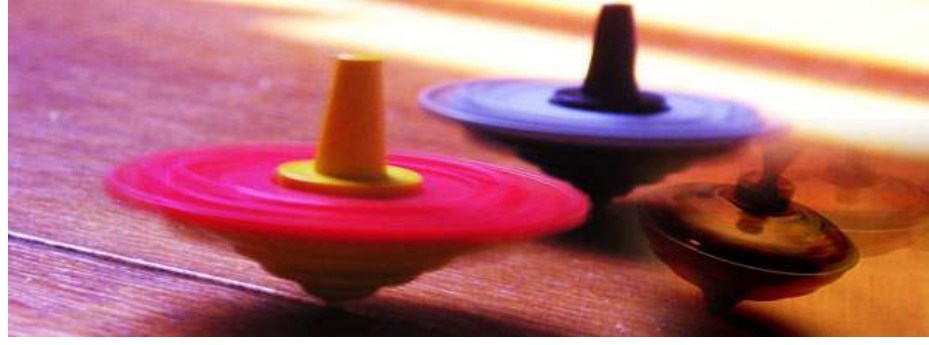


10. BÖLÜM



Döngüsel Harekette Açısal Momentum

10.1 Yuvarlanma

10.2 Katı Bir Cismin Açısal Momentumu

10.3 Net Tork ve Açısal İvmenin Açısal Momentuma Katkısı

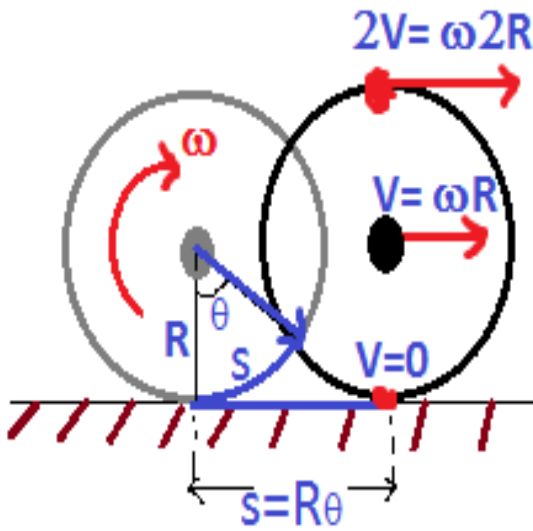
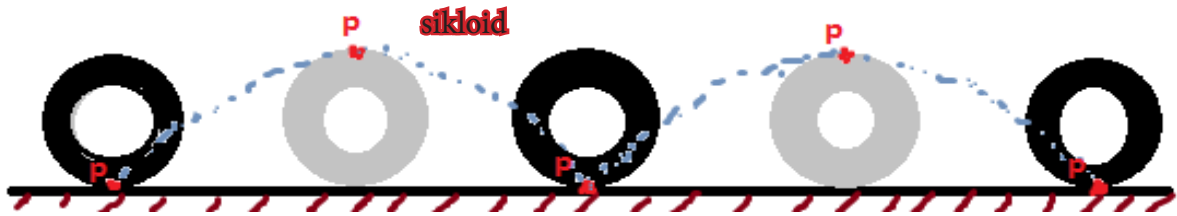
10.4 Açısal Momentum Korunumu

Bölüm Sonu Soruları

Düzgün dairesel harekette dönen cismin sabit bir dönme eksenini etrafında hareketini gerçekleştirdiğine ve bu dönme ekseninin sabit olduğunu söylemiştik. Bu konuda ise katı bir cisim dönerken aynı zamanda ötelendiğini yani dönme ekseninin de hareketli olduğuna değineceğiz.

10.1 Yuvarlanma

Bir cisim hem dönüyor hem de ötelenniyorsa bu harekete **yuvarlanma** denir. Yuvarlanma hareketinde cismin yer düzlemi ile sürtünmeden hareket edeceğini diğer bir ifadeyle kaymadan hareket ettiğini varsayacağız. Yuvarlanan bir cisim olarak araba tekerleğini ele alalım. Tekerlek yuvarlanınca üzerindeki bir noktayı incelediğimizde karmaşık bir hareket yapar. Noktanın izlediği yol çizilirse tepelere benzer bir görüntü ortaya çıkar. Bu tür harekete **sikloid hareket** denir. Yuvarlanma hareketi yapan cismin dönme eksenini kendi etrafında ω açısal hızı ile dönecek ve V doğrusal hızı ile ilerleyecektir.



$$V = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

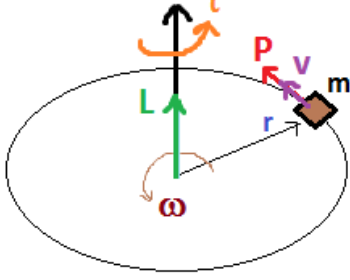
Yandaki şekilde sağa doğru kaymadan yuvarlanan bir tekerlek görülmektedir. Kayma olmadığı için tekerleğin yer ile temas noktasının hızı yerdeki bir gözlemciye göre sıfırdır. Tekerleğin merkez noktasının yere göre hızı yerden yarıçap kadar yüksek olduğundan ve tekerleğin açısal hızı da ω olduğundan $V = \omega \cdot R$ olur. Tekerleğin en üst noktası ise yerden $2R$ yükseklikte ve ω açısal hızla döndüğünden hızı $2V = \omega \cdot 2R$ olur.

*Tekerlek hem dönerek hem de ilerleyerek hareket ettiğinden sahip olacağı toplam kinetik enerji **dönme kinetik enerjisi ve öteleme kinetik enerjisi** toplamıdır.

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow V = \omega R \Rightarrow E = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega R)^2$$

10.2 Katı Bir Cismin Açısal Momentumu

Doğrusal yolda hareket eden cismin momentumunun cismin kütlesi ile hızının çarpımı olduğunu öğrenmiştik. Şimdi de aynı cisim dairesel bir pistte aynı hız ile düzgün dairesel hareket yapıyor olsun. Cisim sürekli aynı pistte dolandığı için merkezden cisme olan yarıçap vektörü birim zaman da aynı açıyı tarar. Pist üzerinde cismin çizgisel hızı sabit olduğundan doğrusal momentumu sabit kalır ve bu momentum dögüsel harekette dönme merkezine göre tork oluşturur. Doğrusal momentumun sabit dönme eksenini etrafındaki bu etkiye **açısal momentum** denir. ve 'L' ile gösterilir. $L=(m.V).r$, $L=P.r$



$$V = \omega . r$$

$$P = m . V$$

$$P = m . (\omega . r)$$

$$L = P . r$$

$$L = m . (\omega . r) . r$$

$$L = m . r^2 . \omega$$

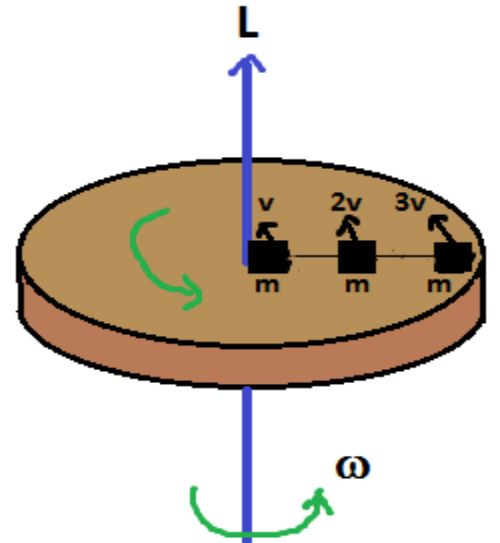
Açısal momentum çizgisel momentumun dönmesiyle oluşur. Açısal momentumun büyüklüğü;

- dönme yarıçapıyla,
- dönme hızıyla,
- cismin kütlesiyle doğru orantılıdır.

$$L=m.V.r$$

Yani açısal momentum doğrusal momentumun oluşturduğu tork kadardır.

Sürekli tekil cisimlerin açısal momentumu doğrusal momentumun oluşturacağı tork kadar iken sürekli yani dönme merkezinden itibaren kütleli cisimlerin açısal momentumu cismi oluşturan her bir parçacığın açısal momentumları toplamı kadardır. Biraz uzun bir cümle oldu galiba:). Azıcık açıklayalım bu cümleyi. Yanda görüldüğü gibi her yerinde kütlesi düzenli dağılmış homojen bir diski ele alalım. Bu disk merkezinden dik geçen bir eksen etrafında dönerken diski oluşturan eşit kütleli parçacıklardan herbiri birer tekil cisim olsun. Bu parçacıkların açısal hızları aynı fakat merkezden uzaklaştıkça çizgisel hızları artacak şekilde farklı olur. Kütleleri aynı çizgisel hızları farklı olduğu için doğrusal dolayısıyla açısal momentumları da farklı olur. Tüm diski oluşturan bu parçacıkları düşündüğümüzde diskin kendisi sürekli yani herhangi bir yerinde boşluk olmayan bir cisim olur. Diskin toplam açısal momentumu da kendisini oluşturan bütün parçacıkların açısal momentumlarının toplamı kadardır. Yani cisim ayrık ya da sürekli olsun toplam açısal momentum sistemi oluşturan parçacıkların açısal momentumlarının toplamı kadardır.



$$L = P . r$$

$$L = m . (\omega . r) . r$$

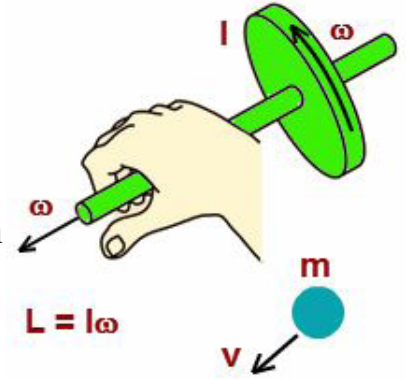
$$L = m . r^2 . \omega$$

$$I = \sum m . r^2$$

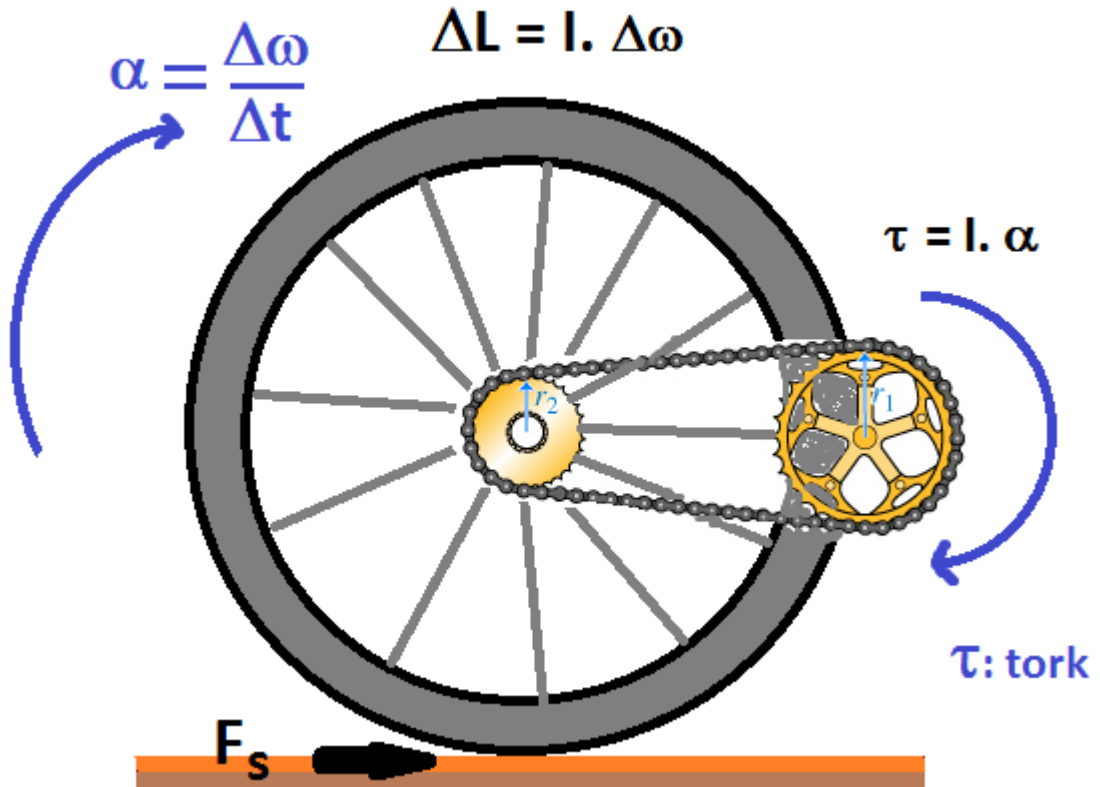
$$L = I . \omega$$

10.3 Net Tork ve Açısal İvmenin Açısal Momentuma Katkısı

Dönen katı cisimlerin açısal momentumu cismin eylemsizlik momenti ile açısal hızının çarpımı şeklinde yazılabilir. ($L = I \cdot \omega$). Açısal momentumun yönü çizgisel momentumun dönme eksenini etrafında oluşturduğu momentin yönündedir. Yani açısal momentumun yönü cismin dönme yönüne göre değişir ve sağ el kuralı ile bulunur. Dönme eksenini avuç içinde kalacak şekilde dört parmak dönme yönünde olunca baş parmak açısal momentum yönünde olur. Cisim saat yönünün tersine dönerse açısal momentum yukarı ve pozitif, saat yönünde dönerse açısal momentum aşağı ve negatif olur.



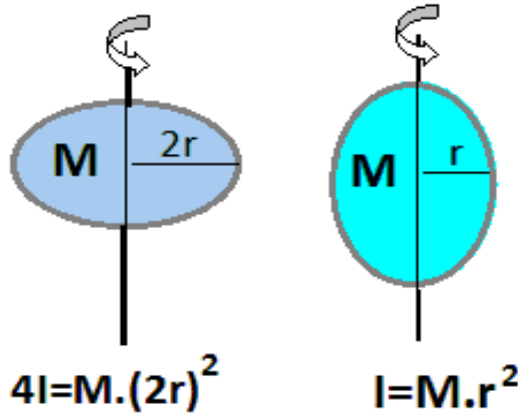
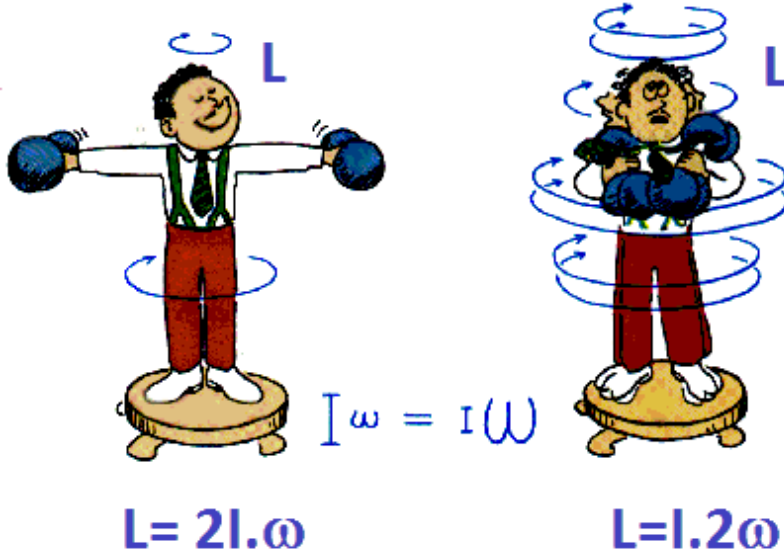
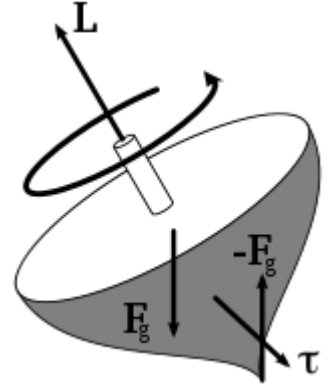
Açısal momentumdaki değişim kendisini oluşturan açısal hız ve eylemsizlik momentinin değişmesine bağlıdır. Bu değişim dıştan bir etki ile gerçekleşir. Sistemin kendi içinde yapacağı değişimlerle açısal momentum değişmez. Dıştan yapılacak etkiler cismin dönme hızını artıracak net tork ya da sistemi yavaşlatan sürtünmeler olabilir. Bu etkiler sonucunda eylemsizlik momenti sabit kalır ve açısal momentum dönme hızıyla aynı oranda değişir. Sistemin kendi içinde yapılacak etkiler cismi oluşturan alt parçacıkların yerlerinin değişmesidir ki bu da eylemsizlik momentinin değişmesidir.



10.4 Açısal Momentumun Korunumu

Eylemsizlik momentinin artışı dönme hızını yavaşlatırken azalışı dönme hızını arttırır. ($L = I \cdot \omega$). Demek ki dönme hızını arttırmak için ya dışardan net bir tork uygulanmalı ya da eylemsizlik momentini arttırmak için birşeyler yapılmalıdır.

Peki eylemsizlik momenti nasıl değiştirilir? Basit bir cevap olarak kütle miktarını değiştirmek akıllara gelebilir ama buna ek olarak kütleyi değiştirmeden kütlenin dönme eksenine göre uzaklığı değiştirilince eylemsizlik momenti değişir. Çünkü eylemsizlik momenti birim kütle ile o kütlenin eksene olan uzaklığının karesi ile çarpımıydı ($I = m \cdot r^2$). Bu durumu açıklarken en güzel örnek buz pateni yapan bir kişinin kollarını açıp ya da kapatınca dönme hızının değişmesi verilebilir. Kolları açıkken L açısal momentuma sahip olan patenci I eylemsizlik momenti ve ω dönme açısına sahip olsun. Kollarını kapatınca kütlesinin dönme mekezinine olan uzaklığı azalır dolayısıyla eylemsizlik momenti de azalır. Dışardan sisteme etki olmadığı için açısal momentum sabit kalır. Yeni durumda eylemsizlik momenti diyelim ki $I/2$ olsun. Kollarını kapatınca değişiklik sistemin içinden olduğundan yani dışardan sisteme bir etki olmadığından açısal momentum sabit kalır. Böylece dönme hızı da artarak iki katına çıkacaktır. $L = (I/2) \cdot (2\omega)$



ÖRNEK 10.1

Sürtünmesiz yatay bir masada, bir hokey topu masanın ortasından geçirilen bir ipe bağlı olarak sabit bir uzaklıkta (yarıçapta) düzgün dairesel hareket yapmaktadır. Eğer ipi çekip yarıçapı yarısına düşürsek topun açısal momentumu kaç katına çıkar?

ÇÖZÜM :

İp dönme merkezindeki bir delikten çekildiğinden tork yoktur, dolayısıyla açısal momentum korunur.

$$L_1 = I_1 \omega_1 = mR^2 \omega_1 = L_2 = I_2 \omega_2 = m(R/2)^2 \omega_2$$

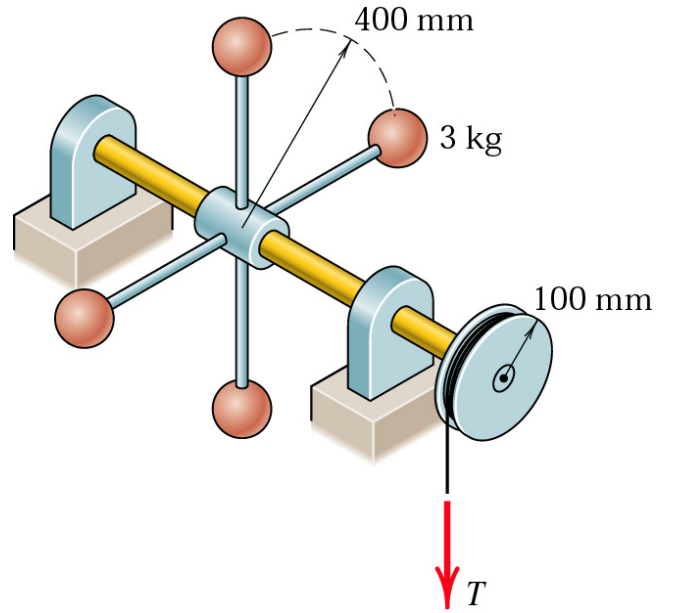
$$mR^2 \omega_1 = m(1/4)R^2 \omega_2$$

$$\omega_1 = (1/4)\omega_2$$

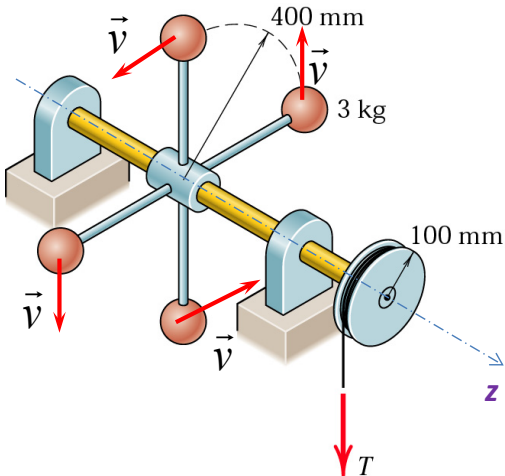
$$\omega_2 = 4\omega_1$$

ÖRNEK 10.2

Şekildeki sistem başlangıçta hareketsiz olup Δt saniye boyunca zincire uygulanan $T=20$ N'luk kuvvetin etkisi altında 150 dev/dak açısal hıza ulaşmaktadır. Δt 'yi belirleyiniz. Sürtünmeyi ve 3 kg'lık dört adet küre dışındaki kütleleri ihmal ediniz.



ÇÖZÜM :



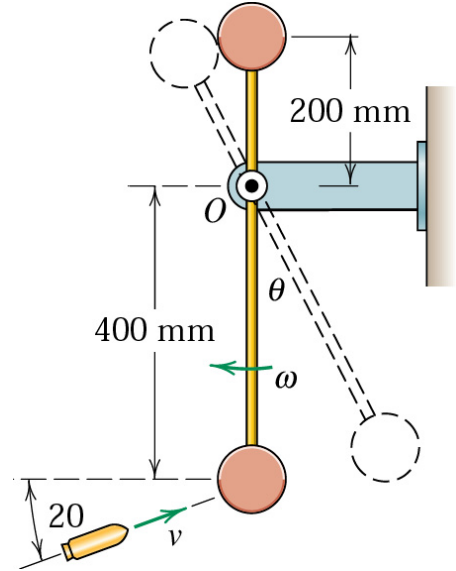
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{M}_z dt = \vec{H}_{z_2} - \vec{H}_{z_1}$$

$$\underbrace{20}_{T} \underbrace{(0.1)}_{r_{\text{makara}}} t = \underbrace{(4)}_{m_{\text{küre}}} \underbrace{(3)}_{m_{\text{küre}}} \underbrace{(0.4)}_{r_{\text{link}}} \underbrace{\left[150 \left(\frac{2\pi}{60} \right) 0.4 \right]}_{v_{\text{küre}}}$$

$$t = 15.08 \text{ s}$$

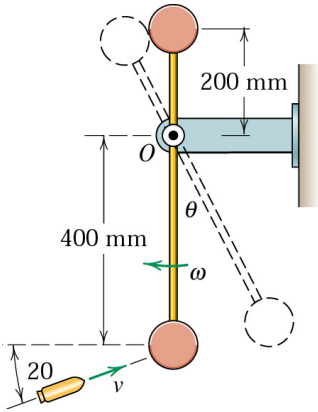
ÖRNEK 10.3

Şekildeki sarkaç iki adet 3.2 kg'lık topaklanmış kütle ve hafif rijit çubuktan oluşmaktadır. 300 m/s hızla giden 50 g kütleli mermi alttaki kütleyle çarpıp saplandığında sarkaç saat yönünde $\omega=6$ rad/s hızla salınım hareketi yapmaktadır. Çarpımdan hemen sonra sarkacın ω' açısal hızı ile sarkacın maksimum θ sapmasını hesaplayınız.



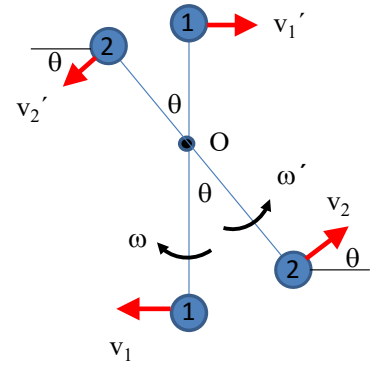
ÇÖZÜM :

Açısal momentumun korunumu ilkesine dayanarak ilk momentumu son durumdaki momentuma eşitleyeceğiz.



$$\int_0^t \vec{M}_O dt = \vec{H}_{O_2} - \vec{H}_{O_1} = 0, \quad \vec{H}_{O_1} = \vec{H}_{O_2}$$

$$\vec{M}_O = 0 \Rightarrow (\vec{r} \times m\vec{v})_1 = (\vec{r} \times m\vec{v})_2$$



$$0.050(300)(0.4 \cos 20) - 3.2(0.2)^2(6) - 3.2(0.4)^2(6) = (0.050 + 3.2)(0.4)^2 \omega' + 3.2(0.2)^2 \omega'$$

$$\omega' = 2.77 \text{ rad / s (sity)}$$

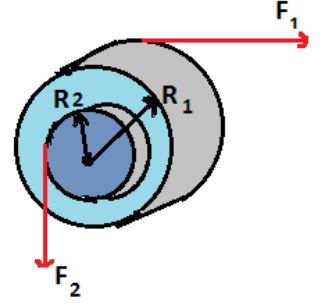
Çarpışmadan sonra enerji yaklaşımı: $T_1 + V_{g1} = T_2 + V_{g2}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(0.05 + 3.2)(0.4 \cdot 2.77)^2 + \frac{1}{2}(3.2)(0.2 \cdot 2.77)^2 + (3.2)(0.2)(9.81) - (3.2 + 0.05)(0.4)(9.81) \\ & = 0 + (3.2)(0.2)(9.81)\cos\theta - (3.2 + 0.05)(0.4)(9.81)\cos\theta \\ & \theta = 52.1^\circ \end{aligned}$$

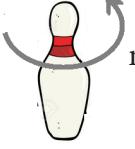
Bölüm Sonu Soruları

1- Katı bir silindir sürtünmesiz bir mil etrafında serbestçe dönebilecek şekildedir. Dış yarıçapı $R_1 = 1.5\text{m}$ olan silindir etrafına sarılı bir ipe, sağa yönelmiş $F_1 = 15\text{N}$ kuvveti uygulanıyor. $R_2 = 1\text{m}$ yarıçapı üzerindeki ipe de aşağı yönelmiş $F_2 = 20\text{N}$ kuvveti uygulanıyor.

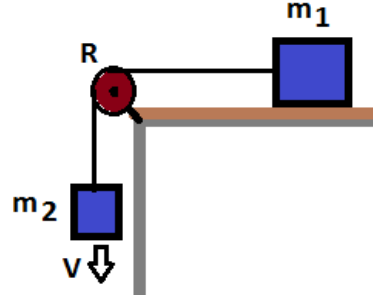
- a) O'dan geçen z eksenine göre silindire etki eden net tork nedir?
b) olduğunda net tork nedir?



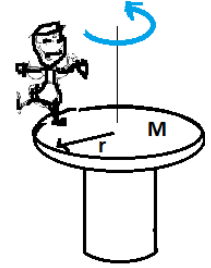
2- Şekilde görüldüğü gibi bir bowling topu 25 devir/dak'lık açısal hızla döndüğüne göre açısal momentumunun büyüklüğünü bulunuz



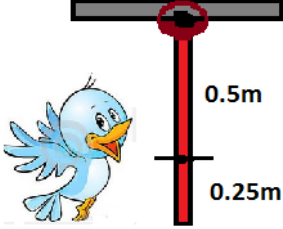
3- Şekilde görüldüğü gibi, m_1 kütleli bir kütle ile m_2 kütleli bir blok R yarıçaplı bir makaradan geçen ince bir ipe birbirine bağlıdır. Makaranın, kendi eksenine göre eylemsizlik momenti I dir. Blok, sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerinde kaymaktadır. Açısal momentum ve tork kavramlarını kullanarak, bu iki cismin doğrusal ivmesini m_1 , m_2 ve R cinsinden bulunuz.



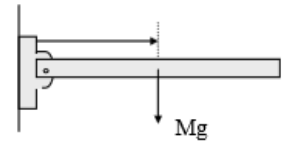
4- Dairesel disk şeklinde yatay bir tabla, sürtünmesiz, düşey bir mil etrafında yatay düzlemde dönmektedir. Tabla $M = 80\text{kg}$ 'lık bir kütle ve $R = 1.5\text{m}$ lik yarıçapa sahiptir. $m = 50\text{kg}$ kütleli bir öğrenci, dönen tablanın kenarından merkezine doğru yavaşça yürümektedir. Öğrenci, dönen tablanın kenarındayken sistemin açısal hızı 4rad/s ise, öğrencinin merkezden $r = 0.5\text{m}$ uzaklıktaki bir noktaya ulaştığındaki açısal hızı ne olur?



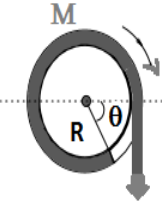
5- Kütlesi 400gr olan bir kuş 10m/s yatay olarak dikkatsizce uçmaktadır. Bir çubuğa tepesinden 25cm yukarısında çarpıyor. Düzgün çubuk 0.75m uzunluğunda 1.50kg ağırlığında ve tavanından menteşelidir. Çarpışma kuşu sersemletiyor ve yere düşüyor. Kuşun çarpışmadan hemen sonraki çubuğun sürati ne olur?



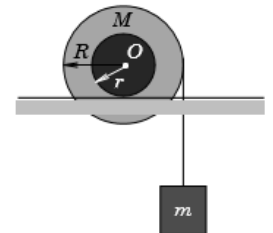
6- Uzunluğu L , kütlesi M olan düzgün bir çubuk, şelildeki gibi bir ucu etrafında sürtünmesiz dönebilecek durumdadır. Çubuk yatay durumda iken serbest bırakılıyor. Çubuğun ilk açısal ivmesi ve açısal momentumunu L, M ve g cinsinden bulunuz.



7- Kütlesi $M = 2\text{kg}$ ve yarıçapı $R = 30\text{cm}$ olan bir silindir merkezinden geçen, etrafında serbestçe dönebilen bir eksen ile duvara tutulmuştur. Silindir etrafına sarılı ipin çekilmesi sonucu döndürülüyor. İpi çeken $T = 6\text{N}$ kuvveti sabit olduğuna göre silindir 2 tam tur attığında sahip olduğu açısal momentumu bulunuz.



8- Yandaki şekilde verilen $M = 4\text{kg}$ kütleli silindirin dış yarıçapı $R = 15\text{cm}$ ve iç yarıçapı $r = 10\text{cm}$ dir. Kütlesi $m = 2\text{kg}$ olan bir cisim silindire sarılı bir ipe bağlı olarak serbest bırakılıyor. Aşağı inen cismin kinetik enerjisi 49Joule ulaştığında silindirin açısal momentumunu bulunuz.



9- Tabure ile birlikte 4rad/s açısal hızla dönen adam ile taburenin toplam eylemsizlik momenti $I = 160\text{kg.m}^2$ dir. Adam kollarını kapatınca toplam eylemsizlik momenti %75 ine azaldığına göre bu işi yapması için kaç Joule' luk enerji harcamalıdır?

