olarak benzetime dâhil edilmesi demek değildir. Hangi değişkenlerin benzetime dâhil edileceği ile ilgili karar bir mühendislik kararıdır ve bu karar benzetim modeli çalışması sırasında ihitiyaç duydukça güncellenebilir (yeni bir değişken ekleme, mevcut bir değişkeni silme vb.).

Esas olan, modelin istenilen amaca hizmet edecek en sade ve öz değişkenler ile kurulmasıdır. Çok fazla detay (ve buna bağlı olarak çok fazla değişken) içeren model her zaman iyi model değildir. Bazı detaylar ve bunların getirdiği değişkenler benzetime çok büyük katkı sağlamayacağı gibi modelin kurulmasını ve çalıştırılmasını karmaşık hale getirir (örneğin bir fabrikadaki üretim hattı benzetim modelinde, hava durumu neredeyse tamamen etkisiz bir faktör olarak alınabilir. Makineleri kullanacak işçilerin yaş, tecrübe gibi değişkenler de dikkate alınmayabilir. Bunun yanında, makikeler arası mesafeler ilk aşamada göz ardı edilebilirken daha doğru bir modelleme için dikkate alınması faydalı olacaktır. Ancak, üretilecek ürünlerin işlem süreleri mutlaka dikkate alınması ve dahil edilmesi gereken bir değişkendir).

Değişkenlerin yanında, model kurgulanırken dâhil edilmeyen veya sabit kabul edilen sistem unsurların belirtilmesinde fayda vardır (örn. alışveriş merkezine gelen müşteri sayılarının haftanın gününe göre değişmediği kabul edilmiştir, arıza onarımı yapan işçiler arasında fark olmadığı kabul edilmiştir, belirli bir radar menzili içerisinde bulunan bir hedefin mutlaka tespit edileceği kabul edilmiştir, vb. şekilde bunların not edilmesi iyi bir uygulamadır).

Benzetim modeli yapılan sistemler genellikle bir ya da daha fazla rassallık kaynağına sahiptirler. Zaten, benzetim modellemesi, birbiri ile etkileşimde olan bir çok rassal değişkenin bulunduğu sistemlerin analitik çözümlemesinin zor olduğu durumlar için uygundur.

Benzetim modelinde rassal değişken olarak yer alınabilecek değişkenlere örnekler aşağıda verilmiştir:

- Eş olaylar arası geçen süreler (olay: bir sipariş gelmesi, bir müşteri gelmesi, bir arıza ortaya çıkması..)
- İşlem, faaliyet süreleri (örn. montaj süresi, imalat süresi, hizmet süresi, arıza onarım süresi..)
- Miktarlar (talep miktarı, elektrik kullanım miktarı, web sitesine giren kişi sayısı, isabetli atış sayısı vb.)
- Sistemdeki varlıkların özellikleri (araç tipi, müşteri yaşı, yaşadığı şehir, hastanın aciliyet derecesi vb.)
- Olasılıksal bazı olay veya kararlar (kalite kontrol sonunda hata bulunması, yağmur yağması, vb.)

Görlüdüğü gibi, benzetim modelinde yer alan değişkenler farklı niteliklere sahiptir:

- Sürekli (continuous) değişken : örneğin bir akaryakıt istasyonuna gelen bir arabanın alacağı Lt biriminden yakıt miktarı
- Kesikli (discrete) değiken : örneğin akaryakıt istasyonuna bir saate gelen araç sayısı (adet)
- Nominal (kategorik) değişken : akaryakıt istasyonuna gelen bir arabanın kullandığı yakıt tipi (benzin, motorin). Nominal değişkenler benzetim modelinde sayısal olarak temsil edilebilir. Örneğin; benzinli araç ise 0, motorinli araç ise 1 değerini kullanmak mümkündür ve bir çok yazılımda bu gereklidir. Ancak, nominal değişkenlerin sayısal değerleri büyüklük küçüklük ifade etmez.

Bir benzetim modelinde birçok değişken tanımlamak mümkündür ve bu değişkenlerin bazıları girdi değişkeni de olmayabilir. Benzetimin çalışması esnasında sistemdeki süreçler arasında hesaplanan veya benzetim modeli sonucunda ortaya çıkacak değişkenler bağımlı değişkenlerdir. Örneğin, bir kuyruk benzetim modelinde; ortalama kuyrukta bekleme süresi, azami kuyruk uzunluğu (kişi sayısı) de birer değişkendir ancak girdi modeli kapsamındaki değişkenler değildirler. Bu tip bağımlı değişkenler girdi modeli içerisinde üretilmezler, benzetim esnasında veya sonucunda belirli değerler alırlar. Bu nedenle, girdi modelinde tanımlanmasına gerek yoktur. Benzetim modelinde, hangi değişkenkerin girdi modeli kapsamında olduğu hangi değişkenlerin çıktı değişkeni olduğunun iyi ayırt edilmesi önemlidir !

Girdi modelinde tanımlanacak ve üretilecek olan değişkenler genellikle başka bir değişkene bağımlı değildir (bağımsız değişkendir) ancak bazı girdi değişkenleri diğer bir değişkene kısmen bağlı olabilir. Örneğin, benzetim modelimizde açık denizde seyir yapan bir gemi var ise;

- Her hangi bir t anında geminin rotası (*c*) 0-360^0 aralığında bir sürekli değişken,
- Geminin sürati (s), 0-35 Deniz Mili arasında değişen bir sürekli değişken,
- Geminin bulunduğu mevkideki derinlik (*d*) 10-2000 m arasında değerler alabilen sürekli değişken,
- Bölgedeki deniz durumu (*x*) ise; 1-7 aralığında değerler alabilen kesikli rassal değişken olabilir.

Rassal değişkenler *c*, *d* ve *x* birbirinden bağımsız olarak düşünülebilir (birbirini etkilemez). Aslında, derinlik ve deniz durumu arasında kısmen bir ilişki kurulabilmesi mümkündür. Genelikle, derinliğin fazla olduğu açık denizde, kötü hava şartlarına rastlamak daha muhtemeldir. Ancak, bu ilişki göz ardı edilebilir. Bunun yanında, geminin sürati teknik olarak 0 ila 35 knots arası değişebilen bir rassal değişken iken, yere göre süratinin (speed over ground-SOG) deniz dururuna göre belirli kısıtları olabileceği dikkate alınabilir (Deniz durumu kötüleştikçe, geminin yere göre sürati de değişecektir). Bu durumda, SOG rassal değişkendir ancak tamamen bağımsız değil, deniz durumuna bağlı bir rassal değişken olarak belirtilebilir. Ancak, bu da çoğu benzetim modelinde göz ardı edilebilir. Bu tamamen benzetim modelinin ne kadar detaylı yapıldığına, benzetimin amaçlarına bağlıdır.

Girdi değişkenleri arasında bağımlılık durumu, farklı bir açıdan, şu örnekle de gösterilebilir.

x rassal değişkeni herhangi bir günde havaalanına iniş yapan uçak sayısı,

y rassal değişkeni havaalanına gelen uçaklardan bir gün içerisinde yakıt ikmali yapan uçak sayısı ve,

ve *x* poisson dağılımına, *y* binom dağılımına uyuyor ise,

x rassal değişkeni bağımsız olarak üretilebilir iken *y* rassal değişkeni *x* değişkenine bağımlı olacaktır:

x ~ poisson (μ) ve y ~ Binom (*x*, *p*).

Benzetimde kullanılacak, rassal olmayan (deterministik) diğer değişken ve parametreler de benzetim modelinin girdileridir ve onlar da benzetim modellemesi çalışmasının bu aşamasında tanımlanmalıdır. Örneğin; bir geminin azami sürati 32 knots, bir Banka günde 8 saat çalışmakta, bir depoda ürünlerin yerleştirileceği rafların kapasitesi 100 parça, bir fabrikada kullanılan elektriğin birim maliyeti 12 TL/watt, vb. değişkenler benzetim modelinde kullanılması gerekli olabilir.

Gerekirse, belirlenen değişkenler ve faraziyeler modelleme çalışması içerisinde ihtiyaç duyuldukça güncellenir (eklenir, çıkarılır, değeri değiştirilir). Farklı değişken değerleri ile farklı benzetimler ayrı ayrı çalıştırılarak sonuçları karşılaştırılabilir. Bu hususta, Deney Tasarımı (Design of Experiment) ilkelerinden faydalanılmalıdır. Bu konuya çıktı analizinde ayrıca değinilecektir.

Benzetimde kullanılacak rassal değişkenler belirlendikten sonra, bunların hangi olasılık dağılımına uygun olduğunu tanımlanmalıdır. Eğer ilgili olasılık dağılım fonksiyonu biliniyor ise bu tanımlama doğrudan benzetim modeline bu dağılımın ve ilgili parametrelerini belirtmekten ibarettir. Girdi modelinin, bu fonksiyona göre rassal değişken üretebilmesi gerekir.

Örneğin, benzetim modelini yapacağımız sistem online bir e-ticaret uygulaması (web ve mobil) olsun. Bu uygulamaya giriş yapan benzetimdeki müşterilerin (varlıkların) günün hangi zamanında (sa:dk) giriş yapacağı, giren bir müşterinin yaşı, cinsiyeti, sitede ne kadar zaman geçireceği ne kadar (TL) bir alışveriş yapacağı, ödeme için işlem süresi vb. unsurlar benzetim için rassal değişken olarak belirlenebilir. Uygulamaya giriş için kullanılan cihaz veya işletim sistemi ile kişinin yaşadığı şehir de birer değişkendir ancak benzetimde dikkate alınmayabilir. Buna göre, benzetim modelinde, sisteme giren her kişi için ayrı ayrı gelişler arası süre, yaş, cinsiyet, sitede geçen süre, alışveriş yapanlar için harcanan miktar ve ödeme işlemi süresi rassal değişkenleri üretilir. Sistemin içerisinde alışveriş sürecinin nasıl işlediği (benzetimin mantığı) girdi modelinin dışındadır.

RASSAL DEĞİŞKEN ÜRETİMİ (Random variable / variate generation)

Benzetim modeli çalıştırıldığında, model içinde kullanmak üzere belirlediğimiz rassal değişkenler için değerlere ihtiyacımız olacaktır. Örneğin, *x* rassal değişkeni banjaya gelen bir müşterinin işlem süresi olarak tanımlanmış ise, benzetim modeli çalışırken sisteme gelecek her bir müşteri için ayrı ayrı *x* rassal değişkeni değerleri üretilmesi gerekir. (1.müşteri işlem süresi = 2 dk, 2.müşteri işlem üsresi=1.5 dk vb) Yani, benzetimde dinamik olarak, modelin ihtiyaç duyduğu rassal değişkenler değer olarak üretilir.

Bu açıdan, benzetimde kullanılan bir *x* rassal değişkeninin farklı müşteriler için alacağı değerler bir sayı dizisi (array) olarak da görülebilir. Örneğin, işlem süresi rassal değişkeni *x*'in benzetim içerisinde çeşitli defalar üretilmesi sonucu aldığı değerler (dakika olarak) : *X* = [2 , 1.5 , 3.2 , 4 , 2, ……]

Eğer bir y rassal değişkeni, bankaya ardarda gelen iki müşteri arasında geçen süre olarak tanımlanırsa, Y=[1.2 , 1.3 , 1.1 , …….] sayı dizisi şu şekilde açıklanabilir:

1. müşterinin geliş zamanı benzetim başlangıcından 1.2 dk. sonra,
2. müşterinin geliş zamanı 1.müşterinin geliş zamanından 1.3 dk. sonra ve
3. müşterinin geliş zamanı 2.müşterinin geliş zamanından 1.1 dk. sonra olacaktır.

Müşteriler gerçek hayatta tatbikî her zaman sabit olarak bu zamanlarda gelecek diye bir kural yoktur. Bize verilen olasılık dağılım fonksiyonuna göre, benzetimde kullanılmak üzere, rastgele sıralı 3 müşterinin geliş zamanlarına ihtiyaç duyduğumuz için bu şekilde rassal değerler kullanıyoruz. Benzetim modeli her çalıştırıldığında bu değerler farklı ancak mutlaka bize verilen dağılım fonksiyonuna uygun olacaktır.

Bir rassal değişkeni ifade etmenin yöntemi bu rassal değişkenin olasılık dağılımını belitmektir. Mesela düzgün dağılım, belirli alt ve üst sınırlar arasında tam bir belirsizliği ifade eder. Ancak, gerçek sistemlerin olasılıklı stokastik davranışı (rassallığı) her zaman düzgün (uniform) dağılımla açıklanamaz. Bir sistem içinde karşılaşılan stokastik işlemler diğer teorik dağılımlarla da (üstel, normal, gamma v.b.) açıklanabilir.

Ancak, her olasılık dağılımın birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonunun (cdf) mutlaka 0-1 arası değer aldığını biliyoruz. Bu gerçek bize, düzgün dağılıma uygun yani [0,1] aralığında elde edilen rassal sayılar kullanarak, bunların belirli bir olasılık dağılıma uyan rassal değişkene dönüştürülmesinde kullanılabilir. Bu işlem, ilgili olasılık dağılımından örneklem almaktır ve bu işlem için, olasılık dağılımının parametrelerinin bilinmesi gerekir.

Yukarıda belirtilen mantık, Ters Dönüşüm Yöntemi (Inverse Transformation Method) adı verilen bir yöntemdir. Kabul-Ret Yöntemi (acceptance rejection method) adı verilen bir başka yöntem de mevcuttur ancak bu ders kapsamında detayları ele alınmayacaktır.

Ters Dönüşüm Yöntemi ile rassal değişken üretimi için (yani bir rassal değişkenin alacağı bir değerin bulunması için);

- Bu rassal değişkenin olasılık dağılım fonksiyonu ve
- [0,1] arası düzgün dağılıma uyan bir rassal sayı (*u*) kullanılır.

Ters Dönüşüm yönteminin esaslarını öğrenmeden önce Rassal Sayı üretiminden bahsedilecek, daha sonra bu rassal sayıları kullanarak nasıl rassal değişken üretileceği anlatılacaktır.

Rassal Sayılar (Random Numbers) ve Rassal Sayı Üreticiler (Random Number Generators)

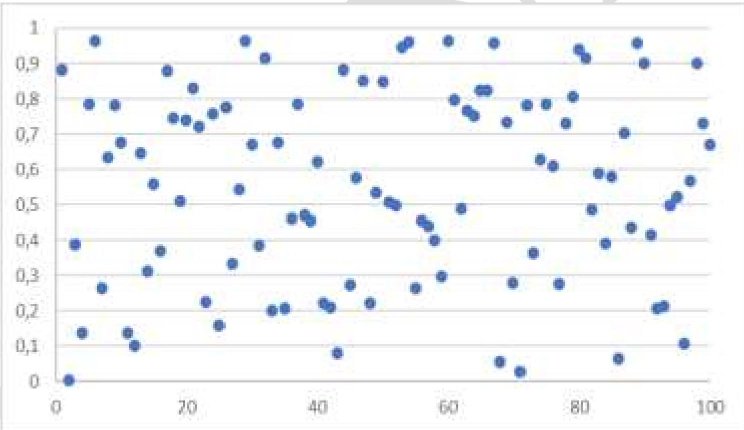
Sistem benzetimi modelinde, "*rassal sayı*" ve "*rassal değişken*" arasındaki farkın bilinmesi önemlidir. Rassal sayılar, herhangi bir değişkeni ifade etmeksizin, tamamen rastgele elde edilen değerlerdir.

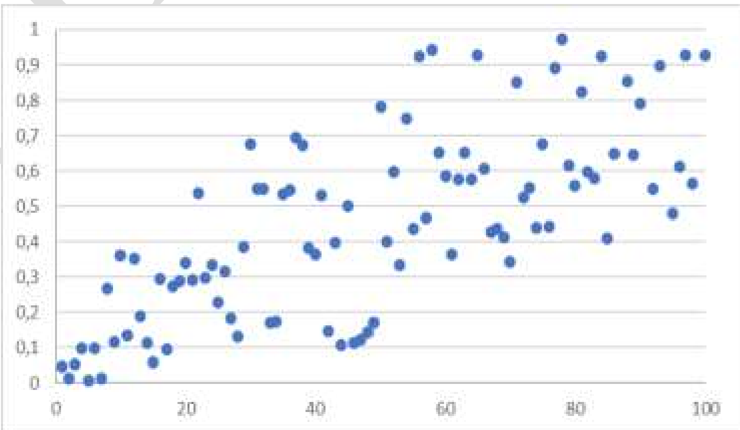
Bir rassal değişkenin "Birikimli Dağılım Fonksiyonu-BDF" (Cumulative Distribuiton Function-cdf), [0-1] arası değer alabildiğinden dolayı, benzetim modelinde kullanılacak rassal sayıların da 0-1 arası değer alması istenir (Rassal değişkenlerin değer aralığı konusunda bir genelleme yapılamaz).

Benzetim modelinde kullanılacak olan rassal sayılar iki temel niteliğe sahip olmalıdır:

- [0,1] arası düzgün dağılıma uygun olma. $u \sim U(0,1)$ (Uniformity)
- Üretilen dizi içerisinde birbirlerinden bağımsız olması (bağımsızlık) (Independence)

Yani, n adet rassal sayı üretildiğinde, bu sayıların 0,1 aralığına dağılması ve aralarında bir korelasyon olmaması arzu edilir. Tabi, bunun tam olarak sağlanması zordur. Ticari benzetim yazılımları ve Excel programında rassal sayı üretici için gerekli altyapı vardır ve ürettikleri rassal sayılar için yukarıda verilen nitelikleri sağlamakta oldukça iyidirler.





Yukarıdaki grafiklerde, ayrı ayrı 100'er adet üretilen rassal sayıların dağılımlarını göstermektedir (Yatay eksen üretilen rassal sayının sıra numarasını, dikey eksen ise rassal sayının değerini göstermektedir). Soldaki dağılım daha uygun görünürken sağdaki dağılım 0-1 aralığında olsa da rassal sayılar arasında tam bir bağımsızlık olduğunu söylemek güçtür ve kullanılması güvenilir değildir.

Rassal Sayı Üretici olarak adlandırılan aslen bir fonksiyondur ve temel olarak şöyle ifade edilebilir:

$$\boldsymbol{X_{i+1} = (a \,.\, X_i + c) \bmod m}$$
$$\boldsymbol{u_{i+1} = X_{i+1} / m}$$

Bu denklemlerde; a, c ve m rassal sayı üreticinin parametreleri, X değişken ve u rassal sayıdır. Her bir rassal sayı bir öncekine göre değer almaktadır. X_0 rassal sayı tohumu (random number seed) olarak ifade edilir ve bu da rassal sayı üreticinin bir girdi parametresidir.

Örn: Bir Rassal Sayı Üreticinin parametreleri a=17, c=43, m=100 olarak belirlenmiş ve X_0 = 27 ise,

$X_1 = (17 \,.\, 27 + 43) \text{ mod } 100 = 2 \qquad u_1 = 0{,}02$

$X_2 = (17 \,.\, 2 + 43) \text{ mod } 100 = 77 \qquad u_2 = 0{,}77$

$X_3 = (17 \,.\, 77 + 43) \text{ mo } 100 = 52 \qquad u_3 = 0{,}52$

$X_4 = (17 \,.\, 52 + 43) \text{ mod } 100 = 27 \qquad u_4 = 0{,}27$

$X_5 = (17 \,.\, 27 + 43) \text{ mod } 100 = 2 \qquad u_5 = 0{,}02$

$X_6 = (17 \,.\, 2 + 43) \text{ mod } 100 = 77 \qquad u_6 = 0{,}77$

$X_7 = (17 \,.\, 77 + 43) \text{ mod } 100 = 52 \qquad u_7 = 0{,}52$

$X_8 = (17 \,.\, 52 + 43) \text{ mod } 100 = 27 \qquad u_8 = 0{,}27$

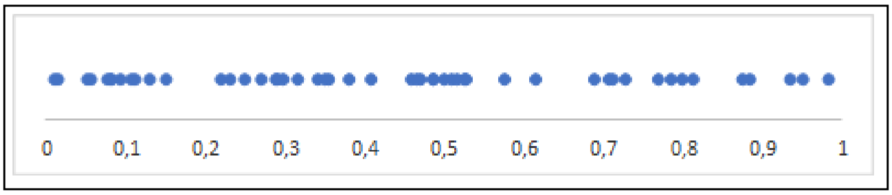
Yukarıda verilen örnekte, rassal sayı üreticinin periyodu 5'tir. Yani, 5 rassal sayada bir rassal sayı sırası tekrar etmektedir. Bu rassal sayı üretici, tamamen örnek maksatlı verilmiştir, bu kadar düşük periyota sahip bir rassal sayı üreticinin kullanılması hiç güvenilir değildir. Bu bakımdan, iyi bir rassal sayı üretici değildir diyebiliriz.

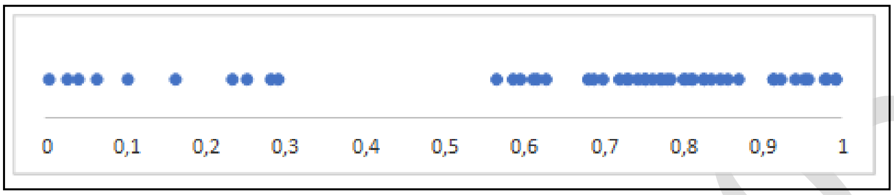
Benzetim modelinde kullanılacak rassal sayıların istenilen niteliklere sahip olması için, Rassal Sayı Üreticinin 2 temel niteliğe sahip olması gerekir:

1- Maksimum Yoğunluk

2- Maksimum Periyot

Maksimum yoğunluk, üretilen rassal sayıların belirli bir yerde toplanmaması, gruplar arasında belirgin geniş boşluklar bulunmaması, 0-1 aralığına yayılmasıdır.





Yukarıdaki grafiklerde, iki farklı rassal sayı üretici ile ayrı ayrı 50'şer adet üretilen rassal sayıların dağılımlarını göstermektedir. İlk dağılım maksimum yoğunluk bakımından daha uygun görünürken ikinci dağılım bu özelliğe sahip olmadığı izlenimini vermektedir.

Maksimum Periyot ise; tekrar aynı rassal sayı sıralaması oluşana kadar geçecek tekrar sayısının mümkün olduğunca büyük olmasıdır. (Yukarıda verilen örnekte, rassal sayı üreticinin periyodu çok düşüktür. Bu bakımdan iyi bir rassal sayı üretici değildir diyebiliriz). İyi bir rassal sayı üreticinin periyodu en az milyon düzeyinde olmalıdır.

Rassal Sayı Üreticin sahip olması istenen bu iki özelliğin sağlanması, a, c ve m parametrelerinin seçimine bağlıdır. Ticari benzetim yazılım programları (ARENA, AUTOMOD, Simul8, vb.) ile Microsoft Office Excel Programında rassal sayı üretimi için çok yüksek periyot uzunluğuna sahip fonksiyonlar vardır ve bu yazılımlar büyük miktarlı sayı dizileri için bağımsızlık ve düzgün dağılıma uygunluk açısından yeterli seviyede güvenilir kabul edilmektedir.

Bu yazılımlarda, ayrıca rassal sayı tohumu (seed) kullanıcı tarafından girilebilmektedir. Bu, önemli ve faydalıdır. (Bu hususa çıktı analizi bölümünde ayrıca değinilecektir). Kullanıcı tarafından belirtilmedikçe, yazılımlar genellikle anlık tarih saat dakika saniye değerlerine göre uzun bir tohum belirler.

Rassal Sayının olasılık dağılım fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı yukarıda gösterilmektedir.
Hatırlatma: [a,b] arasında tanımlı bir düzgün dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonu : *f(x) = 1/(b-a).*

Rassal sayılardan oluşan sayı dizileri, birbirinden bağımsız ve ortaya çıkma olasılıkları eşit olması gereken sayıların oluşturduğu dizilerdir. Bu sayı dizileri eşit olasılık gereği, düzgün (uniform) bir olasılık dağılımı gösterir. Bu nedenle benzetim modellerinde rassal sayı üretici mekanizma rassal sayıların bu özelliklerini göz önünde bulundurmalıdır.

Örnek bir rassal sayı dizisi: 0.122 0.214 0.045 0.656 0.891 0.332 0.556 0.712

Ancak, belirli işlemlere göre hesaplanan sayıların gerçekten de rassal olduğu söylenemez. Çünkü yapılan işlemler daha önceden bellidir ve başlangıç değeri (kök) de bilindiğinde üretilecek sayılar da önceden bilinebilir. Bu sebepten, üretilen bir rassal sayı dizisi kendilerinden aranan nitelikleri karşılıyorsa (yani istatistiksel olarak birbirinden bağımsız ve düzgün dağılım gösteriyorlarsa), bu sayı dizisi rassal bir dizi olarak kabul edilebilir. Bu rassal sayılara sözde ya da sahte rassal (pseudo random) sayılar da denir.

Rassal sayıların, belirtilen iki niteliği (düzgün dağılım, bağımsızlık) karşılayıp karşılamadıkları belirli istatistik testleri ile kontrol edilebilir.

Düzgün dağılıma uygunluk için, Ki-Kare (Chi-Square $\chi 2$) veya Kolmogrov-Simirnov Testi.

Düzgün dağılıma uygunluk için yapılan testlere genel olarak Frekans Testi de denilir. Bu testler sadece düzgün dağılım değil, eldeki verilerin herhangi başka bir dağılıma uygunluğunu da test etmek için kullanılabilir.

Tabi ki, bu testler istatistiki test oldukları, teste sokulan veriler de birer örneklem seti olduğu için, elde edilen sonuç belirli bir güvenilirlik seviyesi ile popülasyon hakkında çıkarımdır (inference). Teste tabi tutulacak veri miktarı (örneklem büyüklüğü) ne kadar fazla olursa o kadar iyidir.

Özellikle örneklem büyüklüğü düşük ise (mesela < 20), bu testler düzgün dağılıma uygun sonuçlar verebilir ama bu yanıltıcı olabilir. Dikkat!! Bu konuya ve testlerin nasıl yapıldığına olasılık girdi dağılımının belirlenmesi bölümünde ayrıca değinilecektir.

Ki-kare Testi ve Kolmograv-Simirnov Testi ile ilgili daha detaylı bilgi ve örnek için: *Discrete-Event System Simulation, Jerry Banks*, sayfa 284-289.

Bağımsızlık durumunun kontrolü için, Otokorelasyon (Ardışık Bağımlılık) Testi.

Korelasyon, iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin yönünü ve gücünü ölçen bir göstergedir. Türkçe olarak "*ilinti katsayısı*" olarak da kullanılmaktadır. Korelasyon [-1,1] arası değer alan bir katsayıdır (0 ise hiçbir ilişki yok) ve genellikle ρ (rho) sembolü ile gösterilir.

Ancak bu katsayıyı dikkate alırken, değişkenlerin birlikte hareketini göz önüne alır ve elde edilen bulgular aslında birer sonuçtur. Yani, korelasyon bir ilişkinin neden gerçekleştiğini göstermez, bu yüzden "korelasyon nedensellik demek değildir".

Değişkenler arasında nedensel bir ilişki olabilir, korelasyon katsayısı bunun için küçük bir ipucu sunabilir ancak korelasyon analizi için şu ünlü genelleme söylenir: "Korelasyon her zaman nedensellik göstermez ancak her nedensellik bir korelasyon barındırabilir."

Otokorelasyon ise; sıralı, ardışık bir sayı dizisinde yer alan sayılar arasında belirli bir bağ/ ilişki olup olmadığıdır. Üretilen rassal sayılar arasında da böyle bir ilişki olması arzu edilmez. Öncelikle, sıralı rassal sayılar bir grafiğe dökülerek, bariz olarak görülen bir trend, döngü, tekrarlama vb. durum olup olmadığına bakılabilir.

Otokorelasyon testinde, sıralı rassal sayıların her biri için belirli sıradaki diğer sayılar ile arasındaki korelasyona bakılır. Hangi sıradaki sayılara bakılacağı (periyot) test için bir parametredir, farklı parametre değerleri ile sonuçlara bakılabilir.

Rassal sayı dizilerinde otokorelasyonun 0 (sıfır)'a yakın olması arzu edilir.

Otokorelasyon testi ile ilgili daha detaylı bilgi ve örnek bir test için; *Discrete-Event System Simulation, Jerry Banks*, sayfa 289-291.

Ters Dönüşüm Yöntemi ile Rassal Değişken Üretimi

Ters Dönüşüm Yönteminde, "birikimli olasılık dağılım fonksiyonu" ve "rassal sayılar" kullanılır.

Hatırlatma :

Birikimli Dağılım Fonksiyonu (Cumulative Distribuiton Function - cdf), olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak elde edilebilir.

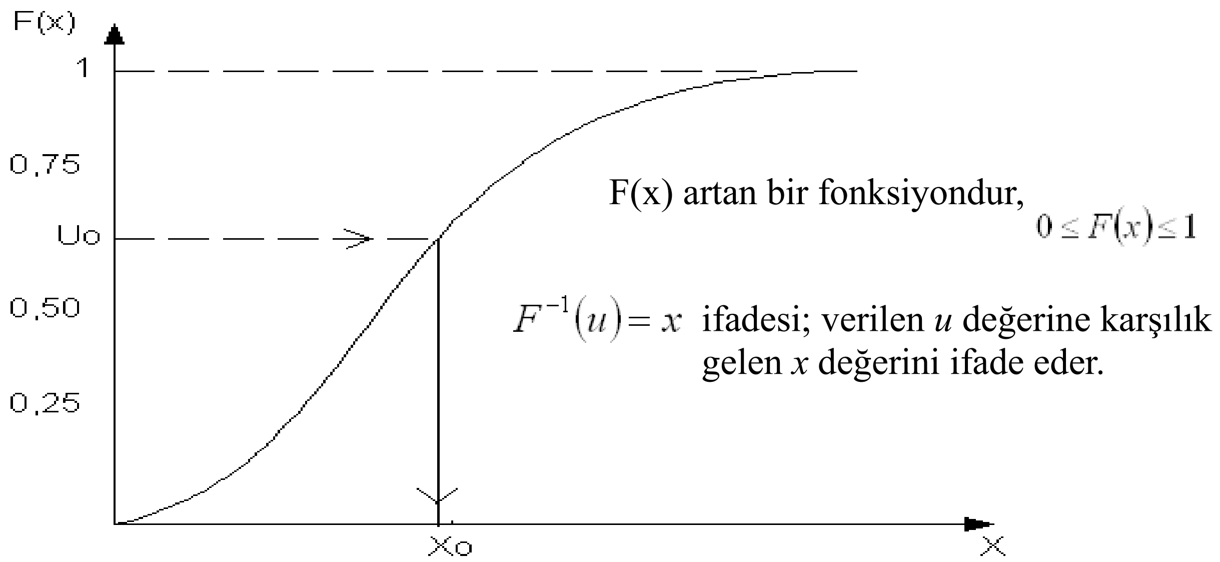
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu : sürekli dağılımlar için Probability Density Function–pdf veya kesikli dağılımlar için Probability Mass Function–pmf olarak kısaltılmaktadır.

x rassal değişkeninin Birikimli Dağılım Fonksiyonu F(*x*) ise, (Hatırlatma : $0 \leq F(x) \leq 1$) ve

u : [0,1] arasında düzgün dağılıma uygun bir rassal sayı ise F(*x*) = *u* denklemi kurulabilir.

Öyleyse, her *u* değerine karşılık gelen bir *x* değeri de vardır ve $x = F^{-1}(u)$ denklemi ile *x* bulunabilir.

Böylece, eğer benzetim modelinde kullanmak üzere rassal değişken üretmek ister isek, her bir rassal değişken üretimi için ayrı bir *u* ile $x = F^{-1}(u)$ denklemini kullanabiliriz.



Excel Programında Rassal Sayı Üretimi için;

= s_sayı_üret() veya Microsoft Office İngilizce versiyonunda **=rand()** fonksiyonu kullanılır.

Rassal Sayılar kullanarak rassal değişken üretilmesi ile ilgili aşağıda çeşitli olasılık fonksiyonları için örnekler verilmiştir.

Bu örneklerde, rassal değişken üretiminde kullanılan rassa sayıların uygun özelliklere sahip olarak verildiği kabul edilecektir.

Kesikli (Discrete) Olasılık Fonksiyolarından Rassal Değişken Üretimi

Örnek-1 : Empirik Bir Kesikli Olasılık Dağılımdan Rassal Değişken Üretimi

Bir tersanenin yedekparça deposuna gün içerisinde yedek parça talepleri gelmektedir. Her hangi bir gün içinde gelen talep miktarı: 0.1 olasılıkla 1 adet, 0.25 olasılıkla 2 adet, 0.35 olasılıkla 3 adet, 0.25 olasılıkla 4 adet ve 0.05 olasılıkla 5 adettir.

Belirtilen bu olasılıklar, geçmiş dönemde gelen talep verilerinden hesaplanmıştır ve her talep miktarı değerinin sıklığı, frekansı o değerin olasılığı olarak kabul edilmiştir. Aşağıdaki tabloda, depoya herhangi bir gün gelebilecek talep miktarı olasılık dağılımı verilmiştir. x : talep adedi, p(x): olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf), P(x): birikimli olasılık fonksiyonu (cdf)

Not : birikimli dağılım fonksiyonu; kesikli olasılık dağılımları için P(x), sürekli olasılık dağılımlar için F(x) olarak ifade edilecektir.

x	$p(x)$	$P(x)$
0	0	0
1	0.1	0.1
2	0.25	0.35
3	0.35	0.70
4	0.25	0.95
5	0.05	1

Buna göre, 3 farklı gün için ayrı ayrı, gelen talep miktarlarını ifade eden *x* rassal değişkenleri üretiniz. Farklı günlerde gelen talep miktarları birbirinden bağımsızdır.

Hesaplamalarda, kullanılacak rassal sayılar : $u_1 = 0.551$ $u_2 = 0.961$ ve $u_3 = 0.072$

Verilen olasılık dağılımına göre rassal değişkenler aşağıda verilen fonksiyondan bulunabilir :

$$x = P^{-1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{, eğer } 0 \le u < 0.1 \\ 2 & \text{, eğer } 0.10 \le u < 0.35 \\ 3 & \text{, eğer } 0.35 \le u < 0.70 \\ 4 & \text{, eğer } 0.70 \le u < 0.95 \\ 5 & \text{, eğer } 0.95 \le u < 1 \end{cases}$$

Buna göre:

1.gün : u1 = 0.551 için 0.35 ≤ u1 < 0.70 olduğundan x_1 = 3 adet talep

2.gün : u2 = 0.961 için 0.95 ≤ u2 < 1 olduğundan x_2 = 5 adet talep

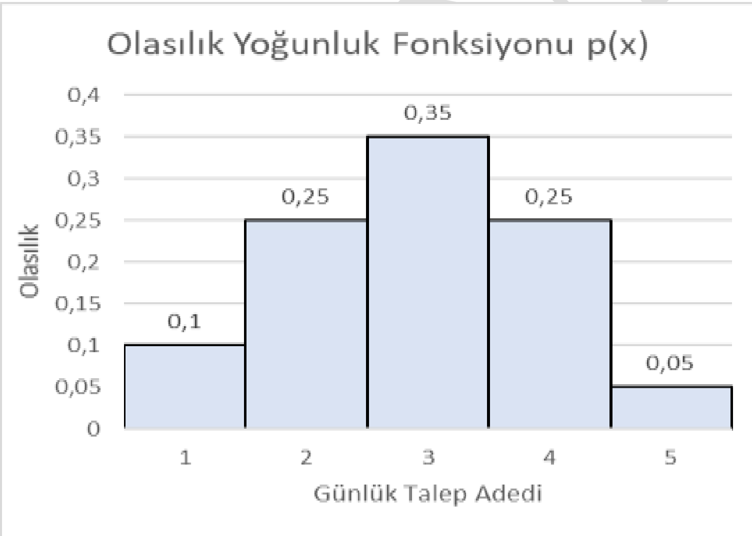
3.gün : u3 = 0.072 için 0 ≤ u3 < 0.10 olduğundan x_3 = 1 adet talep

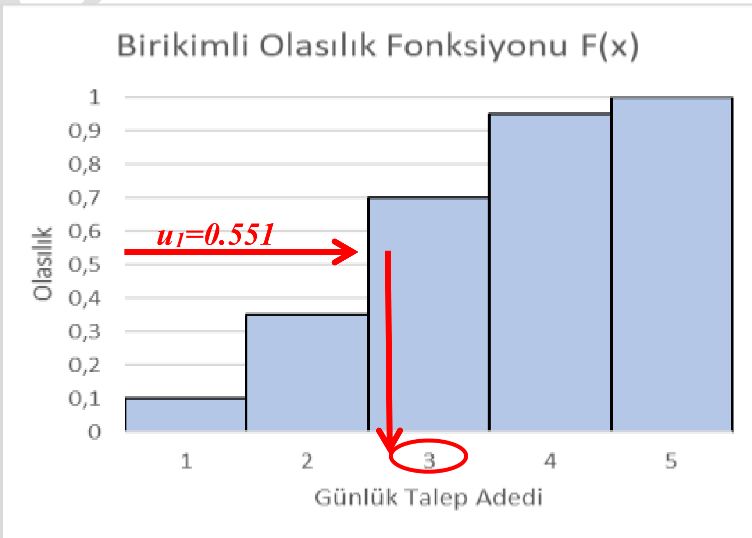
Excel'de Rassal Değişken Hesaplama :

	A	B
1	***u***	***X***
2	0.551	=eğer(A2<0.1;1;eğer(A2<0.35;2;eğer(A2<0.7;3;eğer(A2<0.95;4;5))))
3	0.961	=eğer(A3<0.1;1;eğer(A3<0.35;2;eğer(A3<0.7;3;eğer(A3<0.95;4;5))))
4	0.072	=eğer(A4<0.1;1;eğer(A4<0.35;2;eğer(A4<0.7;3;eğer(A4<0.95;4;5))))

Not: Excel'de ondalık ayırıcı olarak Tükçe versiyonda virgül (,) İngilizce versiyonda ise nokta (.) kullanılmaktadır Bu ders notundaki Excel örneklerinde ondalık ayırıcı (.) olarak verilmiştir. Değişiklik yapmak için; Excel'de Dosya>Seçenekler>Gelişmiş altındaki ayarlara ulaşmanız geekmektedir.

Yukarıdaki hesaplamanın grafik üzerinde temsili gösterimi aşağıda verilmiştir. Dikey eksen üzerindeki bir rassal sayının (u=0.551), yatay eksen üzerindeki Günlük Talep Adedi karşılığı x=3 gösterilmektedir.





Örnek-2 : Bernoulli Dağılımdan Rassal Değişken Üretimi

Üretimi tamamlanan bir ampulün hatalı olma olasılığı %10 olarak kabul edilmektedir. x rassal değişkeni, bir ampulün hatalı veya sağlam olup olmadığını ifade etmektedir. Eğer bir ampul sağlam ise x=1 ve hatalı ise x=0'dir.

Buna göre, rastgele seçilen 3 ampul için ayrı ayrı x rassal değikeni üretmek istersek, aşağıdaki tabloyu kullanabiliriz:

x	***p(x)***	***P(x)***
0	0.10	0.10
1	0.90	1.00

kullanacağımız rassal sayılar $u_1 = 0.551$ $u_2 = 0.961$ ve $u_3 = 0.072$ olursa:

1.ampul : $u_1 = 0.551$ için $0.10 < u_1$ olduğundan $x_1 = 1$ (sağlam)

2.ampul : $u_2 = 0.961$ için $0.10 < u_2$ olduğundan $x_2 = 1$ (sağlam)

3.ampul : $u_3 = 0.072$ için $u_3 < 0.10$ olduğundan $x_3 = 0$ (hatalı)

Excel'de Bernoulli Rassal Değişkeni Hesaplama :

	A	B
1	***u***	***x***
2	0.551	=eğer(A2<0.1;0;1)
3	0.961	=eğer(A3<0.1;0;1)
4	0.072	=eğer(A4<0.1;0;1)

Örnek – 3 : Binom Dağılımından Rassal Değişken Üretimi

İskenderun Deniz Üssüne gelen gemilerinden bazıları yakıt ikmali yapmakta, bazıları yapmamaktadır. Limana gelen bir geminin yakıt talep etmesi olasılığı %20'dir ve her geminin yakıt talebinde bulunma olayı diğer gemilerden bağımsızdır (her bir gemi ayrı ayrı bağımsız bernoulli deneyi p=0.20). Limana her gün 5 geminin geldiği kabul edilerek (n=5), limana gelen gemilerden akaryakıt ikmali yapan gemi sayısı rassal değişkeni üretelim. Hesaplamada, iki ayrı rassal değişeken için rassal sayılar : u_1=0.94 ve u_2=0.5

x : limana gelen gemilerden yakıt ikmali yapanların sayısını ifade eden rassal değişken ise bu değişken Binom dağılımına uyar (n adet bağımsız bernoulli deneyinde başarı sayısı)   x~BİNOM (n=5, p=0.2)

Öncelikle BİNOM dağılımı için verilen parametreler (n, p) kullanılarak x'in alabileceği tüm değerin olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) değerleri hesaplanır.

Not : Bir rassal değişkenin BİNOM dağılımına uygun olması için; birbirinden bağımsız olarak gerçekleşen ve her birinin başarı olasılığı p olan n adet deneme olması gerekmektedir. Başarı: yazı/tura, oldu/olmadı, geldi/gelmedi, 0/1, açık/kapalı vb. şekilde ifade edilebilecek ikili durumdan birisidir.

BİNOM dağılımı pdf : p(x) = Kombinasyon (n,x) . p^x . $(1-p)^{n-x}$

$p\ (x = 0) = p\ (0) = C\ (5,0) \times 0{,}2^0 \times 0{,}8^5 = 0{,}3268$

$p\ (x = 1) = p\ (1) = C\ (5,1) \times 0{,}2^1 \times 0{,}8^4 = 0{,}4096$

$p\ (x = 2) = p\ (2) = C\ (5,2) \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^3 = 0{,}2048$

$p\ (x = 3) = p\ (3) = C\ (5,3) \times 0{,}2^3 \times 0{,}8^2 = 0{,}0512$

$p\ (x = 4) = p\ (4) = C\ (5,4) \times 0{,}2^4 \times 0{,}8^1 = 0{,}0064$

$p\ (x = 5) = p\ (5) = C\ (5,5) \times 0{,}2^5 \times 0{,}8^0 = 0{,}00032$

x	p(x)	P(x)
0	0.3268	0.32768
1	0.4096	0.73728
2	0.2048	0.94208
3	0.0512	0.99328
4	0.0064	0.99968
5	0.00032	1

u_1 = 0.94
P (x = 1) < u < P (x = 2)
Öyleyse x = 2 adet gemi

u_2 = 0.5
P (x = 0) < u < P (x = 1)
Öyleyse x = 1 adet gemi

Excel'de Binom Rassal Değişkeni Üretme:

	A	B	C	D	E	F
1	n=	4				
2	p=	0.35				
3						
4	x	p(x)	P(x)		u	x
5	0	0.17850625	0.17850625		0.94	=EĞER(E5<C5;A5;EĞER(E5<C6;A6;EĞER(E5<C7;A7;EĞER(E5<C8;A8;A9))))
6	1	0.384475	0.56298125		0.5	=BİNOM.TERS(B1;B2;E6)
7	2	0.3105375	0.87351875			
8	3	0.111475	0.98499375			
9	4	0.01500625	1			
10						

Olasılık değerlerinin yer aldığı tabloda EĞER formülleri kullanarak rassal değişken üretilebilir veya doğrudan BİNOM.TERS formülü kullanılabilir. BİNOM.TERS formülü içerisinde sırasıyl (n,p,u) parametreleri kullanılır. n: deneme sayısı, p: tek bir başarı olasılığı, u: olasılık yani üretilen rassal sayı.

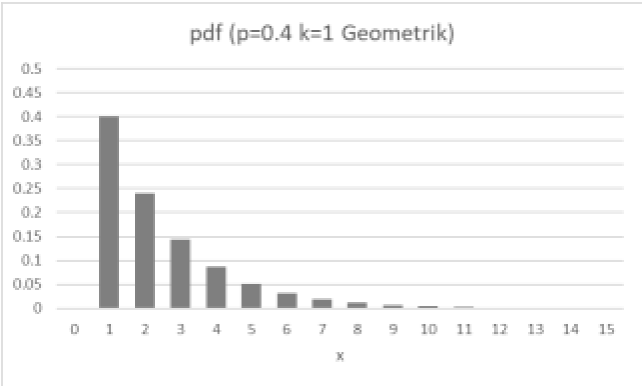
Örnek – 4 : Negatif Binom / Geometrik Dağılımdan Rassal Değişken Üretimi

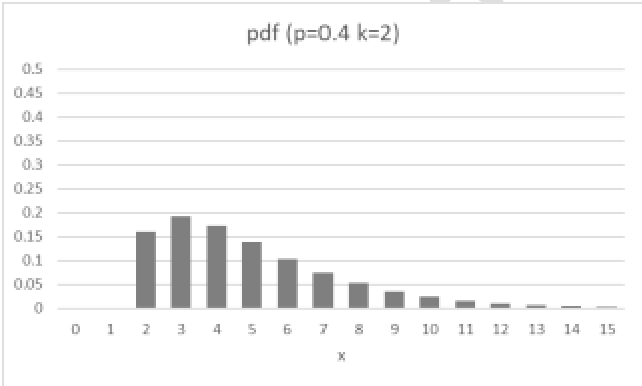
Bir denizaltı, bir düşman hedefini batırmayı amaçlamaktadır. Bir hedefin batırılması için 1 isabetli torpido atışı gerekmektedir (her bir atış ayrı ayrı bağımsız bernoulli deneyi ve vurma olasılığı p=0.4)

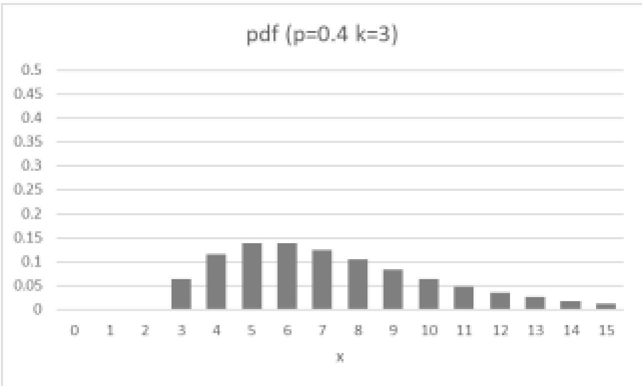
Hedefin batırılması için atılan torpido sayısı rassal değişkeni, Geometrik Dağılıma uyar (Aslen, geometrik dağılım, Negatif Binom dağılımının özel bir durumudur. Geometrik Dağılımda gerekli başarı sayısı =1)

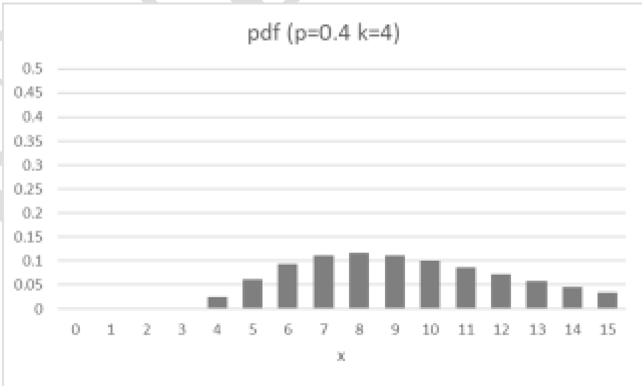
x : Atılan torpido sayısı   k: Başarı sayısı

Farklı k değerleri ve p=0.4 için pdf grafikleri aşağıda gösterilmiştir.









Negatif Binom dağılımı için x rassal değişkeninin alabileceği değerlerin bir üst sınırı yoktur (x arttıkça pdf olasılık değeri düşer ama sıfır olmaz). Ayrıca, x asla k değerinden daha küçük olamaz (örneğin, 3 atışta 4 başarı olmaz !)

Aşağıdaki tabloda; p=0.4 ve k(başarı sayısı) = 1 (Geometrik dağılım) için p(x) : pdf ve P(x) : cdf değerleri verilmiştir.

x	p(x)	P(x)
0	0	0
1	0.4	0.4
2	0.24	0.64
3	0.144	0.784
4	0.0864	0.8704
5	0.05184	0.92224
6	0.031104	0.953344
7	0.018662	0.972006
8	0.011197	0.983204
9	0.006718	0.989922
10	0.004031	0.993953

İki rassal değişken üretmek istersek ve u_1=0.94 , u_2=0.5 kullanırsak

$u_1 = 0.94$
$P(x = 5) < u < P(x = 6)$
Öyleyse $x = 6$ adet torpido

$u_2 = 0.5$
$P(x = 1) < u < P(x = 2)$
Öyleyse $x = 2$ adet torpido

Denizaltının, düşman hedefini batırması için 2 isabetli torpido atışı gerektiğini farz edelim (daha büyük bir hedef, örneğin 3000 ton üzeri) ve vurma olasılığı p=0.4 aynı kalsın.

Bu durumda; p=0.4 ve k(başarı sayısı) = 2 için p(x) : pdf ve P(x) : cdf değerleri verilmiştir.

x	p(x)	P(x)
0	0	0
1	0	0
2	0.16	0.16
3	0.192	0.352
4	0.1728	0.5248
5	0.1382	0.66304
6	0.1037	0.76672
7	0.07465	0.84137
8	0.05225	0.89362
9	0.03583	0.929456
10	0.024186	0.953643

İki rassal değişken üretmek istersek ve u_1=0.94 , u_2=0.5 kullanırsak

u_1 = 0.94
P (x = 9) < u < P (x = 10)
Öyleyse x = 10 adet torpido

u_2 = 0.5
P (x = 3) < u < P (x = 4)
Öyleyse x = 4 adet torpido

Bu sefer de, düşman hedefinin batırılması için 3 isabetli torpido atışı gerektiğini farz edelim (daha büyük bir hedef, örneğin 5000 ton üzeri) ve vurma olasılığı p=0.5 olsun (daha iyi bir torpido).

Bu durumda; p=0.5 ve k(başarı sayısı) = 3 için p(x) : pdf ve P(x) : cdf değerleri verilmiştir.

x	p(x)	P(x)
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0.343	0.343
4	0.3087	0.6517
5	0.18522	0.83692
6	0.09261	0.92953
7	0.04167	0.97120
8	0.01750	0.98871
9	0.00700	0.99571
10	0.002700	0.99840

İki rassal değişken üretmek istersek ve u_1=0.94 , u_2=0.5 kullanırsak

u_1 = 0.94
P (x = 6) < u < P (x = 7)
Öyleyse x = 7 adet torpido

u_2 = 0.5
P (x = 3) < u < P (x = 4)
Öyleyse x = 4 adet torpido

Negatif Binom ve Geometrik Dağılımdan rassal değişken üretilmesi için EXCEL'de hazır bir fonksiyon yoktur. Kendi yazdığımız formüller ile rassal değişken üretmek mümkündür ancak x değeri olurluluk kümesi sınırsız olduğundan yazılacak formül tek aşamalı olması zordur (Bu derste ele alınmayacaktır).

SÜREKLİ (Discrete) Olasılık Dağılım Fonksiyolarından Rassal Değişken Üretimi

Örnek – 5 : Üstel (Exponential) Dağılımdan Rassal Değişken Üretimi

Bir atelyede, presleme makinesine işlenmek üzere parçalar gelmektedir. Geçmiş 1 aylık dönemde presleme makinesine gelen parçaların geliş zamanları kaydedilmiş ve dakika biriminden gelişler arası süreler çıkarılmıştır. x : gelişler arası süreler ve $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (üstel dağılım) ve λ=0,25 (λ : birim zamanda gelen parça adedi–rate of arrival) ise bir x rassal değişkeni şu şekilde üretilebilir.

$$F(x) = \int_0^x f(t).dt = 1- e^{-\lambda x}, \; x \geq 0 \quad F(x) = 1- e^{-\lambda x} = u$$

$F^{-1}(u)$ bulmak için $1- e^{-\lambda x} = u$ denkleminde x bir tarafta yalnız bırakılır.

$$1- e^{-\lambda x} = u \;\rightarrow\; 1-u = e^{-\lambda x} \;\rightarrow\; ln(1-u) = ln(e^{-\lambda x}) \;\rightarrow\; ln(1-u) = -\lambda x \;\rightarrow\; F^{-1}(u) = - ln(1-u)/\lambda = x$$

u = 0.55 için x = - $ln(1-0.55)/0.25 = 3.19$ dakika

	A	B
1		
2	λ	0,25
3		
4	***u***	=S_SAYI_ÜRET()
5		
6	***x***	=-LN(1-B4)/B2
7		

Bu örnek problem için Excel'de yazılması gereken formüller yukarıda gösterilmiştir.

Örnek – 6 : Düzgün (Uniform) Dağılımdan Rassal Değişken Üretme

Çanakkale boğazında, saat başı ölçülen hava basıncı (bar), 950-1050 arası değişen düzgün dağılıma uymaktadır. Buna göre, *x*: hava basıncı rassal değişkeni şu şekilde üretilebilir. (Bu maksatla üretilen rassal sayı u = 0.22 olarak farz edelim).

Düzgün dağılım için $f(x)=1/(b-a)$ a: min x değeri = 950 bar , b: maks x değeri = 1050 bar

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt = \int_a^x 1/(b-a).dt = t/(b-a)\Big|_a^x = (x-a)/(b-a) = u$$

$$x = F^{-1}(u) = u\,(b-a) + a$$

$u = 0.22$ $a = 950$ $b = 1050$ ise, $x = 0.22\,(1050-950) + 950 = 977$ bar

	A	B
1	*a*	950
2	*b*	1050
3		
4	*u*	=S_SAYI_ÜRET()
5		
6	*x*	=B1+B4*(B2-B1)

Bu örnek problem için Excel'de yazılması gereken formüller yukarıda gösterilmiştir.

Örnek – 7.1: Empirik Bir Sürekli Dağılımdan Rassal Değişken Üretme

Bir makinenin arızalanmaya kadar geçen süresi (yıl) (Mean Time To Failure – MTTF) olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) aşağıda verilmiştir. Bu dağılıma göre, ters dönüşüm yöntemi kullanrak, 3 adet onarım süresi rassal değişkeni üretin. Kullanacağınız rassal sayılar: $u_1 = 0.19$, $u_2 = 0.51$, $u_3 = 0.99$

f(x) = $\mathbf{0.5 - 0.125}\boldsymbol{x}$, $\quad 0 \leq \boldsymbol{x} \leq 4$ yıl

Çözüm:

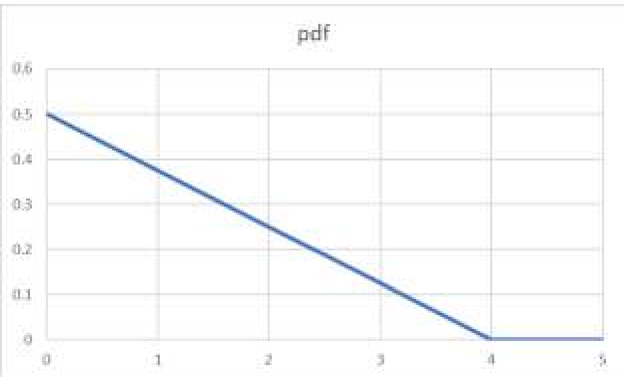
Öncelikle, birikimli dağılım fonksiyonunu hesaplamamız gerekir.

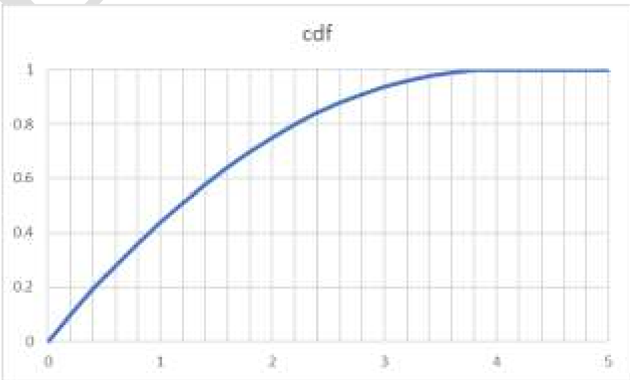
$$F(x) = \int_0^x (\mathbf{0.5 - 0.125}\ \boldsymbol{t})dt = \ 0.5x - 0.0625\ x^2 \qquad ise$$

$$u = \ 0.5x - 0.0625\ x^2 \ \Rightarrow \ 16u = 8x - x^2 \ \Rightarrow \ 16 - 16u = x^2 - 8x + 16$$

$$16(1-u) = (x-4)^2 \ \Rightarrow 4 - 4\sqrt{(1-u)} = x \ \ veya \ \ 4 + 4\sqrt{(1-u)} = x$$

$$x \leq 4 \ olduğundan \ \ x = \ 4 - 4\sqrt{(1-u)}$$





Buna göre;

$u_1 = 0.19$ için; $\quad x = \ 4 - 4\sqrt{(1-u)} = 4 - 4\sqrt{(1-0.19)} = \ 4 - 4\sqrt{0.81} = 0.4\ yıl$

$u_2 = 0.51$ için; $\quad x = 4 - 4\sqrt{(1-u)} = 4 - 4\sqrt{(1-0.51)} = \ 4 - 4\sqrt{0.49} = 1.2\ yıl$

$u_2 = 0.99$ için; $\quad x = 4 - 4\sqrt{(1-u)} = 4 - 4\sqrt{(1-0.99)} = \ 4 - 4\sqrt{0.01} = 3.6\ yıl$

Hatırlatma : Bir olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) grafiğinin altında kalan alan 1'e eşittir. Birikimli olasılık fonksiyonu (cdf) değeri de en fazla 1 olabilir. CDF; pdf'in integrali alınmış halidir !

Örnek – 7.2: Empirik Bir Sürekli Dağılımdan Rassal Değişken Üretme

Yukarıdaki örnekteki makinenin onarılması için geçen süre (saat) (Mean Time To Repair – MTTR) olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) aşağıda verilmiştir. Bu dağılıma göre, ters dönüşüm yöntemi kullanrak, 2 adet arızlanma arası geçen süre rassal değişkeni üretin. Kullanacağınız rassal sayılar: $u_1 = 0.24$ ve $u_2 = 0.82$

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , 0 \leq x \leq 1 \text{ saat} \\ \frac{3-x}{4} & , 1 \leq x \leq 3 \text{ saat} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}
$$

Çözüm:

Öncelikle, birikimli dağılım fonksiyonunu hesaplamamız gerekir.

[0,1] aralığı için:

$$
F(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} \qquad ise \quad u = \frac{x}{2} \;\Rightarrow\; x = 2u \quad , eğer\ u \leq 0.5
$$

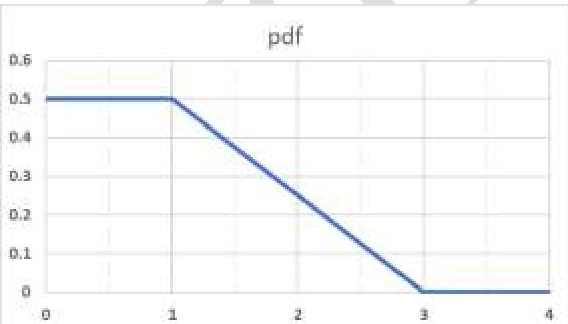
[1,3] aralığı için:

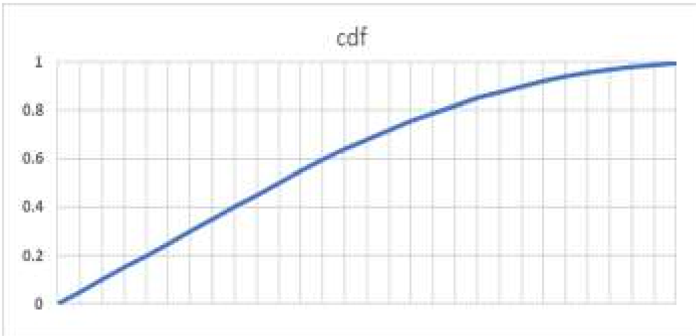
$$
F(x) = \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{3-t}{4} dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{3t}{4} - \frac{t^2}{8}\right]_1^x = \frac{1}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{x^2}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{-x^2 + 6x - 1}{8}
$$

$$
u = \frac{-x^2 + 6x - 1}{8} \;\Rightarrow\; -8u = x^2 - 6x + 1 \;\Rightarrow\; 8 - 8u = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 8(1-u) = (x-3)^2
$$

$$
\sqrt{8(1-u)} = (x-3) \;\Rightarrow\; 3 - 2\sqrt{2(1-u)} = x \;\; veya \;\; 3 + 2\sqrt{2(1-u)} = x
$$

$$
x \leq 3 \; olduğundan\; dolayı \;\; x = 3 - 2\sqrt{2(1-u)} \quad , eğer\ u \geq 0.5
$$





Buna göre;

$u_1 = 0.24$ için; $\quad x = 2u \quad\quad x = 2(0.24) = 0.48\ saat$

$u_2 = 0.82$ için; $\quad x = 3 - 2\sqrt{2(1-u)} \quad\quad x = \ x = 3 - 2\sqrt{2(1-0.82)} = 1.8\ saat$

Excel Programında Rassal Değişken Üretimi İçin Kullanılabilecek Fonksiyonlar :

Excel'de bazı olasılık dağılımlarından rassal değişken üretebilmek için hazır fonksiyonlar mevcuttur.

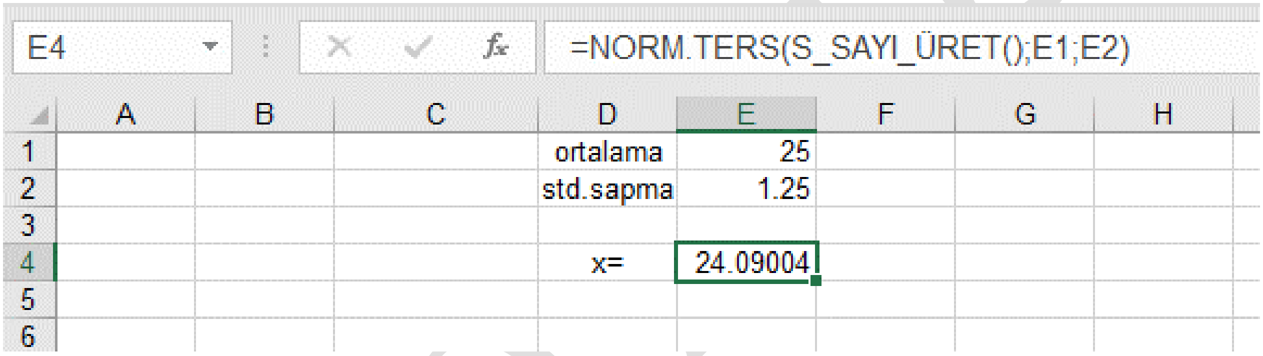
Normal Dağılımdan Rassal Değişken Üretimi:

=NORM.TERS(olasılık, ortalama, standartsapma)

Örn. Bir üretim hattından çıkan ürünlerin ağırlığı, ortalaması 25 kg, standart sapması 1,2 kg olan Normal Dağılıma uymaktadır. Buna göre; bu üretim hattından çıkacak bir ürünün ağırlık rassal değişkenini üretin.

=NORM.TERS(S_SAYI_ÜRET() ; 25 ; 1,25) formülü excelde yazılır

Eğer; ortalama ve standart sapma parametreleri bir başka hücrede yazılmış ise, formülde bu parametrelerin yerine ilgili hücrelerin referansları yazılabilir.



Aşağıdaki fonksyonlar da benzer şekilde rassal değişken üretici fonksiyonlar olarak kullanılabilir:

=BETA.TERS(olasılık, alfa, beta, A, B)

=GAMA.TERS(olasılık, alfa, beta)

=BİNOM.TERS(deneme sayısı, başarı olasılığı, olasılık)

=LOGNORM.TERS(olasılık, ortalama, standartsapma)

Excel'de diğer her türlü olasılık dağılımdan rassal değişken üretilmesi için Ters Dönüşüm Yönteminde elde edilen denklemlerin uygun şekilde formül olarak yazılması gerekir.

NOT : ARENA Benzetim Programında, rassal değişken üretimi için rassal değişkenin olasılık dağılımı ve parametreleri belirtilir, program kendi içerisinde tanımlı fonksiyonlar ile rassal değişkenleri otomatik olarak üretir, ayrıca nasıl yapılacağının tanımlanması gerekmez.

Örnek – 8 : Üçgen Dağılım (Triangular Distribution):

Üçgen Dağılım benzetim modellemesinde yaygın kullanılan sürekli dağılımlardan birisidir. Alt sınır (a), mod (b) ve üst sınır (c) olmak üzere 3 parametresi vardır. a < b < c

Adından da anlaşılacağı gibi, olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) grafiği üçgen şeklindedir. Üçgenin tabanı x ekseni üzerinde; son alt köşesi değeri a ve sağ alt köşesi değeri c'dir. Üçgenin üst köşesinin x değeri b, dik yüksekliği (h) yani y değeri ise 2/(c-a)'dır. Buna göre; bu üçgenin alanı A = (c-a) . [2/ (c-a)] = 1'dir.

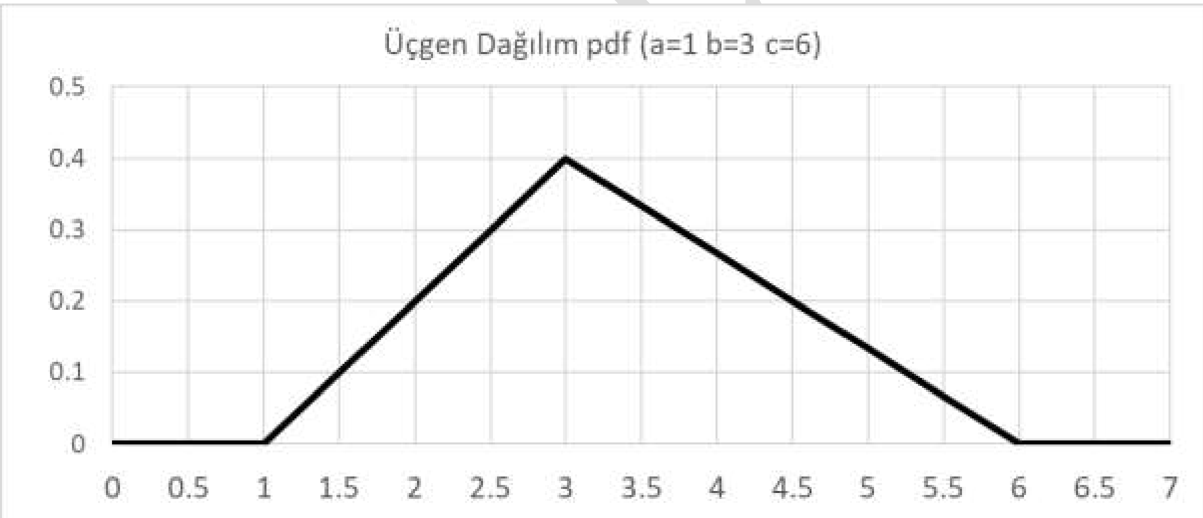
Üçgen dağılım, belirtilen a-c sınırları arasında değer alır. Bu sınırlar dışında olasılık değeri sıfırdır.

Üçgen dağılım; özellikle bir rassal değişkenin alabileceği değerlerin alt ve üst sınırları biliniyorsa, buna ilaveten genellikle hangi değeri alabileceği tahmin ediliyorsa tercih edilebilir. Bu da bize düzgün dağılımdaki tam belirsizkten daha iyiye götürür. Alt ve üst sınırları bulunması bakımından düzgün dağılıma benzer ancak bu sınırlar arasında eşit olasılık yoktur. Olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf), mod olarak adlandırılan b değerinde tepe yapar.

Üçgen dağılım, bazı durumlarda normal dağılımın yerine de tercih edilebilir. Normal dağılımın her iki uçta alt ve üst sınırının olmaması bir dezavantajdır ve ortalamanın sağında solunda simetriktir. Üçgen dağılım ise normal dağılıma benzer şekilde bir genel beklenen değerin ertafında olasılığın nasıl değiştiğini de gösterir.

Örneğin; x rassal değişkeni eğer parametreleri (a=1, b=3, c=6) olan üçgen dağılıma uyuyor ise; yani diğer bir gösterimle x ~ Üçgen Dağılım (1, 3, 6) ise;

olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf):



$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{eğer } x < 1 \text{ veya } x > 6 \\ 0.2\,x - 0.2 & , \text{eğer } 1 \leq x < 3 \\ -0.4\,(x/3) + 0.8 & , \text{eğer } 3 \leq x < 6 \end{cases}$$

Üçgen dağılım fonksiyonu parçalı doğrusal (piecewise linear) denklemlerden oluşmaktadır.

Alt sınır (a) – Tepe Noktası yani Mod (b) arasında geçerli olan bir doğrusal denklem ve b-c arasında geçerli olan diğer bir doğrusal denklem vardır. Bu denklemleri bulmak için; iki noktası verilen doğrusal denklemi bulma işlemleri yapılabilir.

a $\leq$ x < b **aralığı için** ilk nokta : $(x_1, y_1) = (a,0)$ ve ikinci nokta : $(x_2, y_2) = (b,h)$ h = 2/(c-a)

Buna göre;

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-0}{0-h} = \frac{x-a}{a-b} \quad \Rightarrow \quad y = -h\,\frac{x-a}{a-b} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)}$$

Yukarıdaki örnek için;

$$f_1(x) = y = \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} = \frac{2(x-1)}{(6-1)(3-1)} = \frac{2(x-1)}{10} \quad \Rightarrow \quad y = 0.2x - 0.2$$ olarak bulunur.

b $\leq$ x < c **aralığı için** ilk nokta : $(x_1, y_1) = (b,h)$ ve ikinci nokta : $(x_2, y_2) = (c,0)$ h = 2/(c-a)

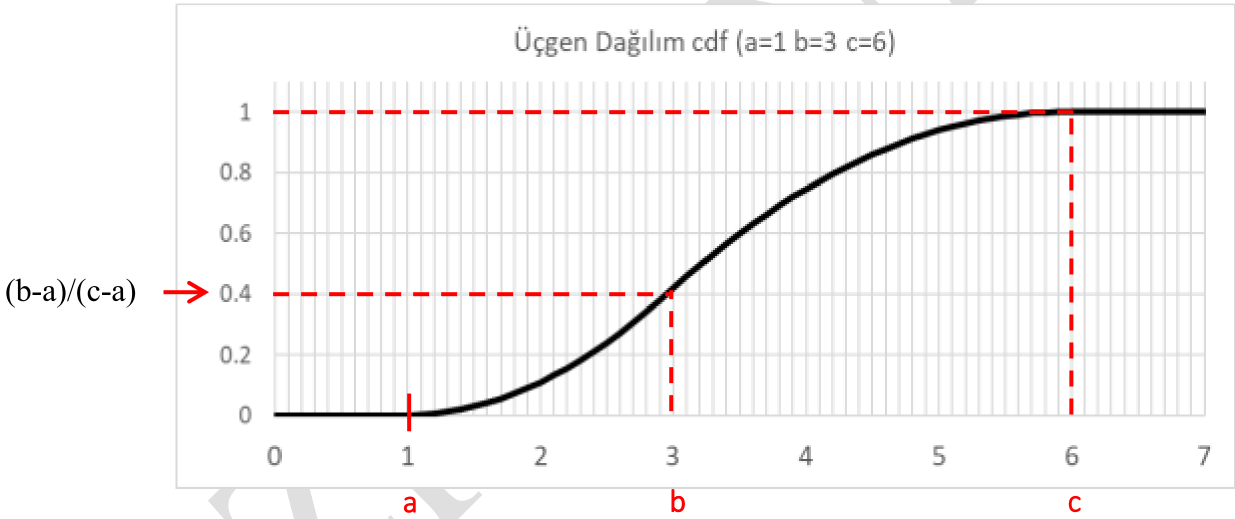
Buna göre;

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2} \Rightarrow \frac{y-h}{h-0} = \frac{x-b}{b-c} \Rightarrow y = \frac{2}{(c-a)}\,\frac{x-b}{b-c} + \frac{2}{(c-a)} \Rightarrow y = \frac{2(x-b+b-c)}{(c-a)(b-c)} = \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)}$$

Yukarıdaki örnek için;

$$f_2(x) = y = \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} = \frac{2(6-x)}{(6-1)(6-3)} = \frac{12-2x}{15} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{0.4}{3}x + 0.8$$ olarak bulunur.

Üçgen dağılımın Birikimli Dağılım Fonksiyonu (cdf) bulmak için, belirtilen aralıklarda integrali alınır.



[a,b] aralığı için :

$$F(x) = \int_a^x \frac{2(t-a)}{(c-a)(b-a)}dt = \frac{2}{(c-a)(b-a)}\int_a^x (t-a)dt = \frac{2}{(c-a)(b-a)}\left(\frac{t^2}{2} - at\right)\Big|_a^x$$

$$= \frac{2}{(c-a)(b-a)}\left(\frac{x^2}{2} - ax - \frac{a^2}{2} + a^2\right) = \frac{x^2-2ax+a^2}{(c-a)(b-a)} = \boldsymbol{\frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)}}$$

[b,c] aralığı için:

$$F(x) = \frac{(b-a)}{(c-a)} + \int_b^x \frac{2(c-t)}{(c-a)(c-b)}dt = \frac{(b-a)}{(c-a)} + \frac{2}{(c-a)(c-b)}\int_b^x (c-t)dt = \frac{(b-a)}{(c-a)} + \frac{2}{(c-a)(c-b)}\left(ct - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_b^x$$

$$= \frac{(b-a)}{(c-a)} + \frac{2}{(c-a)(c-b)}\left(cx - \frac{x^2}{2} - cb + \frac{b^2}{2}\right) = \boldsymbol{1 - \frac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)}}$$

[a,b] aralığı için ters dönüşüm :

$$u = \frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)}$$

$$u(c-a)(b-a) = (x-a)^2$$

$$x = a + \sqrt{u(c-a)(b-a)}$$

[b,c] aralığı için ters dönüşüm :

$$u = 1 - \frac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$(1-u)(c-a)(c-b) = (c-x)^2$$

$$x = c - \sqrt{(1-u)(c-a)(c-b)}$$

Buna göre;

$$x = a + \sqrt{u(c-a)(b-a)} \quad , eğer\ u \le \frac{(b-a)}{(c-a)}$$

$$x = c - \sqrt{(1-u)(c-a)(c-b)} \quad , eğer\ u > \frac{(b-a)}{(c-a)}$$

$u = \frac{(b-a)}{(c-a)}$ olduğunda her iki fonksiyon da aynı değeri verecektir.

Yukarıda verilen örnek için (b-a)/(c-a) = (3-1) / (6-1) = 2/5 = 0.4

Eğer u=0.3 olarak bir rassal sayı ile rassal değişken üreceksek;

$$x = a + \sqrt{u(c-a)(b-a)}$$

$$x = 1 + \sqrt{0.3\,(6-1)(3-1)}$$

$$x = 1 + \sqrt{0.3\,(5)(2)}$$

$$x = 1 + \sqrt{3}$$

$$x = \sim 2.73$$

Eğer u=0.6 olarak bir rassal sayı ile rassal değişken üreceksek;

$$x = c - \sqrt{(1-u)(c-a)(c-b)}$$

$$x = 6 - \sqrt{(1-0.6)\,(6-1)(6-3)}$$

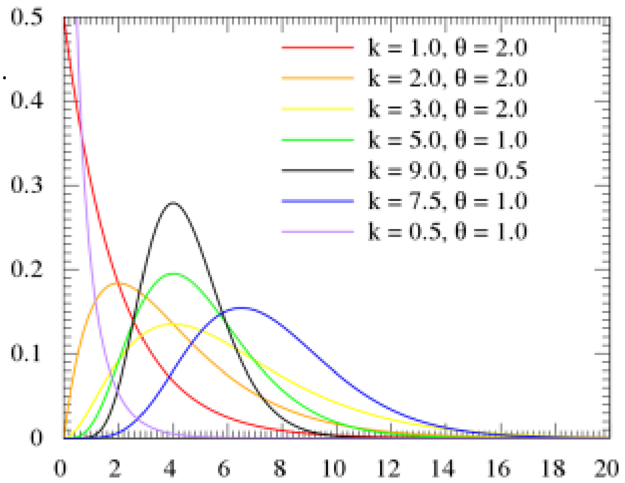
$$x = 6 - \sqrt{0.4\,(5)(3)}$$

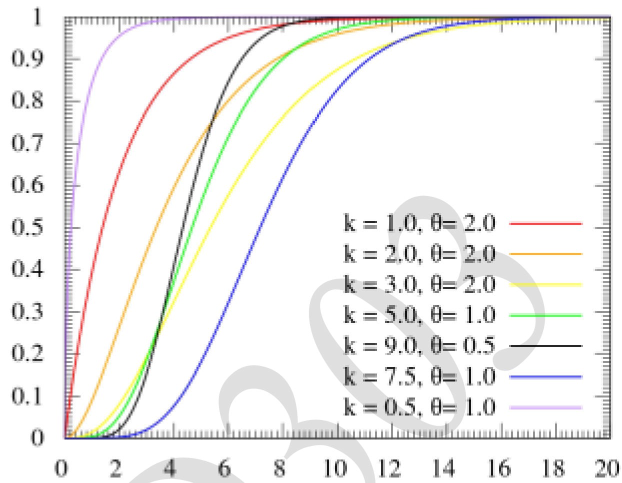
$$x = 6 - \sqrt{6}$$

$$x = \sim 3.55$$

Gamma Dağılımı, Erlang Dağılımı ve Bunların Üstel Dağılım ile İlişkileri

Gamma Dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu aşağıda gösterilmiştir.





$$f(x;k,\theta) = x^{k-1}\frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k\,\Gamma(k)} \text{ for } x > 0 \text{ and } k,\theta > 0.$$

$$F(x;k,\theta) = \int_0^x f(u;k,\theta)\,du = \frac{\gamma(k, x/\theta)}{\Gamma(k)}$$

k : şekil parametresi (shape parameter)

θ : ölçek parametresi (scale parameter)

Gama dağılımı, bir çok diğer olasılık dağılımının genel halidir. Örneğin;

Eğer k parametresi pozitif bir tamsayı ise **Erlang Dağılımı** olur ve eğer k = 1 ise de **Üstel Dağılım** olur.

k parametresi sıfırdan büyük olmalıdır ancak tam sayı olmak zorunda değildir yani pozitif bir ondalıklı değer de alabilir. Bu durumda, Erlang veya Üstel Dağılım olmaz.

Gamma dağılımı üstel dağılımın genellenmiş halidir. Birbirini takip eden iki olay (örneğin arıza ortaya çıkması) arası geçen zaman uzunluğu üstel dağılıma uyan bir rassal değişken olabilirken, gamma dağılımı için k 'inci olaya kadar geçen zaman olur. Bu ilişkiyi şu şekilde de ifade edebiliriz:

Eğer birbirinden bağımsız k adet rassal değişken x_1 , x_1 , x_1 , ... , x_k parametresi λ olan üstel dağılıma yani X ~ EXP(λ) uyuyorsa, bu değişkenlerin toplamı $x_1 + x_1 + x_1 +$......... $+ x_k$ olan rassal değişken de parametreleri (k,λ) olan Gamma Dağılımına uyar.

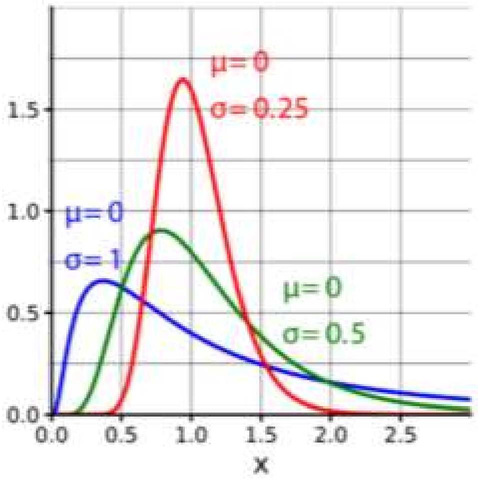
k arttıkça Gamma Dağılımının şekli daha çok Normal Dağılıma benzemeye başlar (örneğin k=20 için Gamma Dağılımı şekli Normal Dağılıma benzer)

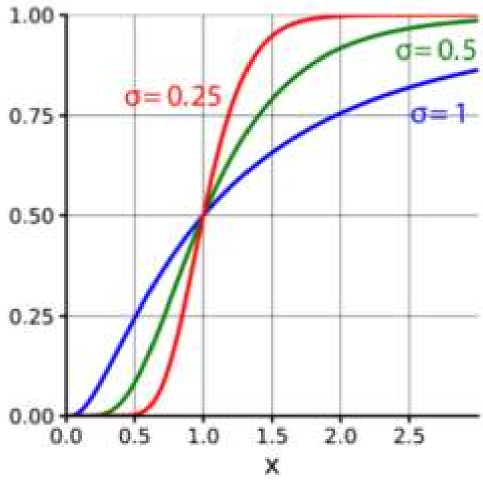
Gama Dağılımına uygun rassal değişkenler negatif değer alamazlar.

Ancak, x değeri arttıkça (sağa doğru), pdf değeri sıfıra yakınsar ama tam sıfır olmaz (Normal Dağılım gibi).

Log Normal Dağılımı

Log Normal dağılımı olasılık yoğunluk (pdf) ve birikimli dağılım fonksiyonu (cdf) aşağıda görülmektedir.

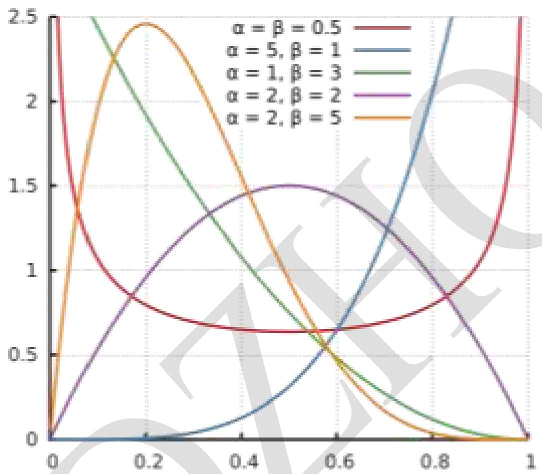


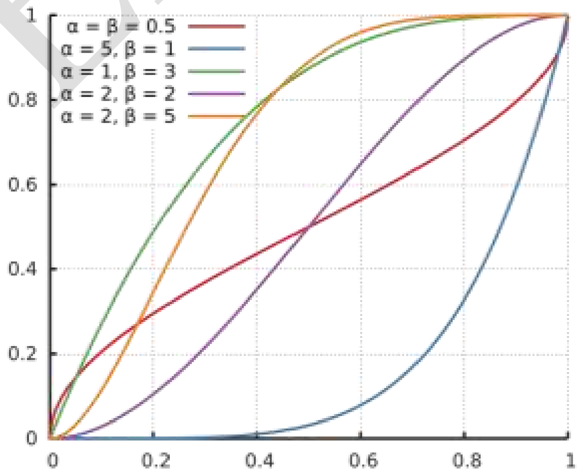


Logaritması normal dağılım gösteren herhangi bir rassal değişken için tek-kuyruklu bir olasılık dağılımdır. Eğer Y normal dağılım gösteren bir rassal değişken ise, X= exp(Y) için olasılık dağılımı bir log-normal dağılımdır; aynı şekilde eğer X log-normal dağılım gösterirse o halde log(X) normal dağılım gösterir.

Beta Dağılımı ve Düzgün Dağılım ile İlişkisi

Beta Dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu aşağıda gösterilmiştir.





Beta Dağılımı rassal değişkeni [0,1] aralığında tanımlıdır. Daha geniş aralıkta olması için ölçeklenebilir (Örn. x ~ BETA (5,2) ise , $\boldsymbol{y = 5x + 1}$ dönüşümü ile [1,6] aralığında tanımlanma yapılabilir)

Beta dağılımı, özellikte endüstriyel mühendislik ve yöneylem araştırması bilim alanlarında, belirli bir minimum değer ile belirli bir maksimum değer aralığı içinde sınırlanmş olayların ortaya çıkması şeklindeki pratik sorunların modellenmesi için kullanılır.

İki parametresi (α ve β) vardır. Bunlar pozitif olmak zorundadır ve dağılımın şeklini, formunu belirler (yukarıdaki örnekler gibi).

α ve β değerlerinin ikisi de 1 olduğunda; Beta dağılımı , düzgün dağılım olur. Bu bakımdan, Beta Dağılımı Düzgün Dağılımın bir genellenmiş halidir (Gamma Dağılımı ve Üstel Dağılım arasındaki ilişkinin benzeri).

GİRDİ OLASILIK DAĞILIMININ BELİRLENMESİ (BİLİNMİYORSA)

Eğer, benzetimde kullanılmasına karar verilen rassal değişkenin olasılık dağılımı bilinmiyor ise (veya doğruluğundan şüphe duyuluyor ise) öncelikle hangi olasılık dağılımına uyduğu belirlenir. Üstel dağılım, normal dağılım gibi bilinen ve belirli bir ismi olan tanımlı bir dağılıma uygun olduğu bulunamaz ise, bu veriler için bir empirik dağılım fonksiyonu belirlenir. (Tıpkı bilinen dağılım fonksiyonlarında olduğu gibi ancak, ayrı özel bir fonksiyon tanımlanır).

Girdi olasılık Dağılımının belirlenmesi için 4 temel adım belirtilebilir:

1. Veri Toplama

2. Dağılımı Şekli ve Türünü Belirleme

3. Dağılımın Parametrelerini Belirleme (Tahmin Etme- Estimation)

4. Uygunluk Testi (Goodness-of-Fit Test)

Veri Toplama:

Geçmiş dönemden kaydedilmiş olan veri varsa bunlar kullanılabilir. Ancak, bu verilerin toplandığı/ kayıt altına alındığı zamandan bu yana sistemin işleyişi ve şartların değişip değişmediğine dikkat edilmeli, gerekirse yeni veri toplanmalıdır (Aksi takdirde modelin geçerliliği sorgulanır).

Ancak, yeni veri toplanması çok maliyetli ve/veya çok uzun zaman alıcı olabilir hatta bazen de istediğimiz verinin çok uzun süre elde edilmesi mümkün olmayabilir (Veriler bizim kontrolümüzde olmayan olaylar ile ortaya çıkıyor ise). Kontrolümüzde gelişmeyen ve her zaman gözlemlenemeyecek türde olaylara dayalı verilere örnek olarak, doğa olayları, kazalar veya insanların bireysel tercihleri gösterilebilir. İşyerinde makinelerin işlem süreleri gibi gözlemlenmesi mümkün durumlar için bile, istenilen büyüklükteki verinin kaydedilmesi aylar sürebilir.

Örneğin, Bir firmada çalışanların çeşitli nedenler ile işten ayrılma zamanlarına ilişkin geçmiş 10 yıllık verilere sahip olduğumuzu ve bu verinin olasılık dağılımını bulmak istediğimizi düşünelim.

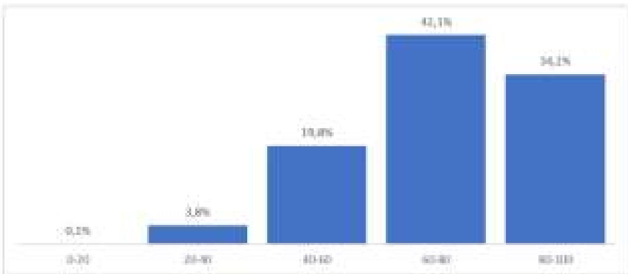
Personel_ID	Ayrılma Zamanı (Hizmet Yılı)	Ayrılma Nedeni
222334	1,2	Sağlık
247859	25,6	Emeklilik
273384	15,3	İstifa
298909	10,3	Disiplin
324434	27,3	Emeklilik
349959	28	Emeklilik
375484	16,2	İstifa
……		

Bu verilerin yenisini toplamak yıllar alacağından geçmiş dönem verilerini kullanmak mantıklıdır ancak emeklilik, istifa, sağık ve disiplin işlemleri konularında konunda veya diğer ilgili kurallarda geçmiş dönemden beri değişen bir husus olup olmadığına bakılabilir (emeklilik yaşının uzaması, mecburi hizmet süresinin artması vb.) buna göre veriler gerekirse filtrelenebilir.

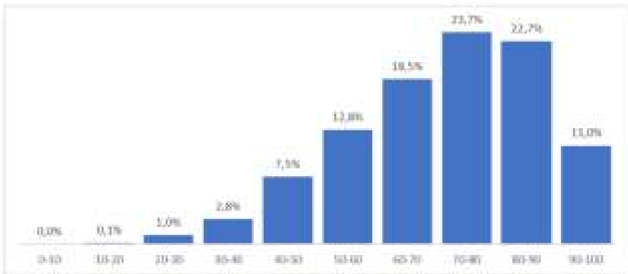
Olasılık dağılımı bulunmaya çalışılan verilerin öncelikle genel tanımlayıcı istatistik (descriptive statistics) analizi yapılmalı, verilerde görülencek uç değerler (outliers) incelenmeli, bu verilerin hatalı kayıt mı yoksa gerçek olup olmadığına bakılmalı, gerekirse bu uç değerler ayrılarak farklı bir analizle ele alınmalı (örneğin, bir derneğe kayıt yaptırmak için gelenlerin yaş, gelir durumu vb. bilgilerine ilişkin veriler arasında 92, 95 yaşında, yıllık 10 milyon geliri olan verilerin olması).

Dağılımı Şekli ve Türünü Belirleme

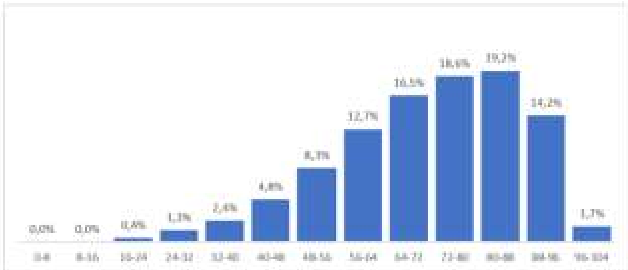
Olasılık dağılımının şeklinin belirlenmesinde, Histogram (Freakans Dağılımı) faydalı ve önemli bir araçtır. Histogram, eldeki verinin belirlenen "bin" aralıklarına nasıl dağıldığını gösterir. Bin aralığı, analiz yapan kişi tarafından belirlenir. Aşağıda, 0-100 arasındaki 3000 adet sayının farklı bin genişliklerine göre histogramları gösterilmektedir. Bu grafiklerden de görüldüğü üzere, bin genişliği histogram ile ortaya çıkan grafiğin şekline etki edebilmektedir, bu nedenle iyi seçilmelidir (Deneme yanılma yapılabilir). Çoğu istatitistik ve analiz programı bin genişliği seçimini otomatik yapmaktadır.



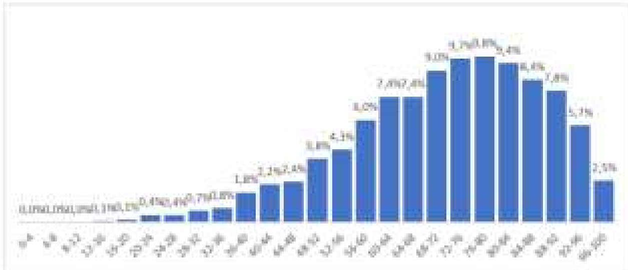
Bin Genişliği = 20



Bin Genişliği = 10



Bin Genişliği = 8



Bin Genişliği = 4

Histogramlar, kesikli ve sürekli değişkenler için düzenlenebilir. Verilerin, kesikli olması durumunda (yaş, bina katı, makine sayısı vb.), bin aralıkları belirlemek de mümkün iken bin aralığı 1 olabilir ve doğrudan her bir çubuk veri değerinin kendisini temsil eder. Ancak, bu durum sürekli veriler için geçerli olamaz. Uzunluk, zaman, ağırlık gibi sürekli veriler için belirli aralıkların belirlenmesi gerekir. Birbirine tam eşit sürekli değişkenlere nadir rastlanır. Bu değerler tamsayıya veya belirli bir ondalığa yuvarlanabilir ancak bu da verinin bozulmasına yok açar.

Histogramdan elde edilen dağılımın şekli bize olasılık dağılımı hakkında genel bir fikir verir. Ancak veriler örneklem olduğundan ve rassallık içerdiğinden hangi dağılıma uyduğunu kesin olarak söylemek mümkün değildir. Gelecekte farklı değerlerin de ortaya çıkabileceği göz önüne alınarak, elde edilen sonuçların bir olasılık dağılımına yaklaşık olarak uyduğu kabul edilebilir.

Dağılımın parametreleri de verilerden elde edilebilir. Örneğin, normal dağılıma ugun görünüyor ise verilerin ortalaması ve standart sapması olasılık dağılımının da parametreleri olarak alınabilir.

Benzetim Modelllerinde Olasılık Dağılımının Belirlenmesine İlişkin Bazı Temel Essaslar

Tek bir denemedeki başarı olasılığı p ise, n adet bağımsız denemedeki başarı sayısının BİNOM Dağılımına, k başarı için gerekli deneme sayısının ise GEOMETRİK (Negatif Binom) Dağılıma uyduğu kabul edilir. Örneğin, 4 tane başarılı atış için gerekli atış adedi Geometrik Dağılım, 10 atışta başarı sayısı Binom Dağılımı.

Rassal değişkenimiz, birim zamanda meydana gelen birbirinden bağımsız olay sayısı poisson dağılımı ise, bağımsız iki olay arası geçen süre üstel dağılıma uyduğu kabul edilir. Örneğin, iki müşterinin bankaya gelişleri arası süre Üstel dağılım, bir saatte bankaya gelen müşteri adedi poisson dağılım.

Elimizde çok az veri varsa veya hiç yoksa ancak rassal değişkenin alabileceği en büyük ve en küçün değerleri biliyor isek Düzgün Dağılım kullanılabilir. Düzgün dağılım, verilen aralıkta tamamen bilinmezliği, tüm olasılıkların eşit olduğunu temsil eder.

Üçgen dağılım, düzgün dağılımdan daha anlamlı bir girdi sağlayabilir. Eğer, rassal değişkenin en düşük ve en yüksek alabileceği değerlerin yanında genellikle hangi değerleri aldığı (mod) da biliniyorsa üçgen dağılımı kullanmak anlamlı olabilir.

Normal Dağılım; -∞ ie +∞ arasında değerler için olasılık dağılımını verir. İki ucu açık. Özellikle negatif değer almaması gereken değişkenler için (ağırlık, zaman vb.) kullanırken sakıncalı olabilir. Ortalama ve standat sapmaya da dikkat ederek hatalı rassal değer elde edilmemesine dikkat edilmeli

Histogramlar, dağılımın belirlenmesi için faydalıdır ancak frekans aralığı (bin) seçimi ve sürekl değişkenlerin belirli hücrelere sınırlandırılması gibi hususlar problem yaratabilir.

Uygunluk Testi

Verilerimizin tahmin ettiğimiz bir dağılıma (parametreleri ile birlikte) uyup uymadığına Uygunluk Testleri (Frekans Testleri) ile karar verebiliriz. Bu testler, rassal sayılar ile ilgili kısımda açıklanan Ki-Kare Testi ve Kolmogrov-Simirnov Testidir.

Bu testler birer hipotez testidir:
H_o : x rassal değişkeni f dağılımına belirtilen parametreler ile uyar
H_1 : x rassal değişkeni f dağılımına belirtilen parametreler ile uymaz.

Hatırlatma: eğer test sonucunda bulunacak p değeri belirlen α değerinden (genellikle α=0.05) küçük ise Ho reddedilir, yani f dağılımına uyduğu kabul edilir. Ancak p değeri büyük ise, Ho reddedilemez yani f dağılımına uyduğunu söyleyemeyiz.

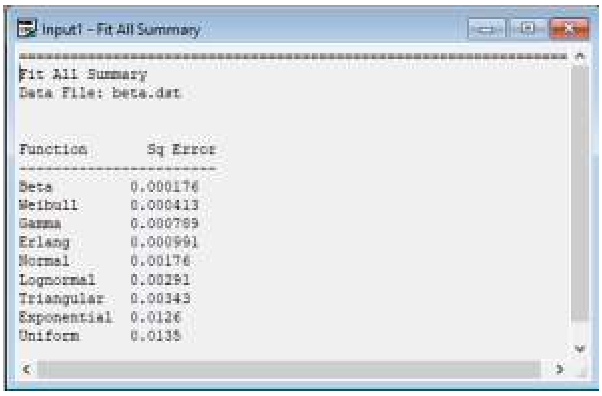
Elimizdeki veri büyüklüğü (yani örneklem büyüklüğü), bu testlerde önemlidir. Az sayıdaki veri (örn. <20) durumunda, bu testlerin Ho hipotezini reddetme ihtimali çok azdır. Bu da sanki testlerin çok başarılı olduğu yanılgısına götürür. Dikkat etmek lazım !!!

Uygunluk testi ile seçilen dağılım kabul edilmez ise, farklı bir dağılım seçilerek prosedür tekrarlanır. Toplanan veri bilinen dağılımlardan hiçbirine uymuyor ise, **EMPİRİK DAĞILIM** tanımlaması yapılır.

ARENA Input Analyzer Kullanarak Girdi Olasılık Dağılımının Bulunması (Tahmin Edilmesi)

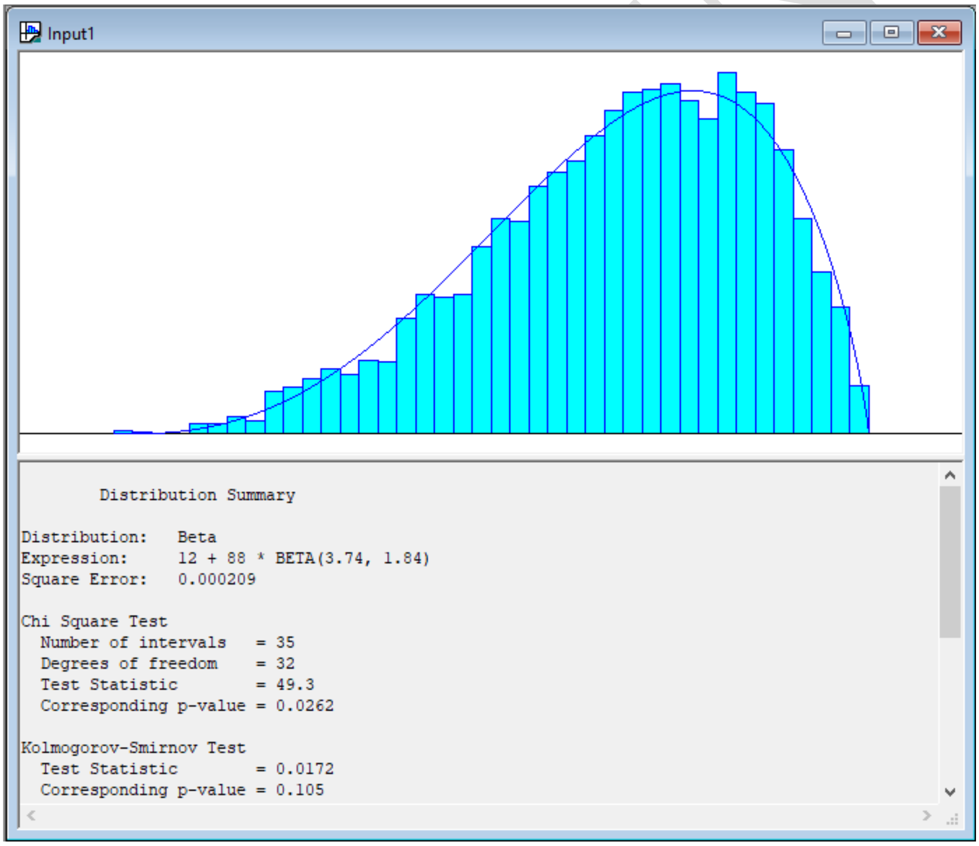
ARENA Input analyzer eldeki verilerin hangi dağılıma uyduğunu ve bu dağılımın parametrelerinin ne olduğunun tahmin edilmesinde kullanılabilir.

Aşağıda ARENA Input Analyzer ile örnek olarak elde edilmiş sonuçların ekran görüntüleri bulunmaktadır.



Verilerin analiz sonucunda en uygun dağılım Beta dağılımı olarak görülmektedir. Bu dağılım seçimi için verilen hata değeri de çok düşük görülmektedir.

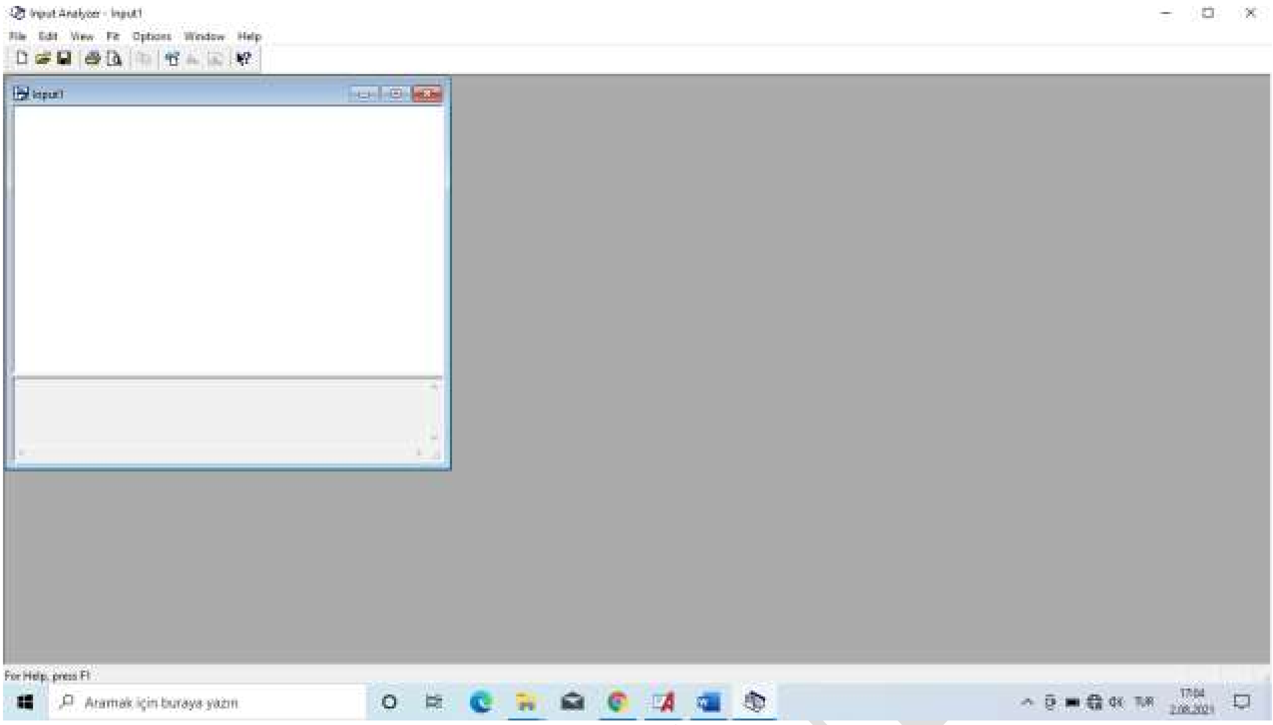
Beta dağılımı seçilmesine yönelik test sonuçları ve dağılımın parametreleri de Input analyzer



sonuçlarında gösterilmektedir. Kikare testi p değeri 0.0262, Kolmograv-Simürnov Testi p değeri 0.105 olarak görülmektedir.

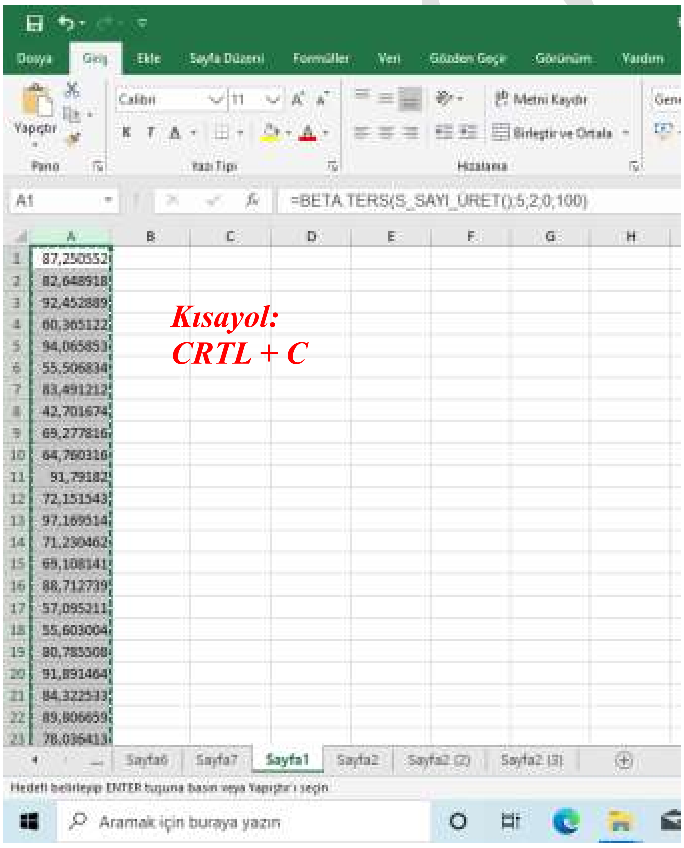
Arena Input Analyzer, Arena programında Araçlar (Tools) menüsünden erişilebilir.

Input Analyzer penceresi açıldığında File Menüsünden, New tıklanarak yeni bir Input dosyası açılır.

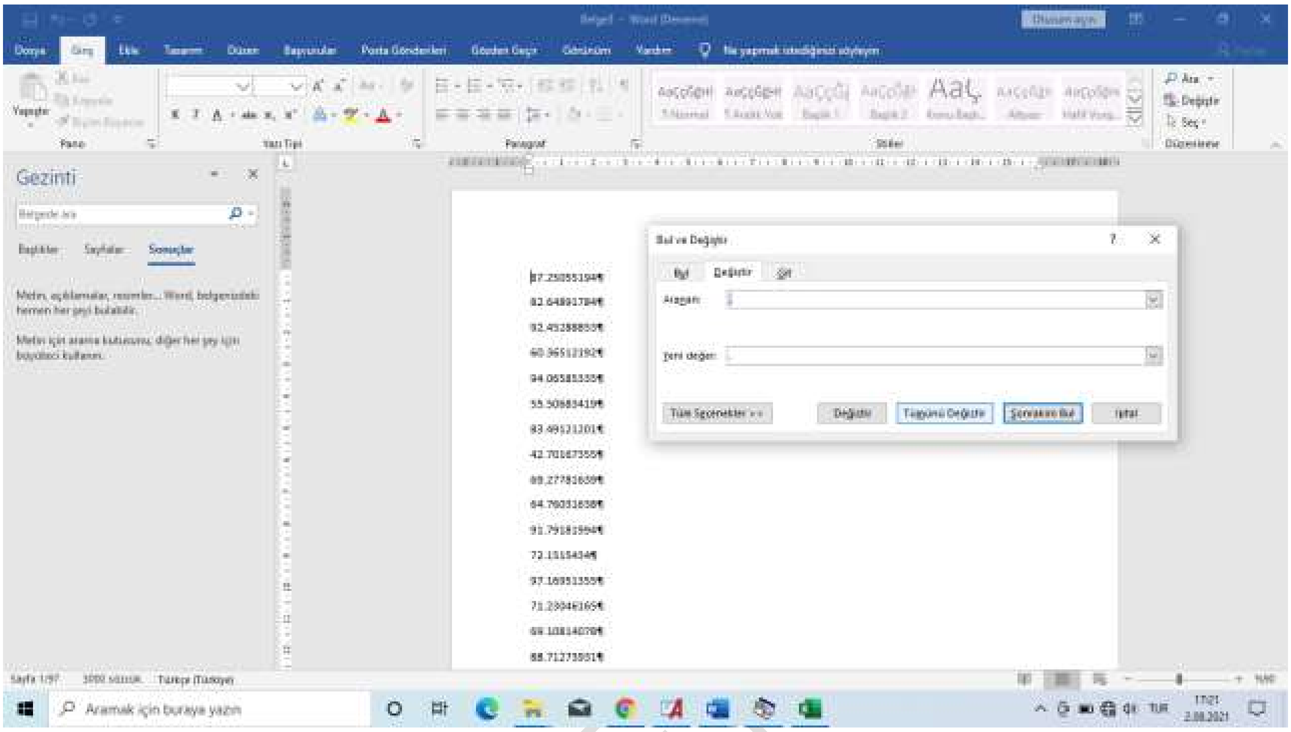


Öncelikle, analiz için yükleyeceğimiz veriler uygun formatta bir metin dosyasında hazır hazır hale getirilmelidir. Arena Input Analyzer, sadece belirli formatta kaydedilmiş verileri kabul etmektedir. Bunun için şu adımları takip edin:

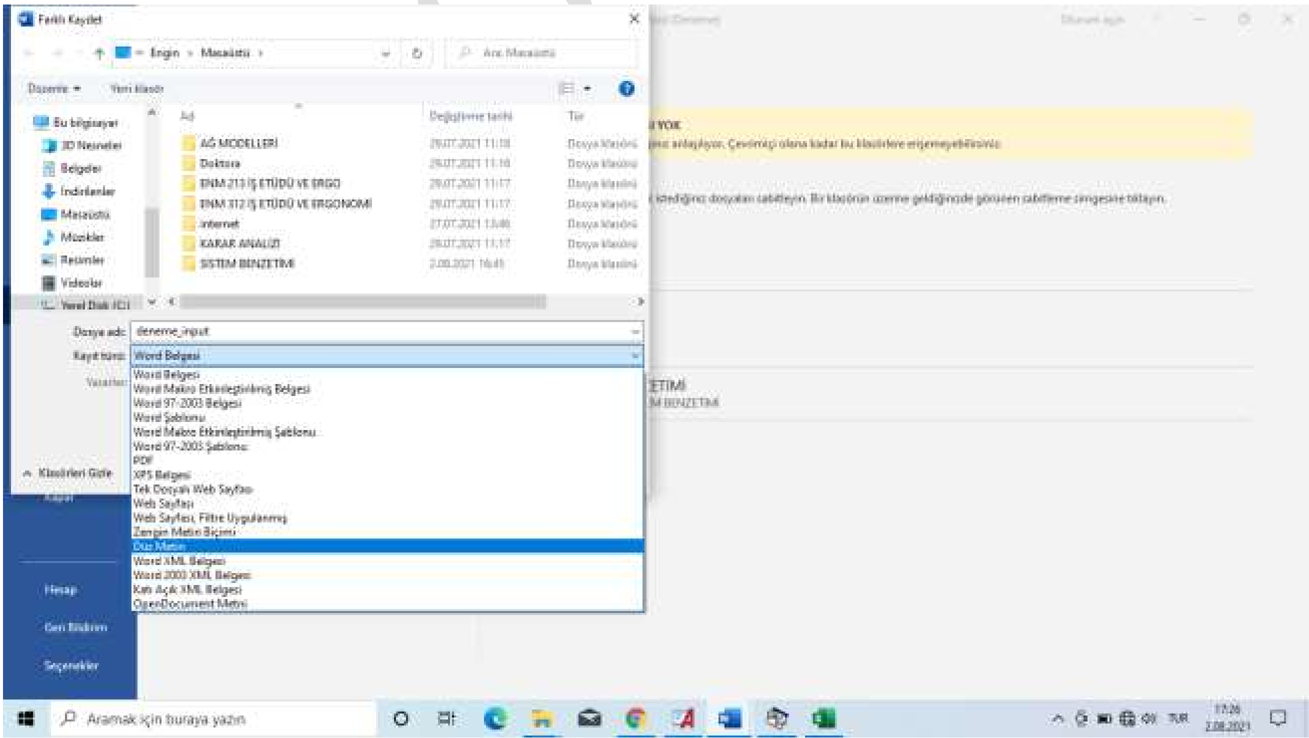
1- Verileri bir Word dosyasına kopyalayın. Veriler Excel'de bir sütunda ise, tüm sütun seçilerek kopyalanır ve Word dosyası penceresinde yeni bir dosyaya "Yanlızca Metni Koru" şeklinde yapıştırın.



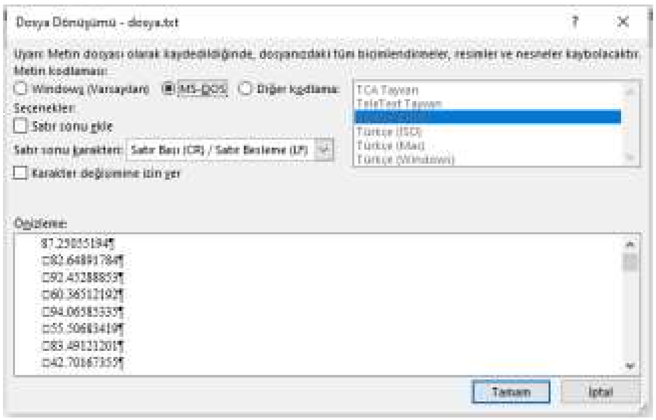
2- Input Analyzer, ondalık ayracı olarak "." (nokta) işaretini kabul etmektedir. Eğer, verinizde ondalık değerler var ise ve bunları Word dosyasına "," (virgül) işaretli olarak kopyaladıysanız, tüm virgülleri nokta olarak değiştirin. (aşağıdaki ekran görüntüsündeki şekilde)



3- Şimdi Word dosyasını kaydedin. Bunun için, Dosya Menüsünden Farklı Kaydet seçeneğini tıklayın ve açılan pencereden aşağıdaki şekide Dosya Türünü "Düz Metin" olarak seçin, dosyanıza bir ad verin ve kaydete tıklayın.

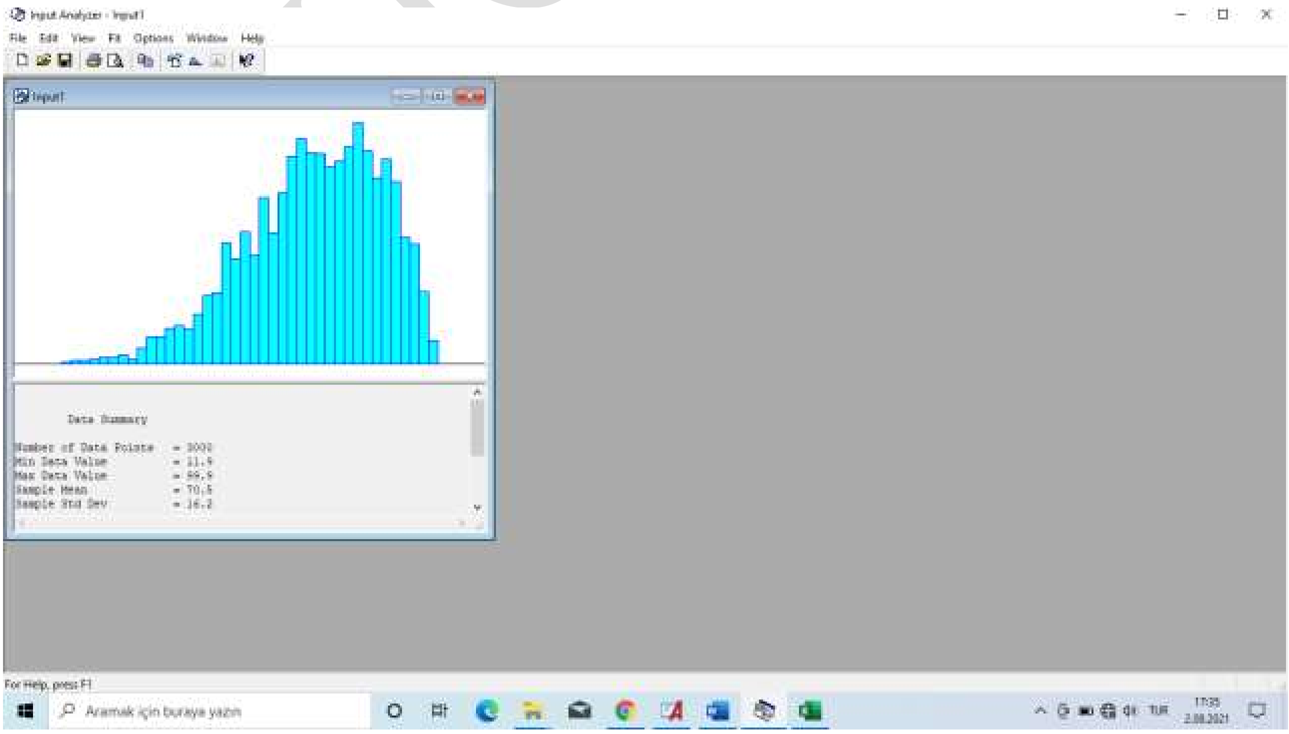


4- Karşına çıkan pencereden (aşğıda görüldüğü şekilde), Metin Kodlamasını "MS-DOS" olarak seçin ve TAMAM tıklayarak çıkın.

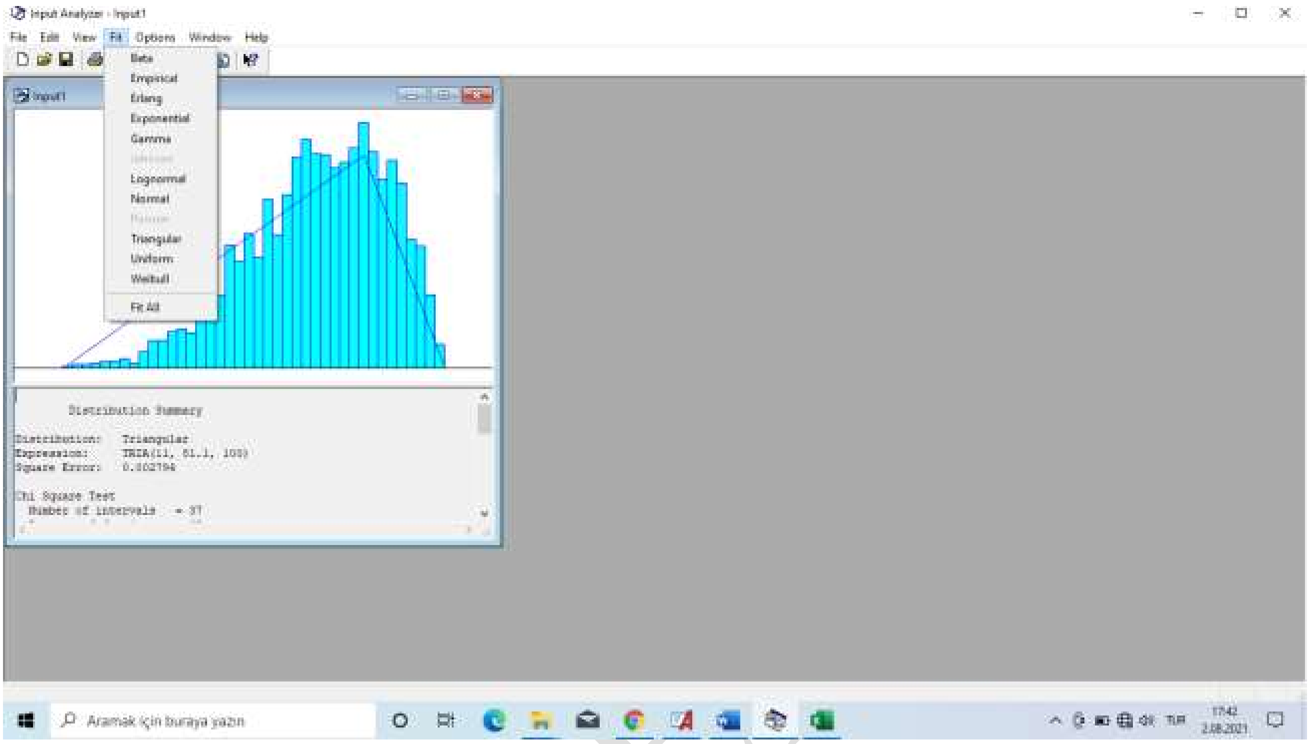


5- Şimdi analiz etmek istediğimiz verileri yüklemek için, File menüsünden Data File > Use Existing seçeneğini tıklayın.

Veriler yüklendiğinde, doğrudan aşağıdaki ekran görüntüsünde olduğu gibi verilere ait histogram ve istatistiki bilgiler görülecektir.



Veriler yüklendikten sonra, FIT menusünden istenilen dağılım seçilerek o dağılıma uygunluk incelenebilir veya Fit All seçeneği seçilerek programda yer alan tüm dağılımların tümüne uygunluk topluca yaptırılır. Seçilebilecek dağılım türleri : Beta, Gama, Erlang, Exponential (Üstel Dağ.), Normal, Lognormal, Triangular (Üçgen Dağ.), Uniform (Düzgün Dağ.), Poisson ve Weibull Dağılımlarıdır.

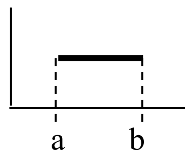
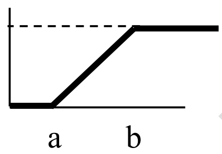


ÖDEV ÇALIŞMALARI

2.1 . Aşağıda belirtilen olasılık dağılımlarının her biri için; Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (pdf) ve Grafiğini, Dağılımın Birikimli Dağılım Fonksiyonu (cdf) ve Grafiğini, Dağılımın parametrelerini ve özellikleri ile genel kullanım yerlerini içeren bir tablo hazırlayın.

Sürekli: Düzgün Dağılım, Üçgen Dağılım, Normal Dağılım, Üstel Dağılım, Beta Dağılımı, Gama Dağılımı, Lognormal Dağılımı, Weibull Dağılımı
Kesikli: Bernoulli Dağ., Binom Dağ, Geometrik Dağılım (Negatif Binom Dağılımı), Poisson Dağılımı

Örnek Tablo Formatı:

Dağılım Adı	pdf	cdf	Parametreler	Açıklama
Düzgün Dağılım	$f(x) = 1/(b-a)$ 	$F(x) = (x-a) / (b-a)$ 	a, b	Alt ve üst sınırları bilinen ancak bu aralıkta tam bir belirsizlik olan her türlü durumda kullanılabilir.

Açıklama sütununa, dağılım için kullanım alanları ve bu dağılıma özgü bir özellik varsa yazılabilir.

2.2. İnternet üzerinden bir veri seti bulun ve bu verinin hangi dağılıma uygun olduğunu Input Analyzer ile tahmin edeceğiniz bir incemele yapın. Bu dağılıma göre 100 adet rassal değişken üretin.

2.3. Excel programında yeni bir dosya açın. Boş bir sayfada; A sütununda 100 adet rassa sayı üretin.

Bu sütundaki rassal sayıları kullanarak; B,C,D,E,F,G,H,I sütunlarında 100'er adet rassal değişken üretin.

B sütununda p=0,3 olan Bernoulli dağılımı,

C sütununda n=5, p=0.4 olan Binom dağılımı,

D sütununda a=5 b=10 olan Düzgün dağılım,

E sütununda Normal Dağ (mü=10, sigma=1),

F sütununda Üçgen Dağılım (a=6, b=9, c=15),

G sütununda ort. 3 dk olan Üstel Dağılım (λ=1/3 veya μ=3),

H sütununda BETA (α=5, β=2) Dağılımı,

I sütununda $f(x) = -0.08x + 0.4 \quad 1 \leq x \leq 6$ Dağılımı olsun.

Dağılımlar için verilen parametreleri hücrelerin içerisine yazın ve rassal değişken hesaplaması yaptığınız hücrelerde parametrelerin olduğu hücrelere referans verin (yani formül içerisine parametre değerlerini doğrudan sayı olarak yazmayın)

Ayrıca, ilk rassal sayıyı kullanarak, elle hesaplama yaparak bellirtilen her dağılımdan birer rassal değişken üretin ve Excel'de elde edilen ilgili satırdaki değerler ile karşılaştırın. Hangi dağılımları elle hesaplamayı öğrenmedik ? Belirtin !

3. MANTIKSAL MODEL (LOGIC MODEL)

Benzetimde mantıksal model, girdilerin kullanılarak çeşitli fonksyonlar ile çıktı üretme sürecini temsil eder. Bu da tamamen modellenen sisteme bağlıdır. Mantıksal model, varlıklar ve kaynakların benzetimde uyması gereken kurallarıdır. Sistemin işleyişi ile ilgili önemli hususlar mantıksal modelde yer almalıdır.

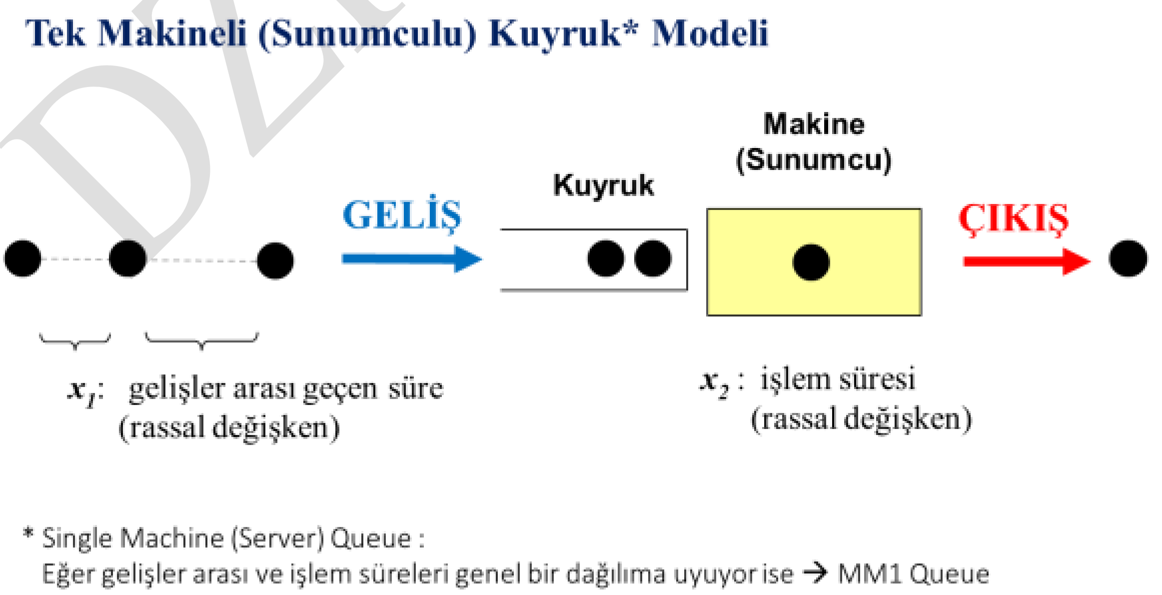
Örneğin, bir bankaya işlem yapmak için gelen müşterilerin modellendiği bir sistemde, bir banka görevlisinin (kaynak) aynı anda tek bir müşteri ile ilgilenmesi kuralı, kuyruğa girme kuralı, "önce gelen önce hizmet alır kuralı vb. basit ama önemli kurallar mantıksal modelin ilgi alanına girer.

Örneğin; rassal süre aralıklarında arızalanan makinelerin yer aldığı bir modelde, arızalı olan bir makinenin işlem yapamayacağı, eğer devam etmekte olduğu bir iş varsa bunun da devam edemeyeceği, arızalanan makinenin onarımı için hangi kuralların uygulanacağı (hemen onarmak veya beklemek, belirli aralıklarda onarmak vb) gibi hususlar benzetimib mantıksal modelinin içerisinde yer alır. Mantıksal model ile ilgili diğer bir hata da, animasyona gereğinden fazla odaklanılmasıdır. Bu durumda, çoğu zaman göze güzel görünen ama analize katkısı kısıtlı olan modeller elde edilmektedir.

Mantıksal model, benzetimi yapılan sistemde ne kadar detaya inildiğini yansıtır. Yapılan genel hatalardan birisi, sisteme ait gereksiz detayların mantıksal modele dahil edilmesidir. Benzetim modellemesi konusunda edinilen tecrübe, detay seviyesini iyi ayarlamaya yardımcı olur. Çok detaylı bir model oluşturup daha sonra kademe kademe sadeleştirmek bazen iyi bir yaklaşımken, bazen de basit bir model ile başlayıp kademe kademe ihtiyaç duyuldukça detaylandırmak da çoğu zaman iyi bir uygulamadır. Oluşturulacak modelin detay seviyesi ayarlanırken, model çalıştırılıp ön sonuçlar incelenebilir.

Bu bölümde; kesikli olay benzetiminde geniş bir uygulama alanı bulan Kuyruk Sistemlerine yönelik mantıksal model ele alınacak, konuyu anlamak açısından basit bir tek makineli kuyruk sisteminin mantıksal modeli anlatılacak ve bir basit kuyruk sisteminin elle benzetimi tablo yardımıya çözülecektir.

Kuyruk Modelleri ve Elle Benzetim (Queuing Model and Simulation by Hand)



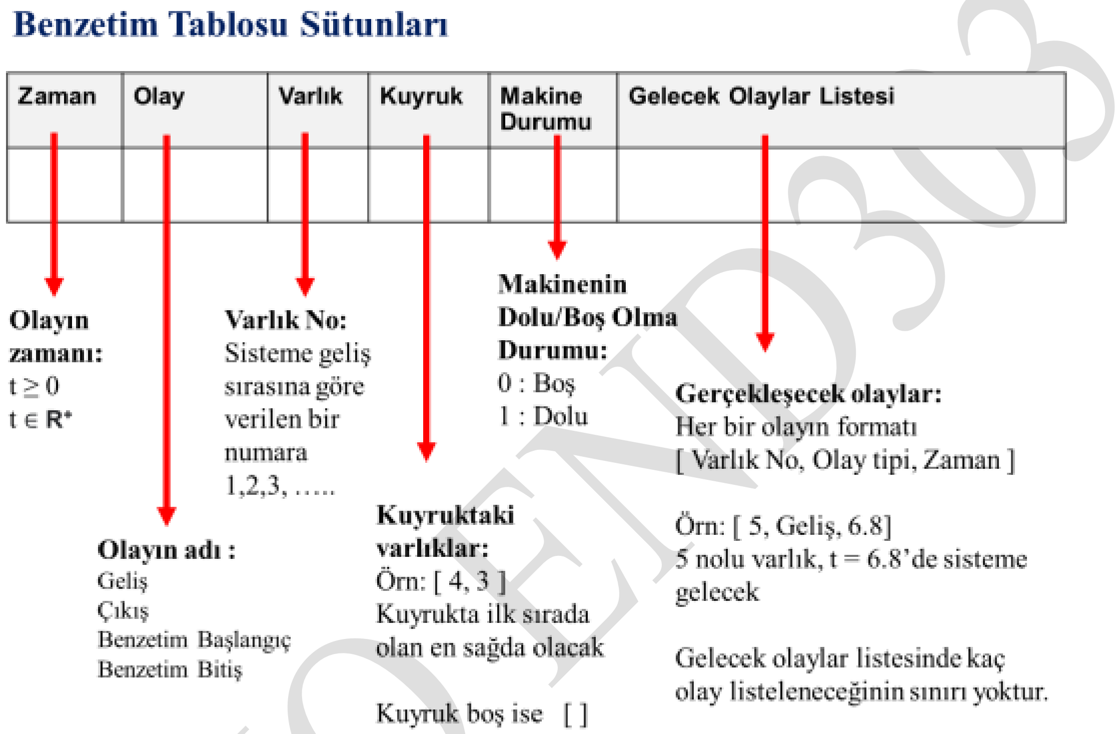
Elle Benzetim İçin Hazırlık İşlemleri

1 – Boş Bir Benzetim Tablosunun Sütun Başlıklarını Doldurarak Oluşturulması

Sütunlar: Zaman, Olay, Varlık, Kuyruk, Makine Durumu, Gelecek Olaylar Listesi

Satırlar : Benzetimdeki olaylar.

Her olay yeni bir satır olarak tabloya eklenecek, bu olaya göre gerekirse kuyruk, makine durumu ve gelecek olaylar listesi sütunları güncellenecek.



Gelecek Olaylar Listesi (Future Events List – FEL), benzetim süresince dinamik olarak sonraki gelecek olayları kaydetmek ve bir sonra gerçekleşecek olayı takip etmek için kullanılır.

Benzetimde gerçekleşecek tüm olaylar aynı anda bu listede yer almaz,

Gelecek olaylar listesi, benzetim boyunca güncellenir (yeni bir olay eklenir, gerçekleşen olay çıkarılır)

Benzetim Saati (Zaman) benzetim başlangıcında sıfır olarak kabul edilir (t = 0)

2 – Benzetim Bitiş Kriterinin Belirlenmesi

İki tip bitiş kriterinden birisi kullanılabilir

- Zamana Bağlı Bitiş : Örn. t = 20 olduğunda benzetimi sonlandır

  Bu durumda; Benzetim Bitiş Olayı, [- , Benzetim Bitiş, 20] şeklinde, benzetimin en başında, Gelecek Olaylar Listesine ve Tabloya eklenir. Bu olayın gerçekleşme zamanı geldiğinde benzetim sonlandırılır.

- Varlık Sayısına ve Olaya Bağlı Bitiş : Örn. 18'inci varlık sisteme girdiğinde benzetimi sonlandır.

  Gelecek Olaylar Listesine Benzetim Bitiş olayı eklenmesine gerek yoktur, ancak belirtilen varlığın giriş (veya çıkış) olayı takip edilir, olay gerçekleştiği anda benzetim sona erdirilir.

3 – Varlıkların Gelişleri Arası Süreleri ve İşlem Sürelerinin Üretilmesi

Varlıkların sisteme gelişleri arası geçen süreleri birer rassal değişkendir. Modelde verilen dağılıma uygun olarak belirli bir miktarda varlığın sisteme gelişleri arası süreler benzetime başlamadan önce üretilerek (rassal değişken üretimi) bir tabloda kayıt altında tutulabilir. Gelişler arası geçen süreler kullanılarak, her bir varlığın sisteme hangi zamanda geleceği de bu sürelere göre hesaplanır.

Gelişler arası süreler, en başta topluca üretilmeden, her yeni varlığın gelmesi planlandığında ayrı ayrı da üretilebilir. En baştan topluca üretmek benzetim esnasında kolaylık olur ancak benzetim bitiş kriteri zamana bağlı ise kaç tane varlık için üretileceğini kestirmek zor olabilir.

Gelişler arası süreler üretildikten sonra, ilk geliş (en erken gerçekleşecek geliş olayı) Gelecek Olaylar Listesine [1, Geliş, x1] şeklinde eklenir. (x1 : geliş zamanı)

Benzer şekilde, belirli sayıda varlığın makinedeki işlem süreleri de, benzetim başlangıcından önce, topluca üretilerek tabloda tutulabilir.

İşlem süreleri, çıkış olaylarının zamanlarını hesaplamak için kullanılacaktır.

Varlığın Çıkış Zamanı = İşleme başladığı zaman + İşlem süresi

Benzetim başlangıcında, gelecek olaylar listesine ve benzetim tablosuna her hangi bir bitiş olayı eklenmez (Varlık makineye işleme girdiğinde çıkış olayı planlanarak Gelecek Olaylar Listesine eklenecektir).

Benzetim Ana Döngüsü

Benzetim Bitiş Kriteri Gerçekleşene kadar tekrarla :

Gelecek Olaylar Listesinden, en yakın gerçekleşecek olayı seç.

Bu olay, *Benzetim Bitiş* Olayı ise :

    Benzetimi Bitir.

Bu olay *Benzetim Bitiş* Olayı Değil ise:

    Bu olay bir *Geliş* Olayı ise:

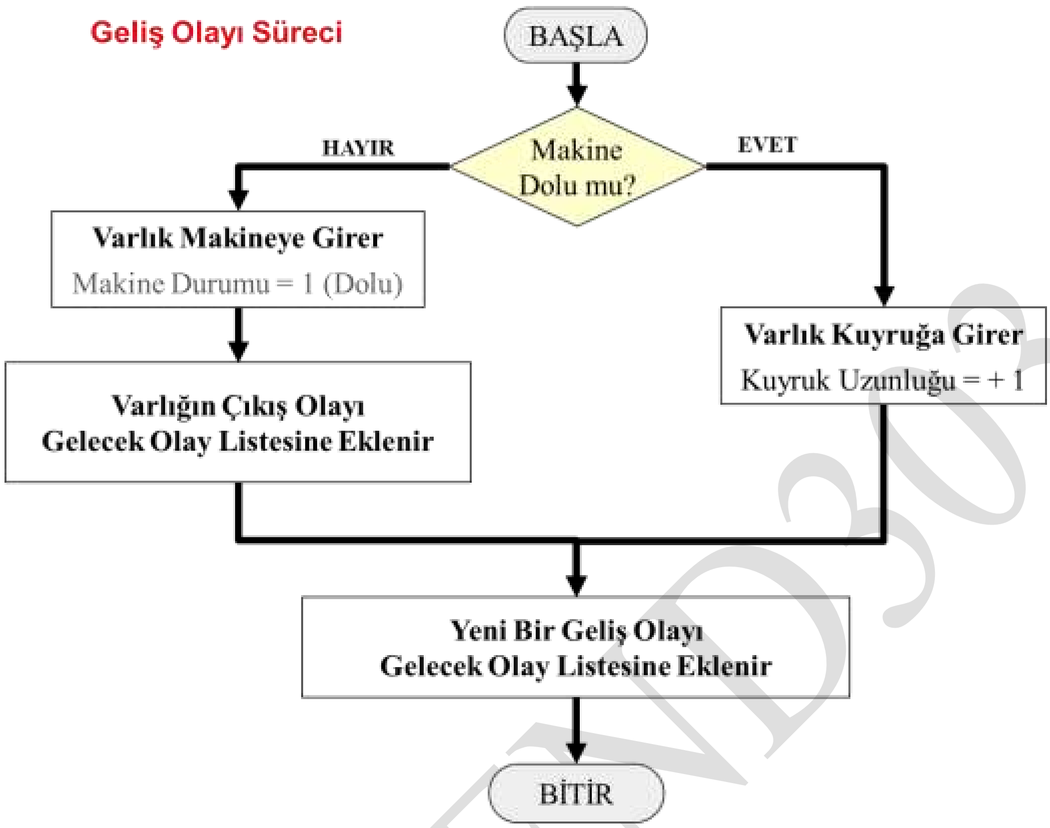
        Geliş Olayı Sürecine Git.

    Bu olay bir *Çıkış* Olayı ise:

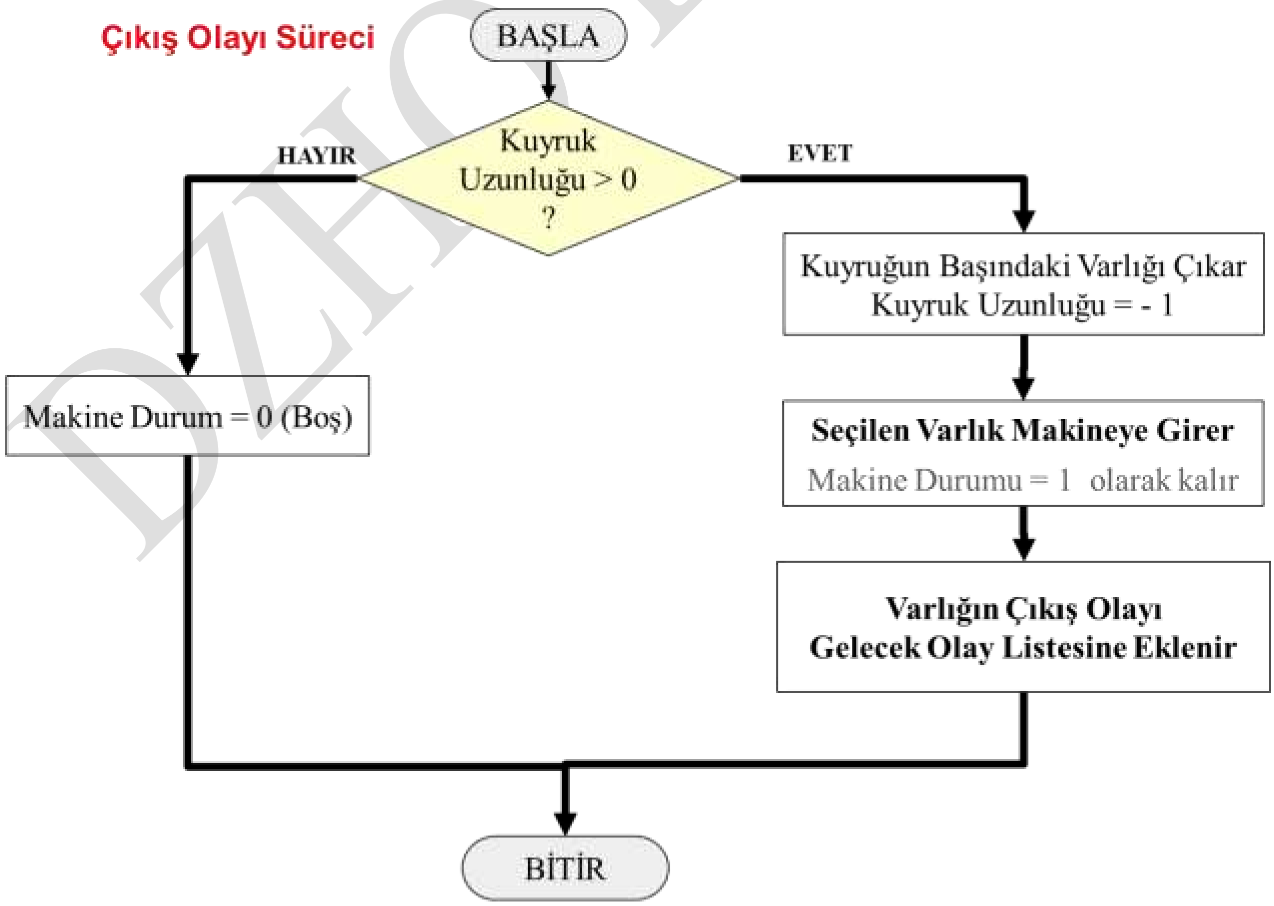
        Çıkış Olayı Sürecine Git.

    Bu olayı Gelecek Olaylar Listesinden çıkar

Geliş Olayı Süreci



Çıkış Olayı Süreci



ÖRNEK : Tek sunumculu bir kuyruk sisteminin benzetimi yapılmak isteniyor.

Verilenler: Sisteme gelişler arası süre ve işlem süreleri dağılımları aşağıdadır.

Sisteme,12 varlığın girişi planlanacaktır.

Benzetim Bitiş kriteri : t = 36

İstenen: Bu sistemin benzetim tablosu kullanarak elle benzetimini yapınız.

x_1 : gelişler arası geçen süre (dk.)

x_1	$p(x_1)$	$P(x_1)$
1	0.2	0.2
2	0.2	0.4
3	0.2	0.6
4	0.2	0.8
5	0,2	1

x_2 : işlem süresi (dk.)

x_2	$p(x_2)$	$P(x_2)$
1	0.05	0.05
2	0.05	0.10
3	0.25	0.35
4	0.35	0.70
5	0.30	1

Rassal Değişken Üretimi

Varlık No	u_1	Gelişler Arası Süre (x_1)	Geliş Zamanı (t)	u_2	İşlem Süresi (x_2)
1	0.191	1	1	0.892	5
2	0.755	4	5	0.056	2
3	0.265	2	7	0.092	2
4	0.925	5	12	0.651	4
5	0.052	1	13	0.955	5
6	0.045	1	14	0.141	3
7	0.349	2	16	0.338	3
8	0.447	3	19	0.674	4
9	0.658	4	23	0.026	1
10	0.818	5	28	0.033	1
11	0.921	5	33	0.055	2
12	0.919	5	38	0.882	5

Yukarıdaki tabloda, elle benzetimde kullanılmak üzere, benzetim öncesinde her varlık için üretilmiş olan gerekli rassal sayılar ve rassal değişkenler bulunmaktadır.

Benzetim Tablosu (Başlangıç)

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benzetim Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]

Benzetim Başlangıç Olayı

t = 0

Benzetim Başlangıcında

Kuyruk Boş
Makine Boş

Benzetim Bitiş Olayı

İlk Geliş Olayı

Benzetim Başlangıç Olayı satırında «Varlık» sütunu boş bırakılır

Aynı durum, Benzetim Bitiş Olayı satırı için de geçerlidir

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benzetim Bitiş, 36] **[1, Geliş, 1]**

Bu olay seçilir ve bir sonraki satırda bu olay gerçekleştirilir !

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benzetim Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] **[1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]**

- 1 nolu varlık, sisteme t=1'de geldi,
- Geldiği anda makine boş olduğundan, doğrudan makineye girdi (kuyruğa girmesine gerek kalmadı),
- Makine durumu = 1 (Dolu) yapıldı,
- Çıkış zamanı hesaplanarak, çıkış olayı, Gelecek Olaylar Listesine eklendi,
- Ayrıca, yeni bir geliş olayı (bir sonraki varlık için) Gelecek Olaylar Listesine eklendi

Makineye giriş zamanı : 1
İşlem Süresi : 5
+ ---------------------------
Çıkış Zamanı : 6

2 nolu varlık için hesaplanmış olan ve tabloya kaydedilen Geliş Zamanı

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benzetim Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]

Gelecek Olaylar Listesinde 3 olay var:

Bu olaylar arasında, en yakın zamanda gerçekleşecek olan olay 2 nolu varlığın geliş olayıdır [2,Geliş,5].

Bu olay listeden alınır ve bir sonraki satırda bu olay gerçekleştirilir !

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] **[3, Geliş, 7]**

2 nolu varlık geldiğinde, makine doludur, kuyruğa girer.

Makine durumu =1 olmaya devam eder (Hâla, 1 nolu varlığın işlemi devam ediyor).

Yeni bir geliş olayı (3 nolu varlık), Gelecek Olaylar Listesine eklenir.

Aksi belirtilmedikçe; kuyruk disiplini: ilk gelen ilk önce çıkar (FIFO – First In First Out)

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [3, Geliş, 7]

Gelecek Olaylar Listesinde 3 olay var:

Bu olaylar arasında, en yakın zamanda gerçekleşecek olan olay, 1 nolu varlığın Çıkış olayıdır [1, Çıkış, 6].

Bu olay listeden alınır ve bir sonraki satırda bu olay gerçekleştirilir !

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [3, Geliş, 7]
6	Çıkış	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [3, Geliş, 7] **[2, Çıkış, 8]**

1 nolu varlık çıkış yaptığında, kuyrukta bekleyen 2 nolu varlık hemen makineye girer

Bir varlığın kuyruktan çıkıp makineye girmesi ayrı bir olay olarak ele alınmaz ve kuyruktan makineye giriş anlık gerçekleşir (ayrıca bir süre gerekmiyor). Makine boşalınca otomatikman kuyruktan bir varlık alınır (kuyrukta bekleyen varsa).

Makineye giren 2 nolu varlığın Çıkış Olayı Gelecek Olaylar Listesine eklenir.
Çıkış Zamanı = Makineye Giriş Zamanı + İşlem Süresi = 6 + 2 = 8

Makineye yeni bir varlık girdiğinde, varlığın çıkış olayı Gelecek Olaylar Listesine eklenir !

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [3, Geliş, 7]
6	Çıkış	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [3, Geliş, 7] [2, Çıkış, 8]

Gelecek Olaylar Listesinde 3 olay var:

Bu olaylar arasında, en yakın zamanda gerçekleşecek olan olay, 3 nolu varlığın Geliş olayıdır. [3, Geliş, 7]

Bu olay listeden alınır ve bir sonraki satırda bu olay gerçekleştirilir !

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [3, Geliş, 7]
6	Çıkış	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [3, Geliş, 7] [2, Çıkış, 8]
7	Geliş	3	[3]	1	[- ,Benz.Bitiş, 36] [2, Çıkış, 8] **[4, Geliş, 12]**

3 nolu varlık geldiğinde, makine dolududur, kuyruğa girer.

Yeni bir geliş olayı (4 nolu varlık için), Gelecek Olaylar Listesine eklenir.

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [3, Geliş, 7]
6	Çıkış	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [3, Geliş, 7] [2, Çıkış, 8]
7	Geliş	3	[3]	1	[- ,Benz.Bitiş, 36] [2, Çıkış, 8] [4, Geliş, 12]

Gelecek Olaylar Listesinde 3 olay var:

En yakın zamanda gerçekleşecek olan olay, 2 nolu varlığın Çıkış olayıdır. [2,Çıkış, 8]

Bu olay listeden alınır ve bir sonraki satırda bu olay gerçekleştirilir !

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- ,Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [3, Geliş, 7]
6	Çıkış	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [3, Geliş, 7] [2, Çıkış, 8]
7	Geliş	3	[3]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [2, Çıkış, 8] [4, Geliş, 12]
8	Çıkış	2	[ ]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [4,Geliş,12] **[3, Çıkış, 10]**

2 nolu varlık çıkış yaptığında, kuyrukta bekleyen 3 nolu varlık hemen makineye girer

Makineye giren 3 nolu varlığın Çıkış Olayı Gelecek Olaylar Listesine eklenir.
Çıkış Zamanı = Makineye Giriş Zamanı + İşlem Süresi = 8 + 2 = 10

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- ,Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [3, Geliş, 7]
6	Çıkış	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [3, Geliş, 7] [2, Çıkış, 8]
7	Geliş	3	[3]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [2, Çıkış, 8] [4, Geliş, 12]
8	Çıkış	2	[ ]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [4,Geliş,12] [3, Çıkış, 10]

En yakın zamanda gerçekleşecek olan olay: 3 nolu varlığın Çıkış olayı. [3,Çıkış, 10]
Bu olay listeden alınır ve bir sonraki satırda bu olay gerçekleştirilir !

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benzetim Başlangıç	-	[ ]	0	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [3, Geliş, 7]
6	Çıkış	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [3, Geliş, 7] [2, Çıkış, 8]
7	Geliş	3	[3]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [2, Çıkış, 8] [4, Geliş, 12]
8	Çıkış	2	[ ]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [4, Geliş, 12] [3, Çıkış, 10]
10	Çıkış	3	[ ]	0	[- , Benz.Bitiş, 36] [4, Geliş, 12]

3 nolu varlık çıkış yaptığında, kuyrukta bekleyen olmadığından, makineye giriş olmadı, makine durumu = 0 (Boş) olarak değiştirildi. **Yeni bir Geliş olayı planlanmadı !**

Bu şekilde, benzetimin bitiş kriterine kadar devam edilir.

Ödev Çalışması 3.1

Tabloyu tamamlayın ve tamamladığınız tabloya göre;

a. Zamana göre kuyruk uzunluğu grafiğini çizin,

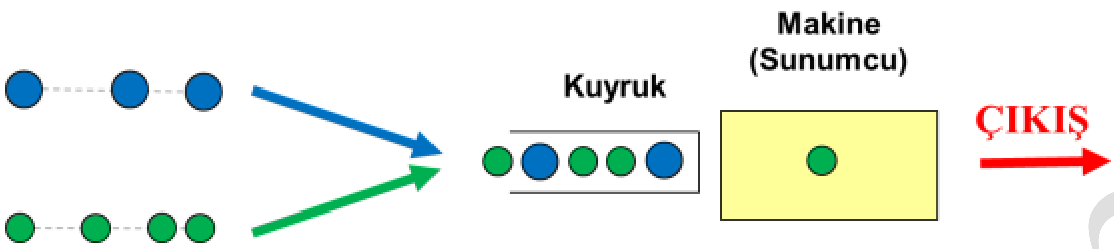
b. Aşağıdaki istatistikleri hesaplayın:

- Kişi başına kuyrukta bekleme süresi ortalaması (beklenen değeri),
- Ortalama kuyruk uzunluğu (kuyrukta bekleyen kişi sayısı),
- En yüksek ve en düşük bekleme süresi,
- Makinenin doluluk oranı (kullanım oranı),

İki ve Daha Fazla Sunumculu (Paralel) Model benzetimi nasıl yapılır ? Farkı ne olur?

Kuyruk Benzetim Modellerinde Farklı Varyasyonlar

- Farklı Varlık Tipleri



Varlıkların tek tip değil, farklı tipte olma durumu bir çok sistemde karşılaşılan bir durumdur. Bazen bu farklılığı dikkate almadan tek varlık tipi olarak modellemek yeterlidir (örneğin; tüm varlıkların tek tip müşteri olması) ancak bazen bu ayrımı yapmak daha doğru bir modelleme için gerekli olabilir.

Varlık tiplerinin; gelişler arası süreleri ve/veya işlem süreleri de birbirinden farklı ise modelde farklı gösterilmeleri ve buna göre model içerisinde ayrı ele alınmaları gerekir.

Örneğin; Bir limana giriş yapacak gemilerin kılavuz kaptan ve çekici vasıta hizmeti alması ile ilgili bir benzetim modeli için farklı gemi tipleri modele tanımlanabilir (örneğin; tanker, konteyner, kruvaziyer, yat, askeri gemi vb.)

Örneğin; Her bir tip geminin farklı geliş yoğunluğu olabilir ve genellikle de öyledir (askeri gemi daha seyrek, kruvaziyer daha sık vb.). Her bir gemi tipinin limana aborda olmaya kadar geçen süre, yani kılavuz kaptanı ve çekici vasıta kullanım süresi de genellikle farklı olasılık dağılımlarına uygundur (örneğin; tanker gemilerinin işlemi ortalamada daha uzun süre alır ve bu süre çok değişmez, kruvaziyerler için gerekli süre ortalamada daha kısa ancak varyansı daha fazla olabilir)

Farklı varlık tipleri için farklı olasılık dağılımı verilmiş ise, her bir varlık tipi için rassal değişkenleri ayrı ayrı dağılımlardan üretilir. Olasılık dağılımının adı aynı olabilir ancak sadece dağılımın parametresi farklı ise bile dağılımı farklıdır denir.

Örneğin: Konteynerlerin gelişler arası süresi ~ Üstel Dağ (Ort. 12 saat)

Kruvaziyerlerin gelişler arası süresi ~ Üstel Dağ (Ort. 18 saat)

Tanker gemilerin gelişler arası süresi ~ Üçgen Dağ (12, 18, 48) saat

Ayrıca, bazı sistemlerde kuyruk içerisinde varlık tipine göre bir öncelik durumu olması da bazı sistemlerde mümkündür. Örneğin; liman modelinde, kılavuz kaptan bekleyen gemiler arasında askeri gemilere öncelik verilmesi.

Bu durumda model içerisinde, kuyrukta bekleyenlerin sırası bu önceliğe göre belirlenir (Aksi belirtilmedikçe kuyruk disiplini FIFO kabul edilir).

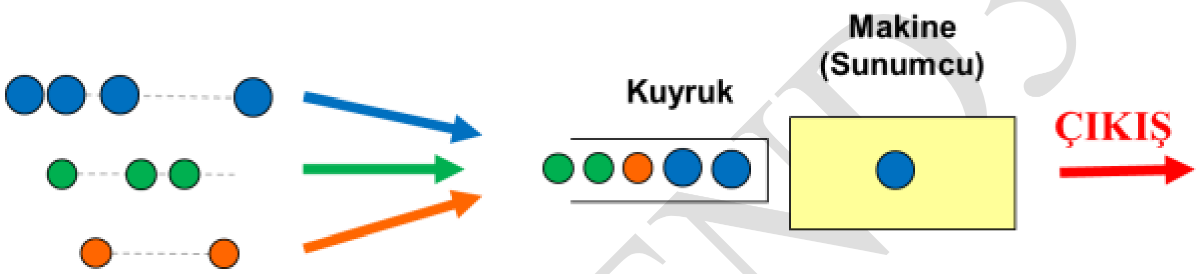
Bunun yanında, bazı sistemlerde, her varlık aynı işlemlerden geçmeyebilir, bazı varlık tipleri bazı işlemlerden muaf olabilirler. Bu da modelde, varlık tipine göre sürecin değişmesi demektir. (Tek sunumculu kuyruk modeli için geçerli değil !)

Gelen varlık hangi tip ise sistemde ona göre kuyrukta sıraya girer ve işlem görür. Bu modellerde, varlığın tipini benzetim içerisinde takip edebilmek için;

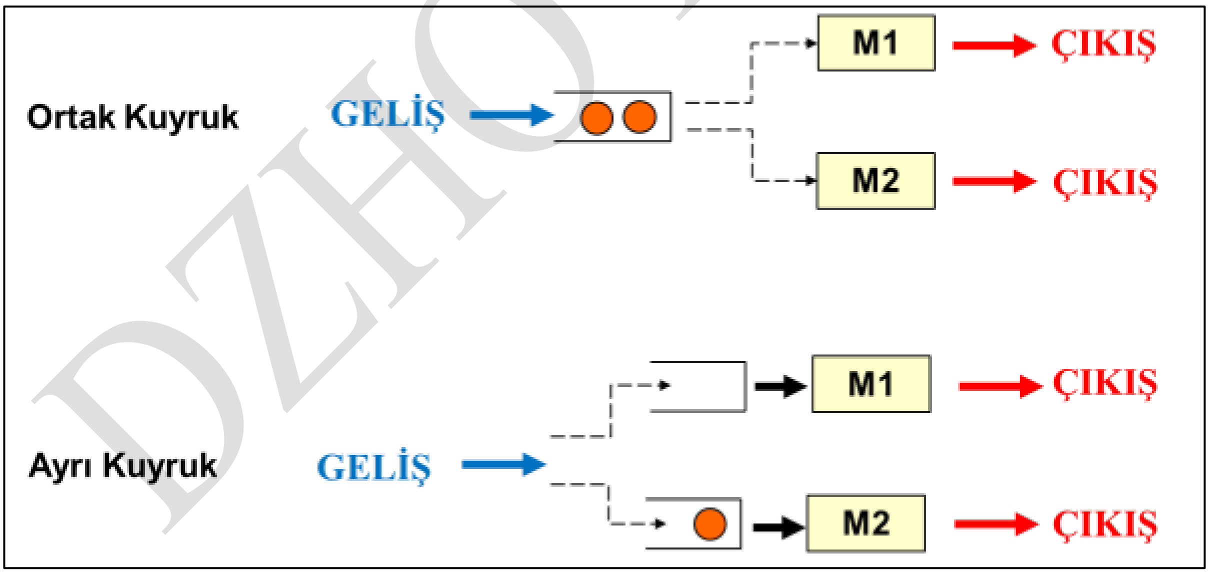
- Her varlık tipinin adı farklı olabilir (ARENA programında: Entity Type) veya
- Varlık adı ortak ancak «tip» adında ayrıca bir özellik (attribute) kullanılır.

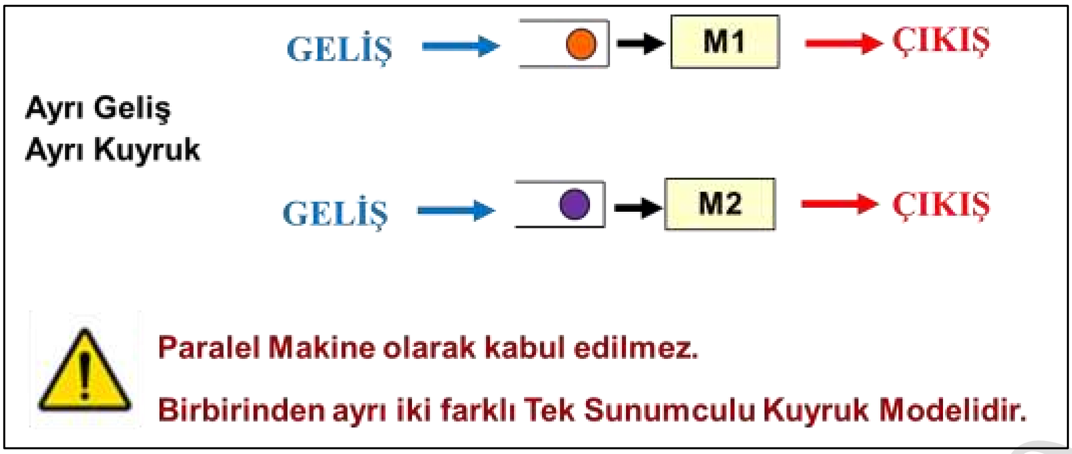
Örneğin; varlığımız gemi, her bir gemi varlığının «tip» özelliği olması.

gemi1.tip = Tanker   gemi2.tip = yat   gemi3,tip = Konteyner ….. vb.



- Bir İşlem için Paralel Makineler





Aynı işlemi yapan paralel makineler için; hemen hemen her zaman ortak kuyruk uygulanır. Aksi belirtilmedikçe, ortak kuyruk kullanılacağı kabul edilir.

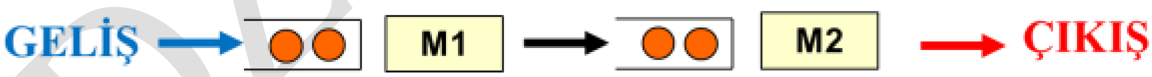
Paralel Makinelerin işlem hızları farklı olabilir. (Makinelerin modeli, yaşı veya görevli personelin tecrübesi vb. nedenler ile): Örneğin : M1 İşlem Süresi : Üstel Dağılım (Ort 5 dk)

M2 İşlem Süresi : Üstel Dağılım (Ort 4 dk)

Boşta duran birden fazla makine olması durumunda, varlıkların işlem göreceği makineyi neye göre seçeceği kuralı (farklı alternatifler):

- Daha hızlı işlem yapan makine/ görevli personel
- Daha tecrübesiz (yavaş) olan görevli personel (tecrübesi artması, öğrenmesi için)
- Kullanım oranı en düşük olan makine/ görevli (çalışma sürelerini dengelemek için)
- Rastgele

- Seri Olarak Bağlı Birden Fazla İşlem



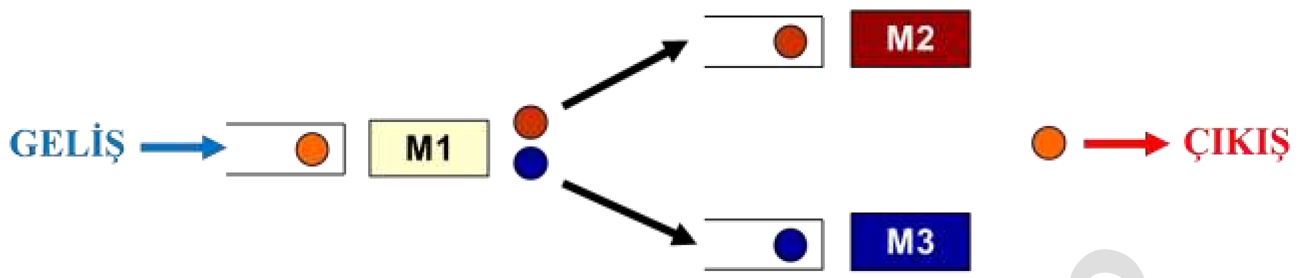
Birbirini takip eden işlemler seri olarak bağlı ise (örn. İmalat hattı); sonraki işleme geliş zamanı için ayrıca rassal değişken üretilmez.

Önceki işlemden çıkış zamanı, sonraki işleme geliş zamanı olur !

İşlem sürelerinin olasılık dağılımı birbirinden farklı olabilir (farklı işlemler olduğundan çok büyük ihtimalle farklı olacaktır zaten)

Hangi durumda, sonraki işlemin kuyruğu genel bir artış gösterir ?

- Paralel Yürüyebilen İşlemler



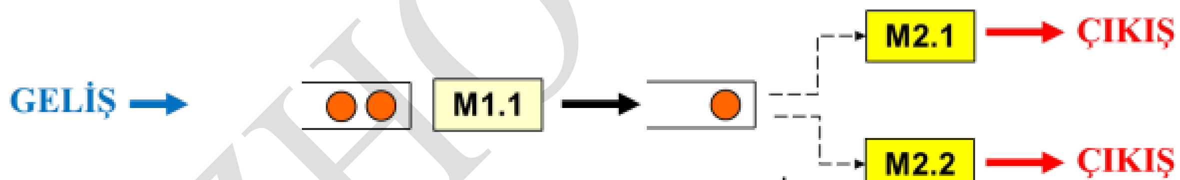
Bazı sistemlerde, sürecin bir kısmındaki bazı işlemler birbirine paralel yürütülebilir.

Çıkış için; her bir paralel işlemin tümü (veya belirli kısmı) tamamlanması gerekir.

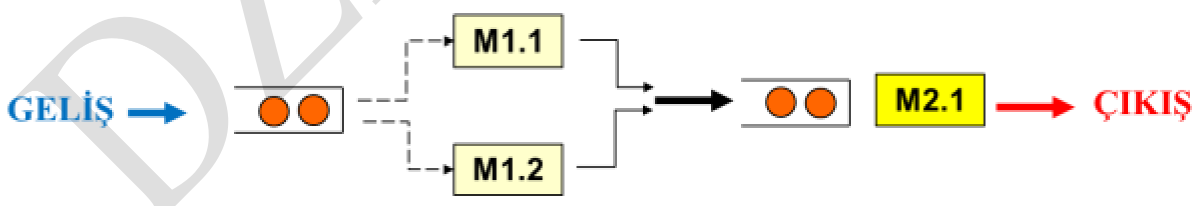
Örneğin; Servise gelen bir otomobil için önce kayıt yapılır ve servis alanına çekilir. Daha sonra usta inceleme yaparken, idari bürodaki sekreter evrak işlerini (kasko vb.) yapabilir. Ayrıca, yedek parça tedarik işlerini yapacak olan kişi de paralel olarak işlerini yürütebilir. Servisten çıkış için tüm işlerin tamamlanması gerekir.

Alım-satım, tersanede gemi bakımı, okula başvuru gibi süreçlerde de bu durum kısmen geçerlidir.

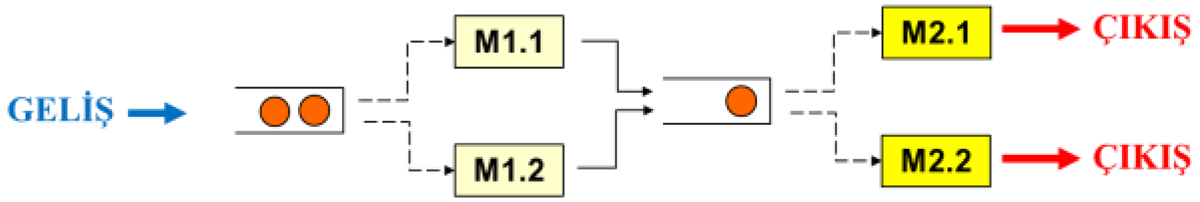
- KARMA SİSTEMLER



Biri Tek Diğeri Paralel Makineli 2 Seri İşlem

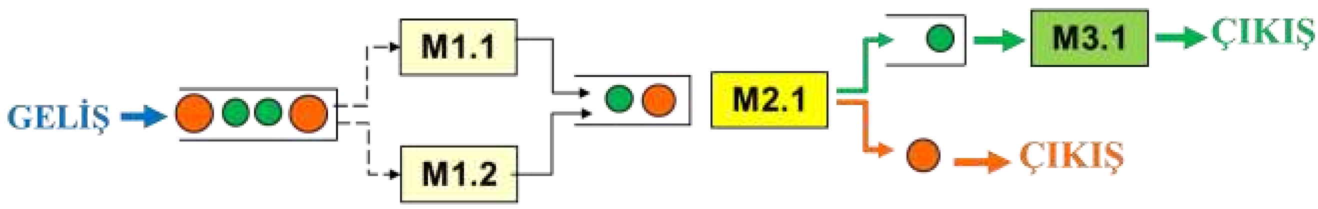


Biri Tek Diğeri Paralel Makineli 2 Seri İşlem



İkisi de Paralel Makineli 2 Seri İşlem

- KOŞULLU KARMA SİSTEMLER



Bazı sistemlerde, varlıkların hangi işlemleri takip edecekleri belirli koşullara bağlıdır.

Bu koşullar;

- İşlemlere girecek varlığın kendisine (tipi veya diğer özelliklerine),
- Sistemdeki diğer varlıklara (bekleyen diğer varlıkların sayısına, tipine vb),
- Kullanılacak kaynaklara (makine, işçi vb.)
- Ortam ve çevre koşullarına (hava durumu, deniz durumu vb.) bağlı olabilir.

Bunların biri (veya birkaçı) belirli koşulların belirlenmesinde kullanılabilir.

Örneğin; İstanbul Tersanesinde bulunan taş havuzda, aynı anda birkaç gemi havuza alınabilmektedir ve bunlar genellikle farklı tipte olmaktadır. Her gemi tipi için ortak işlemler olmakla birlikte, bazı işlemler sadece belirli gemi tipleri için yapılmaktadır (örn. sonarı bulunan gemilerin sonar domunun temizlenmesi).

Helikopter platformunun özel boyanması gerekmektedir. Bu işlemi bekleyen birden fazla başka gemi var ise, bu işlem yapılması beklenmeden tersaneden çıkılabilir.

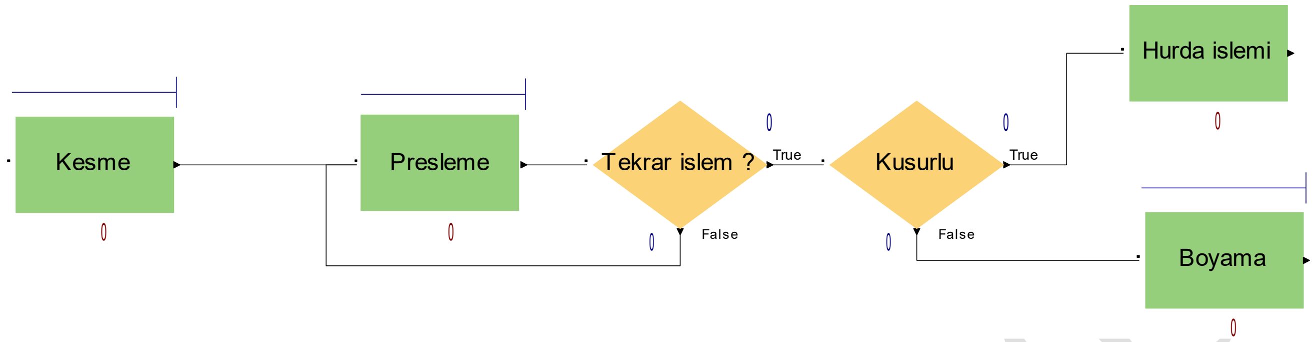
Denizaltı ile denizde eğitim yapan bir korvet, denizaltının tipine göre farklı eğitimler icra edebilir (farklı cihaz ve torpido tipi). Varlık: Korvet , Resource: D/A

Tersanede iskeleye aborda vaziyetteyken, hava şartları müsait ise kreynlerin yağlanması yapılabilir, değil ise hava şartları müsait olana kadar tersanede beklenebilir veya başka bir tersane bakım periyoduna ertelenebilir.

Bu koşulların bazıları ise belirli olasılıklara bağlı (rassal) olabilir. Bu olasılıkların nasıl bir dağılıma uyduğu geçmiş verilere göre belirlenmiş olabilir.

Örneğin; İmalat sürecinde presleme işleminden geçen bir parça %5 olasılıkla kusurlu olarak hurdaya ayrılmakta, %10 olasılıkla tekrar preslenmek için yeniden pres makinesine getirilmekte olduğu bilgisi alınmıştır.

Buna göre; yapılan benzetim modelinde presleme işlemi çıkışından sonra bazı parçalar hurda işlemine gidecek, bazı parçalar tekrar preslenmek için aynı işlemin başındaki kuyruğa geri dönecek, bazıları ise bir sonraki işleme geçecektir.



Olasılıklı Koşullar İçin Bazı Örnekler

- Mezun olan subayların %30'u özel ihtisas kurşunlarından birisine başvurmak istemekte, bunların %10'u sadece SAT kursuna, %20'si sadece SAS kursuna, %10'u sadece Birinci Sınıf Dalgıç kursuna, %30'u sadece pilotaj kursuna, %30'u da tümüne başvuruda bulunmak istemekte,
- SAT kursuna başvuranların, %70'i kursa kabul edilmekte, kursa kabul edilenlerin %60'ı kursu başarı ile bitirmekte, kursu bitirenlerin %10'u ilk 5 yıl içerisinde SAT ihtisasından düşmekte,
- Seyir radarı arızalarının %70'i elektrik besleme sisteminden kaynaklanmakta.

Ödev Çalışması – 3. 2 : Tek sunumculu elle benzetim örneğinde verilen sistem için aşağıdaki hususları dikkate alarak, yeni bir benzetim tablosu doldurun, grafik, istatistikleri güncelleyin:

Varlıkların gelişler arası süreleri ve buna bağlı olarak hesaplanmış olan geliş zamanları değişmeyecek (aynı sayıları kullanın).

Tek makine yerine 2 makine (M1, M2) paralel (işlem ikisinden birinde yapılabilir)

M1 daha yeni bir makine ve işlem M1'de yapılırsa 3 dakika sürüyor (sabit), M2'de yapılırsa 4 dk sürüyor (sabit).

Bir varlık sisteme geldiğinde, makineler dolu ise kuyruğa girecek (Makinelerden önce tek bir kuyruk var). Kuyrukta, varlık numarası **tek sayı** olanlar öncelikli.

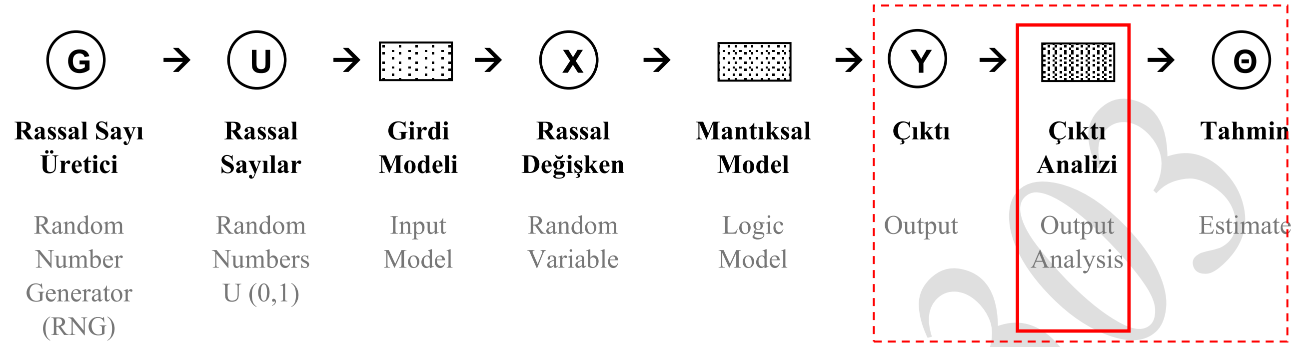
Varlıklar, hangi makine boş ise ona girecek. Eğer her iki makine de boş ise M1 tercih edilecek.

Benzetim bitiş kriteri : 10 nolu varlık sistemden çıkış yaptığında bitir.

Not : Makine Durumunu göstermek için; M1 ve M2 için ayrı ayrı 2 sütün gerekecek.

Ödev Çalışması – 3. 3 : Örnek ARENA ve Excel benzetim modellerini inceleyin. Bunların içerisinde, Girdi Modeli, Mantıksal Model ve Çıktı Analizi neler olduğunu gözlemleyin.

4. ÇIKTI ANALİZİ



Sonlu (Terminating) ve Kararlı (Steady-State) Modeller

Çıktı Analizinde öncelikle, "*Sonlu*" ve "*Kararlı*" modeller arasındaki ayrım bilinmelidir.

- Sonlu (terminating) benzetim modeli, belirli bir TE (Time to End) süresi boyunca koşturulan (örneğin 8 saat sonuna kadar) veya belirli bir E olayı gerçekleştiğinde sonlanan (örneğin 10'ncu gemi limandan çıktığında) modelidir.

  Örneğin: bir banka 8:30–16:30 arasında açıktır ve benzetim 480 dk çalışır (TE=480 dk), bu süre sonunda, yani ertesi gün başında, sistem dinamikleri baştan başlar. Amaç, bankanın günlük operasyonlarının analiz edilmesidir.

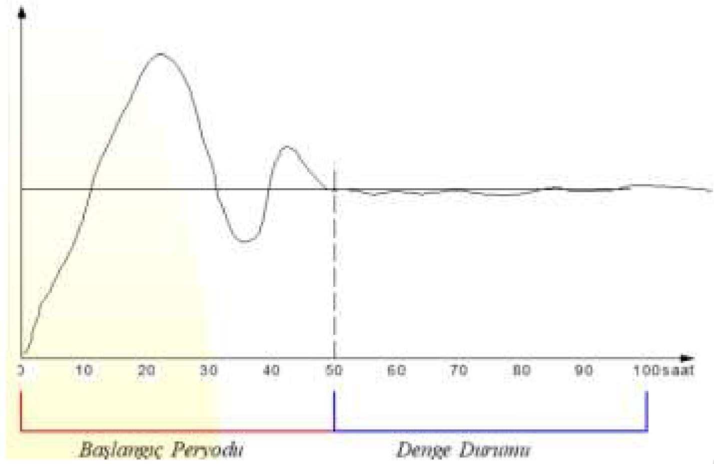
  Sonlu bir sistemi modellerken, 0 (sıfır) anındaki başlangıç koşullarının belirlenmesi ve bitiş zamanı (TE) veya bitiş olayı E'nin tanımlanması gerekir.

- Kararlı (steady-state) benzetim modeli, sürekli olarak çalışan sistemleri modellemek için daha uygundur (örneğin, montaj hatları, sürekli üretim sistemleri, telefon sistemleri ve Internet gibi diğer haberleşme sistemleri, hastane acil odası, itfaiye vb.).

  Kararlı benzetim modeli, bu tür sistemlerin uzun vadedeki performansını anlamaya çalışır. Bitiş zamanı (TE), istatistiksel hassasiyet dikkate alınarak belirlenir.

  Bu modellerde, bir ısınma süresi/periyodu (warm-up period) kullanılması uygun olur. Çıktı analizinde dikkate alınacak veriler, ısınma periyodu sonrasında toplanan çıktılardan alınır. Aksi takdirde, sistemin kararlı duruma gelmesine kadar geçecek süreye ait veriler gerçek yanıltıcı olur.

  Kararlı durum, ısınma periyodu sonrasında sistemin başlangıç koşullarından etkilenmediği bir noktaya ulaştığını ifade eder. (Isınma süresi belirlemesinde, çıktıların hareketli ortalamalarına bakılabilir).



Örnek : Yaklaşık 50 saat sonunda kararlı duruma geçen bir sistem benzetim modeli

Bir benzetimin sonlu mu, kararlı mı olacağı benzetimin amaçlarına ve sistemin doğasına bağlıdır. Örneğin; bir günde 2 vardiyada toplam 16 saat çalışan bir üretim sistemini dikkate alalım. Gün sonunda (yani her 16 saat sonunda), işler bulunduğu yerde (iş istasyonunda) kalmakta ve bir sonraki gün sabah işler kaldığı yerden devam etmektedir. Bu sistem, gerçekte sürekli çalışan bir sistem olarak kabul edilebilir (her gün sabah sistem kaldığı yerden devam ettiği için) ve Sonlu bir model olarak kabul edilmez. Bir gün sonundaki sistemin durumu, ertesi günün başlangıç durumu olacaktır. (Arada geçen gece zamanı dikkate alınmaz)

Çıktı Analizinin Tanımı ve Kapsamı

Çıktı Analizi; benzetim ile üretilen verilerin, yani çıktıların (output) incelenmesi olarak tanımlanabilir. Benzetim ile elde edilen çıktılar, modellenen sistemin çıktılarının bir örneklemidir (sanal bir deney sonucu ortaya çıkan örneklem). Bu nedenle, benzetim çıktıları ve ilgili sonuçlar Çıkarımsal İstatistik (Inferential Statistics) esaslarına uygun olarak ele alınmalıdır.

Hatırlatma:

Çıkarımsal istatistik, veri analizi yoluyla verinin ait olduğu dağılımın özelliklerini anlama süreçlerini kapsar. Çıkarımsal istatistik bir anakütlenin (population) özellikleri hakkında çıkarımlar yapar. Bunlar hipotez testleri ve anakütle paramatreleri tahminlerini içerir. Anakütle verisinin gözlenen veri kümesinden daha büyük olduğu varsayılır; diğer bir deyişle, gözlenen verilerin daha büyük bir anakütleden alınmış örneklem olduğu varsayılır. Çıkarımsal istatistik ile betimleyici istatistik birbiri ile karıştırılmamalıdır. Betimleyici istatistik (Descriptive Statistics), sadece gözlenen verilerin özellikleri ile ilgilenir ve eldeki verinin daha geniş bir anakütleden geldiğini varsaymaz.

Benzetim modeli çıktı olarak bir çok veri üretebilir (modeldeki unsurlara, modelin büyüklüğüne göre değişir). Tek sunumculu, basit bir kuyruk modeli için bile, ortalama kuyruk bekleme süresi, ortalama kuyruk uzunluğu, sistemde geçirilen toplam zaman, makine doluluk oranı, sistemden çıkış yapan varlık sayısı vb. birden fazla performans göstergesi olabilecek çıktı vardır. Daha büyük ve karmaşık modellerde (birden çok işlem, birden çok varlık tipi vb.) bu çıktılar daha da artacaktır.

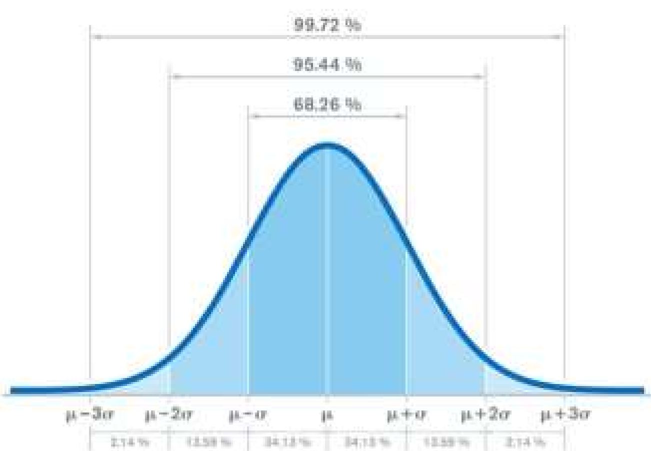
Bununla birlikte, çoğu zaman modellenen sistemin özelliklerine göre, belirli çıktı tiplerine odaklanılabilir. Örneğin, bir banka sistemi için müşterilerin ortalama bekleme süresi önemli bir performans gösterges iken (çok uzun bekleyen müşteri bankadan memnun kalmayacaktır), dikiş makinasına girmeyi bekleyen kumaş parçaları için bekleme süresi nispeten daha az öncelikli bir çıktı olarak kabul edilebilir.

Bir benzetim modelinin belirli bir [0,T] zaman aralığında çalıştığını düşünelim. Benzetim modeli, girdilerin çıktılara dönüştüğü bir sistem olduğundan ve bazı girdi değişkenleri rassal olduğundan, çıktı verileri de birer rassal değişken olacaktır. Bu nedenle, çıktılar kullanılarak elde edilen sonuçlar birer "*tahmin*" olarak kabul edilir. Bu şekilde, rassal bir çıktı değişkenine ait beklenen değeri bulma işlemi "*nokta tahmini (point estimation)*" olarak da ifade edilir.

Stokastik (olasılıksal) benzetim modeli çıktılarını, sadece tek bir tekrar üzerinden analiz etmek yeterli değildir. Bunun için modeli belirli bir tekrar sayısında çalıştırmak ve bu tekrarlarda elde edilen çıktıların beklenen değerini esas almak daha doğru bir yaklaşımdır. Tekrar sayısının artırılması daha iyi tahminler için fayda sağlar ancak artırmanın da sonu yoktur ve makul bir tekrar sayısı belirlenmesi gerekir. Belirli bir seviyeden sonra sonuçlar bir aralığa oturur ve bu aralık çok da fazla değişmez. (*Basit bir kural olarak 30 tekrar yapmak uygundur !*)

Nokta tahmininden sonra, ayrıca, belirleyeceğimiz bir güvenilirlik derecesine göre, elde edilen nokta tahmin için bir *"güven aralığı (confidence interval)"* hesaplanır. Bu sayede, çıktının dağılımı hakkında bilgi sahibi olunur ve hipotez testi elde edilen bu sonuçlara göre ret veya kabul edilir.

Not: Bir rassal çıktı sadece ortalama değeri ile rapor edilmemeli, dağılımı hakkında en temel bilgilerden olan varyans ve/veya güven aralığı da hesaplanmalıdır. Çıktıya ait, min ve max değerlere bakılması da fayalıdır. En uç değerlerin bazı kritik sistemlerde (örn. nükleer reaktör, bebek ürünleri imalatı) dikkate alınması gerekebilir ancak bunlar için uç değerler yerine güven aralığını daha yüksek hassasiyet ile hesaplanması yapılabilir (örneğin α=0.05 yerine α=0.01 veya daha düşük değerler alınabilir).



Normal Dağılım için Standart Sapmaya Göre Eğrinin Altında Kalan Alanlar

Çıktılar, bazen modellenen sistemin performans göstergesi veya performans parametresi olarak da ifade edilir ve bu çıktılar iki tip formdan birisi olabilir:

- {Y1, Y2, … , Yn} şeklinde bir "kesikli veri" formunda (örneğin; n adet müşterinin dk cinsinden ayrı ayrı bekleme süreleri, n haftanın watt cinsinden elektrik tüketim miktarları) veya
- $\{Y(t), 0 \le t \le TE\}$ şeklinde bir "sürekli zaman verisi" formunda (örneğin, t zamanındaki kuyruk uzunluğu, t zamanındaki gecikmeli sipariş sayısı) olabilir.

Kesikli veri formu için; çıktılar aritmetik toplanarak veri sayısına bölünerek ortalama bulunabilir. Sürekli zaman verisi formu için, bu toplam integral ile yapılır ve benzetim çalışma süresine bölünür.

Nokta Tahmini: $$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad \hat{\phi} = \frac{1}{T_E}\int_0^{T_E} Y(t)dt$$

Not : $\hat{\theta}$ ve $\hat{\phi}$ ilgili performans parametresinin tahmini için kullanılan sembollerdir. " **^** " sembolü hangi parametrenin üzerine geliyor ise onun tahmini olduğunu ifade etmek için kullanılır ve ingilizce "hat" olarak söylenir (örn.   : theta hat). $\hat{\theta}$

Kesikli veri için nokta tahmini (Örnek) :

Bir kuyruk modeli çalıştırılması sonunda 10 kişinin (varlık) ayrı ayrı kuyrukta bekledikleri süreler çıktı olarak alınmıştır. Y_i : dakika olarak *i*'nci kişinin kuyrukta beklediği süre olsun. i = 1,2,3…10

Kişiler >>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bekleme Süresi (dk) >>	0	0.1	0	0.5	1	0.4	0	0	0.8	1.2

Ortalama Bekleme Süresi = (0 + 0.1 + 0 + 0.5 + 1 + 0.4 + 0 + 0 + 0.8 + 1.2) dk / 10 kişi
= 4 dk / 10 kişi
= 0.4 dk / kişi

Yukarıdaki tablodaki bekleme süreleri, tek bir benzetim tekrarından elde edilmiştir. Bu sürelerin birbirinden bağımsız olduğu söylenemez (bir müşterinin bekleme süresi kendisinden öncekiler ile ilişkilidir). Bunun için,model, birbirinden bağımsız şekilde belirli defa tekrarlanır. Örneğin, 8 tekrar yaptığımızı ve bu tekrarlar sonunda hesaplanmış olan ortalama bekleme süreleri şu şekilde olsun:

Tekrarlar >>	1	2	3	4	5	6	7	8
Ortalama Bekleme Süresi (dk/kişi) >>	0.4	0.35	0.45	0.52	0.34	0.48	0.36	0.54

Eğer $\boldsymbol{\theta}$ kuyrukta ortalama bekleme süresi performans parametresi ise; bu sonuçlara göre:

$\hat{\theta}$ = (0.4 + 0.35 + 0.45 + 0.52 + 0.34 + 0.48 + 0.36 + 0.54) / 10

= 4.3 dk / kişi olarak bulunur

Bu değer, ortalama bekleme süresinin beklenen değeri veya nokta tahmini olarak ifade edilir

Sürekli zaman veri formu için nokta tahmini (Örnek) :

Bir kuyruk modeli çalıştırılması sonunda [0,10] dk arasında zamana göre kuyrukta bekleyen kişi sayısı çıktısı alınmıştır. Y_t : kişi sayısı olarak ***t*** anında kuyrukta bekleyen kişi sayısı olsun, t ∈ [0,10]

zaman (t)	*Bekleyen Kişi Sayısı (Y_t)*
0 ≤ t ≤ 1.5	0
1.5 < t ≤ 4.5	1
4.5 < t ≤ 5.0	2
5.0 < t ≤ 6.5	1
6.5 < t ≤ 8.0	0
8.0< t ≤ 10	1

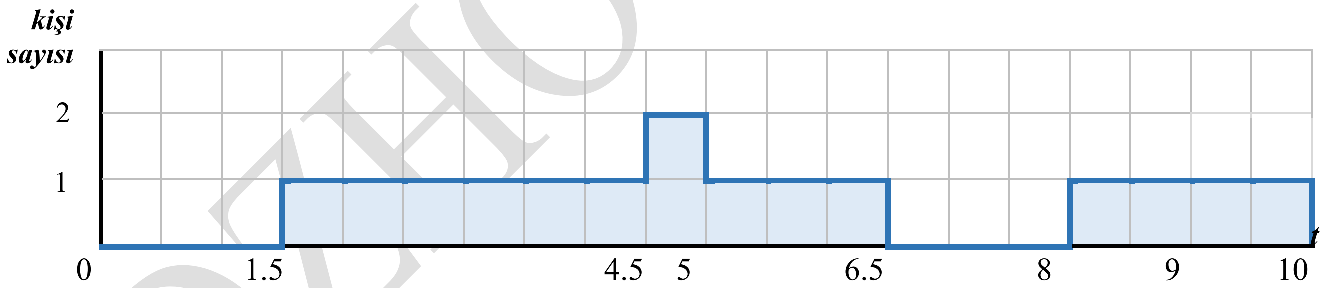
Ortalama bekleme süresi, şu şekilde bulunabilir:
- Her bir zaman aralığının uzunluğu ile o aralıktaki kişi sayısı çarpılır,
- Tüm çarpımlar toplanır,
- Elde edilen toplam değeri, toplam zaman aralığına bölünür.

Buna göre, ortalama kuyruk uzunluğu hesabı aşağıdaki şekilde yapılabilir:

$$= \frac{(1.5 \text{ dk x } 0 \text{ kişi }) + (3 \text{ dk x } 1 \text{ kişi }) + (0.5 \text{ dk x } 2 \text{ kişi}) + (1.5 \text{ dk x } 1 \text{ kişi}) + (1.5 \text{ dk x } 0 \text{ kişi}) + (2 \text{ dk x } 1 \text{ kişi})}{10 \text{ dakika}}$$

$$= \frac{7.5 \text{ dk x kişi}}{10 \text{ dk}} = \mathbf{0.75 \text{ kişi}}$$

Ayrıca; modelden elde edilen bu çıktıları grafik olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz:



Ortalama kuyruk uzunluğu (kişi sayısı), grafiğin altında kalan alanın toplam süreye bölünerek bulnur. (Grafiğin altında kalan alan, o grafiği ifade edecek fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki integral değeridir).

Bir önceki örnekte bekleme süresini ifade eden Y_i , sürekli bir rassal değişkendir (bekleme süresi zaman birimindendir ve örneğin 4.45621 gibi bir reel sayı olabilir) ancak kişileri ifade eden bir indeks olan ***i*** kesiklidir (i=0,1,2,3, ….)

Bu örnekte ise, kuyrukta bekleyen kişi sayısını ifade eden Y_t kesikli bir rassal değişkendir (bekleyen kişi sayısı 0,1,2,3… olabilir, 1.053 gibi bir değer alamaz) ancak zamanı ifade eden ***t*** süreklidir ve [0,T] arası tüm reel değerleri alabilir.

Aralık Tahmini (Interval Estimation) :

Modellenen sistemin (gerçek sistemin) bir perfomans parametresi y ise benzetim modellemesi sonucunda tahmin yani $\hat{y}$ bulunur. Gerçekte y'nin ne değer alacağını tam olarak bilemeyiz. Benzetim modeli rassallık içerdiğinden, nokta tahmini $\hat{y}$ ile birlikte $\hat{y}$ 'nin ne kadar iyi bir tahmin olduğu, belirli güveniliklik derecesinde alt ve üst limitlerinin ne olduğu (güven aralığı) gösterilir.

Bir performans parametresi ϑ için %100(1-α) güven aralığı şu formülle bulunabilir :

$$\underbrace{\hat{\theta} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S(\hat{\theta})}{\sqrt{n}}}_{\text{Güven Aralığı Alt Sınırı}} \leq \theta \leq \underbrace{\hat{\theta} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S(\hat{\theta})}{\sqrt{n}}}_{\text{Güven Aralığı Üst Sınırı}}$$

$\hat{\theta}$: hesaplanan nokta tahmini (point estimator), ortalama değer

n : örneklem büyüklüğü ***n*-1** : serbestlik derecesi (df : degrees of freedom)

S($\hat{\theta}$ ***)*** : nokta tahminin standart sapması (örneklem olduğu için, σ yerine S kullanılır)

$$S^2(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\theta})^2}{n-1}$$

α : anlamlılık seviyesi (veya düzeyi)

$t_{\alpha/2,\, n-1}$: t-testi tablosunda p=α/2 ve n-1 değerine göre bulunan değer.

$\frac{S(\hat{\theta})}{\sqrt{n}}$: standart hata (standart error) olarak adlandırılır (standart sapmanın normalize edilmiş hali)

Hatırlatma:

Anlamlılık seviyesini temsil eden α bir olasılıktır, bu nedenle [0,1] arasında bir değer alabilir. En yaygın kullanılan değerler; 0.10, 0.05 olsa da başka α değerleri kullanılmasının gerekçeleri olabilir (bu tamamen analizin konusuna bağlıdır).

Güven aralığı için, %100(1-α) ifadesi kullanılır (yani, α=0.05 ise %95 güven aralığı olur)

Örneklem büyüklüğü (n) değişmeden, daha büyük bir α değerleri t-tablosundan daha düşük değer verir. Bu da, güven aralığı alt ve üst sınırları arasındaki genişliğin daralması demektir. Örneğin, elde edilen performans parametresinin %95 güven aralığı [12.5 – 13.8] ise, bu demektir ki, bu parametrenin %95 güvenilirlikle bu aralıkta bir değer almasını bekleyebiliriz. Daha sonra, α=0.1 olarak alındığında (yani %90 güven aralığı), bu aralık [13.1 – 13.2] alabilir. Yani daha dar bir aralığa daha az güven duymamız gerektiği sonucu ortaya çıkıyor.

Yukarıda verilen güven aralığı hesabı formülü incelendiğinde, güven aralığı genişliğine etki eden 3 faktörün olduğunu görebiliriz (anlamlılık seviyesi, örneklem büyüklüğü ve standart sapma):

anlamlılık seviyesi (α):

Daha yüksek bir α değeri, daha düşük bir t-tablosu değeri vereceğinden, güven aralığının genişliğini (alt ve üst sınırdan eşit oranda) daraltır. Yani, güven aralığının genişliği ile α değeri ters orantılıdır denilebilir ancak bu ilişki doğrusal değildir (α değeri 2 kat artarsa, güven aralığı genişliği de 2 kat azalır demek değildir !).

örneklem büyüklüğü (n):

Daha yüksek bir n değeri de, daha düşük bir t-tablosu değeri verecektir, bu da güven aralığı genişliğinin daralması yönünde bir etki yapacaktır. Çok küçük değerlerde bu değişim daha belirgin olur ancak n değeri 30'a yaklaştıkça bu etki azalır. n=30 ve üzerinde olduğunda doğrudan z-değeri alınır (n değeri kullanılmadan sadece α değerine göre tablodan z-değeri alınır).

Ayrıca, formülde n değerinin karekökü de kullanılmaktadır ve n değeri yükseldikçe karekök değeri de artacak, formülde paydada olduğundan güven aralığının daralmasına etki edecektir.

standart sapma (S):

Daha yüksek bir standart sapma, benzetim tekrarlarından çıktı olarak elde edilen verilerin daha dağınık olduğunu gösterir. Daha yüksek standart sapma, güven aralığının daha geniş olmasına etki eder (doğru orantılıdır).

Çıktı Analizi temel olarak iki ayrı şekilde yapılır:

- Tek bir sistemin performansını (*Absolute Performance*) tahmin etmek veya
- İki veya daha fazla alternatif sistemi karşılaştırmak (*Relative Perfomance*).

TEK BİR SİSTEMİN ÇIKTI ANALİZİ

Benzetim modeli ile elde edilen çıktıların yukarıda açıklandığı şekilde nokta tahmini ve güven aralığı tahmini yapılır. Eğer analizini yaptığımız parametreye ilişkin belirlenmiş bir hedef veya teknik standart var ise, bu aralığa girip girmediği kontrol edilebilir.

Örnek : Yapılan bir benzetim modeli 10 farklı tekrarda çalıştırılarak, her bir tekrar sonucunda hesaplanan ortalama bekleme süresi (dk) çıktı olarak alınmıştır (aşağıda verilen tablo).

Tekrarlar >>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ortalama Bekleme Süresi (dk/kişi) >	1.53	1.66	1.24	2.33	2	1.69	2.69	2.86	1.7	2.6

Elde edilen bu çıktılara göre, ortalama bekleme süresinin nokta tahmini, standart sapmasını ve α=0.1, α=0.05 ve α=0.01 değerlerine göre ayrı ayrı güven aralıklarını hesaplayın..

Ortalama bekleme süresini ifade eden değişkenimiz X olsun. Buna göre, her satırda bir tekrarın çıktısı olacak şekilde aşağıdaki tablo düzenlenebilir.

Tekrar	X	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$
1	1.53	-0.50	0.2500
2	1.66	-0.37	0.1369
3	1.24	-0.79	0.6241
4	2.33	0.30	0.0900
5	2.00	-0.03	0.0009
6	1.69	-0.34	0.1156
7	2.69	0.66	0.4356
8	2.86	0.83	0.6889
9	1.70	-0.33	0.1089
10	2.60	0.57	0.3249
	$\bar{X} = 2.03$		$\Sigma (X_i - \bar{X})^2 = 2.7758$

Nokta Tahmini ($\hat{x}$) = $\bar{X}$ = **2.03 dakika/ kişi**

$$S^2(\hat{x}) = \sum_{i=1,..n} (X_i - \bar{X})^2 / (n-1) = 2.7758 / 9 = 0.30842 \rightarrow \text{Standart Sapma} = S(\hat{x}) = S_{\hat{x}} = 0.55535$$

SE_x (standart hata) = $S_{\hat{x}} / \sqrt{n} = 0.55535 / 3.16227 = 0.17561$

α=0.1 için $\quad t_{\alpha/2\,,\,n-1} = t_{(0.05\,,\,9)} = 1.833113$ (t-tablosundan bulunur)

%90 Güven Aralığı : 2.03 ± 1.833 x 0.17561 = [2.03 – 0.32191 , 2.03 + 0.32191] = ~ [1.71 , 2.35]

α=0.05 için $\quad t_{\alpha/2\,,\,n-1} = t_{(0.025\,,\,9)} = 2.26216$ (t-tablosundan bulunur)

%95 Güven Aralığı : 2.03 ± 2.262 x 0.17561 = [2.03 - 0.39725 , 2.03 + 0.39725] = ~ [1.63 , 2.42]

α=0.01 için $\quad t_{\alpha/2\,,\,n-1} = t_{(0.005\,,\,9)} = 3.24984$ (t-tablosundan bulunur)

%99 Güven Aralığı : 2.03 ± 3.249 x 0.17561 = [2.03 - 0.57070 , 2.03 + 0.57070] = ~ [1.46 , 2.60]

İKİ VEYA DAHA FAZLA SİSTEMİN SİSTEMİN ÇIKTI ANALİZİ

Simülasyonun en önemli kullanım amaçlarından birisi de, alternatif sistemlerin karşılaştırılmasıdır. Bu karşılaştırma, belirlenecek performans parametreleri üzerinden yapılır. İki sistemin birbiri ile karşılaştırılmasında uygulanan genel bir yaklaşım, Ortak Rassal Sayılar (CRN - Common Random Numbers) kullanımıdır.

Ortak Rassal Sayılar

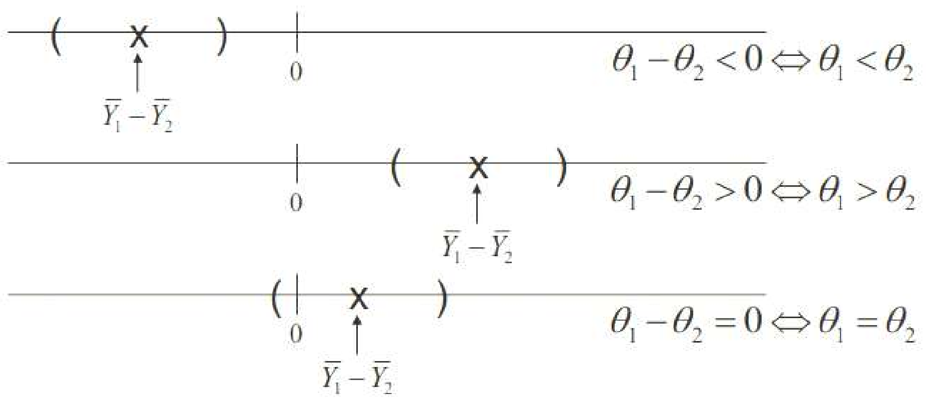
Daha önceki bölümlerde görüldüğü üzere, Kesikli Olay Benzetim modelleri bir veya birden çok rassal girdi içerir. Bu rassal girdiler, benzetim modeli tarafından ilgili olasılık dağılımına uygun rassal değişkenler üretilerek modele beslenir.

Bu rassal değişkenlerin üretilmesinde, [0,1] arası Düzgün Dağılıma uygun rassal sayılar kullanılır. Bir rassal değişkenin, model içerisinde bir çok kere üretilmesi gerekeceğinden (örn. birbirini takip eden 100 müşterinin sisteme giriş zamanları), rassal sayılar birer dizi olarak bağımsız ve korelasyonsuz olarak hesaplamaya katılır.

Rassal sayıların üretilmesi için çeşitli yöntemler bulunmaktadır ve kullanılan rassal sayı kökü de bu fonksiyonlarda önemli bir parametredir. Farklı bir rassal sayı dizisi, farklı rassal değişkenler üretebilecek ve bu da farklı benzetim sonuçları ortaya çıkaracaktır. Ancak, benzetimin belirli bir uzunlukta ve çok tekrarlı olarak çalıştırılması, deneysel standart sapmanın düşürülmesine katkı sağlar (amaç standart sapmayı tamamen sıfırlamak değildir !).

Bununla birlikte, iki sistemin karşılaştırılmasının daha hassas (doğru) yapılabilmesi için, bu iki sisteme sunulacak şartların, senaryoların da aynı olması daha uygun olacaktır. Bunun için her iki sistem aynı rassal sayılar ile çalıştırılarak, sonuçları arasındaki farklar üzerinden bir analiz yapılır. Tek sistemin performans analizinde olduğu gibi; nokta tahmini ve güven aralığı tahmin edilir ve buna göre hangisinin daha iyi olduğu ile ilgili çıkarımda bulunulur.

$\theta_1 - \theta_2$ için $(1 - \alpha)$ olasılığında hesaplanan güven aralığı aşağıdaki şekilde yorumlanabilir:



iki sistemin birbirinden farklı olduğu söylenemez !

$\boldsymbol{\theta_1}$ ve $\boldsymbol{\theta_2}$: 1'nci ve 2'nci sistem performans göstergeleri (tahmin edilmek istenen parametreler)

$\bar{Y}_1$ ve $\bar{Y}_2$: 1'nci ve 2'nci sistem performans göstergeleri nokta tahminleri.

(X) : güven aralığı

Örnek: Bir imalat sisteminin mevcut hali (kullanılan makineler, işçiler, vb) için bir benzetim modeli yapılmıştır. Yapılması planlanan bazı iyileştirmeler (yeni makineler, yeni çalışma saatleri vb.) ile elde edilmesi öngörülen sistem için de ayrı bir benzetim modeli yapılmıştır. (Aynı benzetim modeli üzerinden bazı parametreleri değiştirerek de yapılabilir).Perfromans Parametresi olarak, imalat hattından hatasız olarak günlük çıkan parça sayısı ortalaması belirlenmiştir.

Bu iki sistem (mevcut sistem ve yeni sistem) için, ortak rassal sayılar kullanılarak elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir (10 tekrar ve her takrarda iki sistem için kullanılan rassal sayılar ortak).

	Tekrarlar >>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Günlük Çıkan Parça Ortalaması(adet/gün)	Mevcut Sistem	9.31	9.74	7.12	8.78	9.01	8.41	7.94	7.67	9.59	9.05
	Yeni Sistem	9.39	9.49	7.73	8.97	9.61	8.57	7.98	8.74	9.62	9.15

Elde edilen bu çıktılara göre, ortalama bekleme süresinin nokta tahmini, standart sapmasını ve α=0.05 ve α=0.01 değerlerine göre ayrı ayrı güven aralıklarını hesaplayın.

Buna dayanarak, yeni sistemin mevcut sistemden daha iyi olduğunu söyleyebilir miyiz?

Çözüm :

Tekrar	X_{MEVCUT}	$X_{YENİ}$	D	$(D - \bar{D})^2$
1	9.31	9.39	-0.08	0.033
2	9.74	9.49	0.25	0.263
3	7.12	7.73	-0.61	0.120
4	8.78	8.97	-0.19	0.005
5	9.01	9.61	-0.60	0.114
6	8.41	8.57	-0.16	0.011
7	7.94	7.98	-0.04	0.050
8	7.67	8.74	-1.07	0.651
9	9.59	9.62	-0.03	0.054
10	9.05	9.15	-0.10	0.027
	$\bar{X}_{mevcut} = 8.662$	$\bar{X}_{yeni} = 8.925$	$\bar{D} = -0.263$	$\Sigma (D_i - \bar{D})^2 = 1.328$

X : Hatasız çıkan parça sayısı ortalaması

D : $X_{mevcut} - X_{yeni}$ $\quad$ **$\bar{D}$** : farkların ortalaması

Gerekli Hesaplamalar :

D : $X_{mevcut} – X_{yeni}$ için Nokta Tahmini = **$\bar{D}$ = -0,263 adet / gün**

$S^2(\bar{D}) = \sum_{i=1,..n} (D_i – \bar{D})^2 / (n-1) = 1.328 / 9 = 0.148 \rightarrow$ Standart Sapma = $\sqrt{S^2(\hat{x})} = S_{\hat{x}} = 0.384$

SE_x (standart hata) = $S_{\hat{x}} / \sqrt{n} = 0.384 / 3.162 = \sim 0.121$

α=0.1 için $t_{\alpha/2\,,\,n-1} = t_{(0.05\,,\,9)} = 1.833113$ (t-tablosundan bulunur)

%90 Güven Aralığı = - 0.263 ± 1.833 x 0.121

= [- 0.263 – 0.223 , - 0.263 + 0.223]

= ~ [- 0.486 , - 0.040]

Yeni Sistem sonuçları daha yüksek diyebiliriz.

α=0.05 için $t_{\alpha/2\,,\,n-1} = t_{(0.025\,,\,9)} = 2.26216$ (t-tablosundan bulunur)

%90 Güven Aralığı = - 0.263 ± 2.26216 x 0.121

= [- 0.263 – 0.274 , - 0.263 + 0.274]

= ~ [- 0.537 , 0.011]

Yeni Sistemin Mevcut Sistemden farklı sonuçlara sahip olduğunu söyleyemeyiz.

Ödev Çalışması – 4. 1 :

Yukarıdaki örnekte 10'uncu tekrarda X yeni değeri = 8.5 olursa, α=0.01 için hesaplamaları yapınız ? Hesaplamaları yapmadan önce nasıl bir sonuç çıkacağını tahmin edin ve hesaplamalar sonucunda çıkan durum ile yorumunuzu karşılaştırın.

Bu hesaplamaları yapabilen ve sonucu gösteren bir Excel Sayfası hazırlayın (kullanılacak tüm parametreler sayfada değiştirilebilir şekilde)

DENEY TASARIMI

İyi bir çıktı analizi için; öncelikle bir Deney Tasarımı yapılarak, benzetim modelinin hangi kurulumda koşturulacağına karar verilir.

Deney Tasarımı, literatürde "Design of Experiment" veya "Experimental Design" olarak ifade edilir

Modeldeki girdi parametrelerine faktör (factor), çıktı parametrelerine ise tepki (response) adı verilir.

Faktörler nicel veya nitel olabilir. Örneğin, doktor sayısı (nicel), parça tipi (nitel). Faktör nitel de olsa, modele sayısal olarak bir etkisi olacaktır (örneğin, küçük parça tiplerinin modelde daha kısa işlem süresine sahip olması gibi).

Faktörler, karar değişkeni olarak da ifade edilebilir.

Faktör Düzeyleri / Seviyeleri (Factor Levels)

Her bir faktör için, düzeyler belirlenir ve faktörler deney tasarımında bu düzeyler ile ifade edilir.

Örneğin, bir işlem için kullanılan işçi sayısı bir faktör ve işçi sayısı = 1, 2, 3 olma durumları bu faktörün düzeyleri olarak belirlenebilir.

Faktöriyel Tasarım (Faktöriyel Deneyler)

Farklı faktörlerin, seçilen performans kriterleri üzerindeki etkileri ölçülenmek istenebilir. Faktöriyel tasarım bize bu imkanı verir. Buna göre, yapılan deneylerden elde edilen sonuçlar, istatistiksel olarak analiz edilerek; "Ana Etkilerin" ve "Etkileşim Etkilerinin" sistem performansını nasıl değiştirdiği incelenebilir. Faktöriyel tasarımlarda, denemeler, faktör kombinasyonlarını ifade eder.

Örnegin, A ve B faktörleri sırasıyla 3 ve 4 düzeye sahip olsun ve bu düzeyler, (a1, a2, a3) ve (b1, b2, b3, b4) sembolleriyle gösterilsin. Bu deneyde, a1b1, a1b2, a1b3, a1b4, a2b1, a2b2, a2b3, a2b4, a3b1, a3b2, a3b3, a3b4 olarak toplam 30×4=12 deneme vardır. Bu tasarım, 3×4 faktöriyel tasarım olarak adlandırılır.

2^k faktöriyel tasarımda, 2 düzey sayısını, k ise faktör sayısını gösterir. Faktörlerin tümü 2'şer düzeye sahiptir ve bunlar (düşük, yüksek) olarak ifade edilir. Etkisi araştırılmak istenen faktör sayısı çok fazla oldugunda, 2^k faktöriyel tasarım, bir sonraki araştırmanın yönünün belirlenmesi için bir ön çalışma niteliği taşır. (3^k faktöryel tasarımlarda, her bir faktörün 3'er düzeyi vardır)

Tasarım Noktaları (Design Points)

Deney tasarımında belirlenen her faktör ve bu faktörlerin düzeylerinin tüm kombinasyonları Tasarım Noktalarını meydana getirir. Örneğin, iki ayrı faktör belirlenmiştir. Birinci faktörün 3 düzeyi (düşük, orta, yüksek), ikinci faktör için de 2 düzey (düşük, yüksek) belirlenmiştir. O zaman, 3 x 2 = 6 tasarım noktası olacaktır.

Tasarım Noktası	Faktör-1 Düzeyi	Faktör-2 Düzeyi
1	Düşük	Düşük
2	Düşük	Yüksek
3	Orta	Düşük
4	Orta	Yüksek
5	Yüksek	Düşük
6	Yüksek	Yüksek

Ana Etki (E_i) : *i*. faktörün düşük seviyeden yüksek seviye çıkmasının sistem performansı (response) üzerinde yarattığı ortalama değişimdir.

__Örnek;__ Bir üretim sistemi benzetim modelinde, "Lot Hacmi", "Makine Sayısı" ve "Yeniden İşleme Oranı"nın üretim süresini nasıl etkilediği incelenmek istenmektedir.
Bu durumda, "üretim süresi" modelimiz için dikkate aldığımız bir performans kriteri/göstergesi (response) olur. Üç faktörün, ayrı ayrı, bu performans göstergesine etkileri (üretime süresinde yaratacağı ortalama değişim) de Ana Etkiler olarak belirlenir.

E_1: Lot Hacminin üretim süresine etkisi,
E_2: Makine Sayısının üretim süresine etkisi
E_3: Yeniden İşleme Oranının üretim süresine etkisi

Her bir faktör için, aşağıdaki şekilde ikişer adet düzey (seviye) belirlenmiştir (2^k faktöriyel tasarım).

Faktör	Düşük Düzey (-)	Yüksek Düzey (+)
Lot Hacmi	5	10
Makine Sayısı	1	2
Yeniden İşleme Oranı	%6	%12

Benzetim modeli, 2 x 2 x 2 = 8 tasarım noktası için ayrı ayrı çalıştırılır. Her bir tekrar Deney Tasarımındaki bir Tasarım Noktasını ifade eder (Her bir tasarım noktası için Ortak Rassal sayılar kullanılması veya tekrar sayılarının en az 30 olarak uygulanması daha tutarlı sonuçlar sağlayabilir).

Aşağıdaki tabloda; 8 tasarım noktasının her biri için faktör düzeyleri (sütun 2,3, ve 4) ve bu tasarım noktarınından elde edilen sonuçlar (sütun 5) gösterilmektedir

(R_i : *i*. tasarım noktasına göre benzetimden elde edilen üretim süresini ifade eden değişkendir)

Tasarım Noktası	Faktör 1 Düzey (Lot Hacmi)	Faktör 2 Düzey (Makine Sayısı)	Faktör 3 Düzey (Yeniden İşleme Oranı)	Tepki (Üretim Süresi)
1	+	+	+	R_1 = 5.7
2	–	+	+	R_2 = 5.0
3	+	–	+	R_3 = 12.1
4	–	–	+	R_4 = 11.1
5	+	+	–	R_5 = 5.7
6	–	+	–	R_6 = 5.0
7	+	–	–	R_7 = 12.1
8	–	–	–	R_8 = 11.1

Ana Etkiler şu şekilde hesaplanır:

$$E_1 = \frac{+R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + R_5 - R_6 + R_7 - R_8}{2^{k-1}} = \frac{5.7 - 5 + 12.1 - 11.1 + 5.7 - 5 + 12.1 - 11.1}{4} = \mathbf{0.85}$$

$$E_2 = \frac{+R_1 + R_2 - R_3 - R_4 + R_5 + R_6 - R_7 - R_8}{2^{k-1}} = \frac{5.7 + 5 - 12.1 - 11.1 + 5.7 + 5 - 12.1 - 11.1}{4} = \mathbf{-6.25}$$

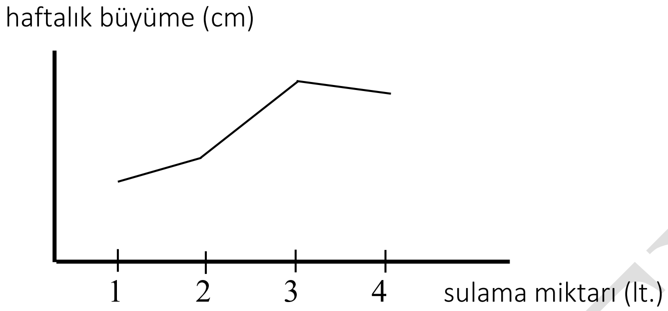
$$E_3 = \frac{+R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - R_5 - R_6 - R_7 - R_8}{2^{k-1}} = \frac{5.7 + 5 + 12.1 + 11.1 - 5.7 - 5 - 12.1 - 11.1}{4} = \mathbf{0}$$

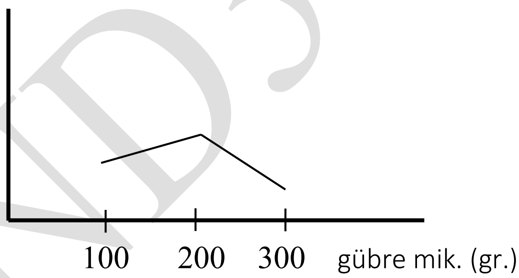
k : faktör sayısıdır (yani bu örnek için k = 3) ve $2^{k-1} = 2^2 = 4$

Etkileşim Etkisi (E_{ij}) :

Etkileşim; bir faktörün etkisinin diğer faktörlerin düzeylerine de bağlı olma durumudur. Bir modelde, bazı faktörler arasında bir etkileşim olabilir veya hiçbir faktör arasında etkileşim de olmayabilir. Etkileşim var ise, iki faktörün Ana Etkilerine ilave olarak, bu iki faktörün etkileşimli etkisinin de göz önüne alınması gerekir.

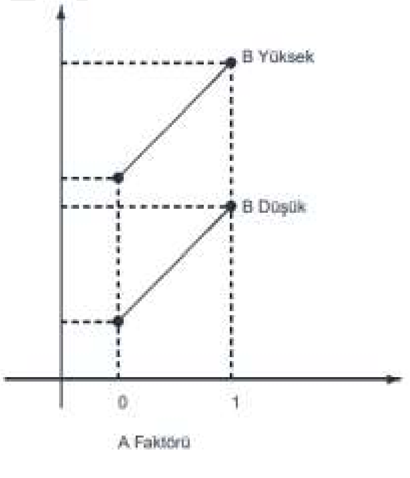
Örneğin; bir tür bitki yetiştirilmesi deneyinde, haftalık "sulama miktarı" ve "gübre miktarı" olarak iki faktör kabul edilmiştir. Sulama miktarı arttıkça bitkinin büyümesini artırdığı ancak belirli bir miktardan fazla olan sulamanın da olumsuz etkisi olduğu. Benzer şekilde, kullanılan gübre miktarının artmasının da büyümeyi olumlu etkilediği ancak fazla gübrelemenin bitkiyi çürütmeye başladığı sonuçları görülmüştür. Bu iki faktörün düzeylerine göre haftalık bitki büyüme miktarını gösteren grafikler aşağıa gösterilmiştir. Bunlar Ana Etki olarak ifade edilir.

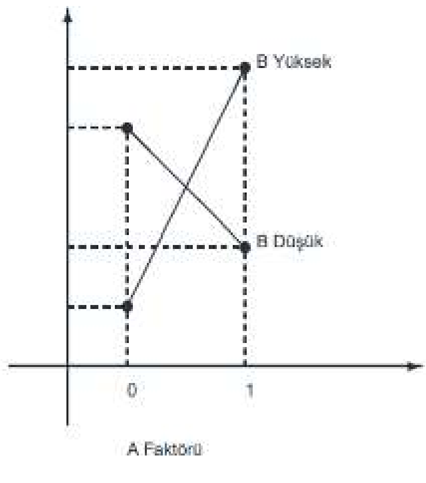




Yapılan incelemede, ayrıca su miktarının fazla olması gübrenin su içerisinde çözülmesine ve yeteri kadar etki etmemesine neden olduğunu da göstermiştir. (Ters bir etkileşim var)

Faktörler arasındaki etkileşimin anlamlı olup olmadığı istatistiksel metotlar ile belirlenebildigi gibi grafiksel yöntemler yardımıyla da görülebilir (subjektif bir yöntem olmasına rağmen pratikte yaygın olarak kullanılır). Grafiksel yöntemde, A faktörünün düzeylerine karşılık B faktörünün her bir düzeyi için A ve B faktör kombinasyonlarına ait ortalamaların grafigi çizilir. Elde edilen grafik kullanılarak faktörler arasında etkileşim olup olmadığına karar verilir. Örnegin, A ve B gibi iki faktöre sahip bir deneyde, bu iki faktörün düşük ve yüksek (0,1) olmak üzere iki düzeyi olsun. Bu durumda, AB etkileşim etkisi için iki farklı durum söz konusu olabilir: Ters (negatif) etkileşim veya Doğru (pozitif) etkileşim. Etkileşimin ne kadar yüksek olduğu doğruların eğiminden de görülebilir.





Örnek:
Bir lastik üretim fabrikasında, üretim esnasındaki son işlemde iki faktör ve her ikisi için de iki düzey belirlenerek 4 deney yapılmıştır. Bu deneyler sonucunda üretilen lastiğin dayanma kuvveti ölçülerek kaydedilmiştir (Aşağıdaki tablo)

	Sıcaklık (C^0)	Basınç (psi)	Kuvvet (kg)
Deney #1	100 (Düşük)	50 (Düşük)	21
Deney #2	100 (Düşük)	100 (Yüksek)	42
Deney #3	200 (Yüksek)	50 (Düşük)	51
Deney #4	200 (Yüksek)	100 (Yüksek)	57

Ana Etki : Yüksek düzeydeki sonuçların ortalamasından, düşük düzeydeki sonuçların ortalamasını çıkar

Sıcaklığın Kuvvete Etkisi (E_1) = (51 + 57)/2 - (21 + 42)/2 = 22.5 kg

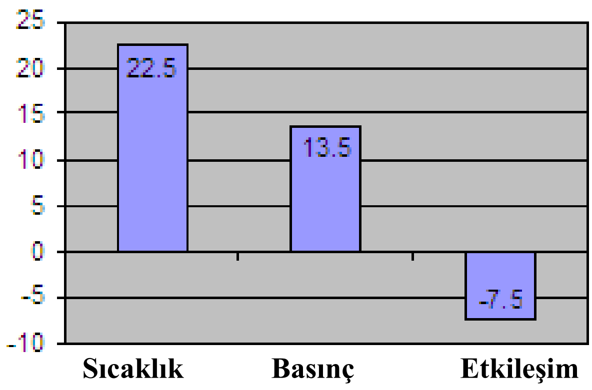
Basıncın Kuvvete Etkisi (E_2) = (42 + 57)/2 - (21 + 51)/2 = 13.5 kg

Etkileşim Etkisi hesabında, aşağıdaki tasarım matrisi yardımcı olur (Her faktörün sütununa düzeyi ifade eden -1 veya +1 değerleri yazılır. Etkileşim sütununa da, o satırdaki değerlerin çarpımı yazılır).

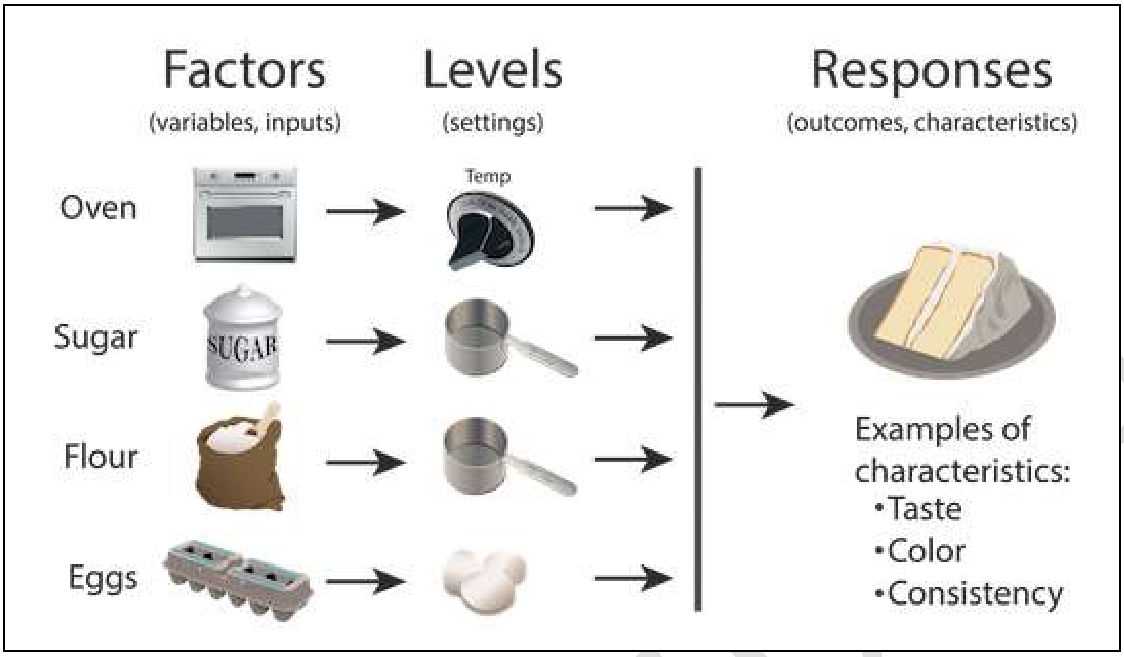
	Sıcaklık Düzeyi	Basınç Düzeyi	Etkileşim
Deney #1	-1	-1	(-1) x (-1) = +1
Deney #2	-1	+1	(-1) x (+1) = -1
Deney #3	+1	-1	(+1) x (-1) = -1
Deney #4	+1	+1	(+1) x (+1) = +1

Etkileşim etkisi (E_{12}), benzer şekilde yüksek etkileşim düzeyli deney sonuçları ortalamasından düşük etkileşim düzeyli deney sonuçları ortalamasının çıkarılması ile hesaplanabilir.

Etkileşim etkisi (E_{12}) = (21 + 57)/2 - (42 + 51)/2 = -7.5 kg



Negatif etkileşim en çok, basınç 50 psi ve sıcaklık 100 C^0 olarak uygulandığında ortaya çıkmaktadır. Sıcaklığın 100 C^0 'de tutulması bu ters etkileşimden kaçınılmasına yardımcı olacaktır.



“Föktör”, “Faktör Düzeyi” ve “Tepki” Kavramlarının bir Yaş Pasta yapımı üzerinden basit bir gösterimi yukarıdaki görselde verilmiştir. (birden çok çıktı belirtilmiştir)

A ve B faktörlerinin, sırasıyla a ve b düzeyin olduğu bir $a \times b$ faktöriyel tasarım için matematiksel model

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \tau\gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

$$i = 1, 2, \cdots, a; \quad j = 1, 2, \cdots, b; \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

olarak ifade edilir. Burada,

y_{ijk},	A faktörünün $i-$inci ve B faktörünün $j-$inci düzeyindeki $k-$ıncı gözlem değerini,
μ,	genel ortalamayı,
τ_i,	A faktörünün $i-$inci düzeyinin etkisini,
γ_j,	B faktörünün $j-$inci düzeyinin etkisini,
$\tau\gamma_{ij}$,	A ve B faktörlerinin etkileşim etkisini ve
ε_{ijk},	rasgele hata terimlerini

gösterir.

Ödev Çalışması – 4. 2 : Stratified Sampling, Bootstrapping Sampling konularını araştırın.

İlave Bilgi Notu :

Most Common Variance Reduction Techniques

- Antithetic Variates

- Control Variates, Common Random Numbers

- Systematic Sampling (Stratified Sampling, Sequential Sampling,..)

Mean Squared Error and Bias Variance Trade-off

$$\mathrm{Mse}(\widehat{\theta}, \theta) = \mathrm{E}[(\widehat{\theta} - \theta)^2] = \mathrm{Bias}^2[\widehat{\theta},\ \theta] + \mathrm{Var}(\widehat{\theta})$$

Bias and variance are the two ways that a simulation experiment can fail.

Bias can arise from at least six sources :

1. Pseudorandom numbers U at best only appear to be independent and uniformly distributed on the unit interval.

2. Distribution of the random variates X can differ from the known input model, often for convenience.

3. Initial transients and stopping rules can bias point estimators.

4. Some good point estimators are inherently biased, such as using order statistics to estimate quantiles.

5. Computer-number system is only an approximation to the real-number system; for example, all distributions are bounded on a computer and computations have round-off error.

(These five sources must be controlled by the construction of the experiment.)

The sixth source of bias is ***modeling error****. It also should be small by construction of the experiment, but unlike the other five sources of error it is quite application dependent. Modeling error can arise from error in the input model, which is often estimated from real-world data, or from error in the logical model, which is often intentional to simplify coding.*

The effect of the six sources of bias depend on the run length (i.e. size of the output data Y). Simulation run lengths are typically long, much longer than corresponding real-world experiments. Long runs can expose bias caused by flaws in random-number generators, random-variate generators, and computer arithmetic. Modeling error that is negligible at short run lengths can become dominant for long runs. On the other hand, long runs make negligible the effects of initial transients, stopping rules, and estimator bias.

Variance arises for only one reason: sampling error. If the experiment were to be replicated using a different source of randomness (typically different random-number seeds), the point estimate would change. Sampling error depends on the sample size of the output data Y . Ideally—with zero bias and with reasonable point estimators—as the run length goes to infinity, the sampling distribution converges to the point θ

ÖDEV ÇALIŞMASI ÇÖZÜMLERİ

Ödev Çalışması 3.1

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	Makine Durumu	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benz.Baş.	-	[ ]	0	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[2]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [1, Çıkış, 6] [3, Geliş, 7]
6	Çıkış	1	[ ]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [3, Geliş, 7] [2, Çıkış, 8]
7	Geliş	3	[3]	1	[- , Benz.Bitiş, 36] [2, Çıkış, 8] [4, Geliş, 12]
8	Çıkış	2	[ ]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [4, Geliş, 12] [3, Çıkış, 10]
10	Çıkış	3	[ ]	0	[- ,Benz.Bitiş,36] [4, Geliş, 12]
12	Geliş	4	[ ]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [4, Çıkış, 16] [5, Geliş, 13]
13	Geliş	5	[5]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [4, Çıkış, 16] [6, Geliş, 14]
14	Geliş	6	[6,5]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [4, Çıkış, 16] [7, Geliş, 16]
16	Çıkış	4	[6]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [7, Geliş, 16] [5, Çıkış, 21]
16	Geliş	7	[7,6]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [5, Çıkış, 21] [8, Geliş, 19]
19	Geliş	8	[8,7,6]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [5, Çıkış, 21] [9, Geliş, 23]
21	Çıkış	5	[8,7]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [9, Geliş, 23] [6, Çıkış, 24]
23	Geliş	9	[9,8,7]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [6, Çıkış, 24] [10,Geliş,28]
24	Çıkış	6	[9,8]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [10,Geliş,28] [7, Çıkış, 27]
27	Çıkış	7	[9]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [10,Geliş,28] [8, Çıkış, 31]
28	Geliş	10	[10,9]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [8, Çıkış, 31] [11,Geliş,33]
31	Çıkış	8	[10]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [11,Geliş,33] [9, Çıkış, 32]
32	Çıkış	9	[ ]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [11,Geliş,33] [10,Çıkış,33]
33	Çıkış	10	[ ]	0	[- ,Benz.Bitiş,36] [11,Geliş,33]
33	Geliş	11	[ ]	1	[- ,Benz.Bitiş,36] [11,Çıkış,35][12,Geliş,38]
35	Çıkış	11	[ ]	0	[- ,Benz.Bitiş,36] [12,Geliş,38]
36	Benz.Bitiş	-	[ ]	0	[12,Geliş,38]

$$\textbf{Ortalama Bekleme Süresi} = \frac{\text{Grafiğin altında kalan alan}}{\text{Sisteme giriş yapmış olan kişi sayısı}} = \frac{40}{11} = \textbf{3.63 dk/kişi}$$

$$\textbf{Ortalama Kuyruk Uzunluğu} = \frac{\text{Grafiğin altında kalan alan}}{\text{Benzetim Süresi}} = \frac{40}{36} = \textbf{1.11 kişi}$$

Varlık No	Geliş Zamanı	İşlem Başlangıç Zamanı	Fark (Bekleme Süresi)
1	1	1	0
2	5	6	1
3	7	8	1
4	12	12	0
5	13	16	3
6	14	21	7
7	16	24	8
8	19	27	8
9	23	31	8
10	28	32	4
11	33	33	0
12	-	-	-

En yüksek bekleme süresi : 8 dk

Hesaplamaya katılmaz (Benzetim bittiğinde, daha sisteme gelmemişti)

Ortalama Bekleme Süresi = (0 + 1 + 1 + 0 + 3 + 7 + 8 + 8 + 8 + 4 + 0) /11
= 40 dakika / 11 kişi
= **3.6363 dakika / kişi**

Makine Doluluk (Kullanım) Oranı

$$\textbf{Doluluk Oranı} = \frac{\text{Toplam Dolu Süre}}{\text{Benzetim Süresi}} = \frac{32 \text{ dk}}{36 \text{ dk}} = \sim 0.88 = \%88$$

$$\textbf{Doluluk Oranı} = 1 - \frac{\text{Toplam Boş Süre}}{\text{Benzetim Süresi}} = 1 - \frac{4 \text{ dk}}{36 \text{ dk}} = 1 - 0.12 = \%88$$

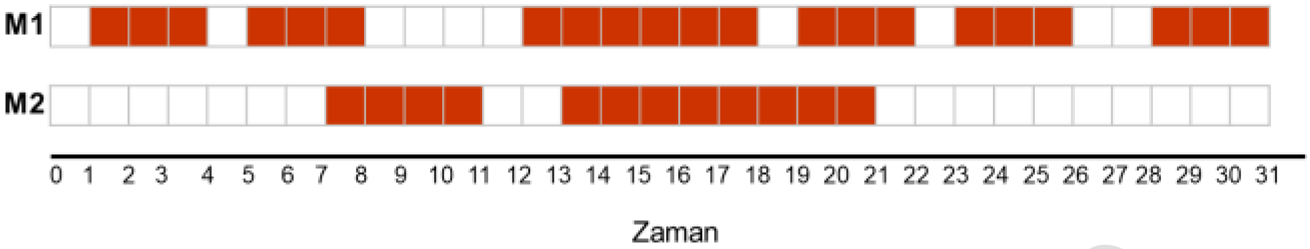
ÖDEV ÇALIŞMASI 3.2

Zaman	Olay	Varlık	Kuyruk	M1	M2	Gelecek Olaylar Listesi
0	Benz.Baş.	-	[ ]	0	0	[1, Geliş, 1]
1	Geliş	1	[ ]	1	0	[1, Çıkış, 4] [2, Geliş, 5]
4	Çıkış	1	[ ]	0	0	[2, Geliş, 5]
5	Geliş	2	[ ]	1	0	[2, Çıkış, 8] [3, Geliş, 7]
7	Geliş	3	[ ]	1	1	[2, Çıkış, 8] [3, Çıkış, 11] [4, Geliş, 12]
8	Çıkış	2	[ ]	0	1	[3, Çıkış, 11] [4, Geliş, 12]
11	Çıkış	3	[ ]	0	0	[4, Geliş, 12]
12	Geliş	4	[ ]	1	0	[4, Çıkış, 15] [5, Geliş, 13]
13	Geliş	5	[ ]	1	1	[4, Çıkış, 15] [5, Çıkış, 17] [6, Geliş, 14]
14	Geliş	6	[6]	1	1	[4, Çıkış, 15] [5, Çıkış, 17] [7, Geliş, 16]
15	Çıkış	4	[ ]	1	1	[5, Çıkış, 17] [7, Geliş, 16] [6, Çıkış, 18]
16	Geliş	7	[7]	1	1	[5, Çıkış, 17] [6, Çıkış, 18] [8, Geliş, 19]
17	Çıkış	5	[ ]	1	1	[6, Çıkış, 18] [8, Geliş, 19] [7, Çıkış, 21]
18	Çıkış	6	[ ]	0	1	[8, Geliş, 19] [7, Çıkış, 21]
19	Geliş	8	[ ]	1	1	[7, Çıkış, 21] [8, Çıkış, 22] [9, Geliş, 23]
21	Çıkış	7	[ ]	1	0	[8, Çıkış, 22] [9, Geliş, 23]
22	Çıkış	8	[ ]	0	0	[9, Geliş, 23]
23	Geliş	9	[ ]	1	0	[9, Çıkış, 26] [10, Geliş, 28]
26	Çıkış	9	[ ]	0	0	[10, Geliş, 28]
28	Geliş	10	[ ]	1	0	[10, Çıkış, 31] [11, Geliş, 33]
31	Çıkış	10	[ ]	0	0	[11, Geliş, 33]

Ortalama Bekleme Süresi = (1 + 1) dk / 10 kişi = 0.2 dk/kişi

Ortalama Kuyruk Uzunluğu = 2 / 31 = 0.064 kişi

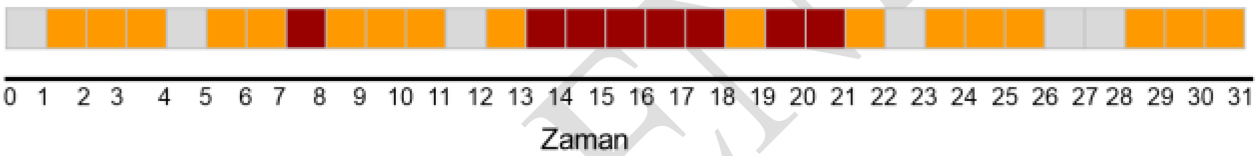
Makine Doluluk Oranları (M1 ve M2 ayrı ayrı)



Doluluk Oranı (M1) = M1 Toplam Dolu Süresi / Benzetim Süresi = 21 / 31 = ~ 0.677

Doluluk Oranı (M2) = M2 Toplam Dolu Süresi / Benzetim Süresi = 12 / 31 = ~ 0.387

Makine Doluluk Oranları (M1 ve M2 Birlikte)



M1 ve M2 DOLU
8 / 31 = 0.258 **~ % 26**

M1 veya M2 DOLU
17 / 31 = 0.548 **~ % 55**

M1 ve M2 BOŞ
6 / 31 = 0.194 **~ % 19**