Yöneylem Araştırması-1
Ders Notu - 1

Yöneylem Araştırmasına Giriş, Optimizasyon Kavramı
Matematiksel Modellerin Sınıflandırması
Doğrusal Programlamaya (DP) Giriş
DP 4 Temel Varsayımı
DP Modeli Kurma, Olurlu, Optimum Çözüm
DP'nin Grafik Çözümü
 Temel Çözümler, Köşe Noktaları, Eş Fayda Doğrusu Kullanma
DP Çözümü 4 Özel Durumu
 Tek Çözüm, Alternatif Çözüm, Sınırsızlık, Olursuzluk
Gereksiz Kısıtlar, Dejenere Çözüm, Dolgu ve Artık Değişkenler
DP'nin Farklı Gösterimleri
 İndis ve kümler kullanma, Kanonik Gösterim, Matris Gösterimi
 DP'nin Standart Formu

Yöneylem Araştırması

Yöneylem ~ Operasyon :
Bir organizasyon tarafından yürütülen faaliyetler.

Araştırma ~ Analiz :
Bilimsel yöntemlerle problemi tanımlama, model kurma, aday çözümleri ortaya koyma, deney yapma

Yöneylem Araştırması :
Karar problemlerini bilimsel olarak çözebilmek için kullanılan kantitatif (sayısal) yaklaşımlar bütünü.
Karmaşık durumların modellenmesi ve bu modellerin çözülmesine yönelik bilimsel yöntemleri içeren bir disiplin.

Harekât Analizi (Türkçe, Askeri)
Operations Research ~ OR (İngilizce, Uluslararası Bilimsel)

Yöneylem Araştırması

Yöneylem Araştırması (OR); karmaşık mühendislik ve yönetim problemlerinin matematiksel modellerinin nasıl oluşturulacağı, nasıl çözümleneceği ve çözümlerin nasıl analiz edileceği üzerine yöntem ve esasları içeren çalışma alanıdır.

Yöneylem araştırması, karar problemlerini matematiksel modeller ile alır. Matematiksel model, problemin matematiksel bir temsilidir ve problemin özelliklerini tanımlamak için gereken değişkenler ve ilişkilerden oluşur.

Optimizasyon (en iyileme); *verilen kısıt ve amaçlara göre bir probleme ait en iyi sonucu bulma metodolojisi. Optimizasyon, bir performans göstergesini (maliyet, kâr, kalite, etkinlik vb.) en küçükleme veya en büyüklemeye yardımcı olur.*

Optimizasyon Modelleri (Farklı Yönlerden Sınıflandırma)

- Matematiksel Model / Ağ (network) modeli
- Deterministik / Stokastik
- Doğrusal / Doğrusal olmayan
- Kısıtlanmış (constrained) / Kısıtlanmamış (unconstrained)
- Tek amaçlı / Çok Amaçlı (multi objective)
- Statik / Dinamik
- Çözüm Yöntemi / Algoritmaya göre:

    Tam, kesin çözüm garanti eden

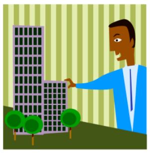
    Yaklaşık çözüm (sezgizel, meta sezgisel)

Simülasyon Modelleri, doğrudan bir optimizasyon modeli değildir ancak deneme ve tam sayım uygulabilir. Tahmin ve yaklaşık sonuç için kullanılabilir.

Modelleme

- Model; bir sistemin gerçekçi, anlaşılır temsili gösterimidir.

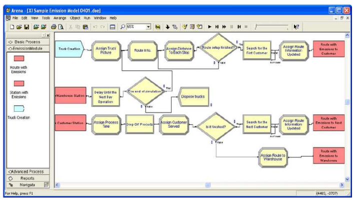
Physical models



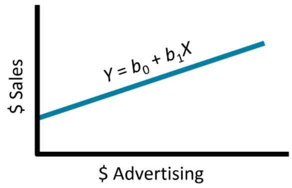
Scale models

Schematic models

Sistem Benzetim Modeli



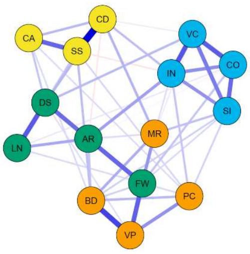
İstatistik Modeli



Inferential, Descriptive

Descriptive, Prescriptive

Ağ (Network) Modeli



Matematiksel Model

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize: } z = x_1 + x_2 + y \\
&\text{s.t.:} \quad x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
&\qquad y - x_1^2 = 0 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0 \\
&\qquad y \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Prescriptive

Modelleme

- ***Matematiksel model:*** Sistemi matematiksel olarak, *fonksiyon, denklem, değişken, parametre, sembol kullanarak*, değişkenlerin sistem içi ilişkilerini temsili olarak göstermektir.

- *Değişkenler; model içerisinde belirli değerler alan bilinmezlerdir*
  - *Stok için ne kadarlık bir sipariş vermeliyiz? (karar değişkeni)*
  - *Zarar ne kadar olur ? (bağımlı değişken)*
- *Parametreler; modelin parçası olan bilinen değerler, verilerdir.*
  - *Tek bir siparişin birim maliyeti, elektrik tarifesi, vb*

- *Model için gerekli* veri elimizde olmalı, değişkenlerin tanımlı olacağı aralıklar ve birbiri ile ilişkileri tanımlanmış olmalıdır.

Modelleme

Matematiksel modeller, bir dizi kısıta göre belirli bir amaç fonksiyonunu "optimize etmek" için tasarlanmıştır.

Ortaya çıkan çözümün kalitesi, modelin gerçek sistemi temsil etmede kalitesine bağlıdır. Eğer model gerçek sistemi oldukça iyi temsil ediyorsa, çözümü gerçek durum için de optimumdur.

Yöneylem Araştırması matematiksel modelinin üç temel bileşeni :
1. Belirlemeye çalıştığımız karar değişkenleri
2. Optimize etmemiz gereken amaç
3. Çözümün karşılaması gereken kısıtlamalar

Diğer bileşenler : parametreler, varsa diğer ara değişkenler

Model Çözümü

- En iyi çözüme ulaşabilmek için model çözülür.
- Çözümleme için kullanılabilecek yaklaşımlar:
  - *Deneme ve yanılma* – Farklı birden çok alternatifi denemek ve en iyisini seçmek
  - *Tam sayım (Complete enumeration)* – tüm mümkün alternatifleri ortaya koymak ve en iyi sonucu vereni seçmek
  - *Denklem oluşturmak ve çözmek* - cebirsel yöntemler, diferansiyel denklemler
  - *Algoritma kullanmak* - kesin sonuç veren veya yaklaşık iyi sonuç veren algoritmalar (örn. Simpleks Algoritması)

Matematiksel Optimizasyon Modelleri

- **LP** : Linear Program
  (DP : Doğrusal Program)
- **ILP** : Integer Linear Program
  (Tamsayılı Doğrusal Program)
- **MILP** : Mixed Integer Linear Program
  (Karma Tamsayılı Doğrusal Program)
- **NLP** : Non Linear Program
  (Doğrusal Olmayan Program)
- **INLP** : Integer Non Linear Program
  (Tamsayılı Doğrusal Olmayan Program)
- **MINLP**: Mixed Integer Non Linear Program
  (Karma Tamsayılı Doğrusal Olmayan Program)

Matematiksel Optimizasyon Modelleri

Amaç Fonksiyonu ve Kısıtlara göre

Doğrusal Program (Linear programming – LP)
Amaç fonksiyonu ve kısıtlardaki fonksiyonların tümü doğrusal (linear) fonksiyondur.
Doğrusal Olmayan Program (Nonlinear Programming – NLP)
Amaç fonksiyonu veya kısıtlardaki fonksiyonların en az biri doğrusal olmayan (nonlinear) fonksiyondur.

"Program" terimi ~ "problem" anlamında kullanılmaktadır.

Doğrusal:

$x_1 - 4x_2 + 3.49287x_3$

$(\sqrt{\pi})x_1 - (\log_2(7))x_2$

Doğrusal değil:

$x_1^2 + x_2^2$ $\quad x_1 x_2$ $\quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

$\sqrt{x_1} + x_2$ $\quad \log(x_1)$

Matematiksel Optimizasyon Modelleri

Karar Değişkenlerinin özelliğine göre :

Eğer tüm karar değişkenleri tam sayılı (integer) olması gerekiyor ise bu model Tam Sayılı programlama,

Eğer sadece bazı değişkenler tam sayılı olması gerekiyorsa, karma tamsayılı (mixed integer) programlama olarak adlandırılır.

Eğer hiç bir değişken için tam sayılı olma şartı yoksa (tüm değişkenler ondalıklı, kesirli, reel sayı değerleri alabiliyorsa ayrıca bir tanımlama eklenmez.

Doğrusal Programlamanın 4 temel varsayımı

- ***Orantılı Olma (Proportionality)***: Her bir karar değişkeninin amaç fonksiyonu ve kısıtlara etkisi, söz konusu değişkenin değeriyle doğru orantılıdır.
- ***Toplanırlık (Additivity)***: Değişkenler arasındaki ilişkiler toplanırdır. Değişkenler birbirine çarpılmaz ve bölünmez.
- ***Bölünebilme (Divisibility)***: Karar değişkenleri sürekli (kesirli) değer alabilirler.
- ***Kesinlik (Certainty)***: Veriler bilenen sabitlerdir.

Doğrusal Programlama (DP) Bileşenleri

- ***Karar Değişkenleri***: Kontrolümüz altındaki bilinmezlerdir.

  Amacımızı en iyileyecek karar değişkeni değerlerini bulmak istiyoruz.

  Bu değerler modelin çıktılarıdır (örn. *Üretilecek miktar*)

  Parametreler : Model içerisinde değerleri sabit unsurlar, girdi

- ***Kısıtlar***: Karar değişkenlerinin değerlerini kısıtlayan hususlar.

  Olurlu çözüm (***feasible solution)*** modeldeki tüm kısıtları sağlayan bir çözümdür.

  Sınırlı kaynak (resource): *hammade, işgücü, araç sayısı, kapasite, vb.*
  Gereksinim (requirement) : *müşteri talebi karşılama, gerekli nöbetçi sayısı, vb.*
  Mantıksal şartlar : *bir kişinin aynı anda sadece tek bir nöbet tutabilmesi, vb*

- ***Amaç fonksiyonu***: İlgilendiğimiz, eniyilemek istediğimiz ölçüt.

  En iyi (optimal) çözüm; modeldeki tüm kısıtları sağlayan, amaç fonksiyonu için mümkün en iyi çözümdür (örn. En büyük kâr)

Doğrusal Programlama (Linear Programming - LP)

subject to (kısıtların başlığı olarak kullanılır)

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

Amaç Fonksiyonu
max (enbüyükleme) veya
min (en küçükleme)

(s.t.)

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\le 100 \\
x_1 + x_2 &\le 80 \\
x_1 &\le 40 \\
x_1 &\ge 0 \\
x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Kısıtlar

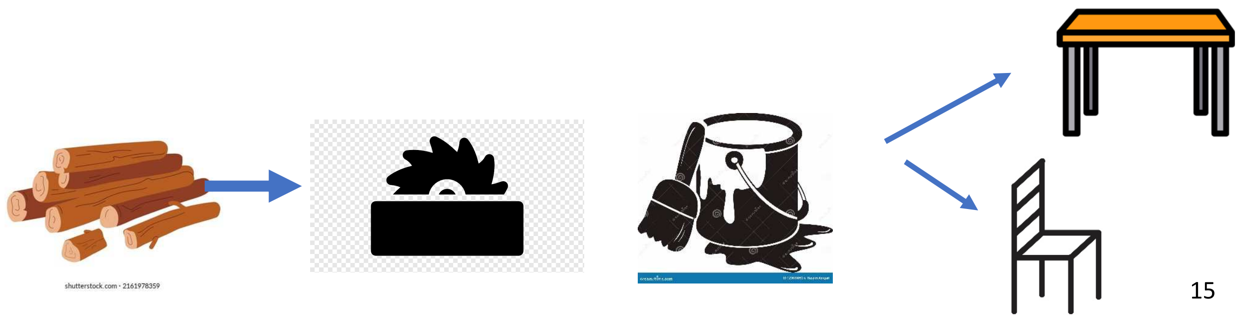
Karar değişkenleri
x_1, x_2

Parametreler
Amaç fonk katsayıları : [3 , 2]
Kısıtlardaki katsayılar: [2 , 1 ; 1 , 1]
Sağ Taraf (RHS) değerleri : [100; 80]

Amaç Fonksiyonu ve kısıtlardaki denklemlerin doğrusal olduğu,
Karar Değişkenlerinin sürekli olduğu Matematiksel Modeldir.

DP modelleme örneği-1

- Bir mobilya şirketi masa ve sandalye üretiyor ve toplam kazancı maksimize edecek masa, sandalye üretim miktarını belirlemek istiyor.
- Her iki ürün de marangozluk, boyama işlemleri gerektiriyor.
- Bir masa **4 saat marangozluk**, **2 saat boyama** gerektiriyor.
- Bir sandalye **3 saat marangozluk**, **1 saat boyama** gerektiriyor.
- **Fabrikada, 240 saatlik marangozluk** ve **100 saatlik boyama** işçilik zamanı imkanı var (işçi sayısı ve çalışma saatlerine göre kısıtlı)
- Her bir masa **70 TL**, her bir sandalye de **50 TL** kazanç getiriyor.



DP modelleme örneği-1

- Parametreler :

  Birim satış fiyatı (ürün tipi bazında)

  Bir ürünü üretebilmek için gerekli birim zaman (ürün tipi , iş tipi)

  Firmada hazır toplam işgücü saatleri (iş tipi bazında)

- Karar değişkenleri: *T :* Üretilecek masa sayısı

  C : Üretilecek sandalye sayısı

- Kısıtlar: Harcanacak marangozluk zamanı 240 saati geçemez

  Harcanacak boyama, cilalama saati 100 saati geçemez

- Amaç : Toplam kazancı maksimize et

DP modelleme örneği-1

- **Amaç fonksiyonunu T ve C cinsinden yaz**

Kazancı maksimize et (maximize) $z = 70T + 50C$

- **Kısıtlar için matematiksel denklemleri oluştur**

İlk Kısıt : Kullanılan marangozluk zamanı ≤ Eldeki marangozluk zamanı

$$\mathbf{4\textit{T} + 3\textit{C} \leq 240}$$

İkinci Kısıt : Kullanılan marangozluk zamanı ≤ Eldeki marangozluk zamanı

$$\mathbf{2\textit{T} + \textit{C} \leq 100}$$

Bu iki kısıt üretim miktarlarını kısıtlamakta ve toplam kazancı etkilemektedir.

Pozitiflik kısıtları: T ve C değerleri pozitif olmalı $\boldsymbol{T \geq 0 \quad C \geq 0}$

DP modelleme örneği-1

Max $z = 70T + 50C$

s.t.	$4T + 3C \leq$	240	*(marangoz işgücü kısıtı)*
	$2T + C \leq$	100	*(boyama ve cilalama işgücü kısıtı)*
	$T, C \geq$	0	*(pozitiflik kısıtı)*

DP modelleme örneği-2

Bir tavuk çiftliği yem olarak iki farklı tavuk yemi alarak, bunları karıştırmayı ve **düşük maliyetli** ve **besleyici** bir yem karışımı elde etmeyi düşünüyor. Hangi yemden kaç kg. alınması gerektiğini belirleyen bir DP yazınız.

	1 Kg Yem İçeriği Protein Miktarı (gr)		
Protein	**Yem 1 İçeriği**	**Yem 2 İçeriği**	**Tavuk Başına İhtiyaç Duyulan Miktar (g)**
A	5	10	90
B	4	3	48
C	0,5	0	1,5
Kg fiyatı	2 TL	3 TL	

DP modelleme örneği-2

Parametreler

Yem içeriği protein miktarı (gr)

Tavuk başına ihtiyaç duyulan protein tipi miktarları (gr)

Yem tipleri maliyeti (TL/kg)

Karar değişkenleri

X_1 = yem 1'den alınacak kg. miktarı

X_2 = yem 2'den alınacak kg. miktarı

Amaç fonksiyonu

min $z = 2X_1 + 3X_2$

Kısıtlar

s.t. $5X_1 + 10X_2 \geq 90$ (içerik A kısıtı)

$4X_1 + 3X_2 \geq 48$ (içerik B kısıtı)

$0,5X_1 \geq 1,5$ (içerik C kısıtı)

$X_1 \geq 0$ (pozitiflik kısıtı)

$X_2 \geq 0$ (pozitiflik kısıtı)

DP modelleme örneği-3

- Bir şirket ürünlerinin tanıtımı için reklam vermek istiyor.
  - Şirketin amacı, mümkün olduğunca fazla sayıda müşteriye ulaşmak.
  - Şirket reklama haftada maksimum 8.000 TL ayırabiliyor.
  - Haftada en az 5 radyo reklamı planlanması gerekiyor.
  - Radyo reklamlarına haftada en fazla 1.800 TL ayırılabilir.

- **Reklam opsiyonları**

Medya	REKLAMIN ULAŞABİLECEĞİ KİŞİ ADEDİ	REKLAM MALİYETİ (TL)	HAFTALIK VERİLEBİLECEK MAX REKLAM ADEDİ
TV (1 dakika)	5.000	800	12
Günlük gazete	8.500	925	5
Radyo (30 saniye, akşam)	2.400	290	25
Radyo (1 dakika, öğleden sonra)	2.800	380	20

DP modelleme örneği-3

- Karar değişkenleri

X_1 = Haftalık verilen 1 dk.lık TV reklamı adedi
X_2 = Haftalık verilen gazete reklamı adedi
X_3 = Haftalık verilen 30 sn.lik akşam radyo reklamı adedi
X_4 = Haftalık verilen 1 dk.lık öğleden sonra radyo reklamı adedi

- Amaç : Ulaşılan müşteri sayısını maksimize et

$$\max z = 5.000X_1 + 8.500X_2 + 2.400X_3 + 2.800X_4$$

- Kısıtlar :

s.t. $X_1 \leq 12$ (max TV/hf)

$X_2 \leq 5$ (max gazete/hf)

$X_3 \leq 25$ (max 30-sn radyo/hf)

$X_4 \leq 20$ (max 1-dk radyo/hf)

$800X_1 + 925X_2 + 290X_3 + 380X_4 \leq 8.000$ (haftalık reklam bütçesi)

$X_3 + X_4 \geq 5$ (min radyo reklam planlaması)

$290X_3 + 380X_4 \leq 1.800$(radyo reklamlarına harcanan max TL)

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

DP modelleme örneği-4

- International City Trust (ICT) kısa vadeli ticaret kredilerine, bonolara, altına ve inşaat kredilerine yatırım yapmaktadır. Yönetim kurulu her alana ne kadarlık yatırım yapılabileceğine ilişkin kısıtlar koymaktadır.

YATIRIM	FAİZ ORANI	MAKSİMUM YATIRIM ($1.000.000)
Ticaret kredisi	7%	1,0
Bono	11%	2,5
Altın	19%	1,5
İnşaat kredisi	15%	1,8

- ICT'nin yatırım yapabileceği 5 milyon doları var ve aşağıdaki iki hususu gerçekleştirmek istiyor:
  - Gelecek 6 aydaki yatırım kaynaklı geliri maksimize etmek
  - Yönetim kurulu tarafından koyulan yatırım kısıtlarını sağlamak
- Yönetim kurulu ayrıca toplam yatırımların en az %55'nin altın ve inşaat kredilerine yapılmasını, ticaret kredi yatırımlarının da toplam yatırımın %15'inden az olmamasını şart koşmaktadır.

DP modelleme örneği-4

X_1 = ticaret kredilerine yatırılan miktar X_2 = bonolara yatırılan miktar
X_3 = altına yatırılan miktar X_4 = inşaat kredilerine yatırılan miktar

$$\text{Max } z = 0{,}07X_1 + 0{,}11X_2 + 0{,}19X_3 + 0{,}15X_4$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t. :}\quad X_1 &\le 1.000.000 \\
X_2 &\le 2.500.000 \\
X_3 &\le 1.500.000 \\
X_4 &\le 1.800.000 \\
\\
X_3 + X_4 &\ge 0{,}55(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\
55X_1 + 55X_2 - 45X_3 - 45X_4 &\le 0 \\
\\
X_1 &\ge 0{,}15(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\
-85X_1 + 15X_2 + 15X_3 + 15X_4 &\le 0 \\
\\
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\le 5.000.000 \\
X_1, X_2, X_3, X_4 &\ge 0
\end{aligned}$$

DP modelleme örneği-5

- Kamyon yükleme problemi
  - Bir taşıma şirketi aşağıdaki 6 malzemeyi bir kamyon ile taşıyacaktır.
  - Her bir malzemenin birim değeri ve ağırlığı farklıdır
  - Kamyonun kapasitesi sınırlıdır (10 000 kg.)

MALZEME	DEĞER (TL)	AĞIRLIK (KG)
1	22 500	7 500
2	24 000	7 500
3	8 000	3 000
4	9 500	3 500
5	11 500	4 000
6	9 750	3 500

  - Herhangi bir malzemeden tam 1 adet veya kesirli miktarda taşınabilmektedir (örn. 0.56 miktar). 1'den fazla taşınmamakta.
  - Taşınan yükün toplam değerini maksimize edecek şekilde hangi malzemeden ne kadar taşınacağına karar verilmek istenmektedir ?

DP modelleme örneği-5

- Parametreler :

Parametreler ; 1 x n boyutlu vektör veya m x n boyutlu matris olabilirler

v_i : *i malzemesinin değeri* $v_i \in [\ 22.500\ ,\ 24.000\ ,\ 8{,}000\ ,\ 9.500\ ,\ 11.500\ ,\ 9.750\ ]$

w_i : *i malzemesinin ağırlığı* $w_i \in [\ 7.500\ ,\ 7.500\ ,\ 3.000\ ,\ 3.500\ ,\ 4.000\ ,\ 3.500\ ]$

Bu örnekte matris formunda bir parameter yok.

b : *kamyonun taşıma kapasitesi* $b = 10\ 000$

Tek bir değerli olan parametrelere "sabit" denir. (constant veya scalar)

Eğer farklı kapasiteli 4 kamyon olsaydı, kapasiteyi bir vektör olarak tanımlayabilirdik:

b_j : *j kamyonunun kapasitesi* $j \in J = \{\ 1,2,3,4\ \}$

$b_j \in [\ 10\ 000\ ,\ 12\ 000,\ 8\ 000\ ,\ 10\ 000\ ]$

DP modelleme örneği-5

- Karar değişkeni

  x_i = i malzemesinden kamyona yüklenen miktar

  $i \in I$ = {1,2,3,4,5,6} *i : malzeme indisi (index) I : Malzeme tipi kümesi*

  Dikkat : Bu problemede malzeme miktarı tam sayılı değer olmak zorunda değildir. Ondalıklı, sürekli değer alabilir. Yani örneğin; x_i = 0.45 olabilir.

- Amaç Fornksiyou ve Kısıtlar

  Yüklenen toplam değeri maksimize et

  Max z= 22.500X_1 + 24.000X_2 + 8,000X_3 + 9.500X_4 + 11.500X_5 + 9.750X_6

  s.t. 7.500X_1 + 7.500X_2 + 3.000X_3 + 3.500X_4 + 4.000X_5 + 3.500X_6 ≤ 10.000

  $X_1 \leq 1$

  $X_2 \leq 1$

  $X_3 \leq 1$

  $X_4 \leq 1$

  $X_5 \leq 1$

  $X_6 \leq 1$

  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

DP modelleme örneği-5

- Kanonik Gösterim

$$\max z = \sum_{i=1}^{6} v_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{6} w_i x_i \leq b$$

$$x_i \leq 1 \qquad , \forall \text{ i}$$

$$x_i \geq 0 \qquad , \forall \text{ i}$$

- Matris Notasyonu ile Gösterim

Max z = $V X$

s.t. $W X \leq b$

$X \geq 0$

Eksik olan ne ?

DP modelleme örneği-6

- Halkbank günün saatine bağlı olarak 09:00 - 17:00 arasında gişe görevlisine ihtiyaç duymakta ve toplam personel maliyetini minimize edecek şekilde bir planlama yapmak istemektedir.
  - 11:00-13:00 arasındaki öğle yemeği zamanı en yoğun zamandır.
  - Bankanın 12 tam zamanlı gişecisi, birçok da yar zamanlı gişecisi var
  - Yarı zamanlı çalışanlar günde toplam 4 saat çalışmalıdırlar. Çalışmaya 09:00-13:00 arasında herhangi bir saatte başlayabilirler. Maliyetleri tam zamanlılara göre daha azdır.
  - Tam zamanlı gişeciler 09:00-17:00 arasında çalışmaktadırlar ve 1 saatlik öğle yemeği izinleri vardır. Bunların yarısı 11:00-12:00, yarısı da 12:00-13:00 arasında öğle yemeği yemektedirler.
  - Yarı zamanlı çalışma saatleri günlük toplam çalışma zamanı ihtiyacının %50'sini geçemez.
  - Yarı zamanlı çalışanlar saatte 8 dolar kazanmaktalar.
  - Tam zamanlı çalışanlar günde 100 dolar kazanmaktadırlar.

DP modelleme örneği-6

- İş gücü ihtiyacı:

ZAMAN PERİYODU (Saat)	İHTİYAÇ DUYULAN GİŞECİ ADEDİ
9 – 10	10
10 – 11	12
11 – 12	14
12– 13	16
13 – 14	18
14 – 15	17
15 – 16 pm	15
16 – 17:00	10

DP modelleme örneği-6

- Karar değişkenleri

  F = tam zamanlı gişeciler
  P_1 = 9'da başlayan yarı zamanlılar (13'de ayrılıyorlar)
  P_2 = 10'da başlayan yarı zamanlılar (14'de ayrılıyorlar)
  P_3 = 11'de başlayan yarı zamanlılar (15'de ayrılıyorlar)
  P_4 = 12'de başlayan yarı zamanlılar (16'dq ayrılıyorlar)
  P_5 = 13'de başlayan yarı zamanlılar (17'de ayrılıyorlar)

- Amaç fonksiyonu

  Günlük toplam personel maliyetini minimize et

  $$= 100F + 32(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)$$

DP modelleme örneği-6

Kısıtlar

F	$+P_1$					≥ 10		(9 – 10 ihtiyacı)
F	$+P_1$	$+P_2$				≥ 12		(10 – 11 ihtiyacı)
$0{,}5F$	$+P_1$	$+P_2$	$+P_3$			≥ 14		(11 – 12 ihtiyacı)
$0{,}5F$	$+P_1$	$+P_2$	$+P_3$	$+P_4$		≥ 16		(12 – 13 ihtiyacı)
F		$+P_2$	$+P_3$	$+P_4$	$+P_5$	≥ 18		(13 – 14 ihtiyacı)
							112	
F			$+P_3$	$+P_4$	$+P_5$	≥ 17		(14 – 15 ihtiyacı)
F				$+P_4$	$+P_5$	≥ 15		(15 – 16 ihtiyacı)
F					$+P_5$	≥ 10		(16 – 17 ihtiyacı)
F						≤ 12		(12 tam zamanlı gişeci)
	$4P_1$	$+4P_2$	$+4P_3$	$+4P_4$	$+4P_5$	$\leq 0{,}50(112)$		(max 50% yarı zamanlı)

$F, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \geq 0$ (pozitiflik)

DP modelini çözmek

Olurlu Çözüm; kısıtlarının tümüne uyan, yani olurlu bölgede yer alan çözümdür. Bir çözümün olurlu olup olmayacağı sadece ve tamamen kısıtlar ile ilgilidir, amaç fonksiyonunun olurluluğa bir etkisi yoktur.

Olurlu bir çözüm tüm karar değişkenlerinin alacağı değerleri içerir. Örneğin, eğer iki adet karar değişkeni (x_1 , x_2) var ise olurlu bir çözüm;

$x_1 = 23$, $x_2 = 12$ veya

$(x_1, x_2) = (23, 12)$ veya

$X = [23, 12]$ $X = [x_1, x_2]$ şeklinde ifade edilebilir.

Bir DP modelinde, kısıtlar nedeniyle olurlu hiç bir çözüm olmayabilir. Buna, olursuz problem (infeasible) denir. Bir problem olursuz ise optimum çözüm aranmaz. Olurluluk, optimallik için ön şarttır !

DP modelini çözmek

Optimum Çözüm; olurlu çözümler arasından en iyi amaç fonksiyonu değerini veren çözümdür. Bir DP probleminin;

- tek bir optimum çözümü (unique solution),
- alternatif, çoklu çözümleri (alternate, multi optima) veya
- sınırsız çözümü (unbounded solution) olabilir.

Sınırsızlık (unboundedness) durumunda, problem olurludur ancak olurlu alan kapalı değildir.

DP modeli çözüm yöntemleri:

Grafik Yöntem,

Temel Çözümleri Belirlemek ve Arasından en iyi olanı seçmek

Algoritma Kullanmak (Örneğin, Simpleks Algoritması)

DP modelinin Grafik Yöntem ile çözmek

GRAFİK YÖNTEM; iki karar değişkenli, küçük DP problemlerinin çözümü için uygundur. Herbir karar değişkeni, eksenler ile temsil edilir.

Kısıtlar ayrı ayrı, eşitlik olarak plotlanır (doğrular çizilir) ve her bir kısıtı sağlayan bölgeler belirlenir. Tüm kısıtların olurlu bölgelerinin kesişimi modelin olurlu bölgesidir (feasible region).

Örnek-1 (Mobilya Problemi)

Max	$z = 70T + 50C$		
s.t.	$4T + 3C$	$\leq$	240
	$2T + C$	$\leq$	100
	T, C	$\geq$	0

$4T + 3C = 240$ → *1.Doğru Denklemi*

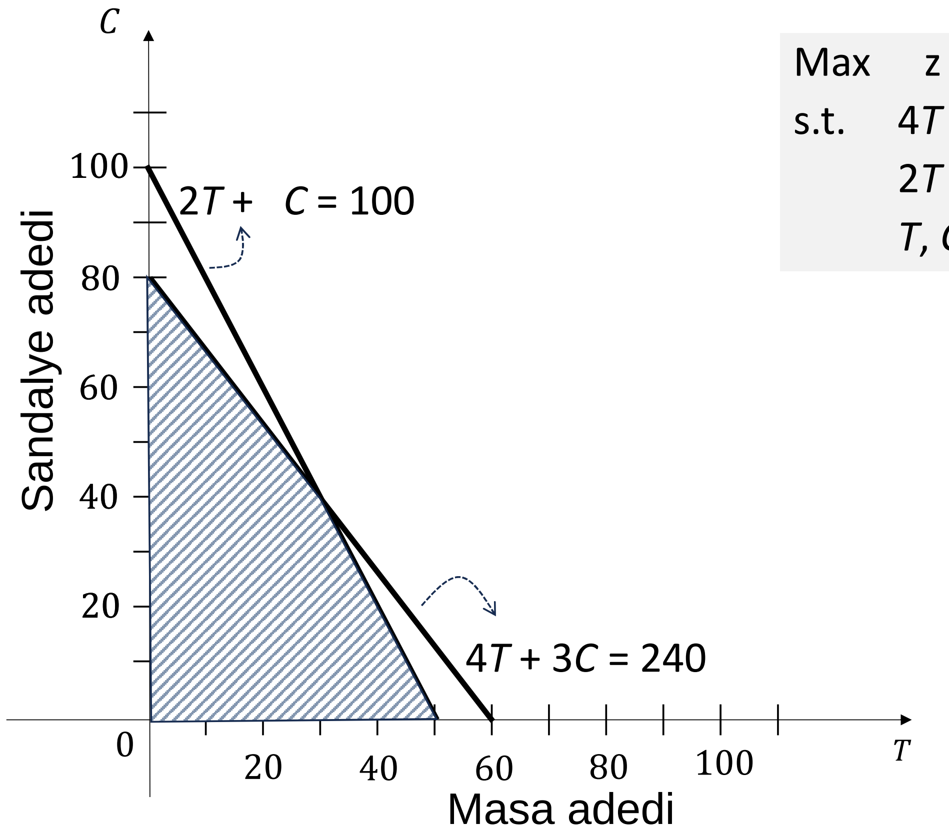
$2T + C = 100$ → *2.Doğru Denklemi*

$T = 0$

$C = 0$

→ *Dikey ve yatay eksenler (doğrular hazır, mevcut)*

DP modelinin Grafik Yöntem ile çözmek



Max	$z = 70T + 50C$		
s.t.	$4T + 3C$	$\leq$	240
	$2T + C$	$\leq$	100
	T, C	$\geq$	0

DP modelinin Grafik Yöntem ile çözmek

Olurlu Çözümleri Belirlemek;

- (30, 20) noktası için

Marangozluk kısıtı	$4T + 3C \leq 240$ saat elde var $(4)(30) + (3)(20) = 180$ kullanılan	✓
Boyama kısıtı	$2T + 1C \leq 100$ elde var $(2)(30) + (1)(20) = 80$ kullanılan	✓

- (70, 40) noktası için

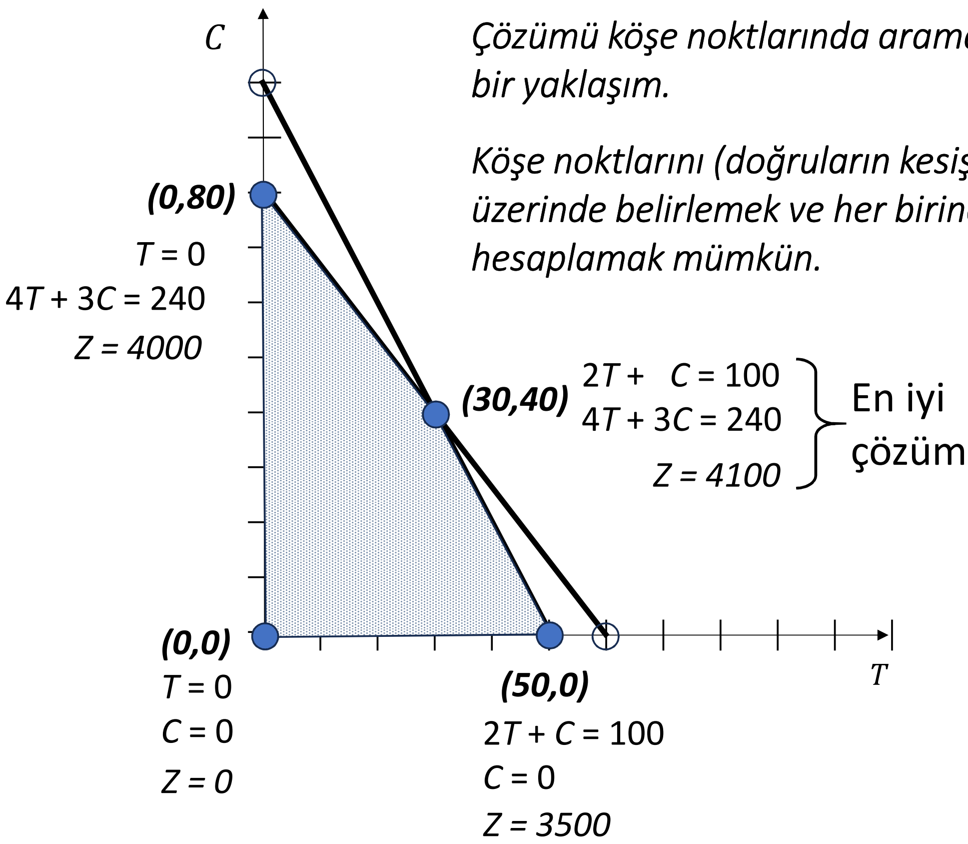
Marangozluk kısıtı	$4T + 3C \leq 240$ saat elde var $(4)(70) + (3)(40) = 400$ kullanılan	X
Boyama kısıtı	$2T + 1C \leq 100$ saat elde var $(2)(70) + (1)(40) = 180$ kullanılan	X

Tek tek tüm noktaları denemek uygulanabilir değil !

DP modelinin Grafik Yöntem ile çözmek

Çözümü köşe noktlarında aramak daha uygulabilir bir yaklaşım.

Köşe noktlarını (doğruların kesişim noktlarını) grafik üzerinde belirlemek ve her birine ait amaç fonk hesaplamak mümkün.



Optimum Çözüm
$T^* = 30$
$C^* = 40$
$Z^* = 4100$

DP modelinin Grafik Yöntem ile çözmek

Eş Fayda Doğrusu (Isoprofit Line) Kullanarak en iyi çözümü bulmak :

Çok küçük bir kazanca karşılık gelen bir amaç fonksiyonu çiz

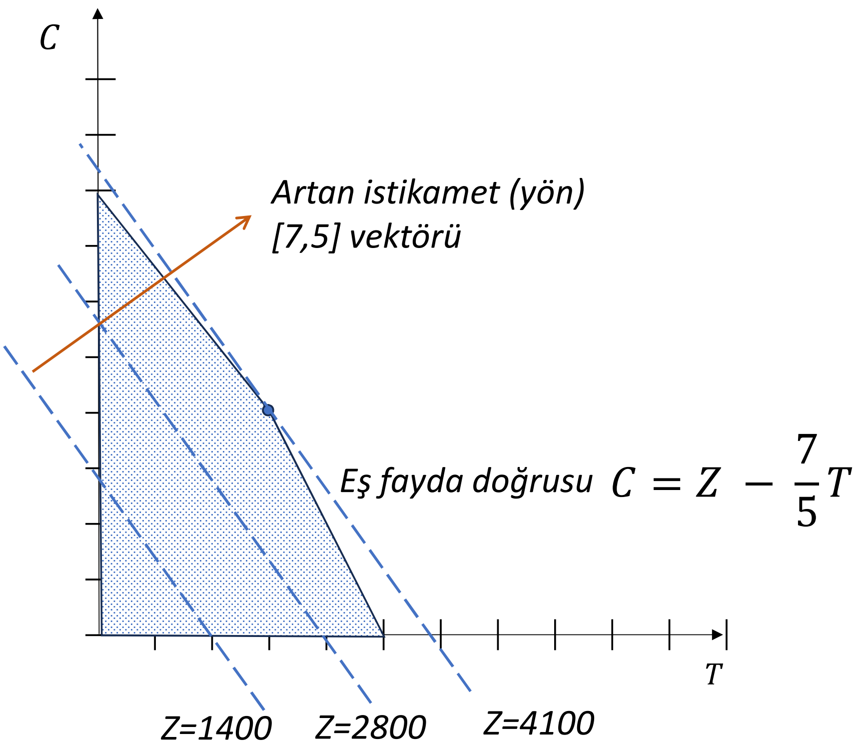
Doğrunun eğimini sabit tutarak amaç fonksiyonunu artan kazanç istikametinde ilerlet

Doğrunun olurlu alandan ayrılmadan önce son temas ettiği nokta, optimal çözümdür.

Optimal çözüm mutlaka köşe noktaların (corner points) veya diğer bir deyişle uç noktaların (extreme points) birisidir.

Alternatif optimum durumunda iki köşe noktası ve bunları birleştiren doğru aynı optimum değeri verir.

DP modelinin Grafik Yöntem ile çözmek



Slack (Dolgu) ve Surplus (Artık) Değişkenleri

- **Slack** (dolgu değişken) kullanılmayan kaynağa karşılık gelir

  $\leq$ kısıtları için geçerlidir

  Slack = (Eldeki kullanılabilir kaynak) − (Kullanılan kaynak)

  Örneğin; 20 masa ve 25 sandalye üretilmesi durumunda

  4(20) + 3(25) = 155 (kullanılan marangozluk)

  240 − 155 = 85 (marangozluk kısıtı dolgu değişkeni değeri)

  2(20) + (25) = 65 (kullanılan boya cila kaynağı)

  100 − 65 = 35 (boya cila kısıtı dolgu değişkeni değeri)

Slack (Dolgu) ve Surplus (Artık) Değişkenleri

- **Surplus** (artık değişken) kısıtın sağ tarafındaki değerin ne kadar aşıldığını gösterir ($\geq$ kısıtı için)

  Surplus = (Gerçekleşen Değer) − (Olması gereken min değer)

  Örneğin; Yeni bir kısıt $T + C \geq 42$ olsaydı.

  $T = 20$, $C = 25$ çözümü için

  20 + 25 = 45

  Surplus (artık değişken) değeri = 45 − 42 = 3 olurdu

  Mobilya probleminde, optimum çözüm (30,40) için kısıtların dolgu değişken değerleri sıfırdır. Her iki kaynak kısıtı da optimum çözümde <u>aktif !</u> Her iki kaynak da tam kapasite kullanılmış.

DP modelleme örneği-2

min z = $2X_1 + 3X_2$

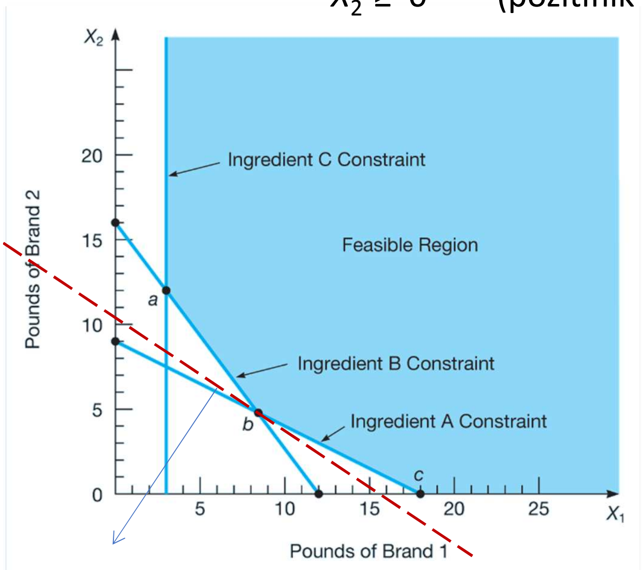
s.t. $5X_1 + 10X_2 \geq 90$ (içerik A kısıtı)

$4X_1 + 3X_2 \geq 48$ (içerik B kısıtı)

$0,5X_1 \geq 1,5$ (içerik C kısıtı)

$X_1 \geq 0$ (pozitiflik kısıtı)

$X_2 \geq 0$ (pozitiflik kısıtı)



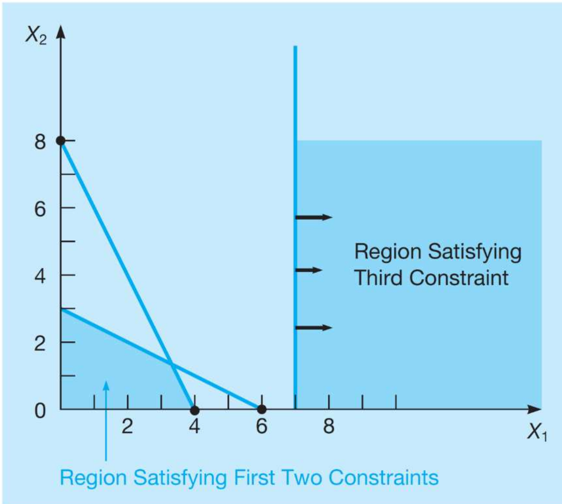
DP'deki 4 özel durum

- Tek optimal çözüm olması
- Olurlu çözüm olmaması (no feasible solution)
- Sınırsız çözüm (unboundedness)
- Alternatif optimal çözümler (alternate optimal solutions)

Olurlu Çözüm Olmaması

- Aynı anda tüm kısıtları sağlayan bir **çözüm yoktur.**
- Olurlu çözüm alanı (feasible region) oluşmaz.
- Kısıt azaltarak (gevşetme) olurlu alan elde edilebilir.

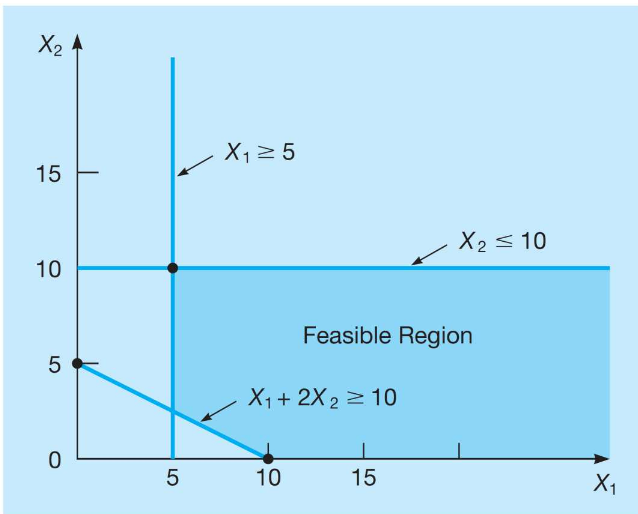
$$
\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 &\leq 6 \\
2X_1 + X_2 &\leq 8 \\
X_1 &\geq 7
\end{aligned}
$$



Sınırsız Çözüm

- DP'nin sonlu bir çözümü olmadığında oluşur. Örneğin; **max** probleminde bir veya iki değişken kısıtları sağlamasına karşın **sonsuza kadar büyük** değer alabilirler.
- Grafik çözümde olurlu alanın açık olması olarak görülür
- Genellikle modelin doğru oluşturulmadığına işaret eder.

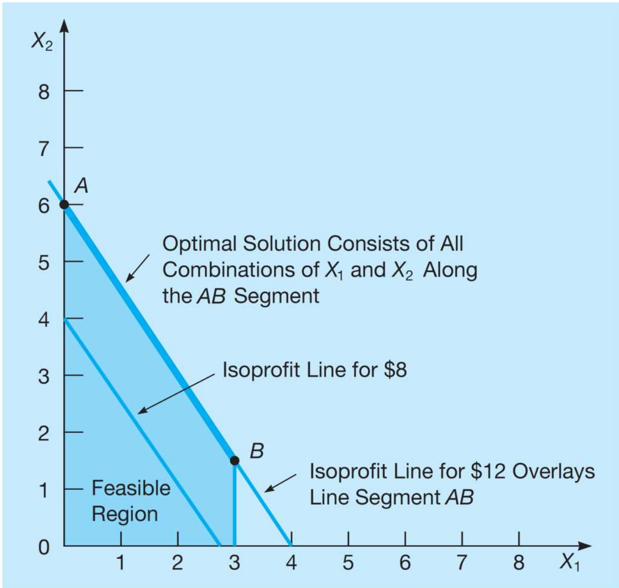
$$
\begin{aligned}
\text{Max } z = \;& 3X_1 + 5X_2 \\
\text{s.t.} \;& X_1 \geq 5 \\
& X_2 \leq 10 \\
& X_1 + 2X_2 \geq 10 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Alternatif Optimal Çözümler

- Birden daha fazla çözümün optimal olmasıdır.
- Grafik çözümde bu durum amaç fonksiyonunun eşfayda doğrusu kısıtlardan birine paralel olduğunda meydana gelir.

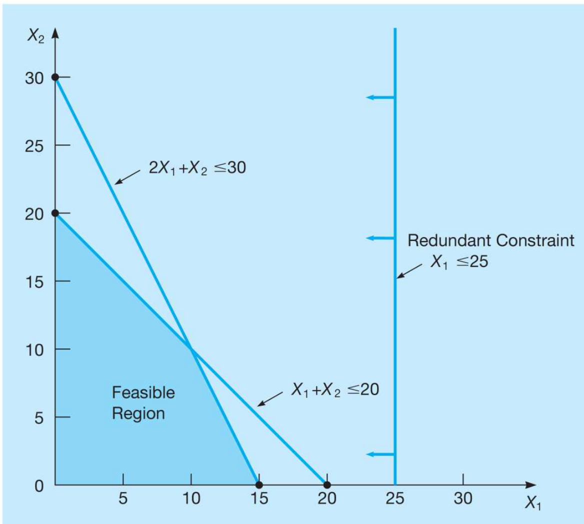
$$\begin{array}{llll} \text{Max } z = & 3X_1 & + 2X_2 & \\ \text{s.t.} & 6X_1 & + 4X_2 & \leq 24 \\ & X_1 & & \leq 3 \\ & & X_1, X_2 & \geq 0 \end{array}$$



Gereksiz Kısıtlar

- Gereksiz kısıt, olurlu çözüm bölgesine etkisi olmayan bir kısıttır.
- Bir veya daha fazla etkin kısıt (binding constraint) olabilir.
- Gerçek hayatta sıkça karşılaşılır. Bu kısıtların problem çözümüne etkisi yoktur, ancak kaldırılmaları problemi basitleştirir.

$$\begin{array}{llll} \text{Max } z = & X_1 & + 2X_2 & \\ \text{s.t.} & X_1 & + X_2 & \leq 20 \\ & 2X_1 & + X_2 & \leq 30 \\ & X_1 & & \leq 25 \\ & & X_1, X_2 & \geq 0 \end{array}$$



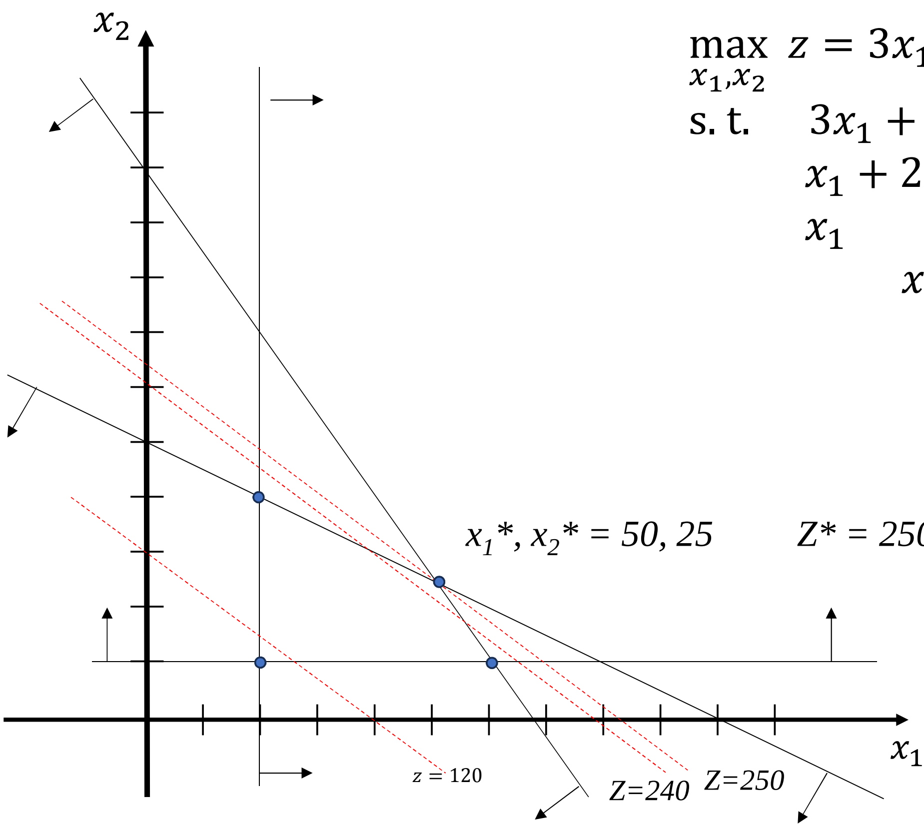
DP Örnek (Giapetto Oyuncakçısı)

- Giapetto tahtadan oyuncak bebek ve asker yapmaktadır.
- Satış fiyatı, bir oyuncak bebek için **3$**, bir oyuncak asker için **4$**'dır.
- Bir bebek için **3 dk'lık** makine ve **1 dk'lık** işçilik gerekirken, bir asker için **2 dk** makine ve **2 dk** işçilik gerekmektedir.
- Eldeki hammadde miktarı sınırsızdır, fakat haftada en çok **200 dk**'lık makine ve **100 dk**'lık işgücü süresi mevcuttur.
- Giapetto'nun haftada en az **20** oyuncak bebek ve **10** oyuncak asker üretmesi gerekmektedir.
- Giapetto'nun karını en büyüklemesi için DP modeli oluşturun ve grafik çözüm ile üretilecek optimum oyuncak adetlerini bulun.

Giapetto - Grafik Çözüm

$$\max_{x_1,x_2} \; z = 3x_1 + 4x_2$$

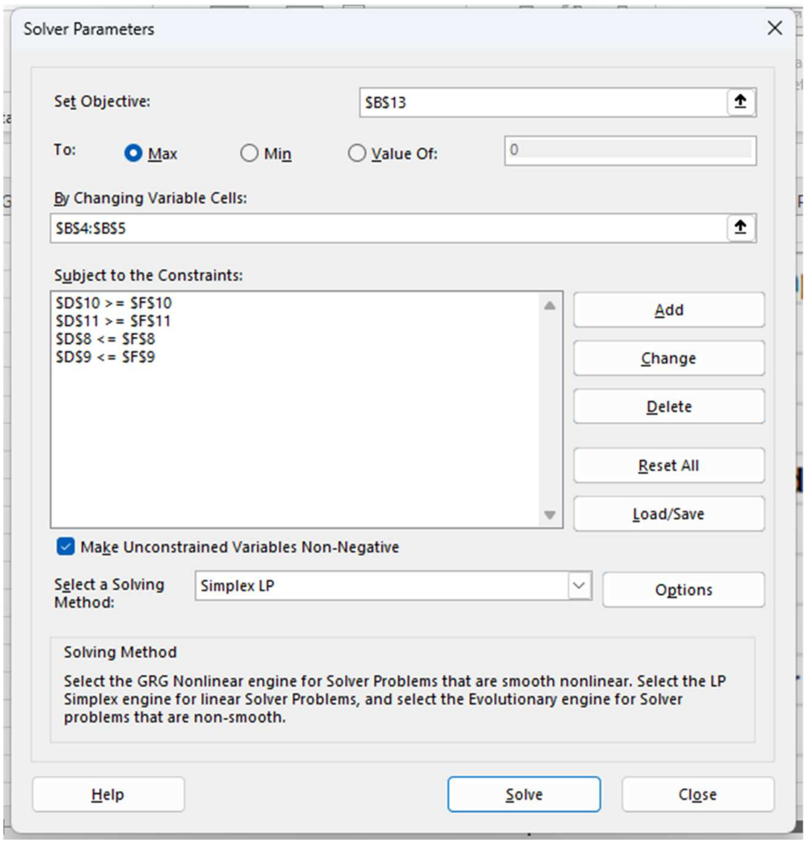
$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 200 \\ & x_1 + 2x_2 \le 100 \\ & x_1 \ge 20 \\ & x_2 \ge 10 \end{aligned}$$



Giapetto - Excel Solver ile çözüm

	x1	*x2*				
unit profit	3	4				
x_1	**50**					
x_2	**25**					
	x1	*x2*			RHS	
constraint 1	3	2	200	≤	200	
constraint 2	1	2	100	≤	100	
constraint 3	1		50	≥	20	
constraint 4		1	25	≥	10	
z	250					

Giapetto - Excel Solver ile çözüm



Giapetto - GAMS ile çözüm

```
POSITIVE VARIABLES
        X1 Bebek Oyuncak Sayisi
        X2 Asker Oyuncak Sayisi;

VARIABLE  Z Toplam Kar;

EQUATIONS
    AMAC
    MAKINE
    ISCILIK
    MIN_BEBEK
    MIN_ASKER;

AMAC..       Z =E= 3*X1 + 4*X2;
MAKINE..      3*X1 + 2*X2 =L= 200;
ISCILIK..     1*X1 + 2*X2 =L= 100;
MIN_BEBEK..     X1 =G= 20;
MIN_ASKER..     X2 =G= 10;

MODEL Giapetto /ALL/;
SOLVE Giapetto USING LP MAXIMIZING Z;

DISPLAY Z.L, X1.L, X2.L;
```


GAMS ile çözüm (indis ve set kullanarak)

```
SETS
i   oyuncak tipi /bebek, asker/
j   islem tipi /makine, iscilik/;

PARAMETER
p(i) oyuncak tipi i icin birim kâr /bebek 3, asker 4/
b(j) islem tipi j icin mevcut sure /makine 200, iscilik 100/;

table a(i,j) bir adet oyuncak tipi i için gerekli j islemi suresi
         makine       iscilik
bebek      3              1
asker      2              2         ;

POSITIVE VARIABLE X(i)   oyuncak tipi i uretim miktari;
VARIABLE  Z      toplam kâr;
```

GAMS ile çözüm (indis ve set kullanarak)

(Modelin Devamı)

```
EQUATIONS
AMAC
ISLEM
MIN_BEBEK
MIN_ASKER;

AMAC..              Z =E= sum(i,p(i)*x(i));
ISLEM(j)..          sum(i,a(i,j)*x(i)) =L= b(j);
MIN_BEBEK..         X('bebek') =G= 20;
MIN_ASKER..         X('asker') =G= 10;

MODEL Giapetto /ALL/;
SOLVE Giapetto USING LP MAXIMIZING Z;

DISPLAY Z.L, X.L;
```


GAMS ile çözüm (indis ve set kullanarak)

```
LP status(1): optimal
Cplex Time: 0.02sec (det. 0.01 ticks)
Optimal solution found.
Objective :         250.000000
                                                    ?
---- EQU ISLEM
             LOWER     LEVEL     UPPER     MARGINAL
makine        -INF    200.000   200.000      0.500
iscilik       -INF    100.000   100.000      1.500

                       LOWER     LEVEL     UPPER     MARGINAL
---- EQU MIN_BEBEK     20.000    50.000     +INF        .

---- EQU MIN_ASKER     10.000    25.000     +INF        .

---- VAR X
           LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
bebek        .      50.000     +INF        .
asker        .      25.000     +INF        .

                       LOWER     LEVEL     UPPER     MARGINAL
---- VAR Z              -INF    250.000     +INF        .
```

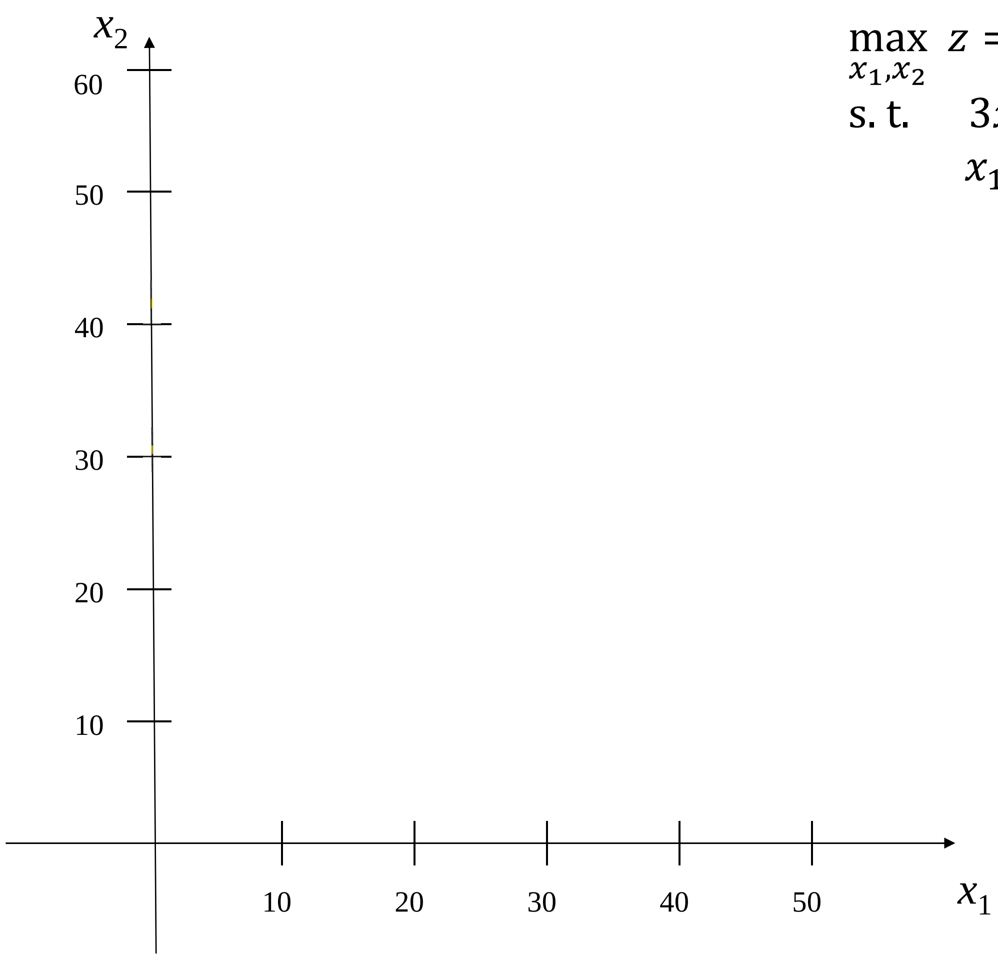
Giapetto Modeli - Farklı parametreler ile Yeni Model

x_1 = bebek oyuncak sayısı (kâr = 2 $/adet)
x_2 = asker oyuncak sayısı (kâr = 3 $/adet)

Kaynaklar:

120 makine saati mevcut
Bebek başına 3 saat; Asker başına 2 saat gerekli
50 saatlik işçilik saati mevcut
Bebek başına 1 saat; Asker başına 1 saat gerekli

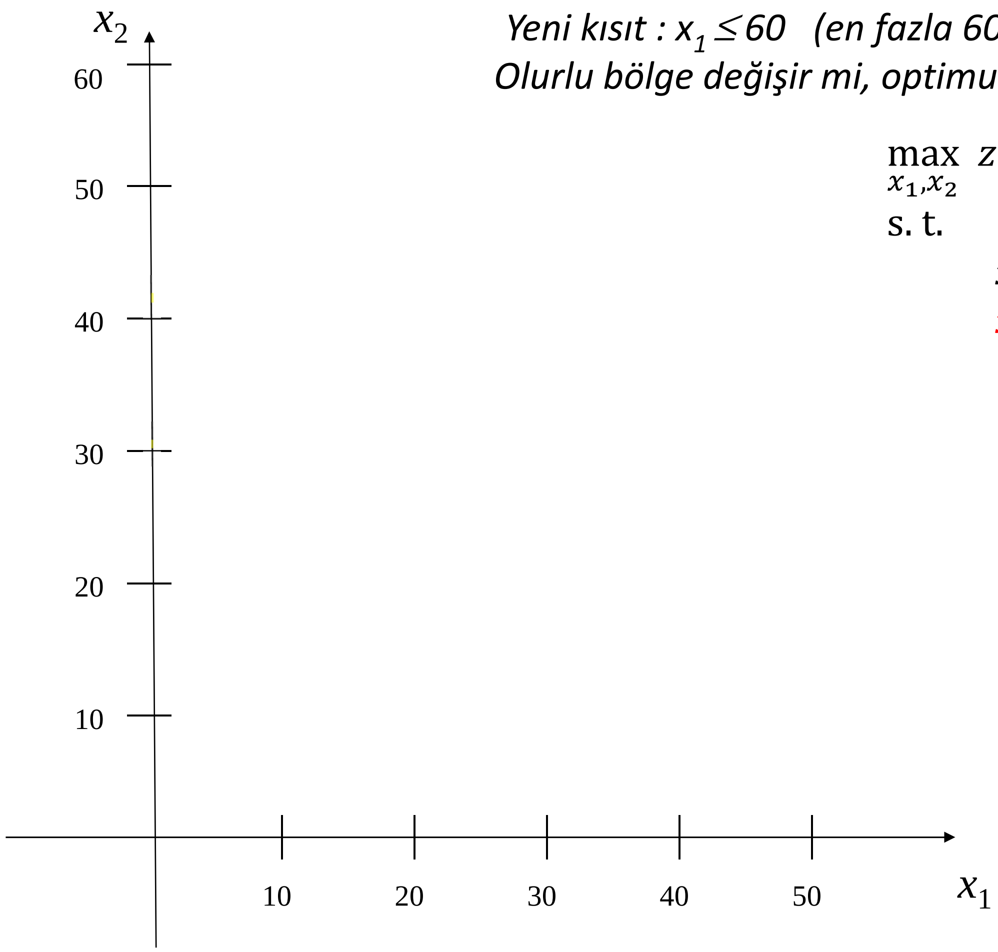
$$\max_{x_1,x_2} \; z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s. t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$x_1 + x_2 \leq 50$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\max_{x_1,x_2} \; z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s. t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$x_1 + x_2 \leq 50$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

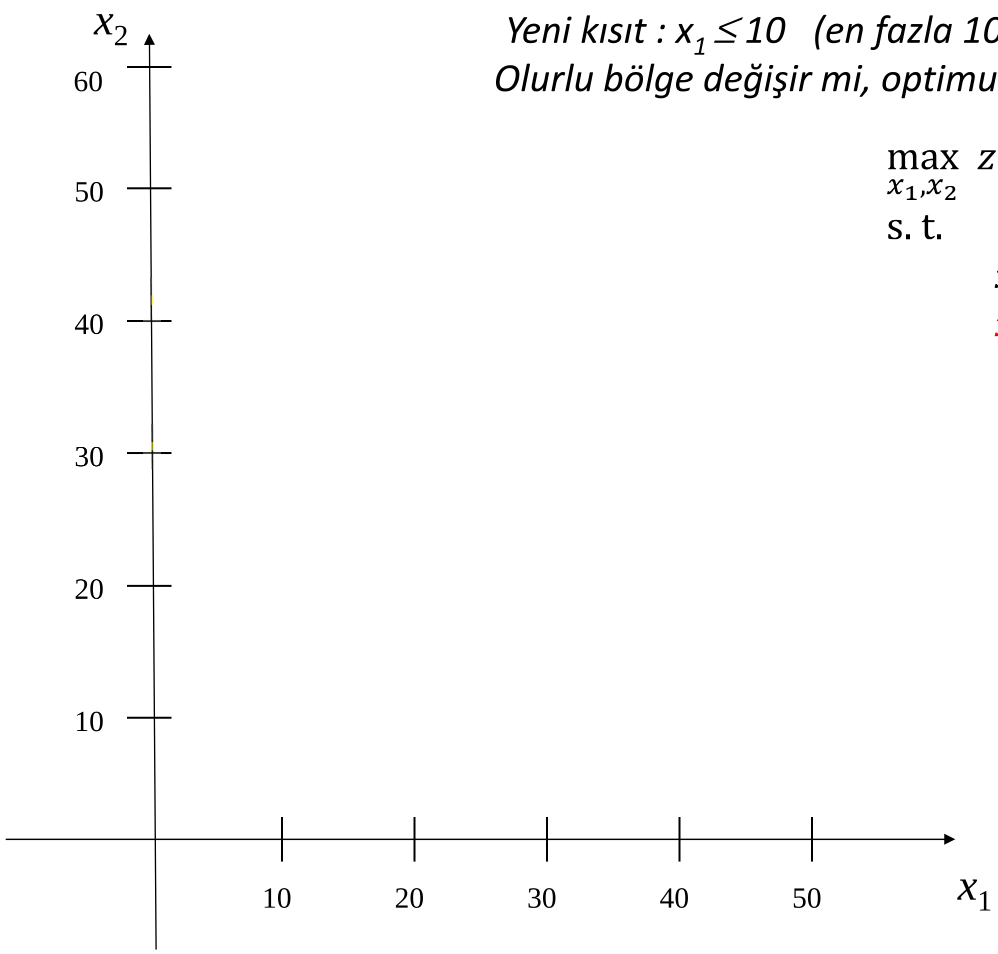
Yeni kısıt : $x_1 \leq 60$ (en fazla 60 bebek üretilebilir)
Olurlu bölge değişir mi, optimum çözü değişir mi?

$$\max_{x_1,x_2} \; z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$x_1 + x_2 \leq 50$$
$$x_1 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



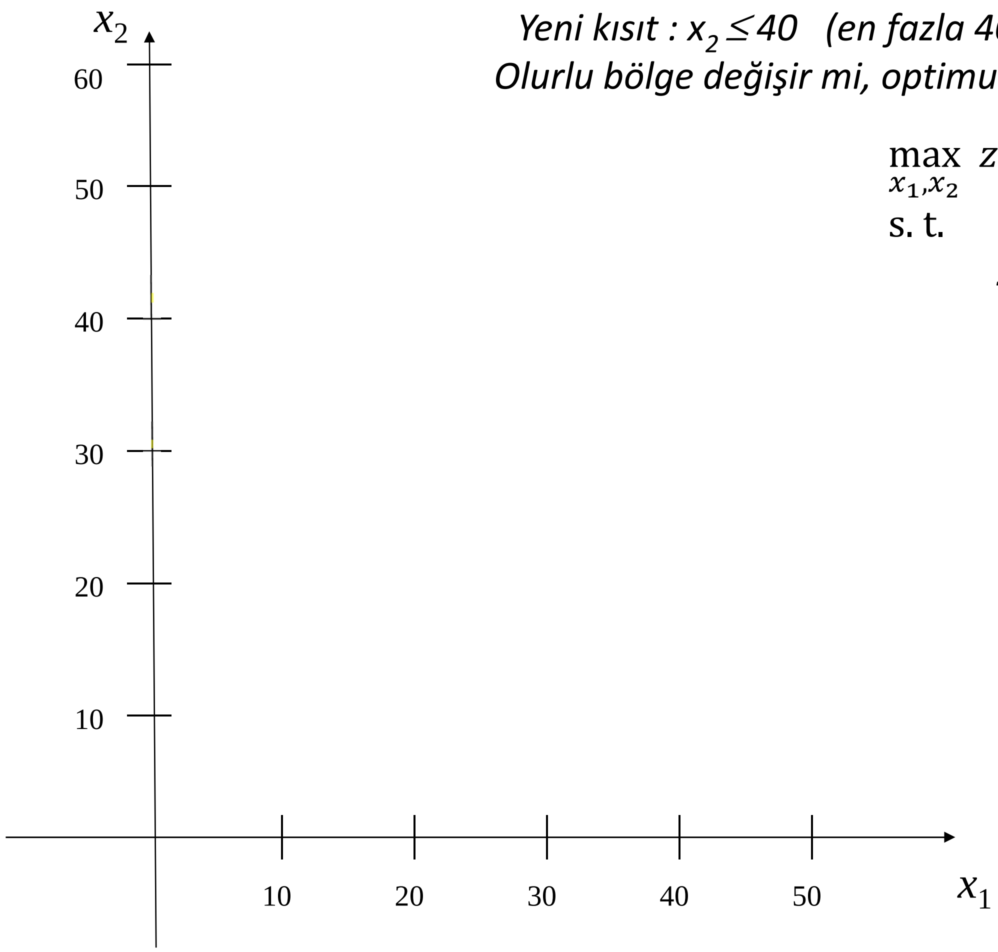
Yeni kısıt : $x_1 \leq 10$ (en fazla 10 bebek üretilebilir)
Olurlu bölge değişir mi, optimum çözü değişir mi?

$$\max_{x_1,x_2} \; z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$x_1 + x_2 \leq 50$$
$$x_1 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



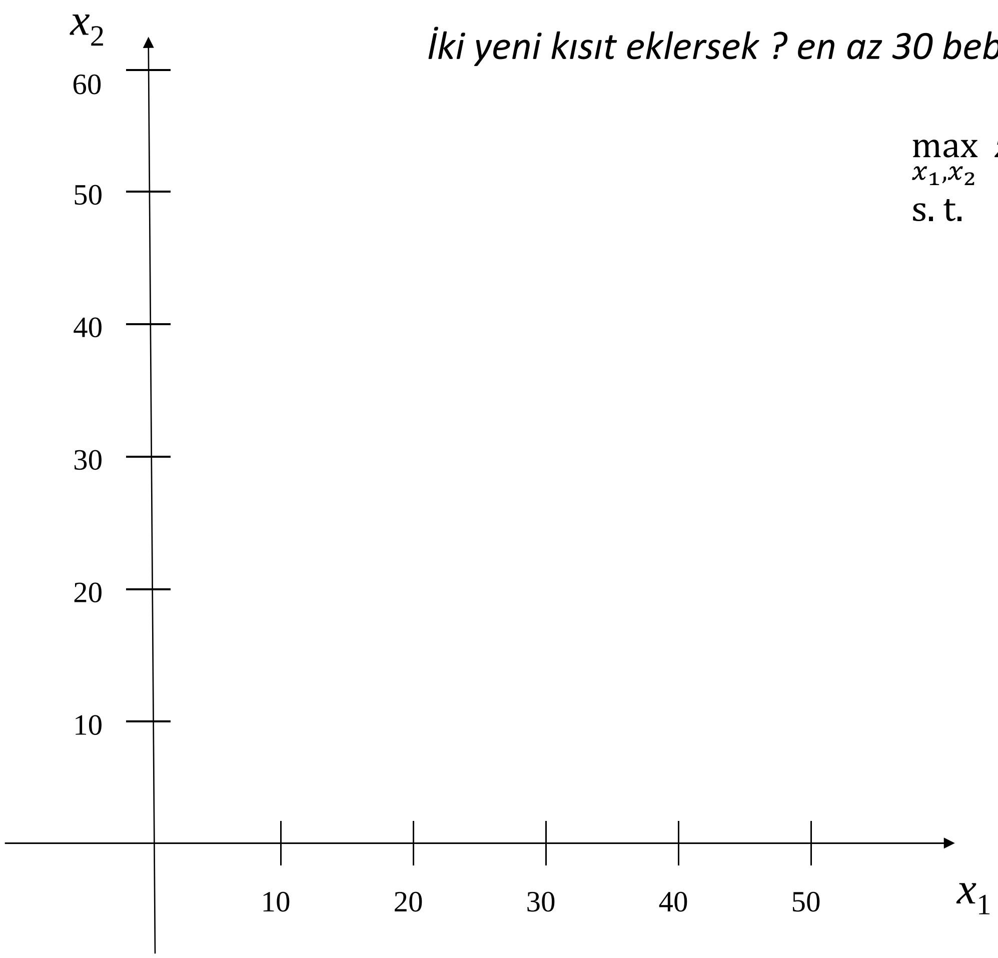
Yeni kısıt : $x_2 \leq 40$ (en fazla 40 asker üretilebilir)
Olurlu bölge değişir mi, optimum çözü değişir mi?

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \; & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & x_1 + x_2 \leq 50 \\ & \color{red}{x_2 \leq 40} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



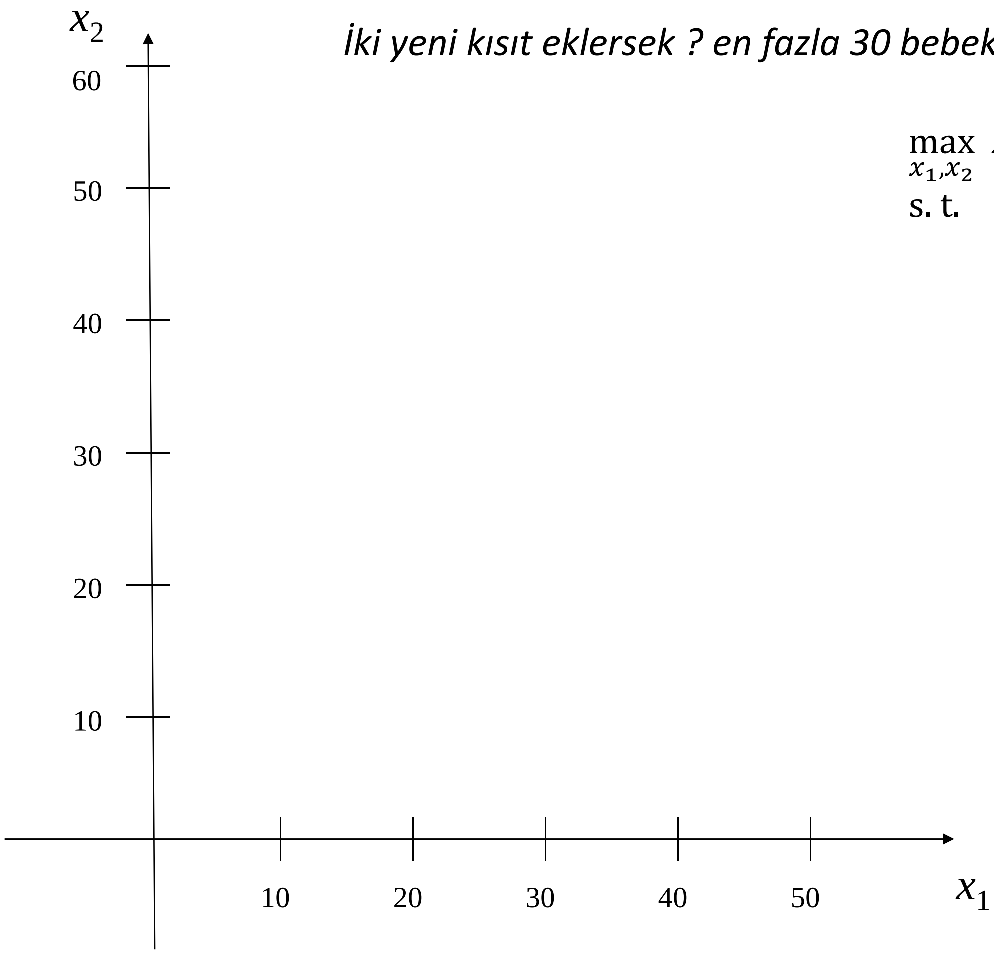
İki yeni kısıt eklersek ? en az 30 bebek, en az 30 asker

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \; & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & x_1 + x_2 \leq 50 \\ & \color{red}{x_1 \geq 30} \\ & \color{red}{x_2 \geq 30} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



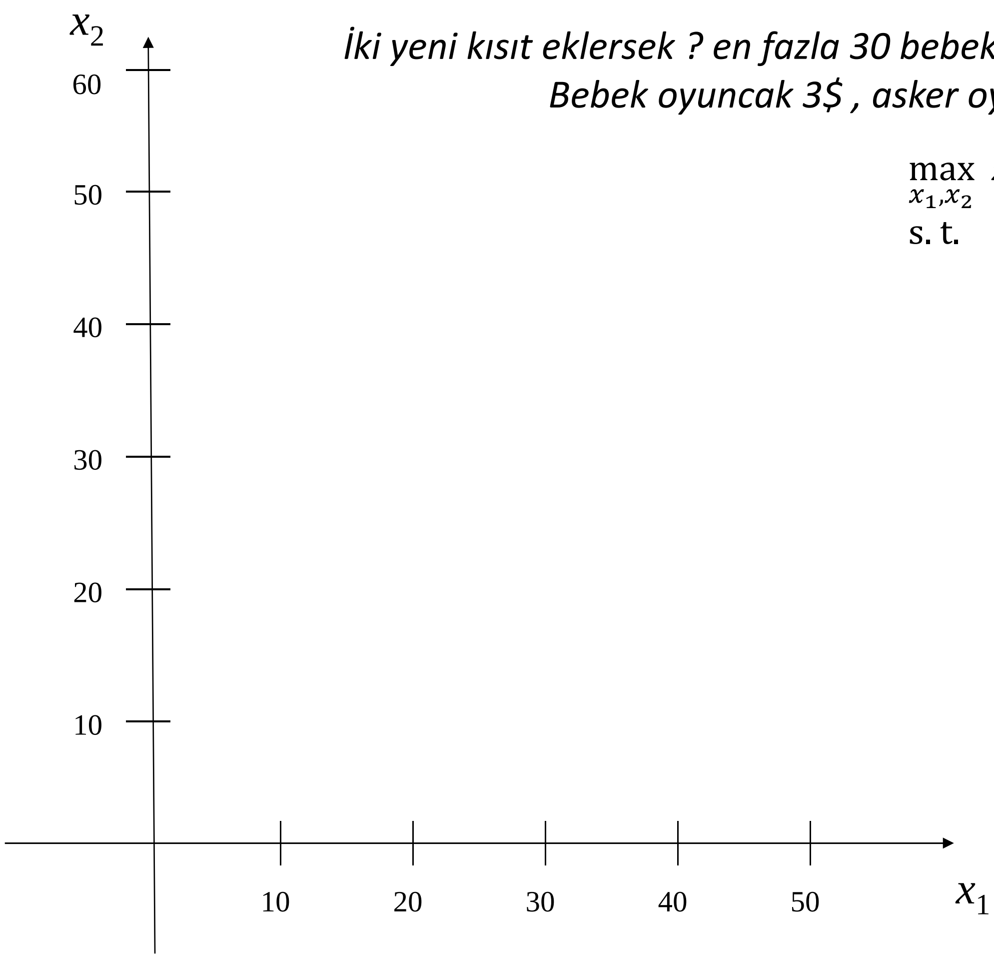
İki yeni kısıt eklersek ? en fazla 30 bebek, en fazla 30 asker

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \ & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & x_1 + x_2 \leq 50 \\ & x_1 \leq 30 \\ & x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



İki yeni kısıt eklersek ? en fazla 30 bebek, en fazla 30 asker
Bebek oyuncak 3$, asker oyuncak 2$ olursa ?

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \ & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & x_1 + x_2 \leq 50 \\ & x_1 \leq 30 \\ & x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Grafik Çözümden Gözlemler

1. Olurlu bölge, tüm kısıtların olurlu bölgelerinin kesişimidir.
2. Yeni bir kısıt eklemek :
   - Olurlu bölgeyi küçültür veya değiştirmez.
   - Optimum amaç fonksiyon değerini kötüleştirir veya değiştirmez.
   - Problemi olursuz (infeasible) yapabilir.
3. Mevcut bir kısıtı kaldırmak (problemden çıkarmak) :
   - Olurlu bölgeyi büyütür veya değiştirmez.
   - Optimum amaç fonksiyon değerini iyileştirir veya değiştirmez.
   - Probemi sınırsız (unbounded) yapabilir.
4. Bir kısıt, katı bir eşitlikle sağlanıyorsa etkindir (bağlayıcı, sıkıdır).
5. Bir kısıt, katı bir eşitsizlikle sağlanıyorsa etkin değildir (gevşektir).
6. Doğrusal bir program için birden fazla optimal çözüm olabilir

Grafik Çözümden Gözlemler

7. Bir DP'nin optimal bir çözümü varsa, en az bir optimal çözüm olurlu bölgenin uç noktasıdır (köşe noktası)
8. Amaç fonksiyonu değeri artarak çok büyük (maksimizasyon için) değerler alıyorsa problem sınırsızdır.
9. Doğrusal bir program sınırsız bir olurlu bölgeye sahip olsa bile, optimum bir çözüme sahip olabilir.
10. Tüm kısıtları sağlayan bir çözüm yoksa, o DP olursuzdur (olurlu bölge boş kümedir). (infeasible)
11. Olurluluk kavramı amaç fonksiyonu ile değil kısıtlar ile ilgilidir.
12. Her doğrusal program için aşağıdakilerden biri doğrudur:
    - DP'nin tek optimum çözümü var.
    - DP'nin birden fazla optimal çözümü var.
    - DP sınırsızdır.
    - DP olursuzdur.

Matematiksel Modellerin Sınıflandırılması

Aşağıdaki modellerin ne tip model olduğunu yazın...

a) $\max_{x_1,x_2,x_3} \; 3x_1 + 14x_2 + 7x_3$
s.t. $10x_1 + 5x_2 + 18x_3 \leq 25$
$x_j \in \{0,1\} \forall j = 1,2,3$

b) $\max_{x_1,x_2,x_3} \; 3x_1 + 14x_2 + 7x_3$
s.t. $10x_1 + 5x_2 + 18x_3 \leq 25$
$x_j \geq 0 \forall j = 1,2,3$

c) $\max_{x_1,x_2,x_3} \; 7x_1x_2 + 17x_2x_3 + 27x_1x_3$
s.t. $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$x_j \in \{0,1\} \forall j = 1,2,3$

d) $\min_{x_1,x_2,x_3} \; 7x_1 + \sin(x_2) + 8/x_3$
s.t. $4x_1 + 16x_2 + x_3 \leq 29$
$0 \leq x_j \leq 1 \forall j = 1,2,3$

e) $\min_{x_1,x_2,x_3} \; 12x_1 + 4x_2$
s.t. $x_1x_2x_3 = 1$
$0 \leq x_j \forall j = 1,2$
$x_3 \in \{0,1\}$

f) $\max_{x_1,x_2,x_3} \; x_1 + 2x_2$
s.t. $x_1/x_2 \geq 5$
$0 \leq x_j \forall j = 1,2,3$

DP modelleme çalışma sorusu - 1

A table company sells two models of four-leg tables.
The basic version uses a wood top, requires 0.6 hour to assemble, and sells for a profit of $200.
The deluxe model takes 1.5 hours to assemble because of its glass top and sells for a profit of $350.
Over the next week the company has 300 legs, 50 wood tops, 35 glass tops, and 63 hours of assembly available.
This company wishes to determine a maximum profit production plan <u>assuming that everything produced can be sold</u>.

- Formulate an LP model to using decision variables :

x1: number of basic models produced x2 : number of deluxe models

- Using a 2-dimensional plot, solve your model graphically for an optimal product mix, and explain why it is unique.
- On a separate 2-dimensional plot, show that the model has alternative optimal solutions if profits are $120 and $300, respectively

DP modelleme çalışma sorusu - 2

Sun Agriculture operates a farm of 10,000 acres. In the next season, SunAg can plant acres in either vegetables, which return a profit of $450 per acre, or cotton which returns a profit of $200 per acre.
As a precaution against bad weather, insects, and other factors, SunAg will plant no more than 70% of its total land in any one of these options.
Also, irrigation water is limited. Vegetables require 10 units of water per acre, and cotton requires 7 units of water per acre. SunAg is allowed to use up to 70,000 units of water per season (government regulation).
SunAg wishes to develop a planting plan that maximizes the profit

Formulate a mathematical programming model with decision variables :
v : acres in vegetables and c : acres in cotton.
Using a 2-dimensional plot, find an optimal plan graphically.
Show graphically that if we omit the upper and lower bound constraints, the resulting model would be unbounded.
Imagine that SunAg is required by government regulation to plant all its acres. Show graphically that this case is infeasible

DP modelleme çalışma sorusu - 3

Bir petrol rafinerisi, iki kaynaktan (AA ve BB) ham petrol alarak üç tür ürün üretmektedir : benzin, jet yakıtı ve madeni yağ.

İki kaynaktan gelen ham petrolün kalitesi farklıdır. AA ham petrolünün her bir varilinden 0.3 varil benzin, 0.4 varil jet yakıtı ve 0.2 varil madeni yağ üretilebiliyor. BB ham petrolünün her bir varilinden ise 0.4 varil benzin, 0.2 varil jet yakıtı ve 0.3 varil madeni yağ üretilebiliyor (her bir varilin kalan %10'u işlemler sırasında kaybediliyor).

AA'dan varil başına 100 dolardan günde 9000 varile kadar ham petrol satın alabiliyor. BB ise daha yakın mesafededir ve kısa nakliye mesafesi nedeniyle varil başına 75 dolarlık daha düşük bir maliyetle ancak günde 6000 varile kadar ham petrol alınabiliyor.

Bu rafinerinin yaptığı sözleşmeler nedeniyle, günde 2000 varil benzin, 1500 varil jet yakıtı ve 500 varil madeni yağ üretmesini gerekiyor.

Bu gereksinimler en iyi şekilde nasıl karşılanabilir?

İlave Çalışma Soruları :

1 Farmer Jones must determine how many acres of corn and wheat to plant this year. An acre of wheat yields 25 bushels of wheat and requires 10 hours of labor per week. An acre of corn yields 10 bushels of corn and requires 4 hours of labor per week. All wheat can be sold at $4 a bushel, and all corn can be sold at $3 a bushel. Seven acres of land and 40 hours per week of labor are available. Government regulations require that at least 30 bushels of corn be produced during the current year. Let x_1 = number of acres of corn planted, and x_2 = number of acres of wheat planted. Using these decision variables, formulate an LP whose solution will tell Farmer Jones how to maximize the total revenue from wheat and corn.

2 Answer these questions about Problem 1.

a Is ($x_1 = 2, x_2 = 3$) in the feasible region?

b Is ($x_1 = 4, x_2 = 3$) in the feasible region?

c Is ($x_1 = 2, x_2 = -1$) in the feasible region?

d Is ($x_1 = 3, x_2 = 2$) in the feasible region?

4 Truckco manufactures two types of trucks: 1 and 2. Each truck must go through the painting shop and assembly shop. If the painting shop were completely devoted to painting Type 1 trucks, then 800 per day could be painted; if the painting shop were completely devoted to painting Type 2 trucks, then 700 per day could be painted. If the assembly shop were completely devoted to assembling truck 1 engines, then 1,500 per day could be assembled; if the assembly shop were completely devoted to assembling truck 2 engines, then 1,200 per day could be assembled. Each Type 1 truck contributes $300 to profit; each Type 2 truck contributes $500. Formulate an LP that will maximize Truckco's profit.

3 Dorian Auto manufactures luxury cars and trucks. The company believes that its most likely customers are high-income women and men. To reach these groups, Dorian Auto has embarked on an ambitious TV advertising campaign and has decided to purchase 1-minute commercial spots on two types of programs: comedy shows and football games. Each comedy commercial is seen by 7 million high-income women and 2 million high-income men. Each football commercial is seen by 2 million high-income women and 12 million high-income men. A 1-minute comedy ad costs $50,000, and a 1-minute football ad costs $100,000. Dorian would like the commercials to be seen by at least 28 million high-income women and 24 million high-income men. Use linear programming to determine how Dorian Auto can meet its advertising requirements at minimum cost.

Aşağıdaki modelleri grafik olarak gösterin,
Olurlu bölgeyi gösterin, olurlu bölgenin köşe noktalarını ve bu noktalara ait amaç fonk değerini bulun, amaç fonksiyonu eş fayda (isoprofit) doğrusunu gösterin

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\ge 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad 8x_1 + 2x_2 &\le 16 \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ z &= x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_2 - x_1 &\ge 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\quad z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + 2x_2 &\ge 4 \\ x_1 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.}\quad 3x_1 + 2x_2 &\ge 36 \\ 3x_1 + 5x_2 &\ge 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Doğrusal Cebir Alıştırmaları :

Find A^{-1} (if it exists) for the following matrices:

1 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

5 Use the answer to Problem 1 to solve the following linear system:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$$

6 Use the answer to Problem 2 to solve the following linear system:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

1 Use matrices to represent the following system of equations in two different ways:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

1 For $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, find:

a $-A$ **b** $3A$ **c** $A + 2B$

d A^T **e** B^T **f** AB

g BA

Use the Gauss–Jordan method to determine whether each of the following linear systems has no solution, a unique solution, or an infinite number of solutions. Indicate the solutions (if any exist).

1
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

5
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 5 \\ x_2 + 2x_4 &= 5 \\ x_3 + 0.5x_4 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Aşağıdaki modelleri grafik yöntem ile çözüm :

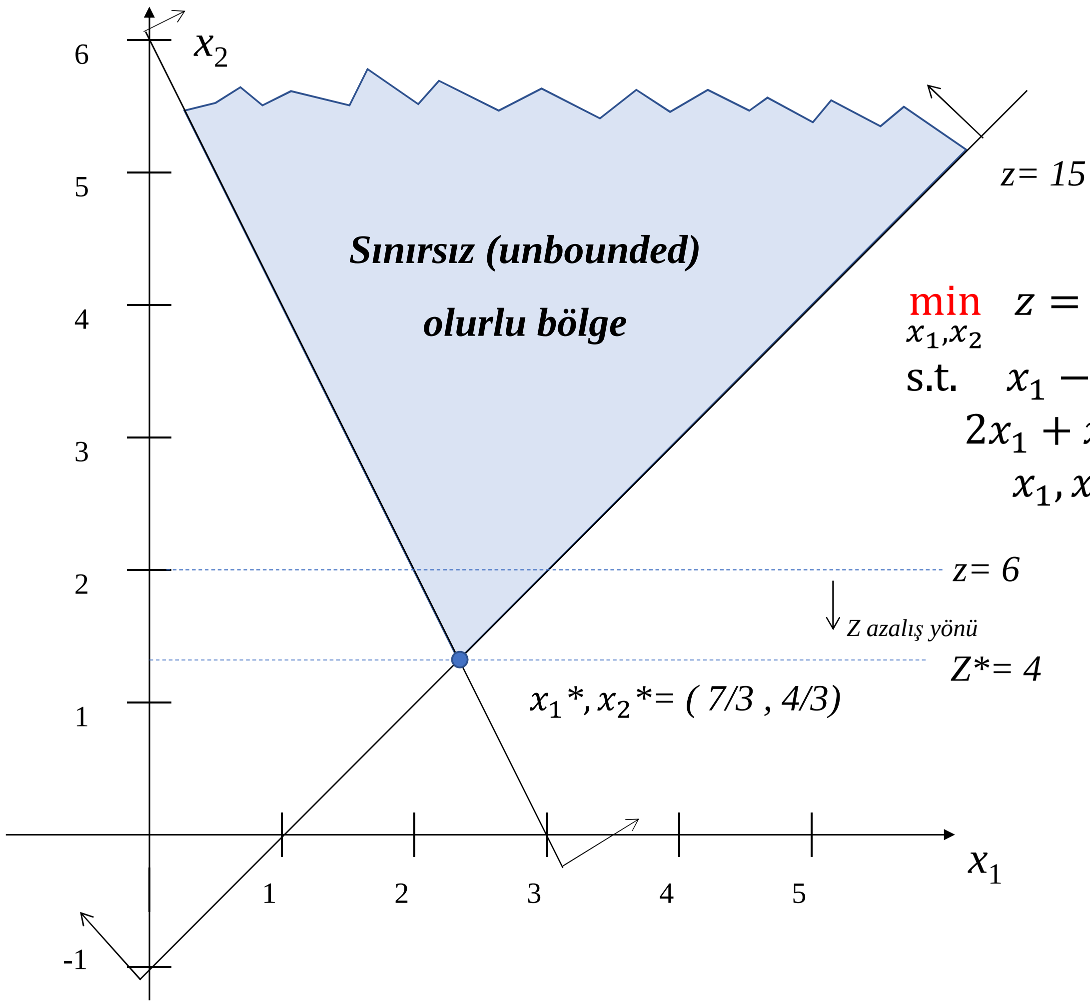
$$\begin{aligned} &\min \quad z = 3x_2 \\ &\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \le 1 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max \quad z = 3x_2 \\ &\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \le 1 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

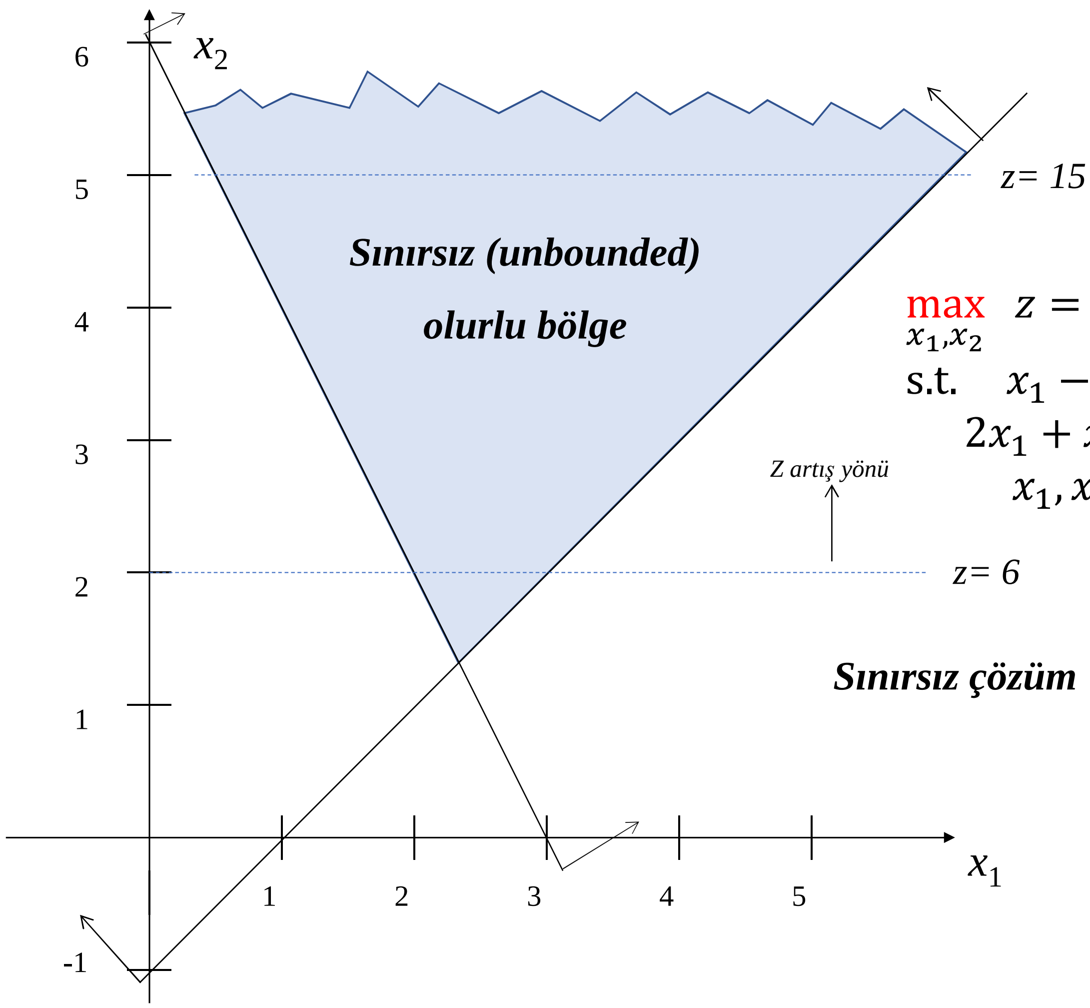
$$\begin{aligned} &\min \quad z = -3x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \ge 1 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ &\qquad x_2 \le 3 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Aşağıdaki problemin DP modelini oluşturun ve grafik yöntem ile çözün :

3 Leary Chemical manufactures three chemicals: A, B, and C. These chemicals are produced via two production processes: 1 and 2. Running process 1 for an hour costs \$4 and yields 3 units of A, 1 of B, and 1 of C. Running process 2 for an hour costs \$1 and produces 1 unit of A and 1 of B. To meet customer demands, at least 10 units of A, 5 of B, and 3 of C must be produced daily. Graphically determine a daily production plan that minimizes the cost of meeting Leary Chemical's daily demands.



$$\min_{x_1,x_2} \quad z = 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\max_{x_1,x_2} \quad z = 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sınırsız çözüm

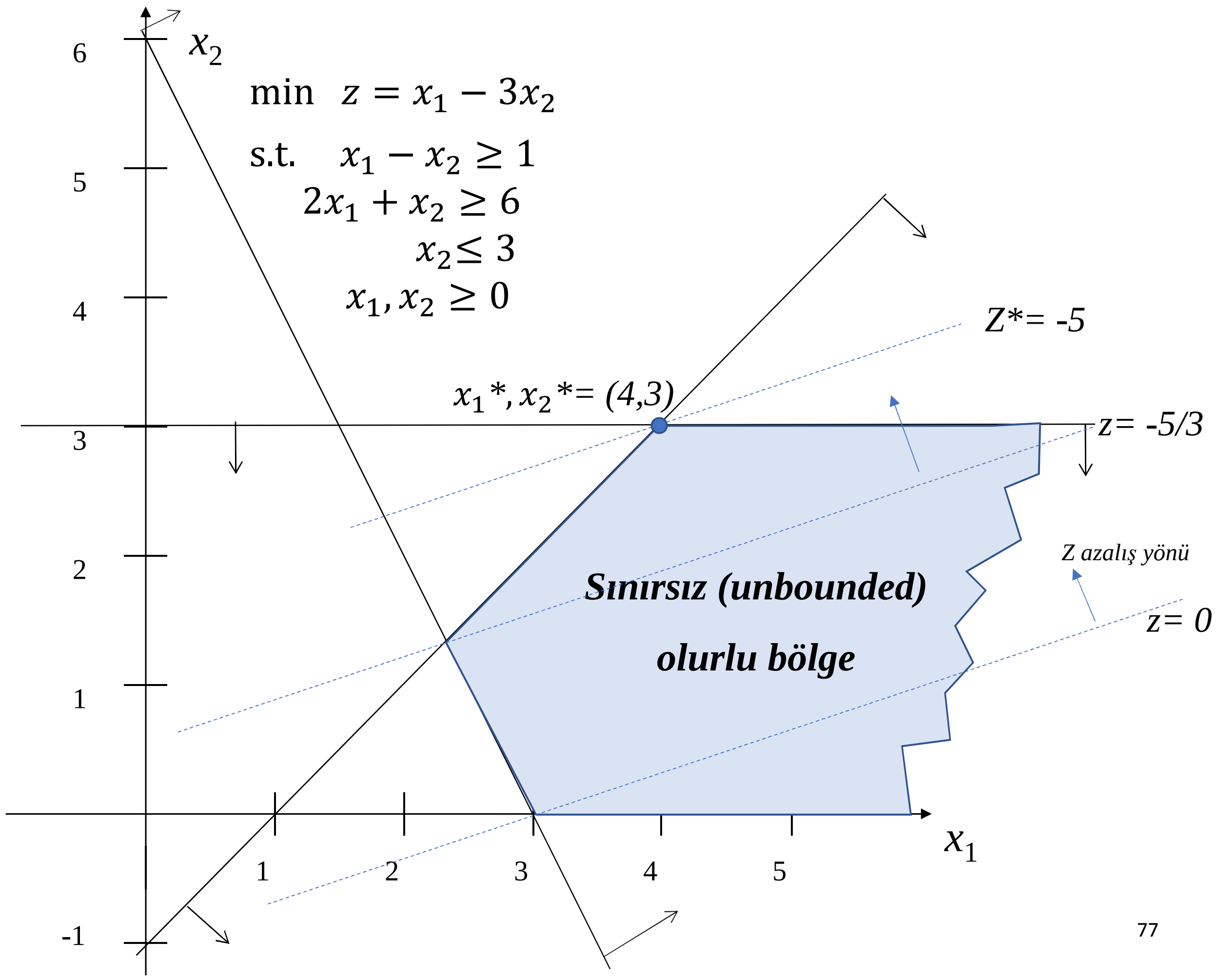
$$\min \; z = x_1 - 3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

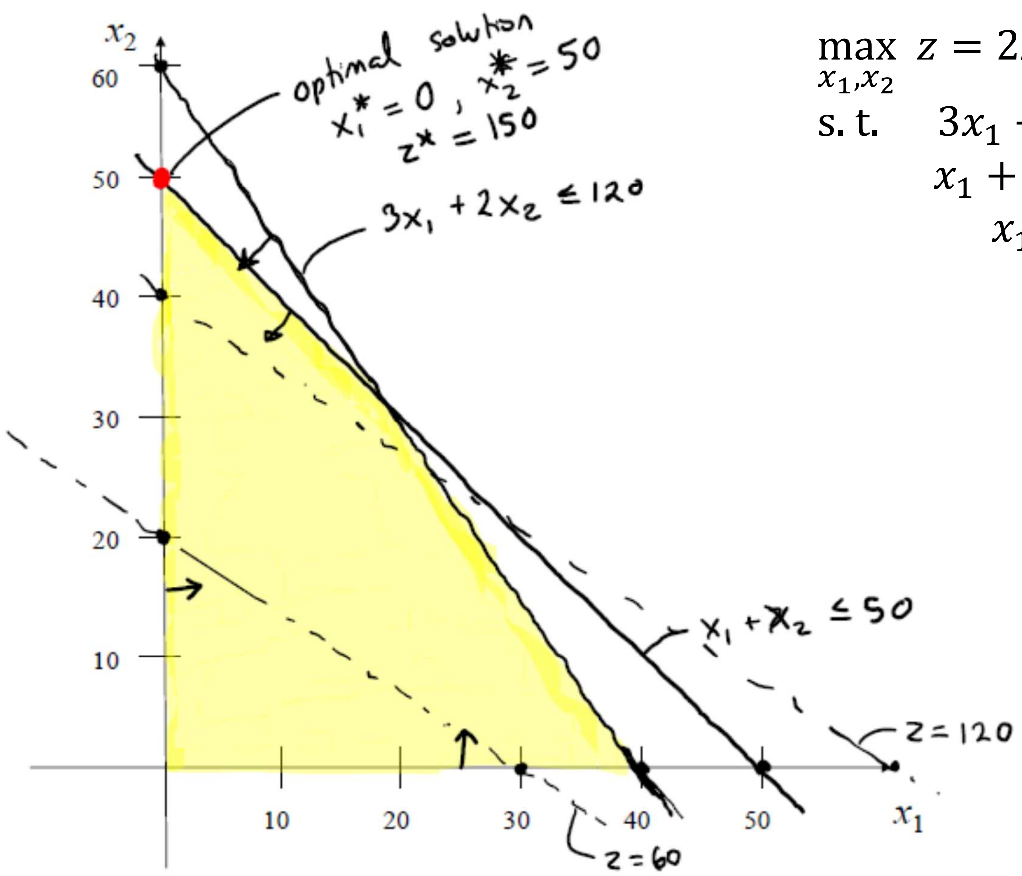


$$\max_{x_1, x_2} \; z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 120$$

$$x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



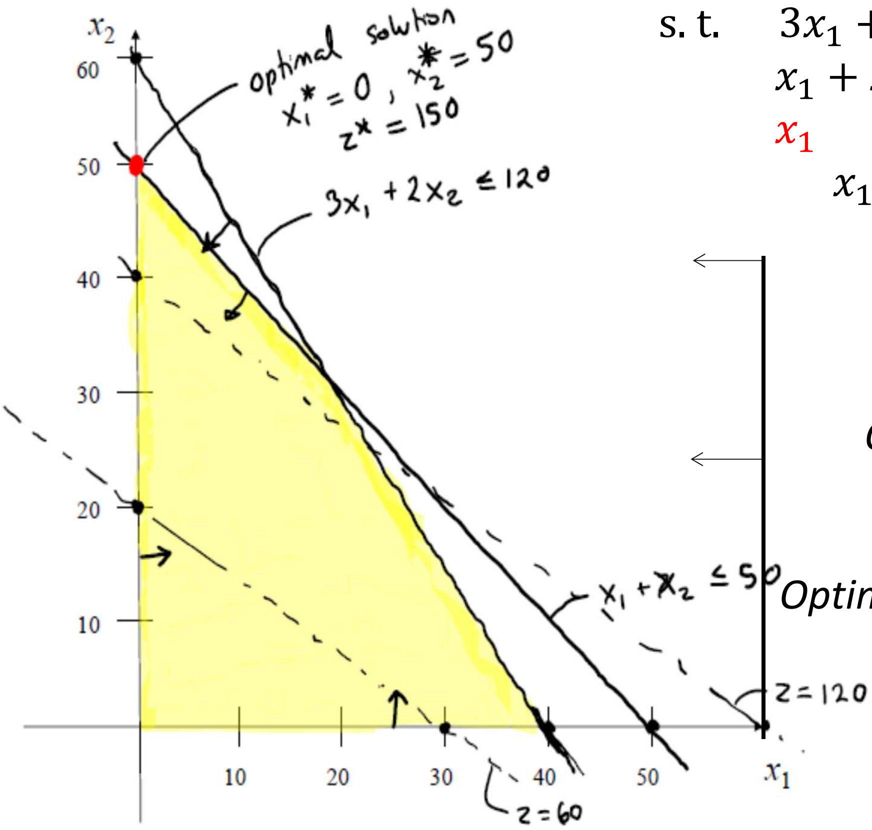
$$\max_{x_1,x_2} \; z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \le 120$$

$$x_1 + x_2 \le 50$$

$$\color{red}{x_1 \le 60}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



Olurlu alan değişmedi,
Gereksiz kısıt..

Optimum çözüm değişmedi

29

$$\max_{x_1,x_2} \; z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \le 120$$

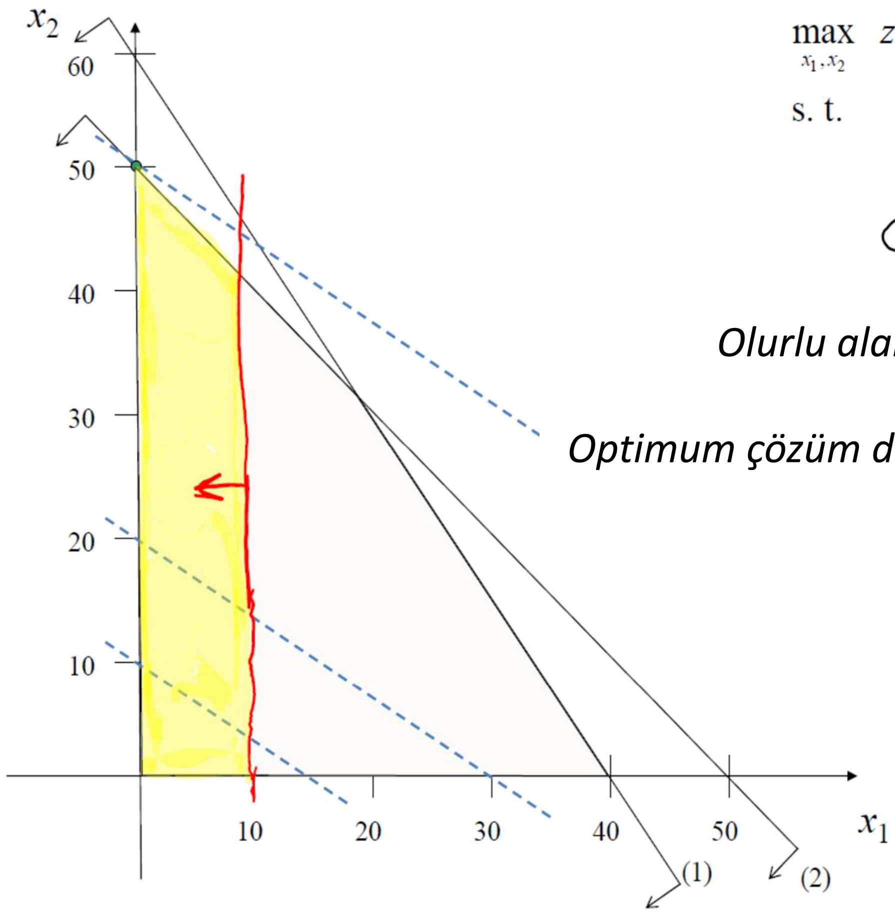
$$x_1 + x_2 \le 50$$

$$\color{red}{x_1 \le 10}$$

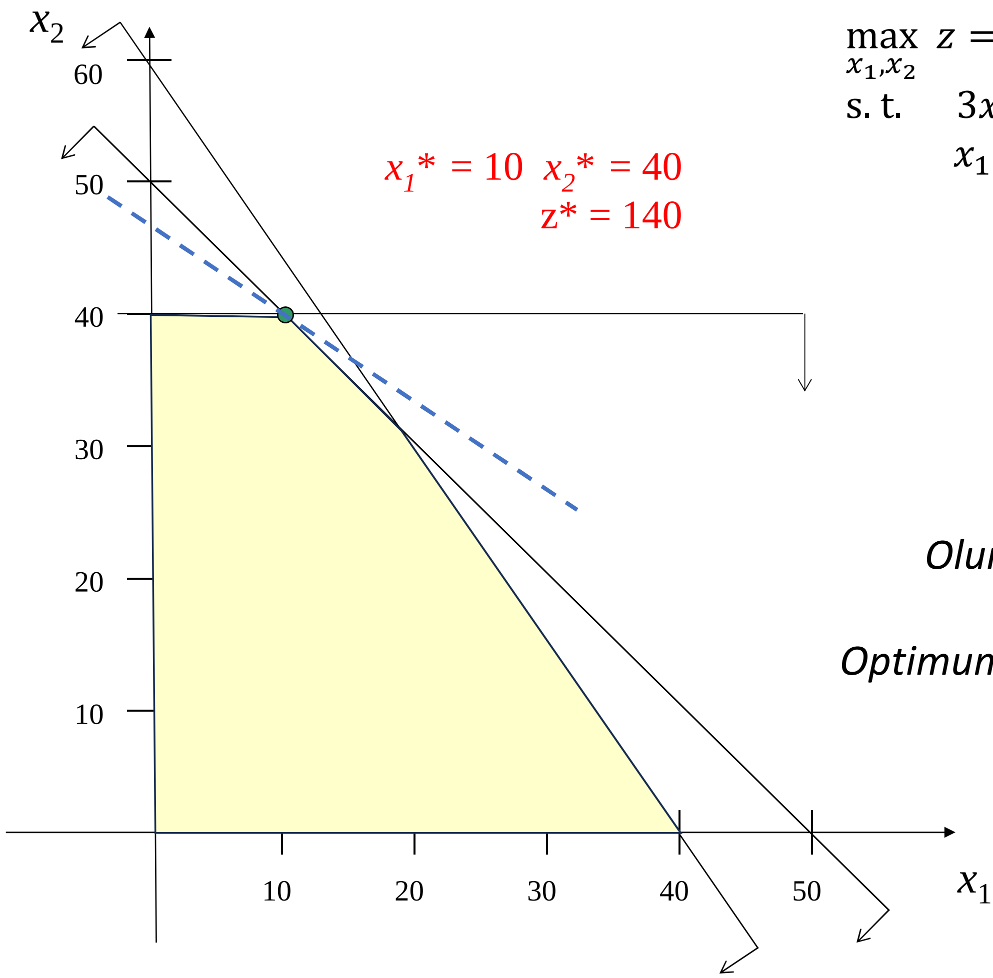
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Olurlu alan değişti,

Optimum çözüm değişmedi



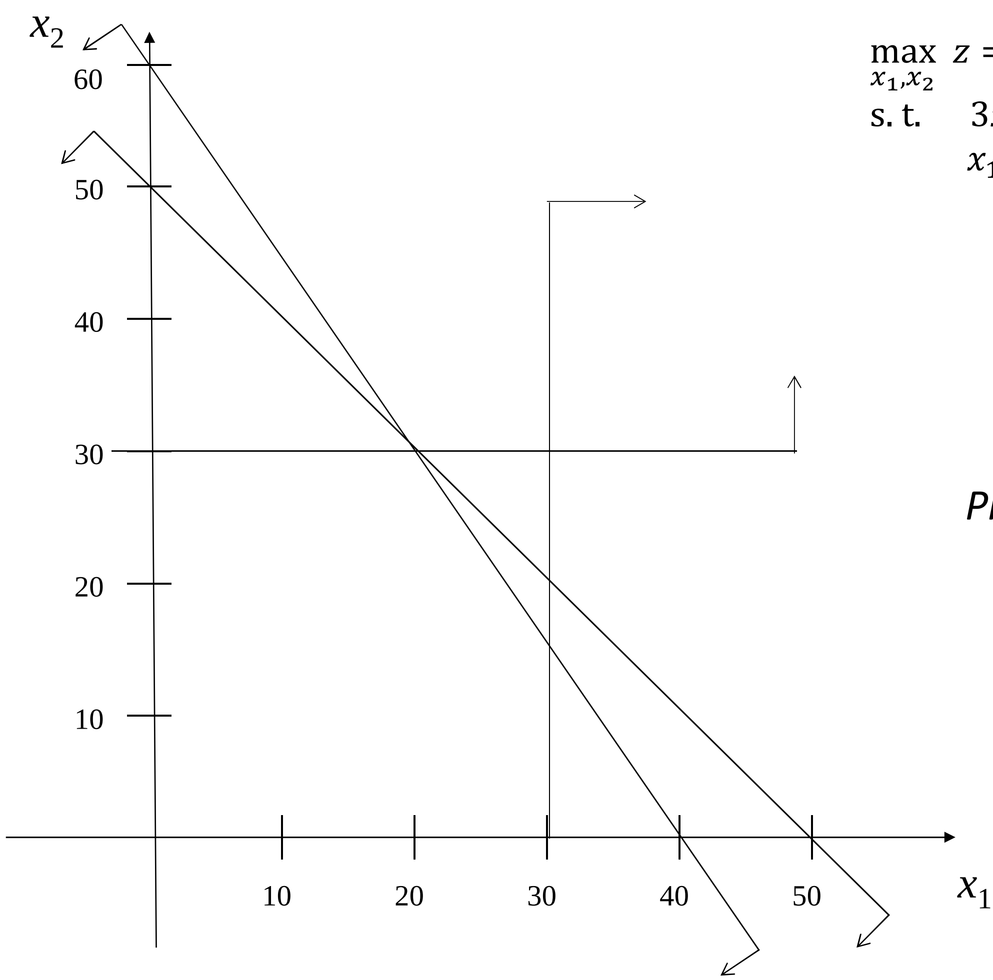
32



$$\max_{x_1,x_2} \; z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s. t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$x_1 + x_2 \leq 50$$
$$x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

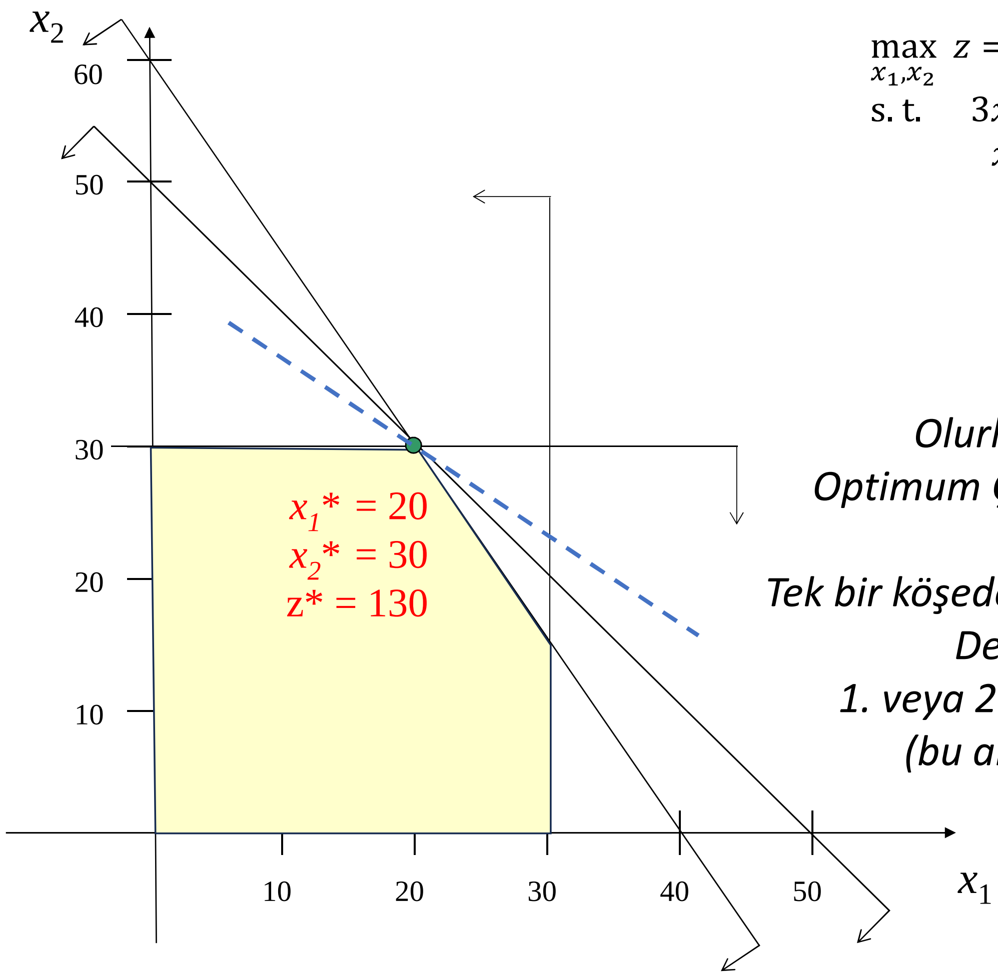
Olurlu alan değişti,

Optimum çözüm değişti



$$\max_{x_1,x_2} \; z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s. t.} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$x_1 + x_2 \leq 50$$
$$x_1 \geq 30$$
$$x_2 \geq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

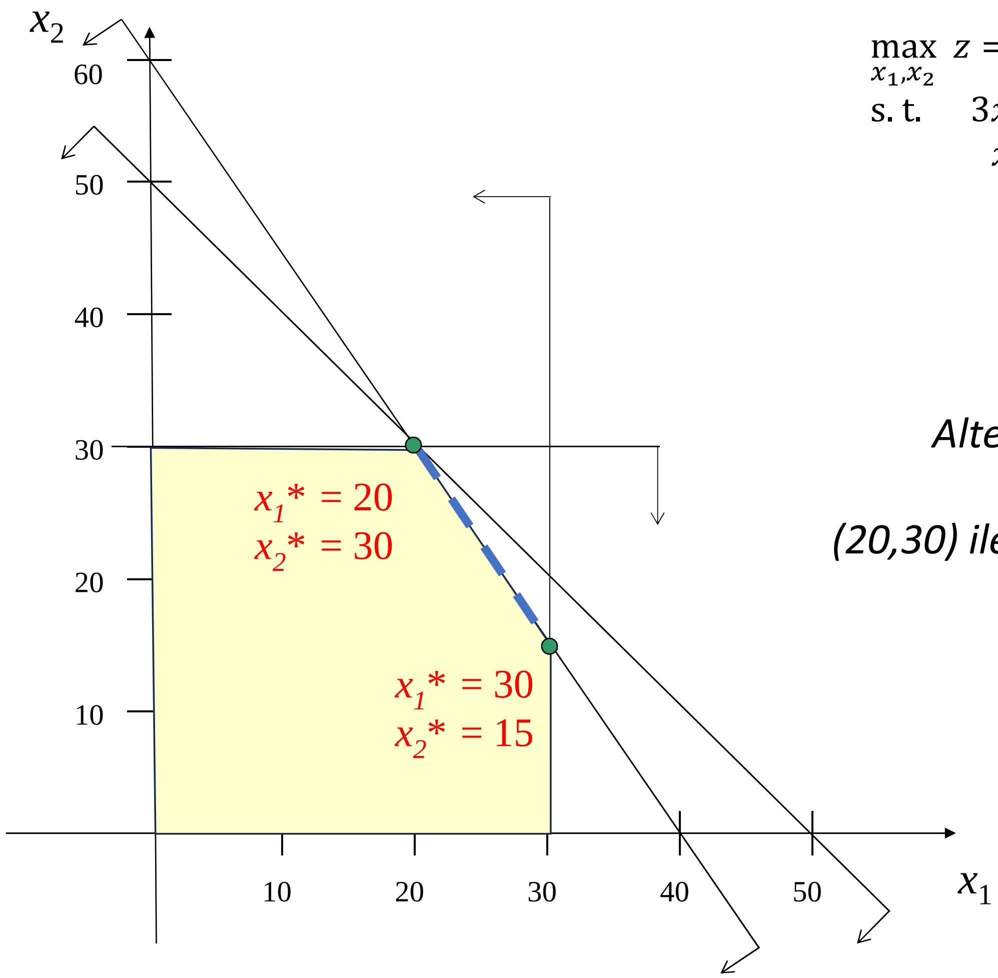
Problem Olursuz
(infeasible)
Çözüm Yok



$$\max_{x_1,x_2} z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad 3x_1 + 2x_2 &\le 120 \\ x_1 + \ \ x_2 &\le 50 \\ x_1 &\le 30 \\ x_2 &\le 30 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Olurlu alan Değişti
Optimum Çözüm Değişti

Tek bir köşede 3 kısıt aktif !
Dejenere Çözüm
1. veya 2. kısıt gereksiz
(bu amaç fonk için)

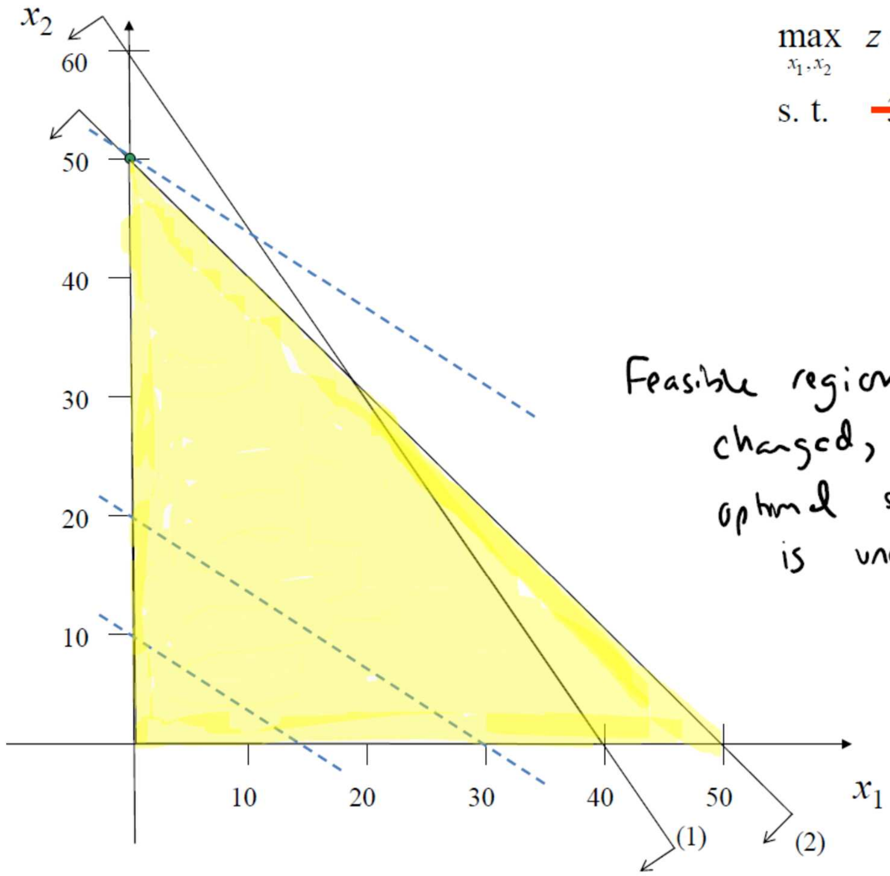


$$\max_{x_1,x_2} z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad 3x_1 + 2x_2 &\le 120 \\ x_1 + \ \ x_2 &\le 50 \\ x_1 &\le 30 \\ x_2 &\le 30 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Alternatif Çözüm:

(20,30) ile (30,15) arası doğru parçası

$z^* = 120$



$$\max_{x_1,x_2} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.} \quad \cancel{3x_1 + 2x_2 \le 120}$$

$$x_1 + x_2 \le 50$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Feasible region changed, optimal solution is unchanged

34