Yöneylem Araştırması-1 (Ders Notu-2)

Doğrusal Denkleme Sistmelerinin Çözümü

DP’nin Simpleks Yöntemi ile Çözümü

Simpleks Tablosu Kullanarak Çözüm

Simpleks Tablosunda DP’nin Özel Durumlarının Tespiti

Büyük-M ve İki Evre Metotları

Doğrusal Denklem Sistemi (DDS)

Bir DDS:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

.. $\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$.... veya ....$\boxed{A|\mathbf{b}}$....şeklinde ifade edilebilir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Temel Satır İşlemleri (Elementary Row Operations)

Gauss-Jordan metodunu incelemeden önce, temel satır işlemlerini bilmemiz gerekir. Temel Satır İşlemleri kullanarak verilen bir ***A* matrisi ve b vektörü için $\boldsymbol{A'}$ ve $\boldsymbol{b'}$** elde edilir.

Elde edilen $\boldsymbol{A'}$ **ve** $\boldsymbol{b'}$ bize çözümün olup olmadığını, varsa tekil bir çözüm olup olmadığını söyler.

3 tip Temel Satır İşlemi (TSİ) bulunmaktadır:

- **Tip 1 TSİ**
- **Tip 2 TSİ**
- **Tip 3 TSİ**

Temel Satır İşlemleri (Elementary Row Operations)

Tip 1 TSİ

A', herhangi bir *A* satırının sıfır olmayan bir skaler ile çarpılmasıyla elde edilir. Örneğin:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A matrisinin 2nci satırının 3 ile çarpımı:

$$\boxed{A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 15 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}$$

Temel Satır İşlemleri (Elementary Row Operations-ERO)

Tip 2 TSİ

A nın *i*^{nci} satırını sıfır olmayan bir ***c* skaleri ile çarp**. Bazı j $\neq$ i'ler için:

$$A' \text{ nın } j \text{ satırı} = c(A'\text{nın } i \text{ satırı}) + (A'\text{nın } j \text{ satırı})$$

olsun. *A′* nın diğer satırlarının A nın satırları ile **aynı olsun**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Örneğin *A*nın 2nci satırını 4 ile çarp, ve *A*nın 3ncü satırını 4(*A*nın 2nci satırı)+(*A*nın 3ncü satırı) ile değiştir.

$$4\,[1 \quad 3 \quad 5 \quad 6] + [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3] = [4 \quad 13 \quad 22 \quad 27]$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 22 & 27 \end{bmatrix}$$

Temel Satır İşlemleri (Elementary Row Operations-ERO)

Tip 3 TSİ

A nın iki satırını değiştirin.

Örneğin *A* nın 1nci ve 3ncü satırlarının yerini değiştirin:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}}$$

Doğrusal Denklem Sistemi (DDS)

Doğrusal bir denklem sistemi aşağıdakilerden birini sağlar:

Durum 1: Sistemin çözümü yoktur.

Durum 2: Sistemin tekil çözümü vardır.

Durum 3: Sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

DDS Çözümü: Gauss Jordan Metodu

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Genişletilmiş Matris:

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \end{array}\right]$$

DDS Çözümü: Örnek

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

TİP-1 TSİ

(1/2) R1

$$A_1|\mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$A_1|\mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

TİP-2 TSİ

R2 = - 2 R1 + R2

$$A_2|\mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$A_2|\mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

TİP-2 TSİ

R3 = - R1 + R3

$$A_3|\mathbf{b}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

DDS Çözümü: Örnek

$$A_3|\mathbf{b}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

TİP-1 TSİ

(-1/3) R2

$$A_4|\mathbf{b}_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$A_4|\mathbf{b}_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

TİP-2 TSİ

R1 = - R2 + R1

$$A_5|\mathbf{b}_5 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$A_5|\mathbf{b}_5 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

TİP-2 TSİ

R3 = 2 R2 + R3

$$A_6|\mathbf{b}_6 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

DDS Çözümü: Örnek

$$A_6|\mathbf{b}_6 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

TİP-1 TSİ

(6/5) R3

$$A_7|\mathbf{b}_7 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$A_7|\mathbf{b}_7 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

TİP-2 TSİ

R1 = -(5/6)R3 + R1

$$A_8|\mathbf{b}_8 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$A_8|\mathbf{b}_8 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

TİP-2 TSİ

R2 = (1/3)R3 + R2

$$A_9|\mathbf{b}_9 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

DDS Çözümü: Gauss Jordan Metodu

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

DDS'de Temel Değişkenler ve Çözümler

- Bir doğrusal denklem sisteminde;

    tek bir denklemde (satırda) 1,

    diğer denklemlerde ise 0 katsayısına

sahip değişkene **Temel Değişken (Basic Variable - BV)** denir.

- Bu şekilde olmayan diğer değişkenlere **Temel Olmayan Değişken (Nonbasic Variable - NBV)** denir.

DDS'de Temel Değişkenler ve Çözümler

Durum 1: Çözüm yok

$A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ içerisinde $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0|c] \; (c \neq 0)$

varsa, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 'nin çözümü yoktur.

$$A'|\mathbf{b}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Durum 2: Çözüm yok

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|r} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 0x_1 + 0x_2 &= -2 \end{aligned}$$

DDS'de Temel Değişkenler ve Çözümler

Durum 2: Tekil çözüm

Gauss-Jordan sonrasında elde edilen matris **Durum 1'e uymuyorsa** ve **NBV kümesi boş** ise tekil çözüm vardır:

$$A'\,|\,\mathbf{b}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\mathrm{BV} = \{x_1, x_2, x_3\}} \qquad \boxed{\mathrm{NBV} = \emptyset}$$

DDS'de Temel Değişkenler ve Çözümler

Durum 3: Sonsuz sayıda çözüm

Gauss-Jordan sonrasında elde edilen matris **Durum 1'e uymuyorsa** ama **NBV kümesi boş değil** ise sonsuz sayıda çözüm vardır:

$$A'|\mathbf{b}' = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\mathrm{BV} = \{x_1, x_2, x_3\}} \quad \boxed{\mathrm{NBV} = \{x_4, x_5\}}$$

Durum 3: Sonsuz sayıda çözüm

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$A_1|\mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad A_2|\mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$A_3|\mathbf{b}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3ncü sütunu dönüştürmek imkansız...

Matris Tersi ile DDS Çözümü

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Eğer A tersi alınabilir bir matris ise,

$$\boxed{\begin{aligned}(A^{-1}A)\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b}\\ I_m\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}}$$

I_m : m satır ve sütunlu birim matris (identity matrix)

**** Bir matrisin tersinin var olmasının şartları nelerdir ? Araştırın !***

Matris Tersi ile DDS Çözümü

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

DP'nin Standart Formu

- Tüm kısıtlarının eşitlik, tüm değişkenlerin ve sağ taraf sabitlerinin pozitif olduğu forma **standart form** denir.
- Bir DP **dolgu (slack)** ve **artık (surplus)** değişkenler kullanılarak standart form haline getirilebilir.
- Örnek:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Standard Form :

$$\boxed{\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 60 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}}$$

DP’nin Standart Forma Dönüştürülmesi

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\min z = & 50x_1 + & 20x_2 + & 30x_3 + & 80x_4 & \\
\text{s.t.} & 400x_1 + & 200x_2 + & 150x_3 + & 500x_4 & \geq 500 \\
& 3x_1 + & 2x_2 & & & \geq 6 \\
& 2x_1 + & 2x_2 + & 4x_3 + & 4x_4 & \geq 10 \\
& 2x_1 + & 4x_2 + & x_3 + & 5x_4 & \geq 8 \\
& & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrl}
\min z = & 50x_1 + & 20x_2 + & 30x_3 + & 80x_4 & & & & & \\
\text{s.t.} & 400x_1 + & 200x_2 + & 150x_3 + & 500x_4 & - e_1 & & & & = 500 \\
& 3x_1 + & 2x_2 & & & & - e_2 & & & = 6 \\
& 2x_1 + & 2x_2 + & 4x_3 + & 4x_4 & & & - e_3 & & = 10 \\
& 2x_1 + & 4x_2 + & x_3 + & 5x_4 & & & & - e_4 & = 8
\end{array}
$$

$$x_i, \boxed{e_i} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

DP’nin Standart Forma Dönüştürülmesi

$$
\begin{aligned}
\max z &= 20x_1 + 15x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 \le 100 \\
& x_2 \le 100 \\
& 50x_1 + 35x_2 \le 6{,}000 \\
& 20x_1 + 15x_2 \ge 2{,}000 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max z &= 20x_1 + 15x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + s_1 = 100 \\
& x_2 + s_2 = 100 \\
& 50x_1 + 35x_2 + s_3 = 6{,}000 \\
& 20x_1 + 15x_2 - e_4 = 2{,}000 \\
& x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2); \qquad s_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3); \qquad e_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

Temel Çözüm (Basic Solution - BS) ve Temel Olurlu Çözüm (Basic Feasible Solution - BFS)

- *m* denklem ve *n* değişkenden oluşan ***Ax = b*** sisteminin temel bir çözümü, ***n – m*** adet değişkeni 0'a eşitleyerek geri kalan ***m*** değişken için de denklem sisteminin çözülmesi ile bulunur. (m < n için)
- ***n – m*** adet değişkenin 0'a eşitlenmesi ile geri kalan ***m*** değişken için sistemin tekil bir çözüm üreteceği, diğer bir deyişle kalan ***m*** sütunun doğrusal olarak bağımsız (linearly independent) olduğu varsayılmaktadır.

n – m adet değişken nasıl adlandırılır? ⇨ NBV

m adet değişken nasıl adlandırılır? ⇨ BV

Temel Çözüm (Basic Solution - BS) ve Temel Olurlu Çözüm (Basic Feasible Solution - BFS)

- *m*=2 denklem, *n*=3 karar değişkeni

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

- *n*-*m*=3-2=1 NBV, *m*=2 BV olacaktır.
- $\boxed{\mathrm{NBV} = \{x_3\}}$ ve $\boxed{\mathrm{BV} = \{x_1, x_2\}}$ olursa,
- $x_3 = 0$ için çözüm sağlanabilir ;

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2, x_2 = 1}$$

Temel Çözüm: $\{x_1, x_2, x_3\} = \{2,1,0\}$

Temel Çözüm (Basic Solution - BS) ve Temel Olurlu Çözüm (Basic Feasible Solution - BFS)

- Tüm değişkenlerin negatif olmayan (≥ 0) değer aldığı bir temel çözüm, **temel olurlu çözümdür** **(BFS : basic feasible solution)**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

BFS **BFS** **BFS değil !**

- ***TEOREM-1:*** Bir nokta eğer **BFS** ise olurlu bölgenin bir **uç noktasıdır** **(extreme point)**.

Standard Form ve Temel Çözümler – Örnek 1

$$
\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 40 \\
& 2x_1 + x_2 \le 60 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

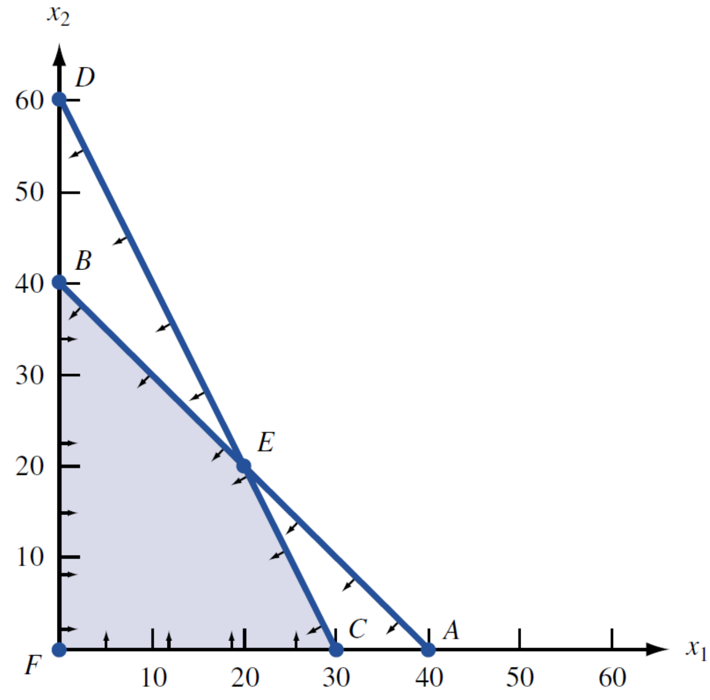
Standart Form:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\
& 2x_1 + x_2 + s_2 = 60 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

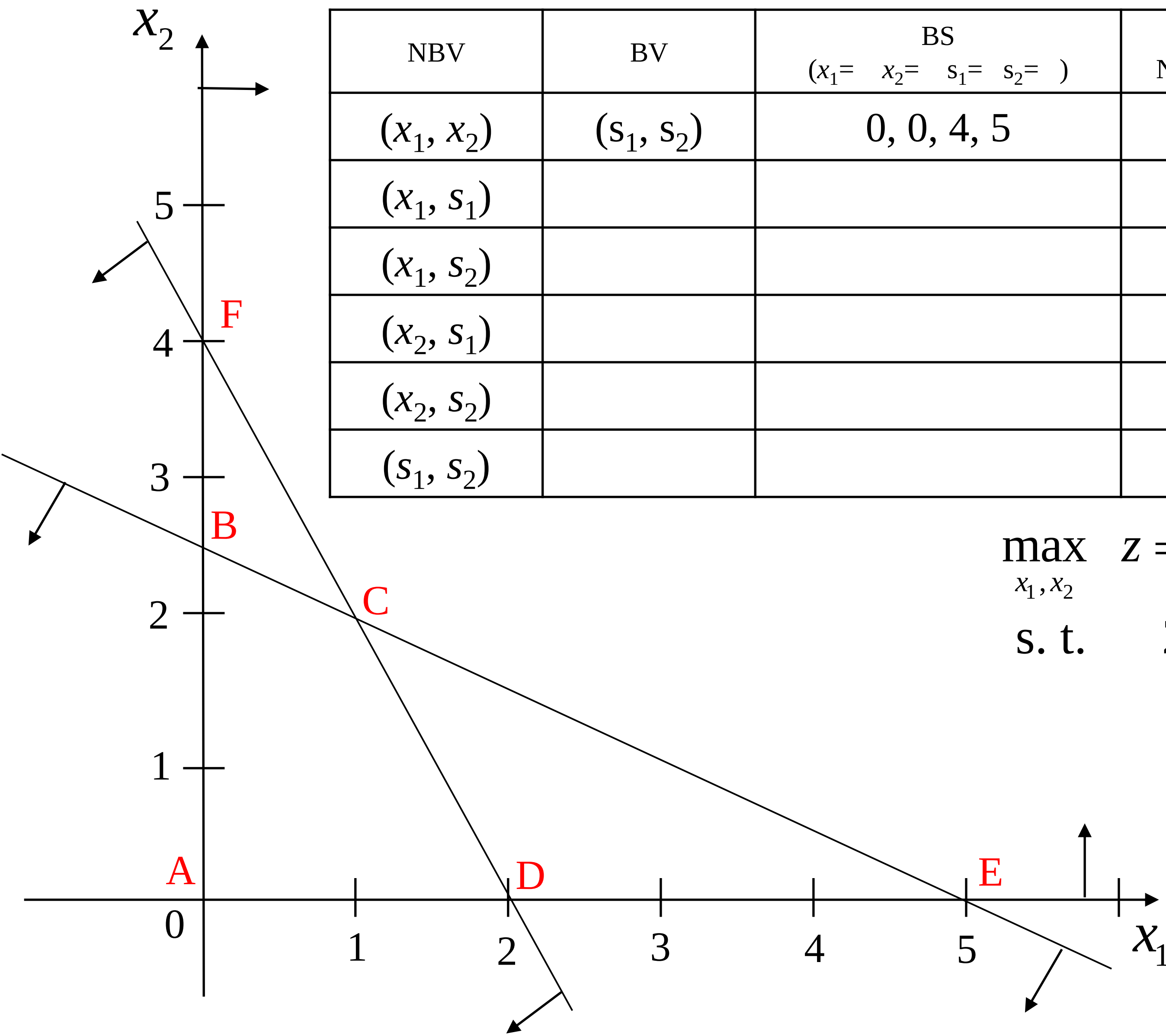
Standard Form ve Temel Çözümler – Örnek 1

BV	NBV	Temel Çözüm (Basic Solution)	UÇ NOKTA
x_1, x_2	s_1, s_2	$s_1 = s_2 = 0, x_1 = x_2 = 20$	E
x_1, s_1	x_2, s_2	$x_2 = s_2 = 0, x_1 = 30, s_1 = 10$	C
x_1, s_2	x_2, s_1	$x_2 = s_1 = 0, x_1 = 40, s_2 = -20$	Not a bfs because $s_2 < 0$
x_2, s_1	x_1, s_2	$x_1 = s_2 = 0, s_1 = -20, x_2 = 60$	Not a bfs because $s_1 < 0$
x_2, s_2	x_1, s_1	$x_1 = s_1 = 0, x_2 = 40, s_2 = 20$	B
s_1, s_2	x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 0, s_1 = 40, s_2 = 60$	F

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 60 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Standard Form ve Temel Çözümler – Örnek 2



NBV	BV	BS (x_1= x_2= s_1= s_2=)	UÇ NOKTA	OLURLU MU?	z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	0, 0, 4, 5	A	Evet	0
(x_1, s_1)					
(x_1, s_2)					
(x_2, s_1)					
(x_2, s_2)					
(s_1, s_2)					

$$\max_{x_1, x_2} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\ & x_1, \; x_2, \; s_1, \; s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Standard Form ve Temel Çözümler

- ***m*** kısıt ve ***n*** değişkenden oluşan bir DP'de toplam BS sayısı: $\boxed{\binom{n}{m}}$
- Büyük *m* ve *n* için, tüm köşe noktalarının incelenmesi çok zaman alabilir...
- Örneğin;

$$m = 10 \text{ ve } n = 20 \longrightarrow \binom{20}{10} = 184{,}756$$

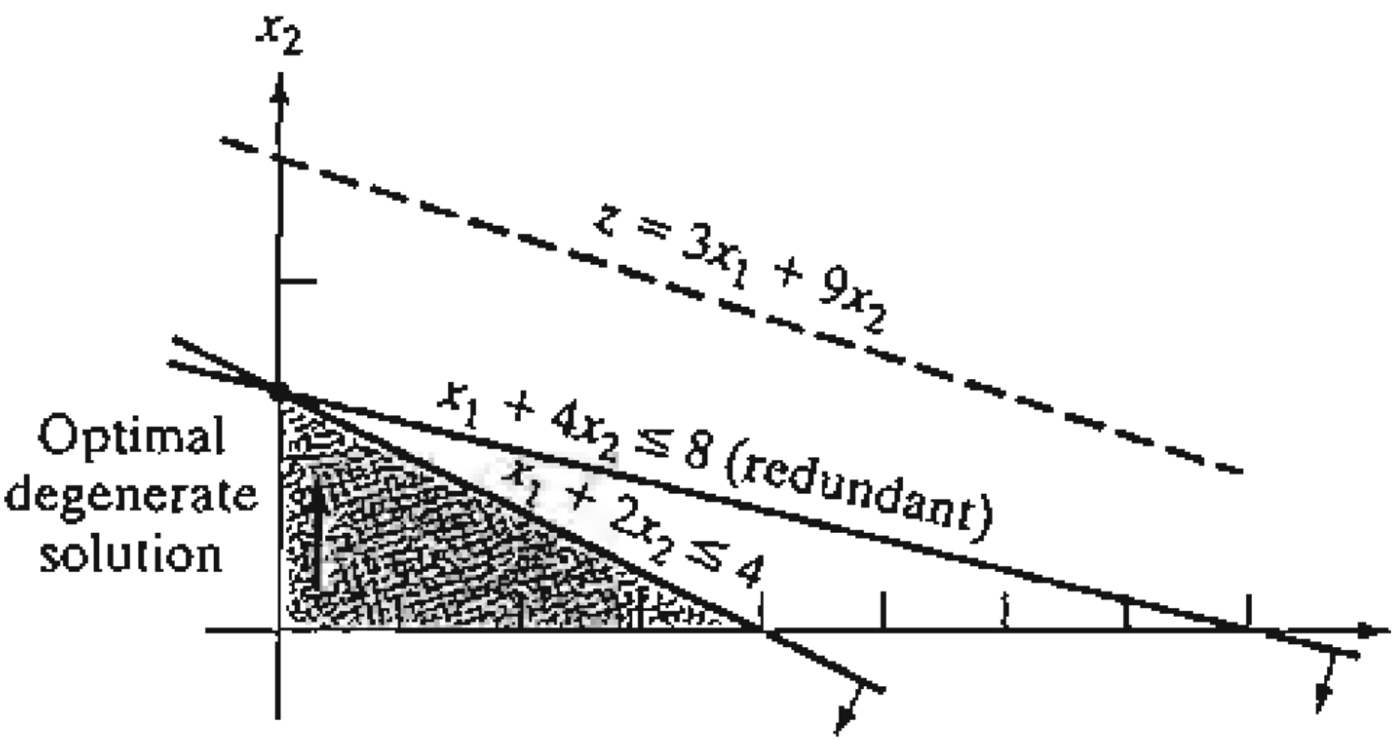
- Simplex metodu olası tüm BFS'ların **sadece bir kısmını** inceler.

Temel Olurlu Çözüm

- **<u>TEOREM-2</u>**: Bir DP'nin **optimal bir çözümü** varsa, o zaman **optimal olan bir BFS** olduğunu söyleyebiliriz.
- Bu önemlidir, çünkü herhangi bir DP sınırlı sayıda BFS’e sahiptir. Böylece bir DP’nin optimal çözümünü <u>sınırlı sayıda noktayı inceleyerek </u>bulabiliriz.
- Herhangi bir DP için olurlu bölge sonsuz sayıda nokta içerdiğinden, çözümleri sınırlı sayıdaki BFS’lerde arama yöntemi işimizi çok **kolaylaştırır**!
- ***m*** kısıttan oluşan bir DP’de ***m*-1** temel değişkeni aynı olan temel olurlu çözümlere **Komşu Temel Olurlu Çözümler** (**adjacent BFS**) denir.

Yozlaşmış (degenerate) DP

- Bazen **birden fazla** Temel Olurlu Çözüm bir uç noktaya karşılık gelebilir. Bu tür DP'lara **yozlaşmış (degenerate)** DP adı verilir.



Simplex Algoritması Adımları

1. **DP'yi standart forma dönüştür**

   Amaç fonksiyonunu sağ taraf 0 olacak şekilde düzenle.

2. **Standart formda bir BFS bul (Başlangıç Olurlu Çözümü)**

   BFS doğrudan bulunamıyorsa Büyük M veya İki Evre metodu

   BFS bulunamıyorsa → Olursuz Problem

3. **BFS'nin optimal olup olmadığını kontrol et**.
   - *BFS optimal ise Algoritmayı bitir.*
   - *BFS optimal değilse, 4. Adıma Geç.*

4. **BV olacak (temele girecek) NBV'yi belirle.**

   z satırındaki bir NBV'nin katsayısı 0 ise → Alternatif optimum

5. **NBV olacak (temelden çıkacak) BV'yi belirle. (Min Oran Testi)**

   Eğer çıkan değişken bulunamıyorsa → Sınırsız Çözüm

6. **Pivot İşlemleri. TSİ kullanarak yeni BFS belirle.**

   Matris ve Sağ Taraf Değelerini güncelle. Adım 3'e dön.

   Bir BV'nin değeri 0 ise → Yozlaşmış Çözüm.

Simplex Algoritması - Örnek

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \\
& x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Standart Form

(İlk Satır Amaç Fonksiyonu)

$$
\begin{aligned}
z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 &= 0 \\
8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 &= 48 \\
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 &= 20 \\
2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 &= 8 \\
x_2 + s_4 &= 5
\end{aligned}
$$

Başlangıç Temel Olurlu Çözümü (BFS)

- **Tanım:** Kanonik Form : Sistemdeki her denklemin **katsayısı 1** olan bir değişkene sahip olduğu (bu değişkenin diğer denklemlerdeki **katsayısı 0** iken) doğrusal bir denklem sistemine **KANONİK** form denir.
- Kanonik formdaki bir sistemde eşitliklerin **sağ tarafları negatif değilse**, kanonik formdan faydalanarak **başlangıç BFS'si kolayca tespit edilebilir**.
- Eğer tüm kısıtlar ≤ ise standart formdan başlangıç BFS'si elde edilebilir. Eğer DP'nin ≥ veya = kısıtları varsa, bir başlangıç çözümü elde etmek doğrudan mümkün olamaz, bu durumda başlangıç çözümü elde etmek için "Büyük-M" veya "İki Evre" metodu kullanılabilir.

Başlangıç Temel Olurlu Çözümü (BFS)

Row		Basic Variable
0	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$	$z = 0$
1	$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$	$s_1 = 48$
2	$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 = 20$	$s_2 = 20$
3	$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 = 8$	$s_3 = 8$
4	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Başlangıç BFS

$$\text{BV} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$\text{NBV} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$x_1 = 0 \qquad s_1 = 48$$

$$x_2 = 0 \qquad s_2 = 20$$

$$x_3 = 0 \qquad s_3 = 8$$

$$s_4 = 5$$

Mevcut BFS Optimal mi?

- Amaç fonksiyonunu dikkate alarak, **diğer NBV'ler 0** seviyesinde sabitken, herhangi bir **NBV'yi artırmak** ***z*****'nin artmasına** yol açıyor mu?

Evet ! x_1 , x_2 , x_3 (üçü de) eğer BV olursa mevcut Z değeri artar. O zaman, mevcut BFS optimal değil !

0 satırında katsayısı negatif olan değişkenler var..

Giren Değişkenin Bulunması

Hangi NBV, BV olmalıdır?

- Amaç fonksiyonunda **en fazla artışa (max prb için)** yol açan NBV **"giren değişken"** olarak tanımlanır.
- 0 satırında negatif katsayıya sahip her NBV giren değişken olabilir. En düşük olanı seçerek, bir adımda fazla artış amaçlanır (*başka yaklaşımlar da var. Örn. Blend Kuralı*).
- Bir NBV'nin BV olması ile elde edilecek yeni BFS mevcut **BFS'nin komşu çözümüdür**.
- En düşük negative katsayılı NBV : x_1 → Giren Değişken
- **Giren değişkenin değeri ne olacak ?** (NBV iken değeri sıfırdı) Bunu çıkan değişken belirlendikten ve satır işlenlerinden sonra göreceğiz.

Çıkan Değişkenin Bulunması

Row	x_1	Basic Variable
0	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$	$z = 0$
1	$\boxed{8x_1} + 6x_2 + x_3 + s_1 = \boxed{48}$	$s_1 = 48$
2	$\boxed{4x_1} + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 = \boxed{20}$	$s_2 = 20$
3	$\boxed{2x_1} + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 = \boxed{8}$	$s_3 = 8$
4	$x_2 + s_4 = \boxed{5}$	$s_4 = 5$

Minimum Oran Testi

$$\left\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}\right\} = 4$$

Sadece, giren değişkenin sütununda katsayısı > 0 olan satırlar dikkate alınır.

En düşük oran s_3 satırında.

Çıkan Değişken = s_3

Pivot İşlemi

Row	x_1	Basic Variable
0	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$	$z = 0$
1	$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$	$s_1 = 48$
2	$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 = 20$	$s_2 = 20$
3	$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 = 8$	$s_3 = 8$
4	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Yeni giren değişkenin sütunu dönüştürülür. Bu sütunun pivot satırındaki elemanı 1, diğer satırları 0 yapılır. (Bu dönüşümden diğer sütunlar da etkilenir)

Tip 1 TSİ: (Satır 3)x(1/2): $\boxed{x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4}$

Tip 2 TSİ: (Satır 3′)x(60) + Satır 0: $\boxed{z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240}$

Tip 2 TSİ: (Satır 3′)x(-8) + Satır 1: $\boxed{-x_3 + s_1 - 4s_3 = 16}$

Tip 2 TSİ: (Satır 3′)x(-4) + Satır 2: $\boxed{-x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4}$

Pivot İşlemi (1.İterasyon) Sonrası Tablo

Row		Basic Variable
Row 0′	$z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240$	$z = 240$
Row 1′	$-x_3 + s_1 - 4s_3 = 16$	$s_1 = 16$
Row 2′	$-x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4$	$s_2 = 4$
Row 3′	$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4$	$x_1 = 4$
Row 4′	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Yeni BFS: $\mathrm{BV} = \{s_1, s_2, x_1, s_4\}, \mathrm{NBV} = \{s_3, x_2, x_3\}$

$$z = 240 - 15x_2 + 5x_3 - 30s_3$$

Mevcut tablo optimum değil !

x_3 NBV'den BV'ye girmek üzere seçilir.

2.İterasyon (Çıkan Değişken)

Row										Basic Variable
Row 0′	z	$+\ 15x_2$	$-\ 5x_3$			$+\ 30s_3$		$=$	240	$z = 240$
Row 1′			$-\ \boxed{x_3}$	$+\ s_1$		$-\ 4s_3$		$=$	$\boxed{16}$	$s_1 = 16$
Row 2′		$-\ x_2$	$+\ \boxed{0.5x_3}$		$+\ s_2$	$-\ 2s_3$		$=$	$\boxed{4}$	$s_2 = 4$
Row 3′	x_1	$+\ 0.75x_2$	$+\ \boxed{0.25x_3}$			$+\ 0.5s_3$		$=$	$\boxed{4}$	$x_1 = 4$
Row 4′		x_2					$+\ s_4$	$=$	$\boxed{5}$	$s_4 = 5$

Row 1′: no ratio

Row 2′: $\dfrac{4}{0.5} = 8$

Row 3′: $\dfrac{4}{0.25} = 16$

Row 4′: no ratio

Minimum Oran Testi

$$min\{8, 16\} = 8$$

Çıkan Değişken = s_2

2.İterasyon (Pivot)

Row	x_3	Basic Variable
Row 0′	$z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240$	$z = 240$
Row 1′	$-x_3 + s_1 - 4s_3 = 16$	$s_1 = 16$
Row 2′	$-x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4$	$s_2 = 4$
Row 3′	$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4$	$x_1 = 4$
Row 4′	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Row		Basic Variable
0″	$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
1″	$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
2″	$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
3″	$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
4″	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

2.İterasyon Sonrası Tablo

Yeni BFS: $\boxed{\mathrm{BV} = \{s_1, x_3, x_1, s_4\}, \mathrm{NBV} = \{s_3, s_2, x_2\}}$

Row		Basic Variable
0″	$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
1″	$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
2″	$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
3″	$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
4″	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Mevcut Çözüm Optimal mi? **EVET!**

Bir maksimizasyon problemi için, tüm temel olmayan değişkenlerin (NBV) kanonik form **amaç fonksiyonundaki katsayıları negatif değilse**, kanonik form **optimaldir**. (OPTİMALLİK KOŞULU)

Simplex ile Minimizasyon Problemi Çözümü

Yöntem 1: MAX problemi olarak çözmek
Yöntem 2: MİN problemi olarak çözmek

Örnek:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplex ile Minimizasyon Problemi Çözümü

Yöntem 1: MAX problemi olarak çözmek

Amaç fonksiyonunu (–1) ile çarp.

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \max -z &= -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}}$$

Simplex ile Minimizasyon Problemi Çözümü

Yöntem 1: MAX problemi olarak çözmek

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	Basic Variable	Ratio
1	2	-3	0	0	0	$-z = 0$	
0	1	1	1	0	4	$s_1 = 4$	$\frac{4}{1} = 4^*$
0	1	-1	0	1	6	$s_2 = 6$	None

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	Basic Variable
1	5	0	3	0	12	$-z = 12$
0	1	1	1	0	4	$x_2 = 4$
0	2	0	1	1	10	$s_2 = 10$

Simplex ile Minimizasyon Problemi Çözümü

Yöntem 2: MİN problemi olarak çözmek

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	Basic Variable	Ratio
1	−2	3	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	1	0	4	$s_1 = 4$	$\frac{4}{1} = 4$*
0	1	−1	0	1	6	$s_2 = 6$	None

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	Basic Variable
1	−5	0	−3	0	−12	$z = -12$
0	1	1	1	0	4	$x_2 = 4$
0	2	0	1	1	10	$s_2 = 10$

Simplex Örnek (min problem) – 1

$$
\begin{aligned}
\min z &= 4x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 &\le 8 \\
x_2 &\le 5 \\
x_1 - x_2 &\le 4 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS	Oran
z	1	-4	1	0	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	0	8	8
s_2	0	0	1	0	1	0	5	5*
s_3	0	1	-1	0	0	1	4	Yok

x_2 girer
S_2 çıkar

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS	Oran
z	1	-4	0	0	-1	0	-5	
s_1	0	2	0	1	-1	0	3	
x_2	0	0	1	0	1	0	5	
s_3	0	1	0	0	1	1	9	

Optimal Çözüm

z = -5

$x_1 = 0$ (NBV)
$x_2 = 5$ (BV)
$x_3 = 0$ (NBV)
$s_1 = 3$ (BV)
$s_2 = 0$ (NBV)
$s_3 = 9$ (BV)

Simplex Örnek (min problem) – 2

$$\min z = -x_1 - x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Oran
	1	1	1	0	0	0	
s_1	0	1	-1	1	0	1	Yok
s_2	0	1	1	0	1	2	2

x_2 girer
S_2 çıkar

1	0	0	0	-1	-2
0	2	0	1	1	3
0	1	1	0	1	2

Optimal Çözüm

z = -2

$x_1 = 0$ (NBV)

$x_2 = 2$ (BV)

$s_1 = 3$ (BV)

$s_2 = 0$ (NBV)

Alternatif Optimal Çözüm

$$BV = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, NBV = \{x_1, x_2, x_3\}$$

1

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	Basic Variable	Ratio
1	−60	−35	−20	0	0	0	0	0	$z = 0$	
0	8	6	1	1	0	0	0	48	$s_1 = 48$	$\frac{48}{8} = 6$
0	4	2	1.5	0	1	0	0	20	$s_2 = 20$	$\frac{20}{4} = 5$
0	2	1.5	0.5	0	0	1	0	8	$s_3 = 8$	$\frac{8}{2} = 4^*$
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	None

$$BV = \{x_1, s_1, s_2, s_4\}, NBV = \{x_2, x_3, s_3\}$$

2

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	Basic Variable	Ratio
1	0	10	−5	0	0	30	0	240	$z = 240$	
0	0	0	−1	1	0	−4	0	16	$s_1 = 16$	None
0	0	−1	0.5	0	1	−2	0	4	$s_2 = 4$	$\frac{4}{0.5} = 8^*$
0	1	0.75	0.25	0	0	0.5	0	4	$x_1 = 4$	$\frac{4}{0.25} = 16$
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	None

$$BV = \{x_1, x_3, s_1, s_4\}, NBV = \{x_2, s_2, s_3\}$$

Alternatif Optimal Çözüm

z satırında **0 olan** bir **NBV** var: x_2

NBV

3

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	Basic Variable
1	0	0	0	0	10	10	0	280	$z = 280$
0	0	−2	0	1	2	−8	0	24	$s_1 = 24$
0	0	−2	1	0	2	−4	0	8	$x_3 = 8$
0	1	1.25	0	0	−0.5	1.5	0	2	$x_1 = 2$*
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$

$$\mathrm{BV} = \{x_1, x_3, s_1, s_4\}, \mathrm{NBV} = \{x_2, s_2, s_3\}, z = 280 - 10s_2 - 10s_3 = 280$$

4

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	Basic Variable
1	0	0	0	0	10	10	0	280	$z = 280$
0	1.6	0	0	1	1.2	−5.6	0	27.2	$s_1 = 27.2$
0	1.6	0	1	0	1.2	−1.6	0	11.2	$x_3 = 11.2$
0	0.8	1	0	0	−0.4	1.2	0	1.6	$x_2 = 1.6$
0	−0.8	0	0	0	0.4	−1.2	1	3.4	$s_4 = 3.4$

$$\mathrm{BV} = \{x_2, x_3, s_1, s_4\}, \mathrm{NBV} = \{x_1, s_2, s_3\}, z = 280 - 10s_2 - 10s_3 = 280$$

Alternatif Optimal Çözüm

- Her iki tablo da optimal...

Tablo 3

$$\mathrm{BV}=\{x_1,x_3,s_1,s_4\},\mathrm{NBV}=\{x_2,s_2,s_3\}$$

$$x^*=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\s_1\\s_2\\s_3\\s_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\8\\24\\0\\0\\5\end{bmatrix},\qquad z^*=280$$

Tablo 4

$$\mathrm{BV}=\{x_2,x_3,s_1,s_4\},\mathrm{NBV}=\{x_1,s_2,s_3\}$$

$$x^*=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\s_1\\s_2\\s_3\\s_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1.6\\11.2\\27.2\\0\\0\\3.4\end{bmatrix},\qquad z^*=280$$

Alternatif Optimal Çözüm

- Optimal çözümlerin matematiksel ifadesi:

$\boldsymbol{x}^{(1)*}$ ●————————————————● $\boldsymbol{x}^{(2)*}$

$$x^{(1)*} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)*} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{bmatrix}, \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ 1.6 - 1.6\lambda \\ 11.2 - 3.2\lambda \end{bmatrix}$$

Sınırsız Çözüm

$$\begin{aligned} \max z &= 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ & 6x_1 + 5x_2 - x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	rhs	Basic Variable	Ratio
1	−36	−30	3	4	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	−1	0	1	0	5	$s_1 = 5$	$\frac{5}{1} = 5$
0	6	5	0	−1	0	1	10	$s_2 = 10$	$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$*

$$\boxed{\text{BV} = \{s_1, s_2\}, \text{NBV} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}}$$

$$\boxed{\text{BV} = \{x_1, s_1\}, \text{NBV} = \{x_2, x_3, x_4, s_2\}}$$

Sınırsız Çözüm

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	rhs	Basic Variable	Ratio
1	0	0	3	-2	0	6	60	$z = 60$	
0	0	$\frac{1}{6}$	-1	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{10}{3}$	$s_1 = \frac{10}{3}$	$(\frac{10}{3})/(\frac{1}{6}) = 20^*$
0	1	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$	$x_1 = \frac{5}{3}$	None

$$\mathrm{BV} = \{x_1, x_4\}, \mathrm{NBV} = \{x_2, x_3, s_1, s_2\}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	rhs	Basic Variable	Ratio
1	0	2	-9	0	12	4	100	$z = 100$	
0	0	1	-6	1	6	-1	20	$x_4 = 20$	None
0	1	1	-1	0	1	0	5	$x_1 = 5$	None

$$x_4 = 20 + 6x_3$$

$$x_1 = 5 + x_3$$

$$z = 100 - 2x_2 + 9x_3 - 12s_1 - 4s_2$$

x_3'ü istediğimiz kadar artırabiliriz

Z, x_3'teki her artış için 9 birim artacaktır

Yozlaşmış Çözüm (Degeneracy)

- Ender karşılaşılmakla beraber, Simplex algoritmasının bir LP'nin **optimal çözümünü bulamadığı** durumlar vardır.
- Simplex iterasyonlarında (max problem);

Yeni BFS z değeri = ***Mevcut BFS z değeri*** -

(yeni BFS'de giren değişken değeri) x

(mevcut BFS'de giren değişkenin satır 0 katsayısı)

- Bu durumda;

Yeni BFS'de giren değişken değeri > 0 ise,

Yeni BFS z değeri > ***Mevcut BFS z değeri***

Yeni BFS'de giren değişken değeri = 0 ise,

Yeni BFS z değeri = ***Mevcut BFS z değeri***

Yozlaşmış Çözüm (Degeneracy)

- **TANIM:** Eğer bir LP'nin her BFS'sinde **tüm temel değişkenler (BV) pozitif ise**, bu LP'ye **yozlaşmamış (nondegenerate)** LP denir.

  Yozlaşmamış bir LP'de her iterasyonda **z değeri artar** (max problemi) ve bir BFS **birden fazla kez ziyaret edilmez.**

- **TANIM:** Herhangi bir BFS'sinde **bir temel değişkeni (BV) 0 değeri alan** bir LP'ye **yozlaşmış (degenerate)** LP denir.

  → Modelin en az bir **gereksiz kısıtı** vardır.

  → **Cycling** (döngüye girme) olasılığı var.

Yozlaşmış Çözüm (Degeneracy)

- **Örnek:**

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 - x_2 \le 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	Basic Variable	Ratio
1	-5	-2	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	1	0	6	$s_1 = 6$	6
0	1	-1	0	1	0	$s_2 = 0$	0*

$$\mathrm{BV} = \{s_1, s_2\}, \mathrm{NBV} = \{x_1, x_2\} \Rightarrow \mathrm{BV} = \{x_1, s_1\}, \mathrm{NBV} = \{x_2, s_2\}$$

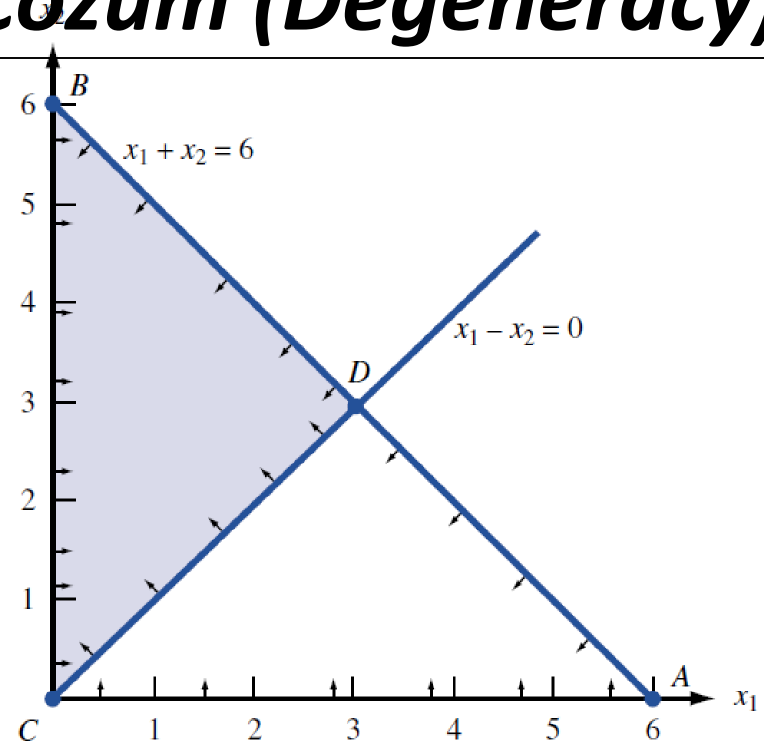
Yozlaşmış Çözüm (Degeneracy)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	Basic Variable	Ratio
1	0	-7	0	5	0	$z = 0$	
0	0	2	1	-1	6	$s_1 = 6$	$\frac{6}{2} = 3^*$
0	1	-1	0	1	0	$x_1 = 0$	None

$BV = \{x_1, s_1\}, NBV = \{x_2, s_2\}$ ⇨ $BV = \{x_1, x_2\}, NBV = \{s_1, s_2\}$

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	Basic Variable
1	0	0	3.5	1.5	21	$z = 21$
0	0	1	0.5	-0.5	3	$x_2 = 3$
0	1	0	0.5	0.5	3	$x_1 = 3$

Yozlaşmış Çözüm (Degeneracy)

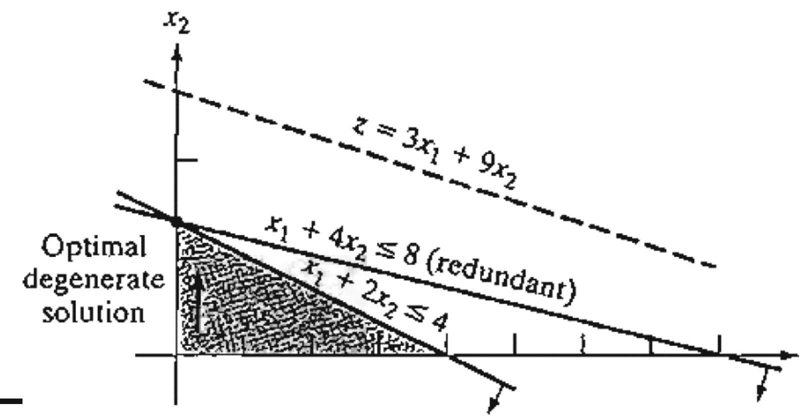


Basic Variables	Basic Feasible Solution	Corresponds to Extreme Point
x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 3, s_1 = s_2 = 0$	D
x_1, s_1	$x_1 = 0, s_1 = 6, x_2 = s_2 = 0$	C
x_1, s_2	$x_1 = 6, s_2 = -6, x_2 = s_1 = 0$	Infeasible
x_2, s_1	$x_2 = 0, s_1 = 6, x_1 = s_2 = 0$	C
x_2, s_2	$x_2 = 6, s_2 = 6, s_1 = x_1 = 0$	B
s_1, s_2	$s_1 = 6, s_2 = 0, x_1 = x_2 = 0$	C

Yozlaşmış Çözüm (Degeneracy)

Maximize $z = 3x_1 + 9x_2$

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Iteration	Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	Solution
0	z	-3	-9	0	0	0
x_2 enters	x_3	1	4	1	0	8
x_3 leaves	x_4	1	2	0	1	4
1	z	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
x_1 enters	x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
x_4 leaves	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
2	z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
(optimum)	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
	x_1	1	0	-1	2	0

Başlangıç BFS'sinin Bulunması

- Simplex algoritması başlamak için bir BFS'ye ihtiyaç duyar.

Başlangıç temel çözümü olurlu bir temel çözüm olmalı. Olursuz bir temel çözüm olmaz !

- $kısıtlar \leq ol$ursa$ması\ durumunda$; dolgu (slack) değişkenleri başlangıç için bir BFS elde etmede kullanılabilir.
- Başlangıçta elimizde hazır bir BFS yoksa ($\geq kısıtları$) o zaman iki farklı yöntemler ile başlangıç BFS'si elde edilebilir:
  - **Büyük M Metodu**
  - **İki Evre Metodu**

Büyük M (Big-M) Metodu

$$
\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \le 4 \\
& x_1 + 3x_2 \ge 20 \\
& x_1 + x_2 = 10
\end{aligned}
$$

Standart Form:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
z - 2x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 \qquad &= 4 \\
x_1 + 3x_2 \qquad - e_2 &= 20 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 10
\end{aligned}
}
$$

Büyük M Metodu

- İlk tablonun oluşturulması ve bir BFS elde etmek için öncelikle iki adet **yapay (artificial) değişken** tanımlayalım.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & & & & & = & 0 \\
 & & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + & \boxed{s_1} & & & & & & & = & 4 \\
 & & x_1 & + & 3x_2 & & & - & e_2 & + & a_2 & & & = & 20 \\
 & & x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & a_3 & = & 10
\end{array}
$$

Başlangıç BFS $\boxed{z = 0, s_1 = 4, a_2 = 20, a_3 = 10}$

- İlk problem ile yapay değişkenleri tanımlayarak elde ettiğimiz problem aynı optimal çözüme mi sahip olacak?

Optimal: $z = 0, s_1 = 4, a_2 = 20, a_3 = 10, x_1 = x_2 = 0$

Büyük M Metodu

- **Yapay değişkenlerin** optimal çözümde **temel değişken (BV) olmamaları** (0 değeri almaları) için, bu değişkenlere büyük bir amaç fonksiyonu **(M) katsayısı** tanımlanır:

$$\boxed{\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3}$$

$$\boxed{z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0}$$

- Buradaki amaç, bu değişkenlerin en kısa sürede **temel olmayan değişken (NBV) olarak çözümden çıkmalarını** ve bir daha temel değişken (BV) olmamalarını sağlamaktır.

Büyük M Metodu

- Problemin yeni tanımlanan amaç fonksiyonundan da görüleceği gibi, optimal çözümde: $a_2 = a_3 = 0$ olması beklenir.
- Modifiye edilmiş amaç fonksiyonu kullanıldığında, yapay değişkenler eklenmiş problemin optimal çözümü ile orijinal problemin optimal çözümü **aynı olacaktır**.
- Bazı durumlarda, Büyük M metodu ile bulunan optimal çözümde bazı **yapay değişkenler pozitif değer alabilir**. Bu gibi durumlar **orijinal problemin olurlu çözümü olmadığını (infeasible)** gösterir.

Büyük M Metodu Adımları

1. Problemi **standart forma** çevir (Eşitsizlikleri eşitliğe dönüştür, sağ tarafları pozitif yap).
2. Eğer mevcut formdan BFS elde edilemiyorsa **yapay değişkenler tanımla**.
3. Her yapay değişken için amaç fonksiyonunda **büyük bir katsayı (M) tanımla** (min problemi için $\boldsymbol{M}a_i$, max problemi için $-\boldsymbol{M}a_i$).
4. Başlangıçta tüm yapay değişkenler temel çözümde yer alacağı için, Simplex'e başlamadan önce 0 satırındaki (amaç fonksiyonu) **yapay değişkenleri** temel satır işlemleri ile **ele**.
5. Modifiye edilmiş problemi **Simplex ile çöz**. Optimal çözümde **tüm yapay değişkenler 0** ise, orijinal problem için **olurlu bir optimal çözüm** bulunmuştur. Eğer optimal çözümde **pozitif yapay değişkenler** varsa **orijinal problem olursuzdur (infeasible).**

Büyük M Metodu

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{llr}
\text{Row 1:} & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 & = 4 \\
\text{Row 2:} & x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 & = 20 \\
\text{Row 3:} & x_1 + x_2 + a_3 & = 10
\end{array}$$

Temel satır işlemleri ile satır 0 kanonik forma dönüştürülür.

$$\begin{array}{llr}
\text{Row 0:} & z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 & = 0 \\
M(\text{row 2}): & Mx_1 + 3Mx_2 - Me_2 + Ma_2 & = 20M \\
M(\text{row 3}): & Mx_1 + Mx_2 + Ma_3 & = 10M \\
\text{New row 0:} & \boxed{z + (2M-2)x_1 + (4M-3)x_2 - Me_2 = 30M} &
\end{array}$$

Büyük M Metodu

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable	Ratio
1	$2M-2$	$4M-3$	0	$-M$	0	0	$30M$	$z=30M$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1=4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	20	$a_2=20$	$\frac{20}{3}$*
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3=10$	10

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable	Ratio
1	$\frac{2M-3}{3}$	0	0	$\frac{M-3}{3}$	$\frac{3-4M}{3}$	0	$\frac{60+10M}{3}$	$z=\frac{60+10M}{3}$	
0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$	$s_1=\frac{7}{3}$	$\frac{28}{5}$
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$x_2=\frac{20}{3}$	20
0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$a_3=\frac{10}{3}$	5*

Büyük M Metodu

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable
1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1-2M}{2}$	$\frac{3-2M}{2}$	25	$z = 25$
0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$s_1 = \frac{1}{4}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	$x_2 = 5$
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	$x_1 = 5$

$$\text{BV} = \{x_1, x_2, s_1\}, \text{NBV} = \{e_2, a_2, a_3\}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ e_2 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad z^* = 25$$

Büyük M Metodu ile Problemin Olursuz Olduğunun Bulunması

$$
\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 3x_2 \geq 36 \\
& x_1 + x_2 = 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 &= 4 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 &= \boxed{36} \\
x_1 + x_2 + a_3 &= 10
\end{aligned}
$$

Büyük (Big) M Metodu ile Problemin Olursuz Olduğunun Bulunması

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable	Ratio
1	$2M - 2$	$4M - 3$	0	$-M$	0	0	$46M$	$z = 46M$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	$a_2 = 36$	12
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10*

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable
1	$1 - 2M$	0	0	$-M$	0	$3 - 4M$	$30 + 6M$	$z = 6M + 30$
0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$s_1 = \frac{3}{2}$
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_2 = 6$
0	1	1	0	0	0	1	10	$x_2 = 10$

Optimal çözümde yapay değişken a_2 pozitif değer aldı. Problemin olurlu çözümü yoktur.

İki Evre (Two Phase) Metodu

- Elimizde hazır bir BFS olmadığında kullanılabilecek diğer bir metod da **iki evre** metodudur.
- Büyük M metodunda olduğu gibi probleme **yapay değişkenler eklenir.**
- İlk aşamada (Evre-1), amaç fonksiyonu eldeki **yapay değişkenleri minimize etmeye** çalışır.
- Yapay değişkenler temel olmaktan çıktığında, artık elimizde orijinal problem için bir BFS vardır. Böylelikle ilk evre tamamlanır.
- İkinci evrede **orijinal problemin amaç fonksiyonu** ile Simplex'e devam edilir.

İki Evre Metodu Adımlar

1. Problemi **standart forma** dönüştür (Eşitsizlikleri eşitliğe dönüştür, sağ tarafları pozitif yap).
2. Eğer mevcut formdan BFS elde edilemiyorsa **yapay değişkenler tanımla**.
3. **İlk evrede** yeni bir amaç fonksiyonu tanımla. Bu amaç fonksiyonu (w') **yapay değişkenlerin toplamı** olsun.
4. Bu problemi Simplex ile çöz. Problem olurlu (feasible) ise, optimal çözümde **yapay değişkenler** temel olmayan değişkenler **(NBV) olacaktır**. (Ayrıca w' değeri de 0 olacaktır)
5. **İkinci evreye** geç. Elde edilen amaç fonksiyonunu **orijinal amaç fonksiyonu ile değiştir**. Bu amaç fonksiyonu ve mevcut BFS ile Simplex'e devam et. Optimal çözümü bul.

İlk Evre Sonunda Durumlar

- **Durum 1:** w' **0'dan farklıdır**. Bu durumda, orijinal problemin olurlu bir **çözümü yoktur** (infeasible).
- **Durum 2:** w' **0'a eşit**, **yapay değişkenler NBV'dir**. Bu durumda yapay değişkenlere ait tüm sütunlar problemden (ve simplex tablodan) çıkartılabilir. Orijinal problemin amaç fonksiyonu ile **2.evreye devam** edilebilir.
- **Durum 3:** $\boldsymbol{w'}$ **0'a eşit**, ancak **en az bir yapay değişken BV'dir** (Değeri 0 olmasına rağmen temel değişken). Bu durumda temel olmayan (NBV) tüm yapay değişkenler ve 0 satırında negatif katsayıya sahip orijinal probleme ait tüm temel değişkenler (BV) problemden çıkartılarak **2.evreye devam** edilir.

İki Evre Metodu – Durum 1

$$
\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \le 4 \\
& x_1 + 3x_2 \ge 36 \\
& x_1 + x_2 = 10 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 &= 4 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 &= 36 \\
x_1 + x_2 + a_3 &= 10
\end{aligned}
$$

İki Evre Metodu – Durum 1

$$
\begin{aligned}
z - 2x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\
x_1 + 3x_2 \qquad - e_2 + a_2 \qquad &= 36 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + a_3 &= 10
\end{aligned}
$$

İlk Evre için yeni amaç fonksiyonu oluştur.

$$
\begin{aligned}
&\boxed{\min w' = a_2 + a_3} \\
&\text{s.t.} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad = 4 \\
&\qquad\quad x_1 + 3x_2 \qquad - e_2 + a_2 \qquad = 36 \\
&\qquad\quad x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + a_3 = 10
\end{aligned}
$$

İki Evre Metodu – Durum 1

$$\begin{array}{llr}
\min w' = a_2 + a_3 & & \\
\text{s.t.} & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 & = 4 \\
& x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 & = 36 \\
& x_1 + x_2 + a_3 & = 10
\end{array}$$

Temel satır işlemleri ile satır 0 kanonik forma dönüştürülür.

$$\begin{array}{lll}
\text{Row 0:} & w' - a_2 - a_3 & = 0 \\
+\ \text{Row 2:} & x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 & = 36 \\
+\ \text{Row 3:} & x_1 + x_2 + a_3 & = 10 \\
=\ \text{New row 0:} & w' + 2x_1 + 4x_2 - e_2 & = 46
\end{array}$$

İki Evre Metodu – Durum 1

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable	Ratio
1	2	4	0	-1	0	0	46	$w' = 46$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	$a_2 = 36$	12
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10*

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable
1	-2	0	0	-1	0	-4	6	$w' = 6$
0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$s_1 = \frac{3}{2}$
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_2 = 6$
0	1	1	0	0	0	1	10	$x_2 = 10$

0 satırındaki katsayıların hepsi negatif, optimal çözüm bulundu.
w' değeri 0'dan farklı (6), bu nedenle **orjinal problem olurlu değil.**

İki Evre Metodu – Durum 2

$$
\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \le 4 \\
& x_1 + 3x_2 \ge 20 \\
& x_1 + x_2 = 10 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z - 2x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\
x_1 + 3x_2 \qquad - e_2 + a_2 \qquad &= 20 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + a_3 &= 10
\end{aligned}
$$

İki Evre Metodu – Durum 2

$$\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \le 4 \\
& x_1 + 3x_2 \ge 20 \\
& x_1 + x_2 = 10 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

İlk Evre için yeni amaç fonksiyonu oluştur.

$$\boxed{\min w' = a_2 + a_3}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 \\
& x_1 + x_2 + a_3 = 10
\end{aligned}$$

İki Evre Metodu – Durum 2

$$
\begin{aligned}
\min w' &= a_2 + a_3 \\
\text{s.t.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 \\
& x_1 + x_2 + a_3 = 10
\end{aligned}
$$

Temel satır işlemleri ile satır 0 kanonik forma dönüştürülür.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Row 0:} & w' - a_2 - a_3 = 0 \\
+ \text{ Row 2:} & x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 \\
+ \text{ Row 3:} & x_1 + x_2 + a_3 = 10 \\
= \text{ New row 0:} & w' + 2x_1 + 4x_2 - e_2 = 30
\end{array}
$$

İki Evre Metodu – Durum 2

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable	Ratio
1	2	4	0	-1	0	0	30	$w' = 30$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	20	$a_2 = 20$	$\frac{20}{3}$*
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable	Ratio
1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	$w' = \frac{10}{3}$	
0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$	$s_1 = \frac{7}{3}$	$\frac{28}{5}$
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$x_2 = \frac{20}{3}$	20
0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$a_3 = \frac{10}{3}$	5*

İki Evre Metodu – Durum 2

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	Basic Variable
1	0	0	0	0	-1	-1	0	$w' = 0$
0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$s_1 = \frac{1}{4}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	$x_2 = 5$
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	$x_1 = 5$

- Bu aşamadan sonra **2.evreye geçilebilir.**
- 2.evre için, öncelikle **satır 0 mevcut BFS için kanonik forma dönüştürülmeli**.
- Tablodan ***a*$_2$ ve *a*$_3$ sütunları silinebilir.**

İki Evre Metodu – Durum 2

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \text{yada} \qquad z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

- x_1 ve x_2 Evre 1 optimal tablosunda yer aldığından, Evre 2'ye başlamadan önce Evre 2 satır 0'dan **TSİ ile yok edilmelidir.**

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Phase II row 0:} & z - 2x_1 - 3x_2 & & = 0 \\
+\ 3(\text{row 2}): & 3x_2 & - \frac{3}{2}e_2 & = 15 \\
+\ 2(\text{row 3}): & 2x_1 & + e_2 & = 10 \\
=\ \text{New Phase II row 0:} & z & - \frac{1}{2}e_2 & = 25
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\min z - \tfrac{1}{2}e_2 &= 25 \\
s_1 - \tfrac{1}{8}e_2 &= \tfrac{1}{4} \\
x_2 - \tfrac{1}{2}e_2 &= 5 \\
x_1 + \tfrac{1}{2}e_2 &= 5
\end{aligned}$$

Bu problemde, ilave herhangi bir pivot yapmadan bu çözümün **2.evre için de optimal** olduğu görülebilir.

İki Evre Metodu – Durum 3

$$\begin{aligned}
\max z &= 40x_1 + 10x_2 + 7x_5 + 14x_6 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \\
& -2x_1 + x_2 - 2x_5 = 0 \\
& x_1 + x_3 + x_5 - x_6 = 3 \\
& 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\
& \text{All } x_i \geq 0
\end{aligned}$$

- x_4 sadece 4.eşitlikte yer aldığından, temel değişken olarak alınabilir.
- Bir BFS elde etmek için; 1, 2 ve 3. eşitlikler için 3 adet yapay değişken tanımlayalım: $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$.

İki Evre Metodu – Durum 3

Evre 1 Amaç Fonk: $\min w = a_1 + a_2 + a_3$

TSİ ile 1,2 ve 3ncü satırlar amaç fonk.na eklendiğinde elde edilen Evre 1 tablosu:

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	rhs	Basic Variable
1	0	0	1	0	1	−1	0	0	0	3	$w = 3$
0	1	−1	0	0	2	0	1	0	0	0	$a_1 = 0$
0	−2	1	0	0	−2	0	0	1	0	0	$a_2 = 0$
0	1	0	1	0	1	−1	0	0	1	3	$a_3 = 3$
0	0	2	1	1	2	1	0	0	0	4	$x_4 = 4$

w=0, **optimal Evre 1 tablosu**. Ancak a_1 ve a_2 **BV**. a_3 sütunu **silinebilir**.

$w = x_1$

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	rhs	Basic Variable
1	$\cancel{-1}$	0	0	0	0	0	0	0	$\cancel{-1}$	0	$w = 0$
0	$\cancel{1}$	−1	0	0	2	0	1	0	$\cancel{0}$	0	$a_1 = 0$
0	$\cancel{-2}$	1	0	0	−2	0	0	1	$\cancel{0}$	0	$a_2 = 0$
0	$\cancel{1}$	0	1	0	1	−1	0	0	$\cancel{1}$	3	$x_3 = 3$
0	$\cancel{-1}$	2	0	1	1	2	0	0	$\cancel{-1}$	1	$x_4 = 1$

İki Evre Metodu – Durum 3

$$z - 40x_1 - 10x_2 - 7x_5 - 14x_6 = 0$$

z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	rhs	Basic Variables
1	-10	0	0	-7	-14	0	0	0	$z = 0$
0	-1	0	0	2	0	1	0	0	$a_1 = 0$
0	1	0	0	-2	0	0	1	0	$a_2 = 0$
0	0	1	0	1	-1	0	0	3	$x_3 = 3$
0	2	0	1	1	2	0	0	1	$x_4 = 1$

Optimal Tablo, *z*=7

z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	rhs	Basic Variables
1	4	0	7	0	0	0	0	7	$z = 7$
0	0	0	0	2	0	1	0	0	$a_1 = 0$
0	1	0	0	0	0	0	1	0	$a_2 = 0$
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$	$x_3 = \frac{7}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$x_6 = \frac{1}{2}$

Örnek

$$\min z = -x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

Solution	x_j
$c'x = -c_B B^{-1} b$	$-\boldsymbol{c_B B^{-1} A_j} + \boldsymbol{c_j} = \bar{c}_j$
$x_B = B^{-1} b$	$u = B^{-1} A_j$

$Ax = b$

$x \geq 0$

m constraints must be active

n−m constraints must be active

n active constraints