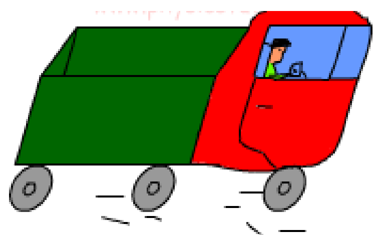
8. BÖLÜM

İtme-Momentum ve Çarpışmalar

8.1 İtme (İmpuls) ve Momentum

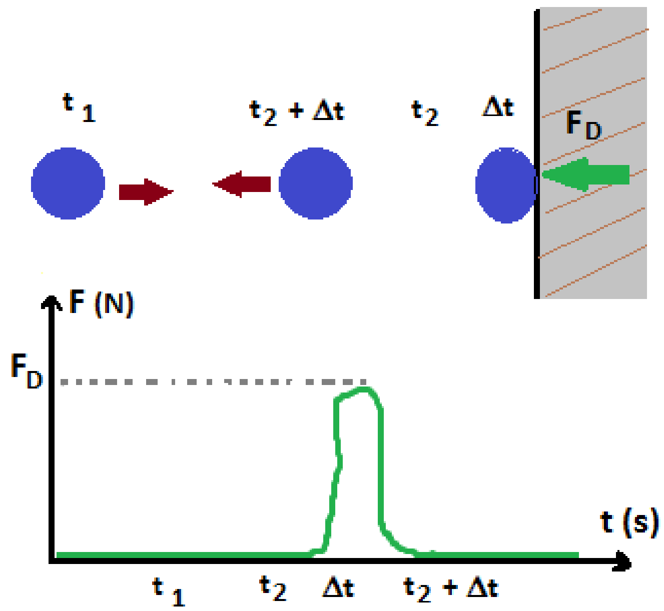
Bu bölümde kinematiğin bir konusu olan momentum hakkında konuşurken öncelikle başlıkta da geçtiği gibi doğrusal (lineer) momentum bizim odak noktamız olacaktır.

Momentum fiziksel olarak çarpma etkisi yada çarpma şiddeti olarak bilinir. Formülsel olarak da kütle ile hızın çarpımı olarak yazılır. Hız vektörel, kütle ise skaler bir büyüklük olduğu için vektörel bir büyüklüğün skaler bir sayıyla çarpımı bize vektörel bir nicelik verecektir. Yönü ve şiddeti önemli olan momentum aslında hareketin yönüne bağlı bir çarpma etkisidir diye biliriz. Düşünün ki aynı hıza sahip bir futbol topu ile bir tenis topu size çarpıyor. Hangisinin size vereceği çarpma etkisi daha fazla oluyorsa onun momentumu daha büyüktür.



8.2 Doğrusal Momentum ve Korunumu

Kuvet-ivme ilişksinin bu konuda temel prensip olduğunu unutmamak gerekir. Newton'un 3. yasası olan bu ilişki F=m.a dan F=m.(dV/dt), F.Δt=m.ΔV=ΔP olur. Eşitliğin sağ tarafı (F.Δt) yani kuvvetin zamanla etkisine İTME(İmpuls) denir ve I ile gösterilir. Birimi Newton.saniye [N.s] dir. Bu etki cismin momentum değişimine (ΔP) eşit olur. Bu durum aslında kuvvetin cismi belirli bir zaman aralığında itme miktarıdır. Gölle fırlatan sporcular gölleye ne kadar çok kuvvet uygulayarak (belirli bir zaman aralığında) itmeyi denerse gölle o kadar büyük momentuma sahip olur ve o kadar uzağa gider. Durgun bir duvara çarpan topun sekip zıt yönde gitmesi duvarın topa uyguladığı itme ile ilgilidir. Biliyoruz ki momentum hıza bağlı vektörel bir büyüklüktür. Topun hız yönü(veya miktarı) değiştiği için momentumunda da bir değişme olacaktır. Momentumdaki bu değişiklik topun duvara temas ettiği kısacık süre zarfında duvar tepki kuvveti ile o sürenin çarpımına yani itmesine eşit olacaktır.



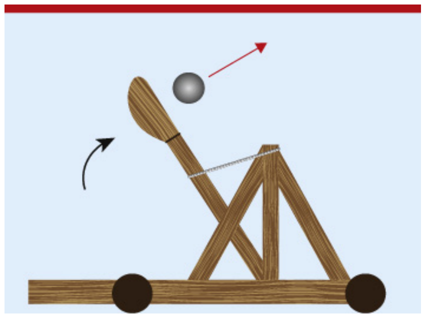
Newton' un yasalarından olan net kuvvet ivme ilişkisi F=m.a aslında lineer(doğrusal) momentumun temel ilkesi gibidir. İvme yerine hızın zamanla değişimini yazarsak ve bu ifadeyi kütle ile çarpınca momentumun zamana göre değişimi olur. Zaman differansiyelini (dt) kuffet ile çarpıp her iki tarafın integralini alınca eşitliğin sağ tarafındaki terim bize itmeyi verir. Eşitliğin sol tarafı da momentum değişimine eşit olur. Fiziksel olarak açıklaması; kuvvetin zaman aralığında bir cisim üzerindeki etkisi cismin momentum değişimine sebep olur.

$a=dV/dt$
$F=m.(dV/dt)$
$F.dt=m.dV= dP$
$F.\ \Delta t = \Delta P$

Newton der ki: Bir parçacığa etkiyen net kuvvet o parçacığın ivmeli hareketine veya hız değişimine sebep olur. Aslında bu hız ile kütle çarpımından momentum değişimine sebep olur. Düşünün ki doğrusal yolda sabit hızla giden bir oyuncak arabaya arkadan bir kuuvet belirli bir sürede etkiyor ve hızı iki katına çıkıyor. Momentumun formülünden P=m.V den ilk duruma göre momentumu da iki katına çıkar.

$$P = m . V$$

m: kütle (kg)
V: hız (m/s)
P: momentum (kg.m/s)



8.3 Parçacıklar Sisteminde Momentum Korunumu

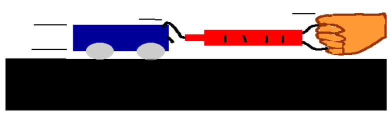
Doğrusal momentum korunumu Newton'un 3. yasasıyla ilişkilidir. Bu yasa etki-tepki prensibi olarak bilinir ve bu ilişkideki kuvvetlerin yönleri birbirine zıttır ama şiddetleri aynıdır . Momentumları farklı iki cismin çarpışmasında çarpışmadan önce sahip oldukları momentumlarının vektörel toplamı dışardan sisteme bir etki olmadığı için çarpışmadan sonra sahip olacakları momentumları toplamına eşit olacaktır.

$$P_{1,ilk} + P_{2,ilk} = P_{1,son} + P_{2,son}$$

$$m_1.V_{1,ilk} + m_2.V_{2,ilk} = m_1.V_{1,son} + m_2.V_{2,son}$$

$$F_1 = dP_1/dt$$
$$F_2 = dP_2/dt$$
$$dP_1/dt + dP_2/dt = (d/dt).(P_1+P_2) = 0$$

$$F_{\cdot \Delta t} = \Delta p = _F \cdot \Delta t$$

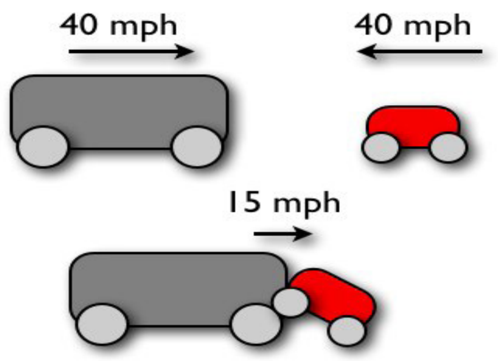


8.4 Çarpışmalar

Momentum uygulamarından birisi de cisimleri bir biri ile çarpışmasıdır. Bu çarpışmalar doğrusal, düzlemsel yada üçboyutlu gerçekleşebilir. Çarpışmlarda önemli kriter cisimlerin çarpışma öncesi ve çarpışma sonrası toplam momentumlarının korunuyor olduğudur.

8.5 Tek Boyutta Esnek Çarpışma

Bu sistem örneğinde sadece bir boyutlu hareketleri ve çarpışmaları ele alcağız. Doğrusal yolda hareket eden cisimler aynı doğrultuda momentuma sahiptirler. Çarpışma sonucunda da momentum aynı doğrultu üzerinde olacaktır. Çarpışmanın esnekolması demek çarpışma sırasında ısıya veya başka bir forma enerji dönüşmeden toplam kinetik enerjinin korunduğudur. Bu durumda ilk toplam momentum son toplam momentuma ve ilk kinetik enerji toplamı son kinetik enerji toplamına eşitlenir.



$$P_{1,ilk} + P_{2,ilk} = P_{1,son} + P_{2,son}$$

$$m_1.V_{1,ilk} + m_2.V_{2,ilk} = m_1.V_{1,son} + m_2.V_{2,son}$$

$$1/2m_1V_{1,i}^{\ 2} + 1/2m_2V_{2,i}^{\ 2} = 1/2m_1V_{1,s}^{\ 2} + 1/2m_2V_{2,s}^{\ 2}$$

Denklemler düenlenip gerekli işlemler yapıldıktan sonra ; $V_{1,ilk} + V_{1,son} = V_{2,ilk} + V_{2,son}$

Özel denklemi bulunur.

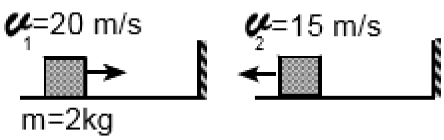
Cisimlerin son hızları

$$V_{1,son} = ((m_1-m_2)/(m_1+m_2)).\ V_{1,ilk} \quad + \quad ((2m_2)/(m_1+m_2)).\ V_{2,ilk}$$

$$V_{2,son} = ((2m_2)/(m_1+m_2))\ .\ V_{1,ilk} \quad + \quad ((m_2-m_1)/(m_1+m_2)).\ V_{2,ilk}$$ olarak bulunur.

ÖRNEK :

Şekildeki gibi duvara çarpan bir cisim ikinci şekildeki gibi döndüğüne göre, cismin momentumundaki değişme ne kadardır?

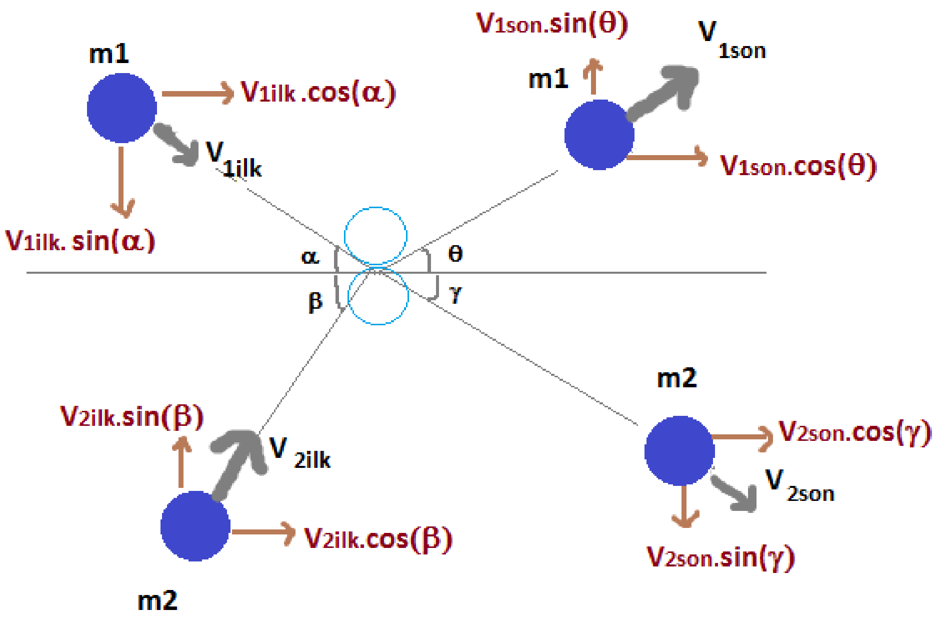


ÇÖZÜM :

$P_i = m\ .\ \upsilon_1$	$P_s = m\ .\ \upsilon_2$	$\Delta P = P_s - P_i$
$P_i = 2\ .\ 20$	$P_s = 2\ .\ (-15)$	$\Delta P = -30 - 40$
$P_i = 40$ kg.m/s	$P_s = -30$ kg.m/s	$\Delta P = -70$ kg.m/s

8.6 İki Boyutta Esnek Çarpışmalar

Daha önce iki parçacıklı sistemde momentumun doğrusal olarak korunduğunu söylemiştik. Bu sonuç iki parçacıklı çarpışmalar için x, y, z doğrularının her birinde momentumun korunacağını ifade eder. Kartezyen koordinat sisteminde sadece x ve y doğrultularında hareket varsa bu düzlemsel harekettir ve momentum incelenmesi de düzlemsel olacaktır. Düzlemsel çarpşmalarda sistem dışardan izole edildiği için çarpışmadan önceki momentum bileşenleri (x ve y bileşenleri) toplamı aynı doğrultudaki son momentum bileşenlerinin toplamına eşit olacaktır. Esnek çarpışma durumunda cisimlerin ilk kinetik enerjileri toplamı da son kinetik enerji toplamlarına eşit olacaktır.



$P_{xi} = P_{xs}$ $\qquad\qquad$ $P_{yi} = P_{ys}$

$m_1.V_{1xi} + m_2.V_{2xi} = m_1.V_{1xs} + m_2.V_{2xs}$ $\qquad\qquad$ $m_1.V_{1yi} + m_2.V_{2yi} = m_1.V_{1ys} + m_2.V_{2ys}$

$m_1V_1\cos(a)+m_2V_2\cos(b)=m_1V_1'\cos(t)+m_2V_2'\cos(g)$ $\qquad\qquad$ $m_1V_1\sin(a)+m_2V_2\sin(b)=m_1V_1'\sin(t)+m_2V_2'\sin(g)$

Bu çarpışma türü esnek olduğundan ve bileşke hız x-y bileşenlerinin vektörel toplamı şeklinde yazıldığından kinetik enerji korunumunu tek bir denklemle gösterebiliriz

$$(1/2)m_1V_1^2 + (1/2)m_2V_2^2 = (1/2)m_1V_1'^2 + (1/2)m_2V_2'^2$$

8.7 Çarpışma Katsayısı, e

İki boyuttaki çarpışmalarda çarpışmanın esneklik dercesini veren ölçüte çarpışma katsayısı yada geri sıçrama katsayısı diyoruz. Bu ifadeyi "e" ile göterince asıl anlamı İngilizce' den gelen "**e**lastic buoyancy" ifadesinin baş harfi olduğunu söyleyelim. Çarpışmanın derecesini ölçerken bibzim için önemli eksen çarpışma ekseni olacaktır. Yani bu ifadeyi değerlendirirken momentumun değiştiği eksende çarpışma katsatyısı hesaplamaları yapılır. Bu katsayı çarpışma sonrası bağıl hızların çarpışma öncesi bağıl hızlara oranı olarak açıklanır.

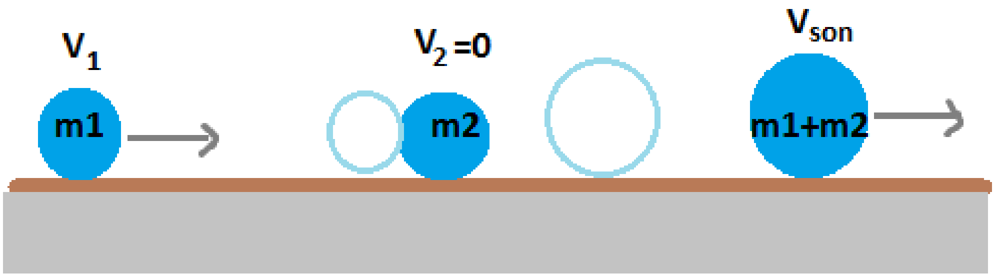
e=1 : tam elastik çarpışma
e=0 : tam plastik çarpışma
0<e<1 : elastoplastik çarpışma
e=1 : hem momentum hem de enerji korunur.
e<1 : sadece momentum korunur.

Çarpışma ekseni "y" dir.

(1) $m_1(-v_{1y}) + m_2(v_{2y}) = m_1(v'_{1y}) + m_2(-v'_{2y})$ $\qquad$ **(2)** $\boxed{e = -\dfrac{v'_{1y} - v'_{2y}}{v_{1y} - v_{2y}}}$

x eksenindeki hız bileşenleri sabit kalır: $\mathbf{v_{1x}=v'_{1x}}$ $\qquad$ $\mathbf{v_{2x}=v'_{2x}}$

8.8 Esnek Olmayan Çarpışmalar



Bu tür çarpışmalarda momentum korunurken çarpışma esnasında cisimler ısınır ve kinetik enerjiden olur. Böylece toplam enerjiden azalma olur ve çarpışma sonrasında kinetik enerji ilk durumdan azdır.

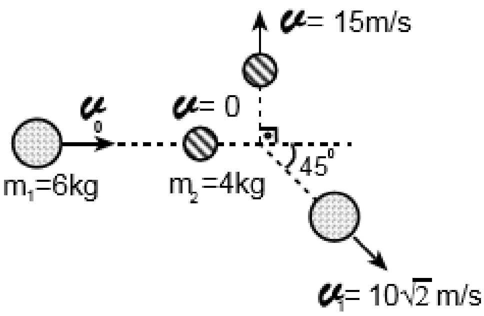
$$(1/2)m_1V_1^2 + (1/2)m_2V_2^2 = (1/2)m_1V_1'^2 + (1/2)m_2V_2'^2 + E_{kayıp}$$

Çarpışma Sorularında;

1- İlk önce kağıt düzlemine koordinat eksenleri çizilir. (Genelde yatay kısım-x, düşey kısım-y alınır.)
2- Koordinat eksenleri doğrultusunda hızın bileşenleri V_x, V_y diye yazılır.
3- Çarpışmadan önceki eksenler doğrultusundaki momentumları hesaplanır.(P_x=m.V_x, P_y=m.V_y)
4- Çarpışma öncesi herbir eksen doğrultusudaki momentum korunum denklemleriyle çarpışma sonrası o doğrultudaki herbir cismin hız bileşeni bulunur.
5- Esnek olan çarpışmalarda kinetik enerji korunum denklemi yazılır.

ÖRNEK :

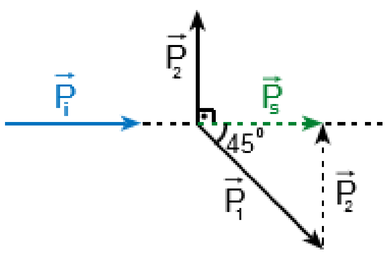
υ_0 hızıyla gitmekte olan m_1= 6 kg kütleli bir cisim, durmakta olan m_2= 4 kg kütleli bir cisme çarptığında, şekildeki durum gözleniyor. m_1 kütlesinin υ_0 hızı kaç m/s' dir?



ÇÖZÜM :

$\vec{P}_{ilk} = \vec{P}_{son} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$
$P_s = P_i = m_1.\upsilon_0 = 6.\upsilon_0$

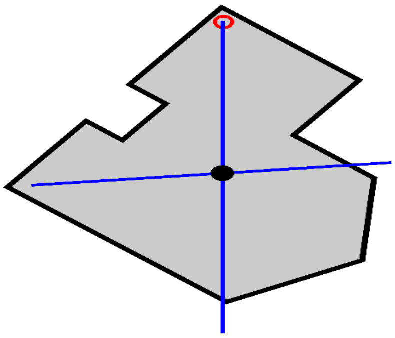
$P_1 = m_1.\upsilon_1$
$P_1 = 6.\ 10\sqrt{2}$
$P_1 = 60\sqrt{2}$ kg.m/s

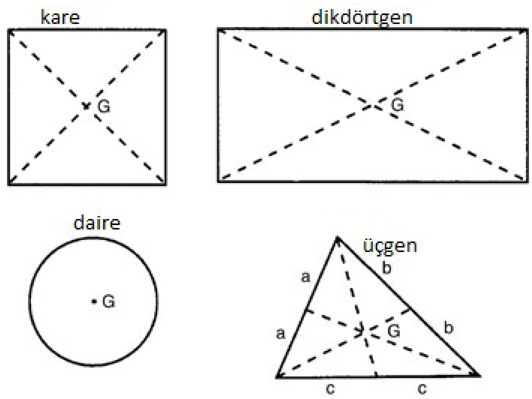


$P_2 = m_2.\upsilon_2$
$P_2 = 4.\ 15$
$P_2 = 60$ kg.m/s

$P_s^2 + P_2^2 = P_1^2$
$(6.\upsilon_0)^2 + 60^2 = (60\sqrt{2})^2$
$36.\upsilon_0^2 + 3600 = 7200 \Rightarrow \upsilon_0 = 10$ m/s

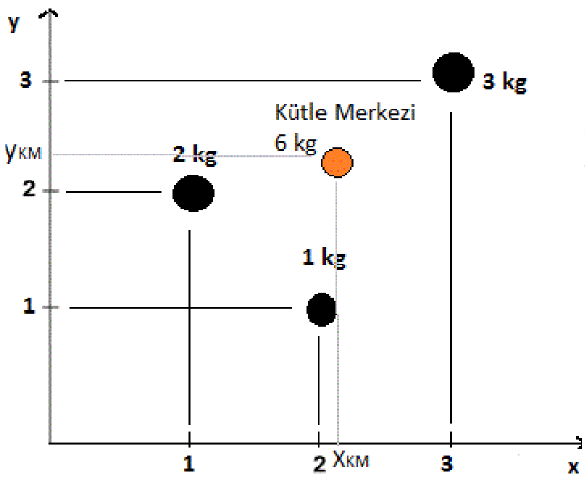
8.9 Kütle Merkezi





Hareketsiz cisimlerin kütle merkezleri bulunurken cismin önce şekline ve homojenliğine bakılıyordu. Eğer cisim homojen ve simetrik geometrideyse kütle merkezi geometrik merkez ile çakışıktır. Ama cisimlerin düzgün ve homojen olmadığı durumlarda kütle merkezi bulunurken her bir parçacığın kütle merkezine olan moment katkıları parçacığın kütlesi ile kütle merkezine olan mesafenin çarpımıdır. Bu parçacıkların oluşturduğu toplam momentleri toplarsak denge şartını elde ederiz. Yani kütle merkezine göre parçacıkların momentleri toplamı sıfırdır. Aslında toplam kütleyi oluşturan parçacıkların koordinat düzleminde herhangi bir noktaya göre oluşturdukları momentleri toplamına eşit büyüklükte moment oluşturan bir merkez vardır. Bu momenti temsil eden merkez noktası toplam kütle burda toplanmış gibidir. İşte bu noktaya kütle merkezi veya ağırlık merkezi denir.

*Orjine göre moment alınır; tüm kütlelerin orijine göre momentlerinin toplamı kütle merkezinin orjine göre momentine eşittir. Yani tüm parçacıkların ayrı ayrı kütlelerini aslında kütle merkezi temsil eder.



$$X_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$$

X_{KM}= (2kg.1m + 1kg.2 +3kg.3m)/(2kg+1kg+3kg)=2,17

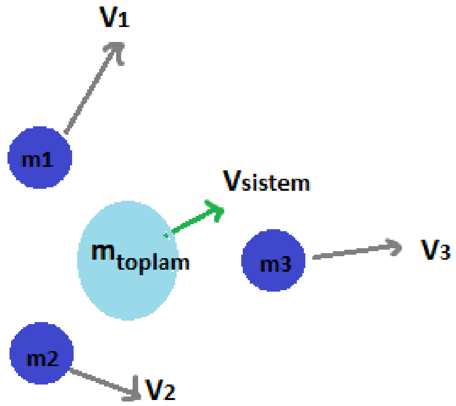
$$y_{KM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$$

Y_{KM}=(2kg.2m+1kg.1m+3kg.3m)/(2kg+1kg+3kg)=2,33

Dinamik yani hareketli cisimlerin anlık kütle merkezleri her zaman parçacıkların arasında bi yerdedir. Bu nokta o parçacıkların çarpışmadan önceki kütle merkeziyle aynıdır.

8.10 Parçacık Sisteminin Hareketi

Parçacıkların hareketi toplam kütlenin kütle merkezinin hareketidir. Kütle merkezinin momentumu toplam kütle ile kütle merkezinin hızının çarpımıdır. Buna göre momentum korunum denklemini yazarsak;



$$V_{KM} = dX_{KM}/dt = (1/M).(\text{toplam}(m_i.dr/dt)) = \text{toplam}(V_i.m_i)/M$$

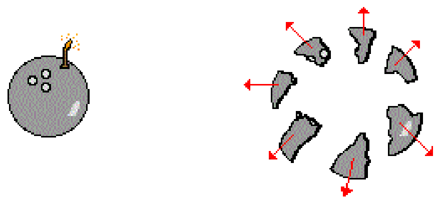
$$M.V_{KM} = P_{top}$$

Sisteme dıştan etki eden net kuvvet sistemin toplam kütlesi ile sistemin ivmesinin çarpımına eşit olduğuna göre;

$$F = m.a = m.(dV/dt) = dP \qquad F_{net} = \Delta P$$

8.11 İç Patlamalar

Başlangıçta durgun olan bir cisim patlayınca ayrılan parçalar etrafa savrulur. Bu parçalar patlamadan sonra momentuma sahip olur. Başlangıçta durgun ilk hızsız sağlam cismin momentumu sıfır ise sondurumdaki parçalarının toplam momentumları da sıfır yani ilk duruma eşit olmalıdır.



Eğer patlama oncesi cisim sıfırdan farklı bir hızla hareket ediyorsa sahip olduğu momentum patlama sonrası parçalarının da momentumlaının vektörel toplami ilk duruma eşit olur. Her iki durumda da momentum korunur.

ÖRNEK:
Bir nişancı M=3 kg kütleli bir tüfeği gevşek olarak yani tüfek geri tepebilecek şekilde tutmaktadır. Kütlesi m=5 gr. Bir mermiyi yere göre Vm=300 m/s hızla ateşliyor. Tüfeğin geri tepme sürati Vt'nin değeri nedir? Tüfeğin ve merminin son momentumu ve kinetik enerjisi nedir?

Silahlarda barut patladığı an mermi ve silaha aynı itmeyi verir. Momentum korunduğundan

$P_{ilk} = P_{son}$

$(m + M)V_{ort} = m_m\vec{V'}_m + m_s\vec{V'}_s$

V_{ort}: Barutun patlamadan önce mermi ile silahın ortak hızı

V'_m: Patlama sonrası merminin hızı

V'_s: Patlama sonrası silahın hızı

ÇÖZÜM: $P_t + P_m = 0$ (ilk durum) $= P_{son} = 0$

$0.005\text{kg} \times 300\text{m/s} + 3\text{kg} \times V_s = 0$

$V_s = 0.5$ m/s

8.12 Roket Fırlatımı

Momentum korunumu ilkesine dayanarak gerçek hayatta mühendislik uygulamalrından biri de roketlerdir. Uyduları yörüngelere taşımak için fırlatma rampalarında yerden kalkan roketler yerçekimini yenmek için momentuma sahip olması gerekir. Roket fırlatımına start verilince yakıt tankından yanarak püskürttülen maddenin momentumuna zıt yönde kalan kısım yukarı doğru hareket eder. Roketin dibinden püskürttülen madde yere bir itki sağlarken aynı zamanda roketin kütlesinde de azalmaya sebep olur ve faydalı yükü taşıyan roket ucu ivmeli hareket ederek hızlanır. Burdaki temel prensip momentumun korunumudur. Reaksiyon sonucu püskürttülen yakıt artıkları çok yüksek hıza sahiptirler. Hareketin herhangi bir anında püskürtülen artıkların momentumu roketin kalan kısmının momentumuna eşittir.

$$P_{roket} = P_{gaz}$$

$$m_{gaz} . V_{gaz} = m_{roket} . V_{roket}$$

m : Roketin içinde kalan gazla birlikte kütlesi.

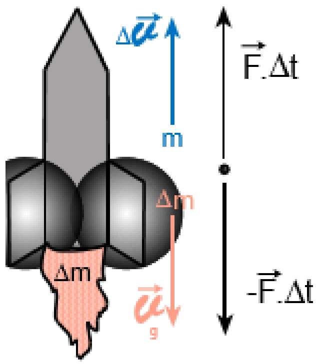
Δu : Roketin hızındaki değişme

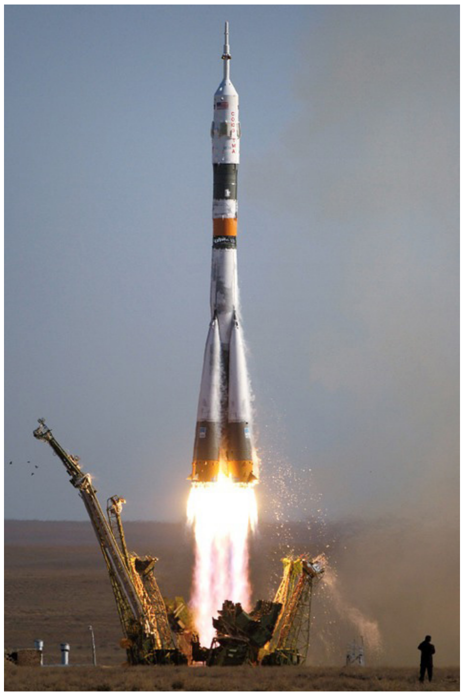
Δm : Roketten atılan gazın kütlesi.

u_g : Roketten atılan gazın hızı.

$$\Delta \vec{P}_R = \Delta \vec{P}_G$$

$$\boxed{m \,.\, \Delta \vec{u} = -\Delta m \,.\, \vec{u}_g}$$





✓ Roketlerde yakıt ve oksitleyici birlikte bulunur. Dolayısıyla roket motorlarının ateşlenebilmesi için havaya ihtiyaç duyulmaz ve roketler havanın bulunmadığı uzay boşluğunda da çalışabilir.

ÖRNEK:

Bir roketin toplam kütlesi 1500 kg'dır. Roketten 2000 m/s hızla 300 kg'lık yakıt atıldığında roket kaç m/s'lik hız kazanır?

ÇÖZÜM:

$m_{toplam} = 1500$ kg

$v_{gaz} = 2000$ m/s

$\Delta m = 300$ kg

$\Delta v = ?$

$m_{toplam} = m_{roket} + \Delta m$

$m_{roket} = 1500 - 300$

$m_{roket} = 1200$ kg

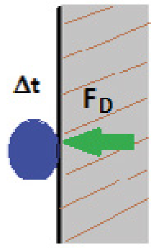
$$\Delta v = \frac{\Delta m}{m_{rok}} v_{gaz}$$

$$\Delta v = \frac{300}{1200} 2000$$

$$\Delta v = 500 \text{ m/s}$$

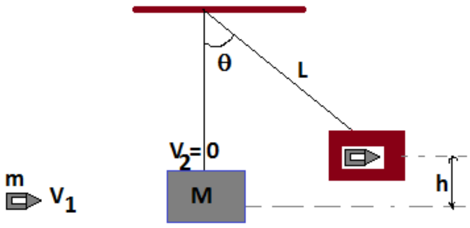
Bölüm Sonu Soruları

1- Kütlesi 5kg olan bir top 5 m/s hızla duvara çarparak ilk kinetik enerjisinin yarısını kaybederek geri dönüyor. Buna göre;
a) Topun duvara çarptıktan sonra geri dönüş hızı kaç m/s dir?
b) Duvarın topa uyguladığı itme nekadardır?
c) Topun duvar ile temas süresi 0.035s ise duvarın uygalıdığı kuvvet nekadardır?



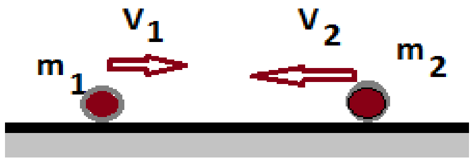
2- Sürtünmesiz yatay düzlemdeki cisimlerden ilkinin hızı 16 m/s kütlesi 3kg dır. Diğer cisminkütlesi 5kg ve hızı sıfırdır. Hareketli cisim durgun olana çarptıktan sonra kenetlenip birlikte hareket ediyorlar. Çarpışma anında sistemin enerjisinin %12,5 i kaybolduğuna göre sondurumdaki ortak hızlarını bulunuz.

3-



Şekildeki baristik sarkaç deneyinde 400m/s hıza sahip 50 gramlık mermi durgun L=1m lik iple asılı 10kg kütleli takoza saplanıp takozu en fazla h kadar yükseltebiliyor. Çarpışma anında enerji kaybının olamdığını düşünerek($g=10\ m/s^{2}$);
a) Maksimum yüksekliği, h, bulunuz.
b) Maksimum θ açısını bulunuz.

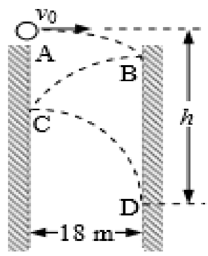
4- Şekildeki gibi $m_1= 4kg$, $m_2= 5kg$ kütleli iki cisimlerden ilkinin hızı +x yönüne doğru +24 m/s iken diğerinin hızı -20 m/s ‘dir. Cisimler merkezi esnek çarpışma yaptıklarına göre çarpışmadan sonraki son hızlarını ve çarpışma katsayısı, e’yi bulunuz.



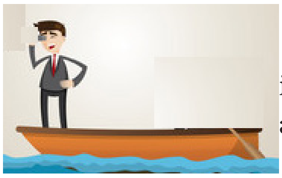
5- 3. sorudaki sistemin aynısını göz önüne alarak mermi takozu delip geçtiğini düşünün. Takoz ve mermi h/2 kadar yükseldükten sonra mermi sistemi 10 m/s hızla terk ettiğine göre ilk enerjinin yüzde kaçı çarpışma sırasında kaybolduğunu bulunuz.

6- Bir golf topu h_1 = 80cm yükseklikten serbestçe bırakılıyor. Top rijit yüzeye çarptıktan sonra h_2 = 25cm yukarıya zıplıyor. Golf topu ile yüzey arasındaki çarpışma katsayısı kaçtır? $g=10\ m/s^2$, e=?

7- Bir cisim A noktasından v_0 =36m/s hızı ile yatay doğrultuda fırlatıldıktan sonra sırasıyla B, C ve D’ye çarpıyor. Duvarlar arası mesafe 18m ve çarpışma katsayısı e = 1/3 olduğuna göre h kaç metredir?($g=10\ m/s^2$)

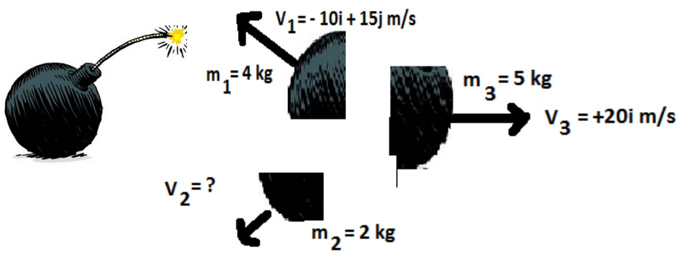


8-



Şekildeki 175kg lık kayık üzerinde bulunan 75 kg kütleli adam suya atlamak istiyor. Adam kayık yüzeyü ile 37^0 açı yapacak şekilde atlıyor. Adamın kayıktan ayrılma hızı 15 m/s olduğuna göre kayığın ters istikamette gidiş hızını bulunuz.

9- Şekildeki gibi 11kg kütleli bomba iç patlama sonucu üç parçaya ayrılıyor. Patlama sonucu 1. ve 3. parçanın hızları ile kütleleri yanda verildiği gibi ise 2. parçanın hızını iki boyutlu bileşenleri halinde bulunuz.



10-

1500 kg kütleli bir roketi uzaya fırlatınca yerçekimine karşı koyabilmesi için 450 m/s hızla gitmesi lazım. Roketin bu hıza ulaşabilmesi için ne kadar debili gaz püskürtmesi lazım?