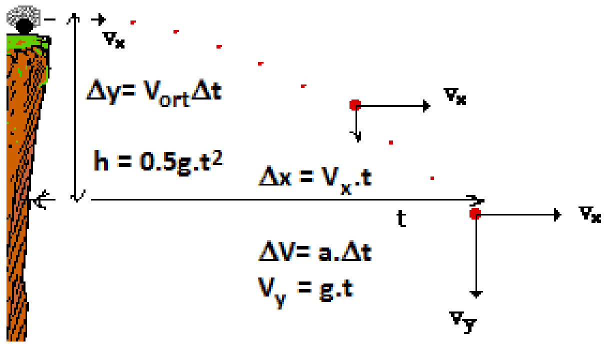
3. BÖLÜM

İki Boyutta Hareket

3.1 Atış Hareketleri

Atış hareketlerinin şimdiye kadar gördüğümüz hareketten farklı yönü iki boyutta gerçekleşebilmesidir. Her şey aynı mantıkla ilerler. Dikkat edilmesi gereken noktalardan birisi ivmemizin yer çekimi ivmesi olmasıdır. Diğer bir nokta ise iki boyutta hareketin her boyutu ayrı incelenmelidir. Yataydaki mesafe yataydaki hızla, dikeydeki mesafe dikeydeki hızla bulunmalı ve sürelerin ortak olduğu unutulmamalıdır. Ayrıca boyutları belli etmek için x bileşenlerini "i" birim vektörü, y bileşenlerini "j" birim vektörü ile göstereceğiz.



ÖRNEK 3.1

Bir araç x yönünde sabit 20m/s hızla giderken yokuş aşağı inmeye başlıyor ve x yönündeki ivmesi 2m/s^2, y yönündeki ivmesi -3m/s^2 oluyor.

a) Bu aracın ivme-hız-konum vektörlerini bulalım

b) Yokuşun yüksekliği 24m ise yokuş bittiği andaki hızın doğrultusu ve büyüklüğünü bulalım

ÇÖZÜM

a) Öncelikle araç 20m/s'lik hızla giderken hızı sabittir ve zamandan bağımsızdır. O sırada hız vektörü v=20i(m/s)'dir ve j bileşeni yoktur. Daha sonra aşağı doğru ve sağa doğru ivme kazanmıştır. İvme denklemini yazarsak **a=axi+ayj** şeklinde olacaktır. Verilen örnek için

a=2i+(-3)j deriz (Buradaki – sadece yön belirtir). Biliyoruz ki ivmenin zamana göre integrali hızı verecektir.

$v=\int adt=\int(2i-3j)dt=(2t+c_1)i+(-3t+c_2)j$ c sabitlerini bulmak için t=0 anına bakalım çünkü t=0'ken v=20i

t=0=>=(2t+c1)i+(-3t+c2)j=c1i+c2j=20i> c1=20, c2=0

v=(20+2t)i-3tj

Not: Bunu Vson=Vilk+a.t den de bulabilirdik ama mümkün olduğunca az formül kullanmaya çalışalım.

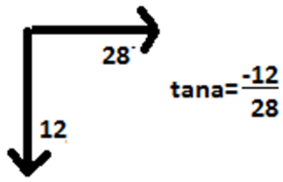
$x=\int vdt=(20t+t^2+c_3)i+(-3t^2/2+c_4)j$ ilk konum 0 ise c'ler 0 olur.

İntegral aldığımızda elimizdeki sabitler ilk hız, ilk konum gibi değerleri gösterir.

b) Yokuş aşağı doğru 24m ise konum denkleminin düşey yani j bileşeni -24 olduğunda araç yokuşun sonuna varmış olacak. Bu durumda

-24=-3t2/2 olduğunda yokuş bitmiş olacak. Buradan t=4 çıkar.

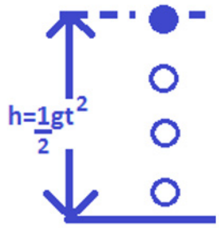
t=4 ise v=28i-12j olur.

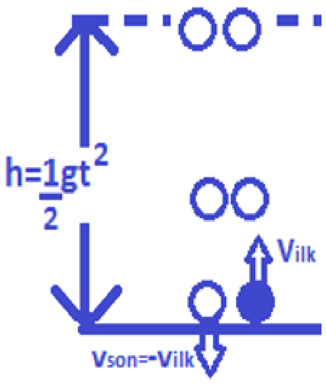


3.2 Serbest Düşme

Cisimler yerçekiminden dolayı dünyanın merkezine doğru çekilmektedir. Biz cismi istediğimiz kadar yüksek bir hızla atalım yine de cisim serbest bırakıldığında yapmak istediği hareketi yine yapacaktır. Bu yüzden belli bir hızla atmadan önce serbest bıraktığımızda nasıl bir yol izliyor onu göreceğiz.

Serbest bıraktığımız için ilk hızımız 0'dır ve aşağı doğru g ile ifade ettiğimiz yerçekimi ivmesine sahibiz. a=g ise herhangi bir andaki hızımız $v=\int gdt = gt + c$ olacaktır. V=gt. Herhangi bir anda aldığımız yol ise $x=\int vdt = \int gtdt$ =gt^2/2+c olur. Buradaki c sabiti ilk konumu belirtmektedir ilk konumu 0 alırsak x=h= 0.5gt^2 olur. Aşağı iniş süremiz t_i olsun. h= 0.5gt_i^2 olur. Yönler işin içine girerse g=-9,81 alınmalıdır. Eğer g=9,81 alırsak formüllerde –yi bizim koymamız gerekir.





Çıkış süresi $t_{çıkış}$ olmak üzere V_{ilk} hızı ile atılan bir cisim $t_ç$ sürede $x_1=V_i.t_ç$ kadar y_o alırdı. Ancak yukarıda söylediğimiz gibi cisim ne şekilde atılırsa atılsın dünyanın yerçekiminden dolayı $x_2=0.5gt^2$ ifadesine göre bir düşüş yaşayacaktır. Cisim x_1 kadar çıkarken x_2 kadar düşecek ve $h=x_1-x_2$ olacaktır. Bu durumda $\mathbf{h=V_{ilk}t_c- 0.5gt_c^2}$ şeklinde formülize ederiz. Göründüğü üzere formüle – yi biz koyduk ancak bu formülde $g=9{,}81m/s^2$ alınmaktadır. Eğer formülü daha akademik kullanmak istersek $\mathbf{h=v_{ilk}.t_c + 0.5gt_c^2}$ deriz. Bu durumda $g=-9{,}81m/s^2$ alınması gerekir. Ama – y_i formülde kullanmak olayları daha rahat kavramamızı sağlayabilir. Cisim en tepeye çıktığında duracaktır. Yani yukarı yönde hızı kalmadığı için en yüksek yer yukarı yöndeki hızının bittiği yer olacaktır.

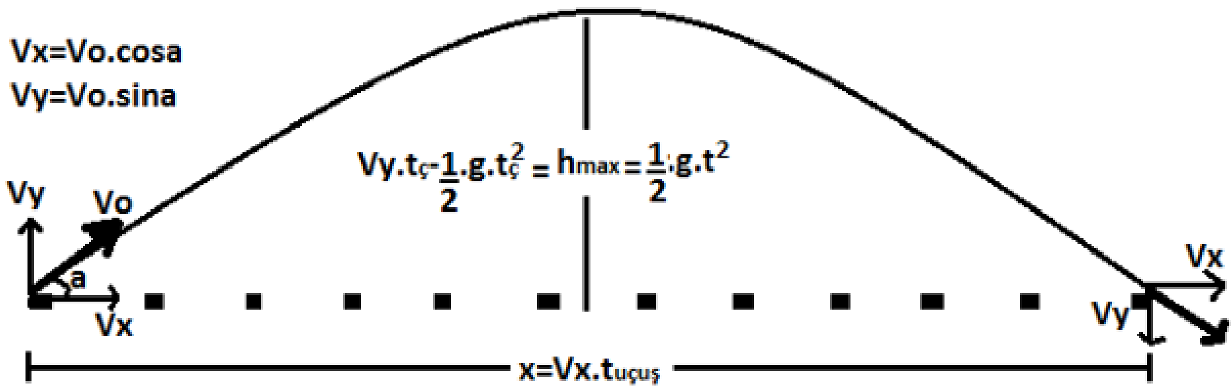
Cisim yukarı çıkarken hızı g ivmesi ile azalacak, aşağı inerken g ivmesi ile artacak h mesafesi de değişmediği için iniş ve çıkışta geçen süreler aynı süreler aynı olduğu için aynı hızada hız büyüklükleri de aynı olur. Aşağı iniş süresine t_i dersek h_m mesafemiz;

$\mathbf{h_{max}= 0.5gt_{ilk}^2}$ şeklinde ifade edilir.

h_{max}' ye yukarıda $\mathbf{h_{max}=V_0t_{cıkıs} - 0.5gt^2_{cıkıs}}$ demiştik. $\mathbf{t_{cıkıs}=t_{inis}}$ olduğuna göre $\mathbf{t_{cıkıs}=t_{inis}= t_0}$ diyelim

$\mathbf{(h_{max}= 0.5gt_0^2 \;,\; h_{max}=V_0t_0 - 0.5gt_0^2) > \; 0.5gt_0^2=V_0t_0 - \; 0.5gt_0^2 \quad => gt_0^2=V_0t_0 => t_0=V_0/g}$ elde edilir.

Aslında bakarsak başka bir taraftan bunu daha kolay elde edebiliriz. Cisim V0 hızı bitene kadar yukarı çıkacak. V_0 hızı g ivmesi ile azalacak. Bu yüzden V_0-$0.5gt_0=0$ olduğunda h_{max} seviyesine çıkılmış olacak. Burdan $t_0=V_0/g$ olur. $t_0=t_{çıkış}=t_{iniş}$ demiştik. Bu durumda toplam hava kalma süremiz $\mathbf{t_{ucus}=t_{inis} + t_{cıkıs}= 2t_0= 2V_0/g}$ olur. Şimdiye kadarki atışlarımız yukarı aşağı yöndeydi. Şimdi de eğik atışı inceleyelim.



-İki boyutlu hareketlerde ilk işimiz verilenleri bileşenlerine ayırıp soruyu tek boyuta çevirmek olmalı.

$\mathbf{V_0=V_x + V_y}$

-Diğer bir dikkat edeceğimiz hususa gelirsek aşağı yöndeki yer çekiminden başka etkiyen kuvvet yoktur.
Bu durumda yatayda hız değişmeyecektir.

Yukarı yöndeki V_y hızımız g' lik ivme ile azalacak ve 0 olduğunda maximum yüksekliğe cisim çıkmış olacaktır.

$\mathbf{V_y-gt_{cıkıs}=0 => t_{cıkıs}=V_y/g}$ şeklinde çıkış süresini buluruz.

Maximum yüksekliği istersek $t_{çıkış}=t_{iniş}$ => $h= 0.5gt_i^2$ şeklinde bulur, istersek de $V_y.t_{çıkış}$ - $0.5gt_ç^2$' den elde edebiliriz. İkinci formül karışık dursa da atışın simetrik olmadığı durumlarda hesaplamaları burdan yapabiliriz.

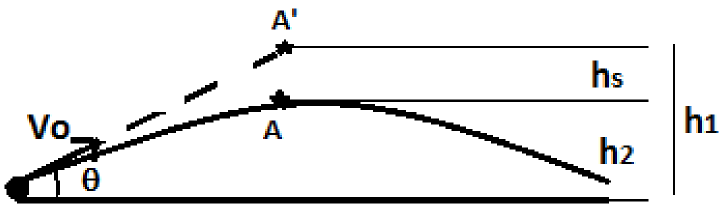
$h_m= 0.5gt_i^2$' yi daha da basitleştirmek için $t_i=t_ç=V_y/g$ ise;
$\mathbf{h_m= gV_y^2/g^2=V_y^2/2g}$ olur. Süreyi bulmadan mesafeye geçeriz.

$\mathbf{V_y^2=2gh_m}$ => Burda aslında zamansız hız formülü gelmektedir. İlk hızı V_i son hızı V_s olan bir hareketlinin zamansız hız denklemi $\mathbf{V_s^2 - V_i^2 = 2ax}$ şeklindedir. Bu yüzden çıkılan yol direk $\mathbf{0^2-V_y^2 = -2gh}$ 'tır.

Yatayda alınan yol $\mathbf{X=V_x . t_{ucus}}$ şeklinde bulunabilir.

Bunun yanında $\mathbf{X = V_x . t_{ucus} = V_x . 2t_ç = 2V_x . V_y / g}$ şeklinde ifade edilebilir.

Yataydaki alınan mesafenin en fazla olmasını istiyorsak cismi hangi açıyla almalıyız soruları olabilir. Burda düşünmemiz gereken şey kesinlikle türevdir. Peki türevi buraya nasıl dahil edeceğiz öncelikle bilinmelidir ki en fazla, en az sorularında türev direk aklımıza gelmelidir. Çünkü en fazla veya en az sorularında sorulan değişkenin grafiğini düşündüğümüz zaman grafikte en fazla dediğimiz yerde bir tepe, en az dediğimiz yerde bir çukur noktası alıncaktır . Tepe noktasında grafik bir anlık sabitlenir düz gider artma azalma yaşamaz. Aynı şekilde çukur noktasında da bunlar olacaktır. Değişimin olmaması, türevin 0 olması demek. Yani biz X' in türevini alıp 0' a eşitlediğimizde bulduğumuz değer bize tepe noktasını verecektir.



$X=2V_x.V_y/g$ bulmuştuk. X' in maximum değeri için θ ne olur onu merak ediyoruz. Bu yüzden denklemi θ' ya bağlı yazmalıyız.
$\tan(\theta) = V_y/V_x$ => $V_y=V_x\tan(\theta)$
$\mathbf{X=2V_x^2.\tan(\theta)/g}$ olur. Ancak bu denklemde atladığımız bir nokta var o da en başta yaptığımız kolaylık olsun diye $V_x=V_0\cos\theta$, $V_y = V_0\sin\theta$ dememiz. Yani V_x 'in içinde θ var. O yüzden
$X=2V_xV_y/g=2V_0\cos(\theta).V_y\sin(\theta)/g$ şeklinde yazmalıyız.
Burda $2\sin(\theta).\cos(\theta)=\sin(2\theta)$ trigonometrik dönüşümünü kullanarak
$X=V_0\sin(2\theta)/g$ deriz. Artık türevini alıp sıfıra eşitleyebiliriz.

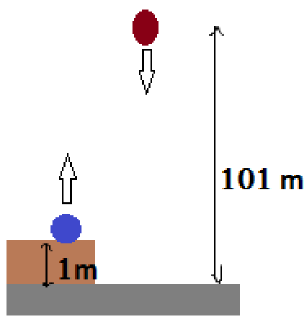
$\mathbf{(V_0\sin(2\theta)/g)' = V_0.\cos(2\theta)/g = 0 \Rightarrow 2\theta = \theta\pi/2}$ buradan θ'ları sadeleştirince $\pi/2=\mathbf{45}$ bulunur.

Yani buradan anlıyoruz ki soruya göre değişmeyen bir değere sahibiz.

Cisim t_A sürede A noktasında olsun. Normalde cisim A noktasına gitmek istiyordu. $V_0\sin(\theta)$ yukarı bileşeni onu h_1 yüksekliğine çıkaracaktı.
$h_1=V_0\sin(\theta)t_A$ dır. Ancak cisim serbest düşme yaparak $h_s= 0.5gt_A^2$ kadar aşağı inmiş ve h_2 yüksekliğinden geçmiştir. $h_1-h_s=h_2$ => $\mathbf{V_0\sin(\theta).t_A - gt_A^2=h_2}$

ÖRNEK 3.2

Bir cisim yerden 1 metre yükseklikteten 25 m/s hızla düşey yukarı atıldığı anda ikinci bir cisim aynı doğrultuda 101 m yüksklikten serbest bırakılıyor. Buna göre;
a) Bu iki cisim kaç saniye sonra çarpışır?
b) Çarpışma yerden kaç metre yükseklikte olur?

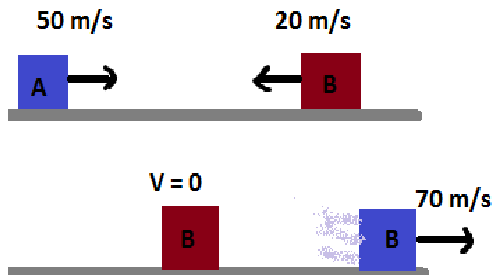


ÇÖZÜM

a) Çarpışma durumuna kadar birincinin alacağı yol x, ikincinin y olsun.
$x+y=101=0.5gt^2+V_o.t-0.5gt^2+h$ burada $0.5gt^2$ ler birbiri götürünce $V_o.t+ h=101$ olur.
$25.t+1=101$, t=4 saniye

b) $y= V_o.t-0.5gt^2 +h = 25.4 - (0,5).(9,81).(4^2)+1 = 22.52$ metre bulunur.

3.3 Bağıl Hız



Daha önceki konularda hız konusunu işlemiştik. Ancak işlediğimiz konularda referans noktasından sadece bir doğrultu üzerinde hareket eden cisimleri ele aldık. Bu başlık altında da referans noktasının konumunun da değişeceğini inceleyeceğiz. Nasıl ki aynı turnuva grubunda yarışan iki futbol takımınından 28 puana sahip A takımı ve 35 puana sahip B takımının göreceli puanından bahsediyorsak cisimlerin hızlarını da bağıl hız olarak ifade ederiz. Burada B'nin A'ya göre skoru 7 dir.

Düşünün ki belirli bir konumda hareketsiz duruyorsunuz ve önünüzden 50 m/s hızla bir araç geçiyor. O anda hareketsiz olduğunuz için giden araçla aranızdaki mesafe tamamen aracın hızından kaynaklanıyor. Ancak sizin de araca ters istikamette 20 m/s hızla gittiğinizi düşünün. Aracın tam yanınızdan geçtiğini düşünün. Bundan sonraki arada kalan mesafe birim zamanda daha çok artacaktır. Bir önceki durumda saniye başına 50m iken şimdi 50+20= 70m olacaktır. İşte bağıl hızı bu noktada şöyle tarif ediyoruz;

Burada anaızda açılan mesafe saniye başına 70m ve siz giden araca baktığınızda kendinizi duruyor kabul ediyorsunuz ve aracın size göre hızı bağıl hız oluyor. **Bagıl hız**, gözlemcinin kendisini hareketin durgun referans noktası kabul edip gözlenen cisme baktığında ölçtüğü hızdır.

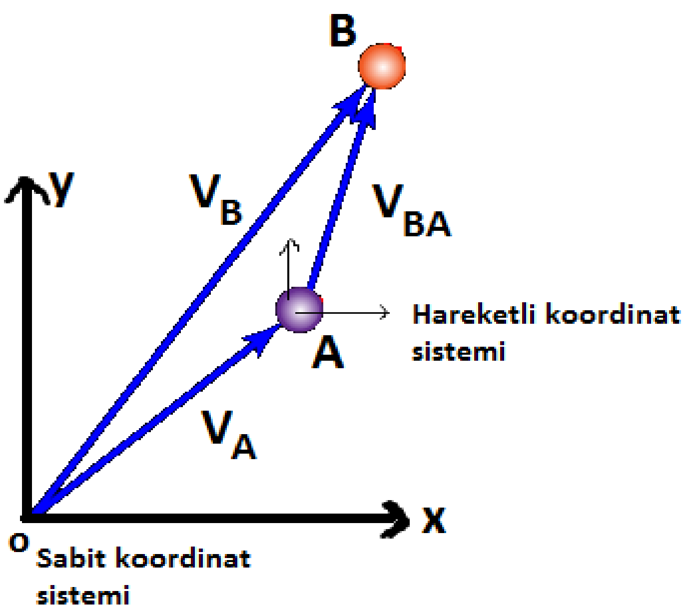
$$V_{bağıl} = V_{gözlenen} - V_{gözlemci}$$

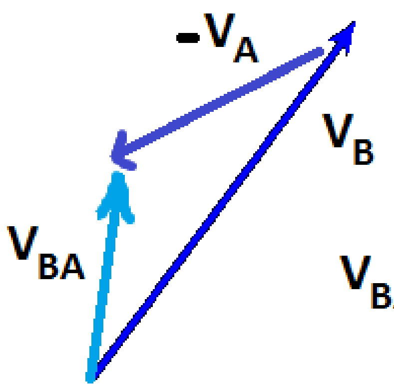
$$V_{KL} = V_L - V_K$$

L'nin K'ya göre hızı — L'nin hızı — K'nın hızı

* Bağıl hareket sorularında genellikle gözlenen ve gözlemcinin hangisinden hangisine bakmak gerektiği karıştırılır.

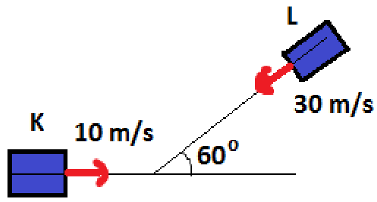
Unutmayalım ki bağıl hızı bulmak için gözlenenden gözlemciyi çıkarmalıyız. Bağıl hız vektörel olduğu için, işlemler vektörlerin özelliklerine göre yapılır.Bağıntıya göre, bağıl hız bulunurken, gözlediğimiz cismin hızı aynen alınıp, gözlemcinin hızı ters çevrilerek vektörel olarak toplanır. Bu toplam vektör bağıl hızı verir. Ya da bağıl hız bulunurken, gözlenen cisim hız vektörü ile gözlemcinin hız vektörü çakıştırılır. Gözlemcinin hız vektörünün ucundan, gözlenenin hız vektörünün ucuna çizilen vektör bağıl hızı verir.





$$V_{BA} = V_B - V_A$$

ÖRNEK 3.3



Şekildeki gibi aralarında 60^0 lik açı bulunan farklı doğrultudaki yolda olan K aracının şöförü L aracını hangi hızla kendisine yaklaşıyormuş gibi görür?

ÇÖZÜM

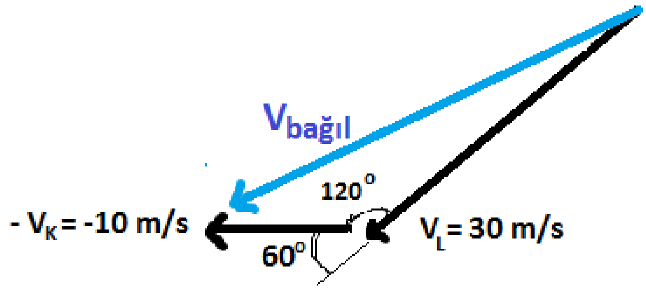
Bağıl hız formölünü kullanmadan önce şunu bilmemeiz gerekir ki: K aracı gözlemci L aracı da gözenendir.

$V_B = V_{KL} = V_L - V_K$ olur.

Üçgende kosinüs teoremi kullanarak:

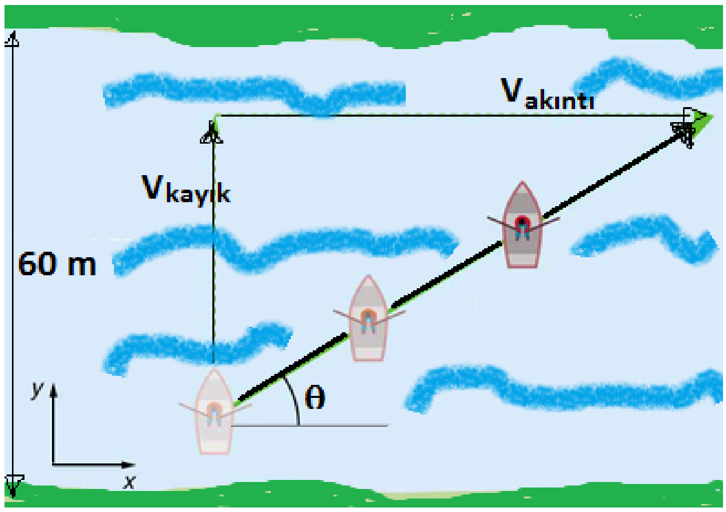
$V_B^{\,2} = (V_L)^2 + (-V_K)^2 - 2V_L . V_K . \cos(120)$

$V_B = 36{,}056$ m/s bulunur.



3.4 Nehir Problemleri

Daha önce nehir problemleri ile karşılaşmışsınızdır. Bu tarz problemlerde önemli olan nokta nehir suyunun akıntı hızıdır. Her soruda akıntı hızının etkisi iyi düşünülmelidir.



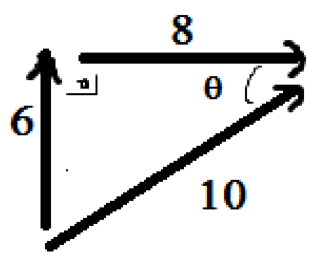
ÖRNEK 3.2

Bir nehirde kayıkçı insanları karşıya geçirmektedir. Kayıkçının suya göre hızı 6 m/dk , akıntı hızı ise 8 m/dk dir. Nehrin genişliği 60m olduuna göre;

a) Kayıkçı karşı kıyıya varıncaya kadar kaç metre yol alır?

b) Kayıkçının yerdeki bir gözlemciye göre hızı ne kadardır?

ÇÖZÜM



Öncelikle suya göre hız kavramını tartışalım suya göre hız kayıkçının akıntı hızından etkilenmiş hali midir yoksa etkilenmemiş hali mi? Eğer suya göre hızı akıntı hızından etkilenmiş hali olarak düşünürsek şunu anlamış oluruz. Biz soruda neye göre derse gözlemci hızından o hızı çıkarıyoruz. Yai suyun akıntı hızı çıkarılmıştır. Kayığın suya göre hızı demek aslında kendi öz hızı demektir. Bu hız 6 m/dk ise 60m lik nehir genişliğini (60m) / (6m/dk) = 10dk da alacaktır. Bü süreçte kyığa akıntı da etki edecektir.

a) Akıntı kayığı bu süreçte (8m/dk).(10dk)= 80m sürükleyecek ve kayık karşı kıyıya varana kadar $100\text{m} = (60^2 + 80^2)^{1/2}$ yol alacaktır.

b) Yerden bakan bir gözlemci kayığı hem karşı kıyıya hem de akıntı yönüne gidiyormuş gibi görecektir. Bu hız bağıl hızdır. Toplam alınan yol 100m yi geçen süreye bölersek 100m/10dk= 10m/dk olarak buluruz.

Bölüm Sonu Soruları

1- Yatayla 37^0 lik açı yapacak şekilde yerden atılan bir taşın ilk hızı V_0 =10 m/s' dir. Bu taşın hareketini iki boyutta çizerek taşın havada kalma süresini: $t_{uçuş}$, çıkabileceği maksimum yüksekliği : h_{max}, menzilini: x_{yatay} bulunuz.($t_{uçuş}$, h_{max}, x_{yatay} = ?)

2- Rüzgarın doğuya doğru 40km/h hızla estiği bir günde yerden 1 km yükseklikte 150 km/h sabit hızlı bir helikopter güneye doğru uçuyor. Helikopterden serbest bırakılan bir cismin yere çarpmadan hemen önceki hızı kaç m/s olur? (Rüzgarın sadece cismin yönünü değiştireceğini dikkate alınız)

3- Bir cisim V_x= +20m/s ve V_y= -15m/s bileşenli ilk hızla t=0 anında başlangıç noktasında harekete geçmektedir. Cisim sadece x doğrultusunda a_x=+4 m/s^2 ivme ile xy düzleminde hızlanıyor. Cismin t=5s deki hızının büyüklüğünü ve x ekseni ile yaptığı açıyı bulunuz.

4- Askeri kargo uçağı bir grup askere yardım kumanyası bırakacaktır. Uçağın yerden yüksekliği 100m ve yatay hızı 40 m/s olduğuna göre paketin istenilen noktaya düşürülmesi için paket hedef noktasından önce bırakılmalıdır. Uçağın paketi bırakmaya başladığı yer ile asker grubu arasındaki bu yatay mesafe kaç m/s dir?

5- Akıntı hızının doğuya doğru V_a = 5 km/h olduğu nehirde bir tekne kuzeydeki karşı kıyıya varmak istiyor. Teknenin suya göre hızı 10km/h ise yerden bakan bir gözlemciye göre hızını ve nehre göre açısını bulunuz.

6- Bir tüfekle yatay olarak 30 m uzaklıktaki bir hedefe nişan alınıyor. Mermi hedeften 8 cm aşağı saplandığına göre merminin namludan çıkış hızı nedir?

7- Doğuya doğru 4m/s hızla giden A aracının önündeki kavşağa kuzayden gelen B aracının hızı 3m/s dir. Buna göre B aracının hızı A aracındaki şöfüre göre hangi yönde kaç m/s dir?

8- Bir merminin namludan çıkış hızı 350 m/s dir. Bu mermi sabit hızla ilerlerken yatay doğrultuda ve 200m ilerideki bir hedefi vurabilmesi için namlu ile yatay konum arasındaki açı ne olmalıdır?

9- Doğuya 60 km/h' lik hızla giden bir tren kuzey-doğu doğrultusundaki bir yol üzerinden üstgeçit ile geçiyor. Tren yolu ile otoyol arasındaki açı 45^0 dir. A otomobili 45 km/saat'lik hızla yol boyunca üstgeçite doğru ilerlediğine göre trenin otomobile göre hızı nedir?

10- Akıntı hızının 4 m/s olan bir ırmakta, bir kayık akıntıya dik doğrultuda ve 6 m/s'lik hızla hareket başlıyor. Irmağın genişliği 76 m olduğuna göre, kayık kaç saniye sonra ve yatayda nekadar kayarak karşı kıyıya varır?