Лабораторная работа № 4
«Численное решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности»

Срок сдачи: 16.12.2022

На сетке узлов $\bar{\omega}_{h\tau}$ найти численное решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности с использованием:

- явной разностной схемы с $\tau = h = 0.1$ и $h = 0.1$, $\tau = h^2/2$;
- чисто неявной разностной схемы с $\tau = h = 0.1$;
- разностной схемы Кранка-Николсон с $\tau = h = 0.1$.

Выписать соответствующие разностные схемы, указать их порядок аппроксимации, указать являются ли схемы абсолютно устойчивыми по начальным данным. Найти $\max\limits_{i,j}\left|y_i^j - u(x_i, t_j)\right|$. Построить графики, демонстрирующие устойчивое и неустойчивое поведение явной разностной схемы.

Варианты заданий

№	Тестовая задача	Точное решение
1	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x - t\right), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = \cos x, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = \cos t, & 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = \cos(t+1), & 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = \cos(x+t)$
2	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x + t^2)e^{-xt}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = 1, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 1, & 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = e^{-t}, & 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = e^{-xt}$
3	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x + t\right), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = \sin x, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = \sin t, & 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = \sin(t+1), & 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = \sin(x+t)$
4	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t - 12x^2, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = x^4, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = t^2, & 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = t^2 + 1, & 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = x^4 + t^2$

5	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (2+3t^2), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = x^2, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = -t^3, \quad 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = 1 - t^3, \quad 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = x^2 - t^3$
6	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2 \sin xt + x \cos xt, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = \sin t, \quad 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = \sin xt$
7	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3e^{-t} \sin 2x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = \sin 2x, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = e^{-t} \sin 2, \quad 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = e^{-t} \sin 2x$
8	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3e^{-t} \cos 2x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = \cos 2x, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = e^{-t}, \quad 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = e^{-t} \cos 2, \quad 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = e^{-t} \cos 2x$
9	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x(\cos t + \sin t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u\left(x,0\right) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = \sin t, \quad 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = \sin t \cos 1, \quad 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = \sin t \cos x$
10	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{-t} \sin(x+t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = \cos x, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = e^{-t} \cos t, \quad 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = e^{-t} \cos(1+t), \quad 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = e^{-t} \cos(x+t)$
11	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{x^2+2t+3}{(t+1)^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.5, \\ u(x,0) = x^2 + 1, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = (t+1)^{-1}, \quad 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = 2(t+1)^{-1}, \quad 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = \dfrac{x^2+1}{t+1}$

12	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2e^{x-t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.5, \\ u(x,0) = e^x, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = e^{-t}, \quad 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = e^{1-t}, \quad 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = e^{x-t}$
13	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{x+t+2}{(x+t+1)^2}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le 0.5, \\ u(x,0) = \ln(x+1), \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = \ln(t+1), \quad 0 \le t \le 0.5, \\ u(1,t) = \ln(t+2), \quad 0 \le t \le 0.5. \end{cases}$	$u(x,t) = \ln(x+t+1).$

По результатам лабораторной работы **оформляется отчет**. Он должен содержать:
- титульный лист;
- постановку задачи;
- краткие теоретические сведения;
- результаты;
- выводы;
- листинг программы с комментариями.

Отчет необходимо отправить на *yvolotovskaya@gmail.com*. **Тема письма**: «ЛР4 3к 1гр Фамилия».