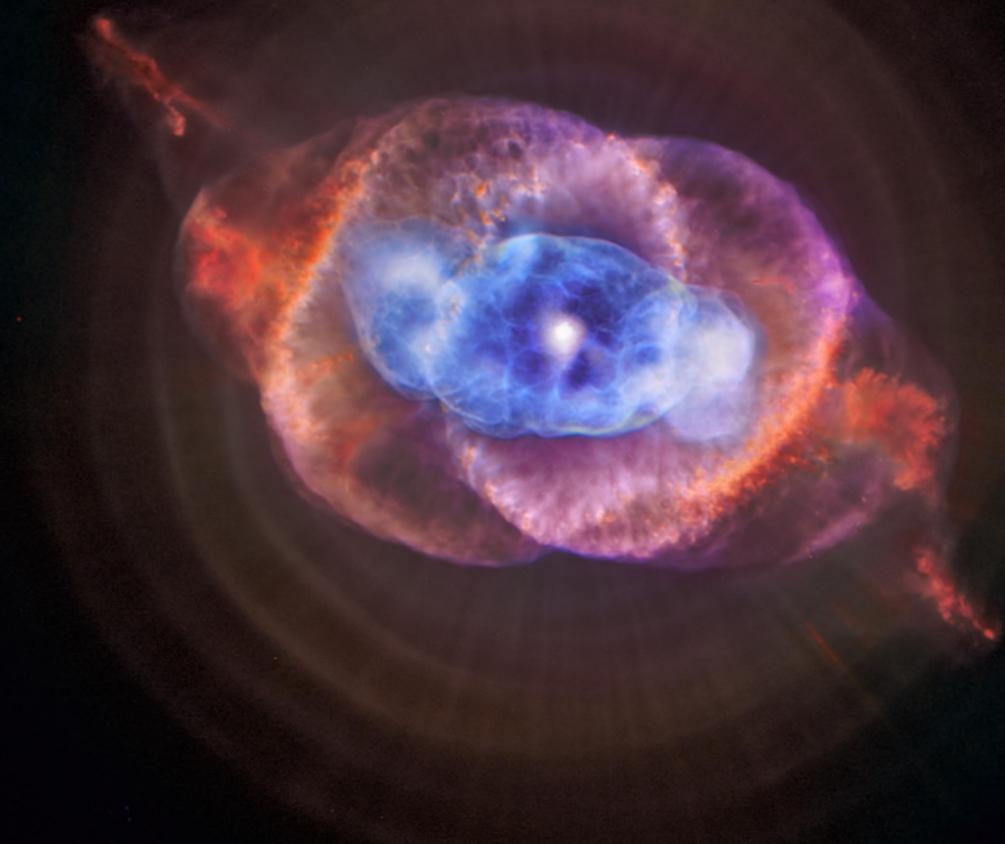


# Dinámica de gases



**EPIC 1**

Wladimir E. Banda Barragán

2021

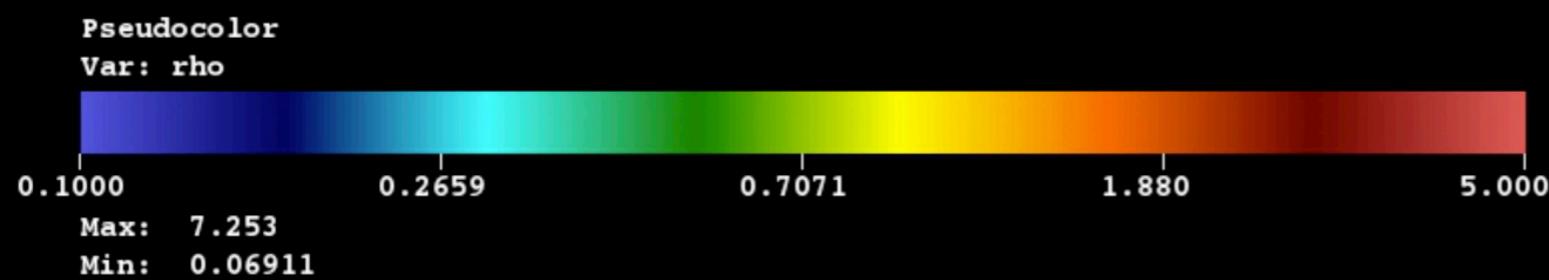
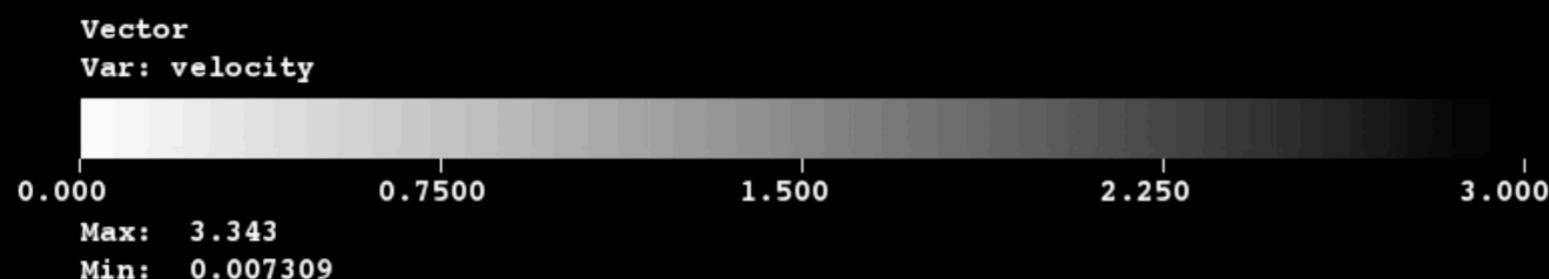
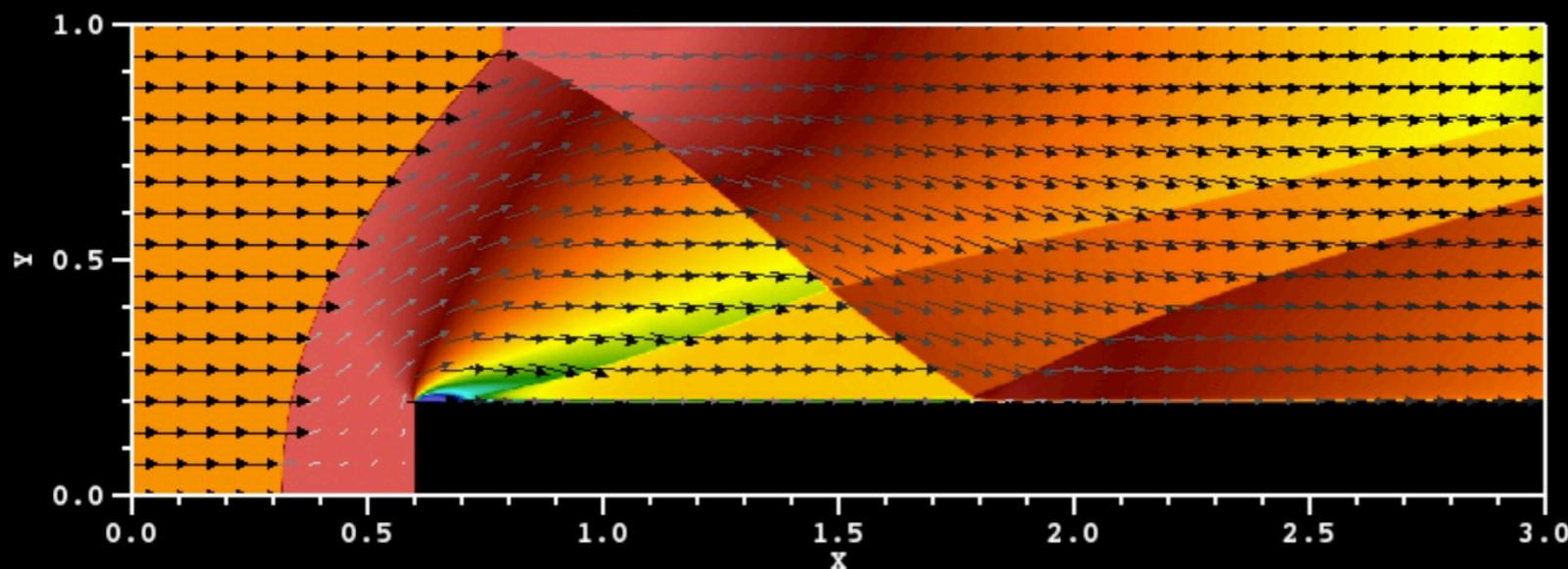
# Hidrodinámica

¿Qué estudia la hidrodinámica?



Fluidos

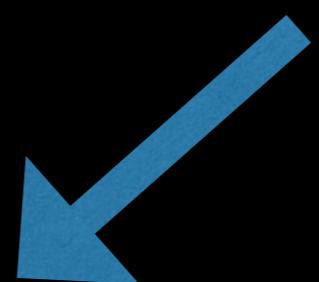
Movimiento



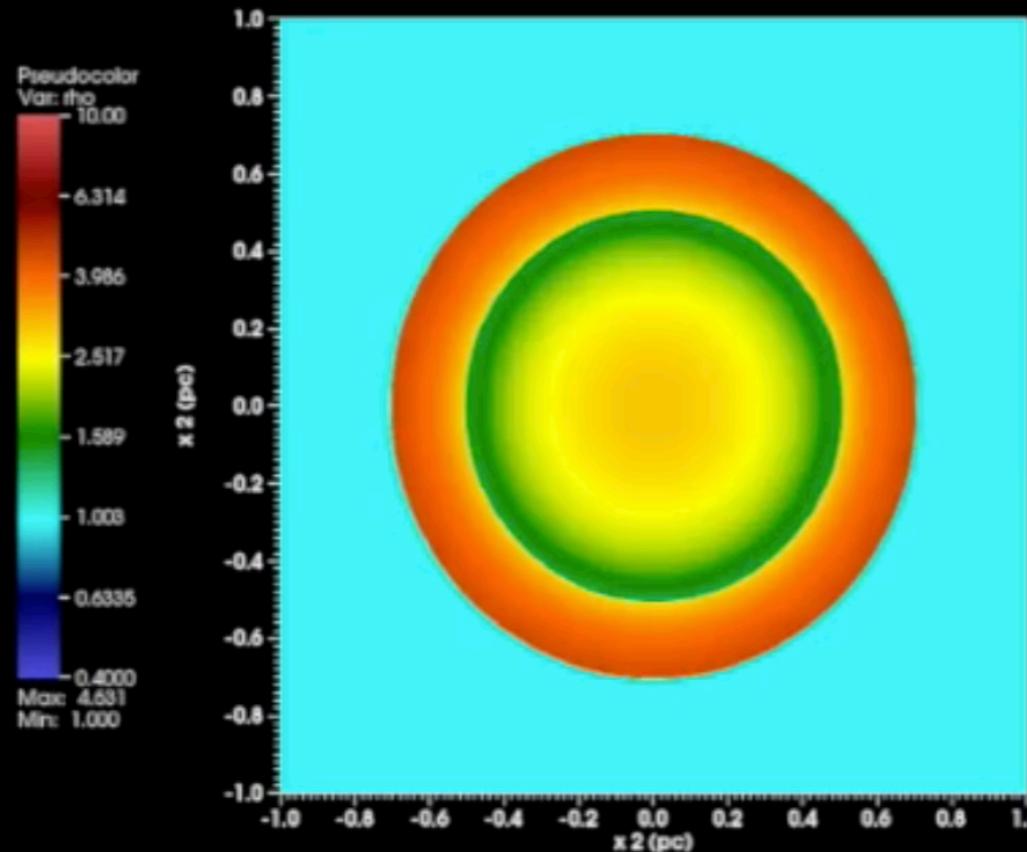
Túnel de viento

# Magneto-hidrodinámica

¿Qué estudia la magneto-hidrodinámica?



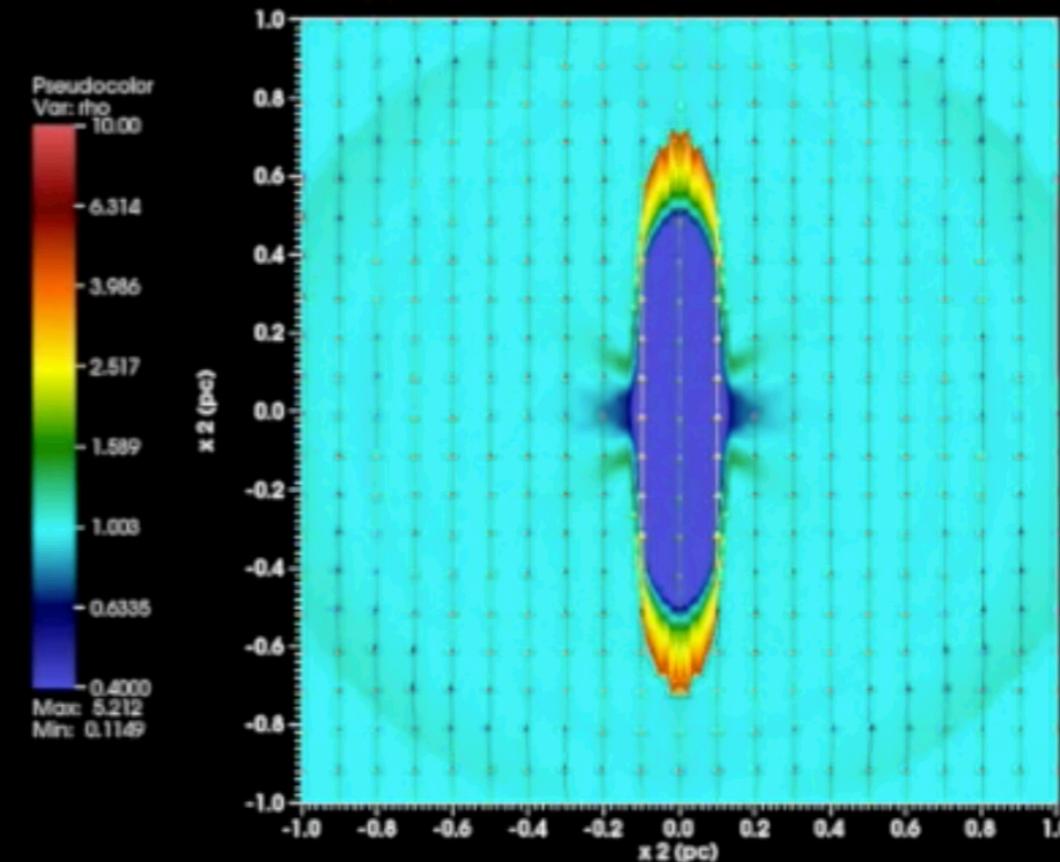
Campos magnéticos



Fluidos



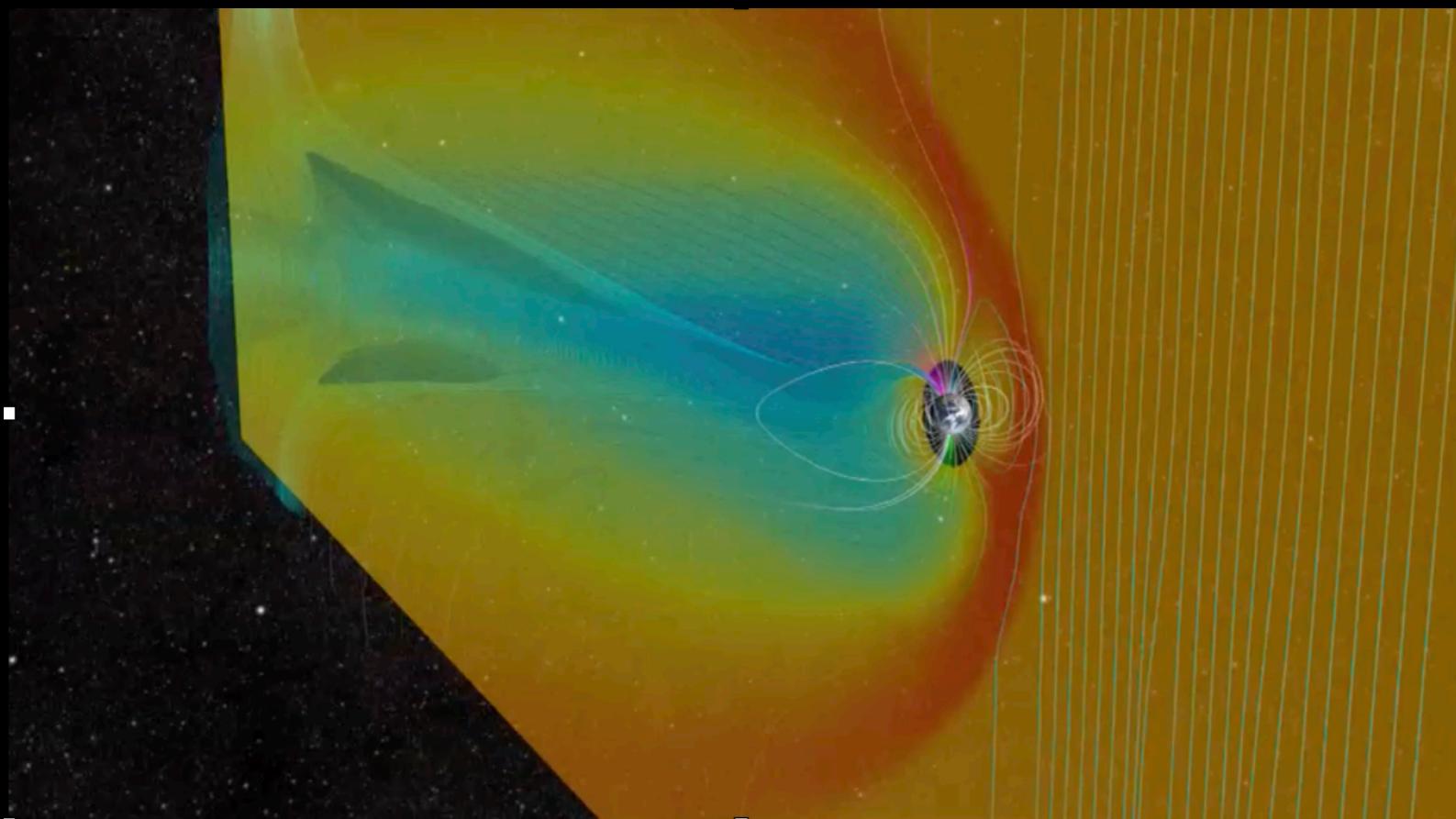
Movimiento



Entonces...

Magneto-hidrodinámica (MHD) del Medio Interestelar (ISM)

**Es el estudio de la dinámica (i.e. movimiento) de plasmas en la presencia de campos magnéticos.**



Bow shock

Reconección  
magnética

# MODELIZACIÓN

Usamos el método científico...

Observamos un fenómeno



Modelamos teóricamente



Comparamos

Predecimos con modelos teóricos

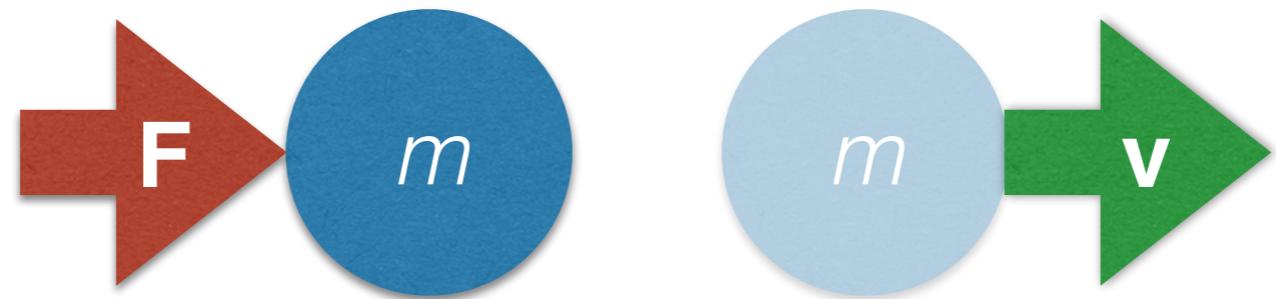


Buscamos el fenómeno



Comparamos

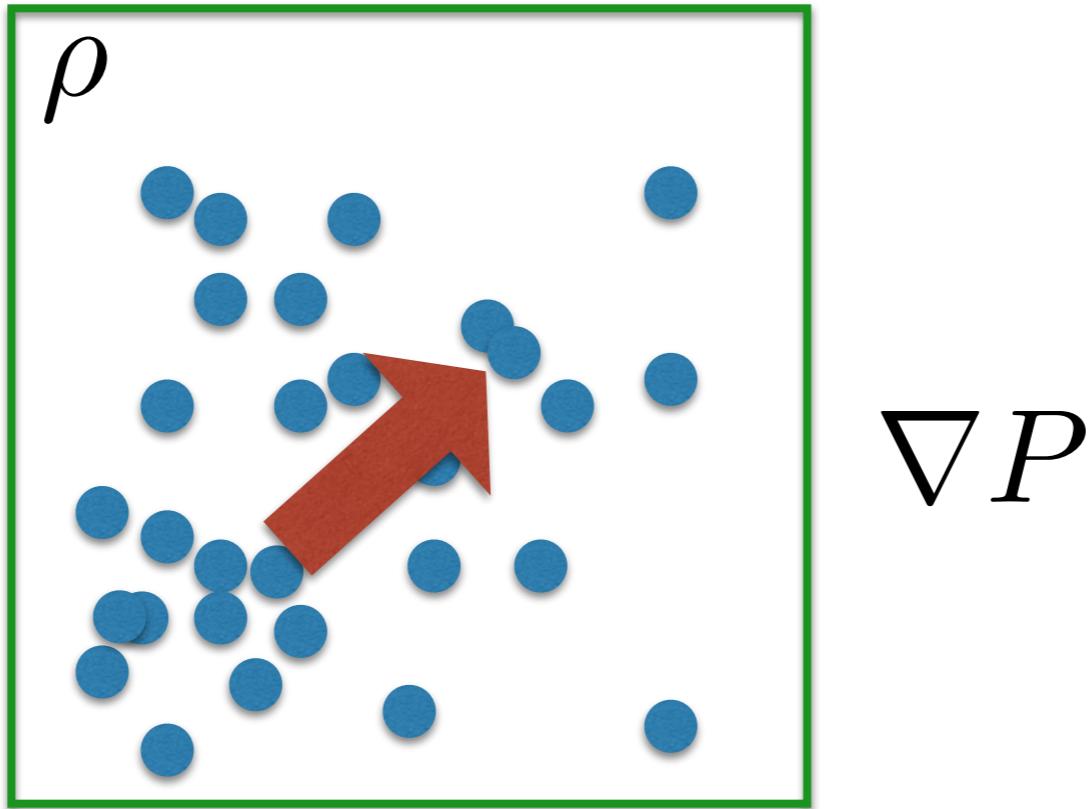
Y ahora modelamos...



Movimiento de un punto de masa:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

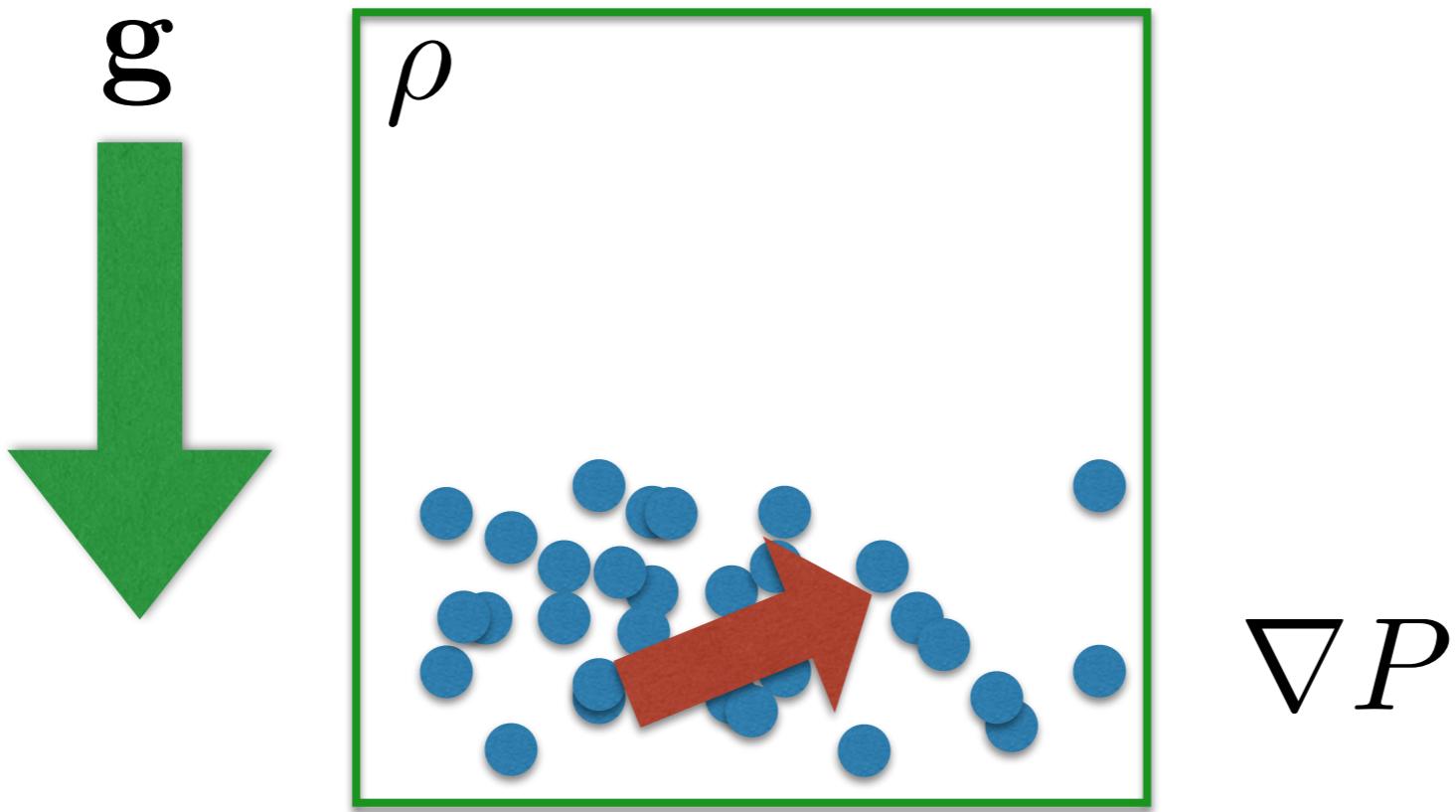
Para un medio continuo (e.g. un fluido):  
Definimos la densidad de masa,  $\rho$



$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_v$$

$$\mathbf{F}_v = -\nabla P$$

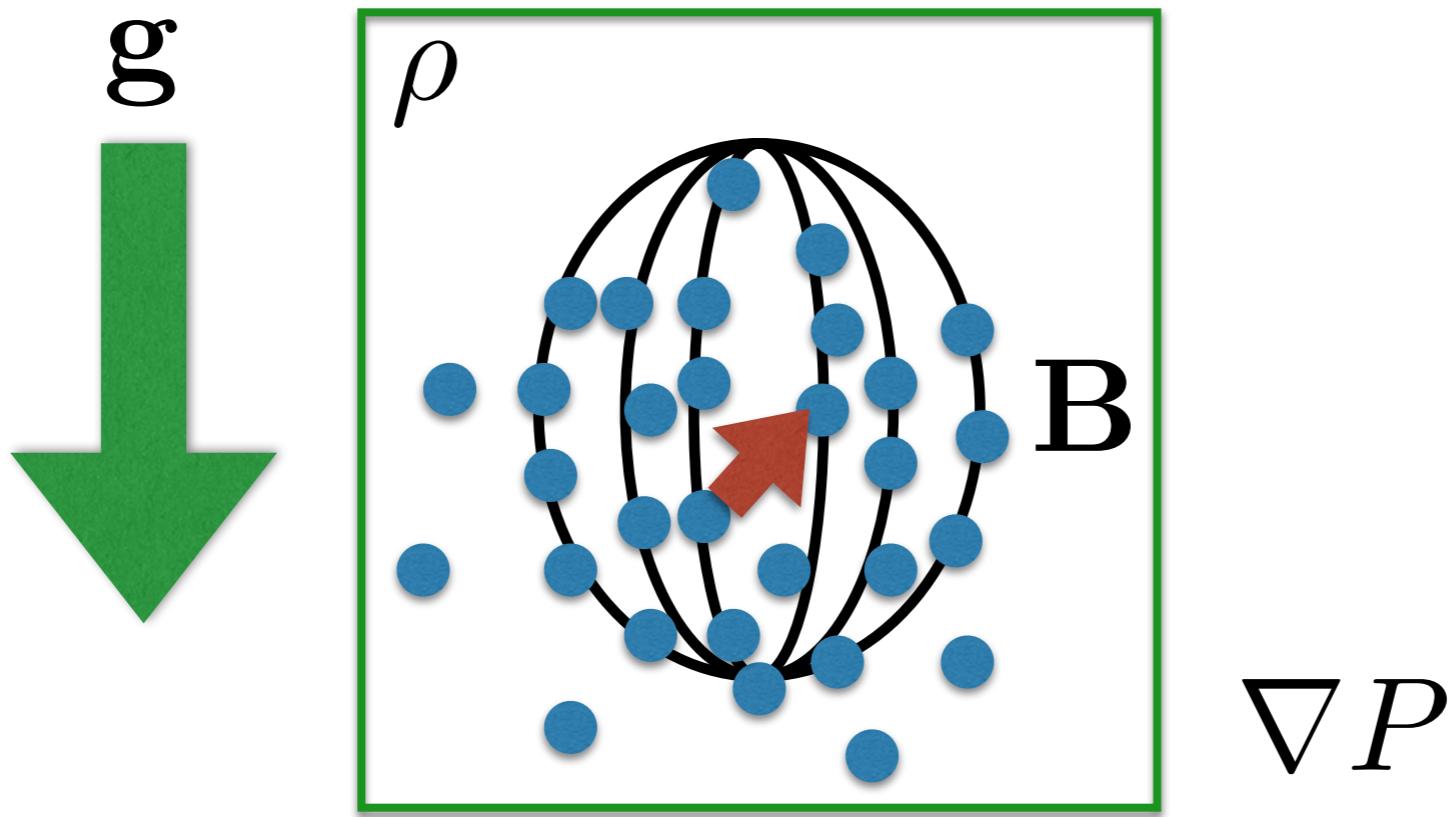
Para un medio continuo (e.g. un fluido):



$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_v$$

$$\mathbf{F}_v = -\nabla P + \rho \mathbf{g}$$

Para un medio continuo (e.g. un fluido):



$\nabla P$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_v$$

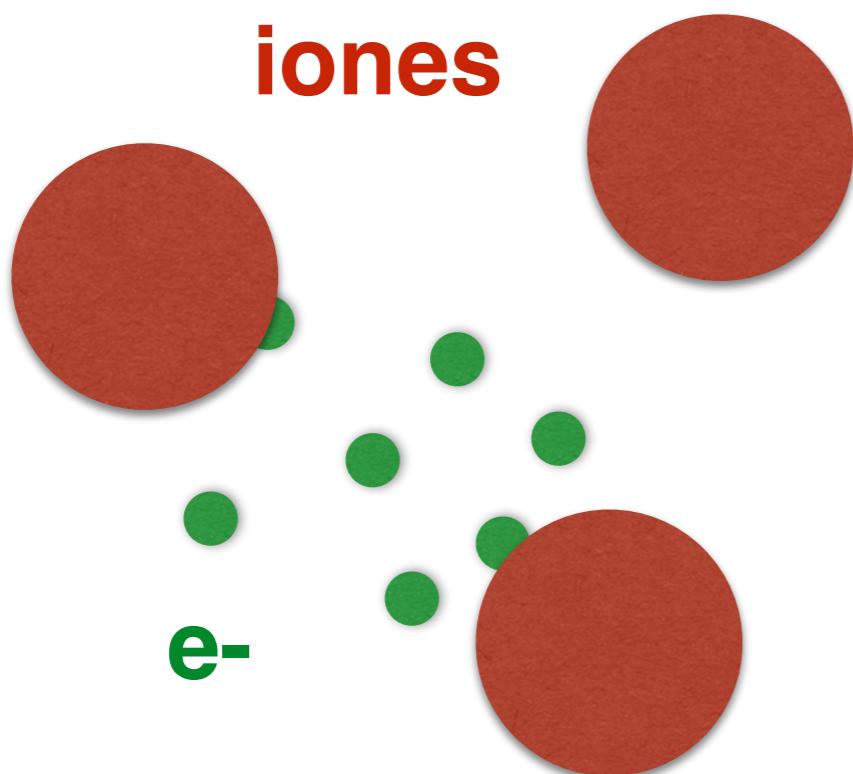
$$\mathbf{F}_v = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Entonces... Conservación de Momentum:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

**IMPORTANTE:**

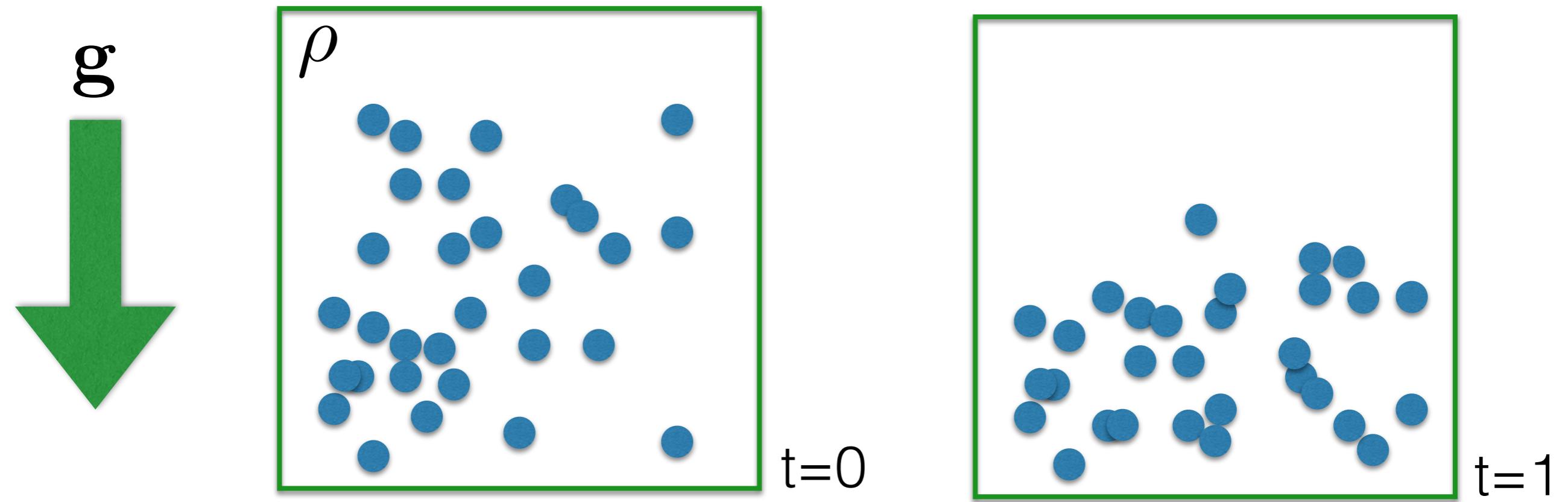
**En MHD, los iones y electrones son tratados como un solo fluido.**



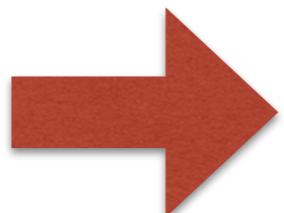
**Electrones llevan la corriente  
y “perciben” B.**

**Iones llevan la inercia.**

Tenemos que cerrar el sistema de ecuaciones...



Conservación  
de Masa



Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho v)$$

## Fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$



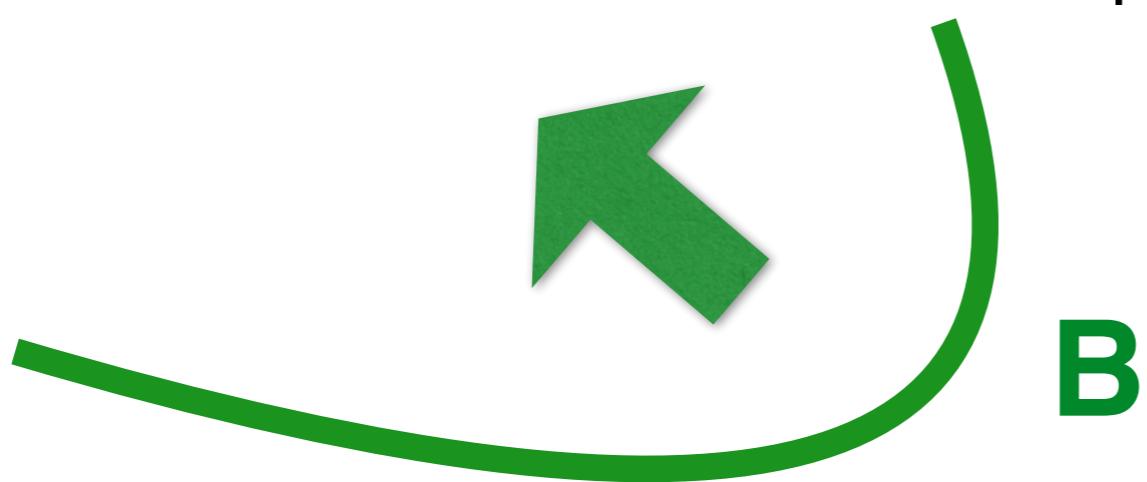
Ley de Ampere para bajas frecuencias.

$$\mathbf{F}_L = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right)$$



Tensión magnética

Presión magnética



**Línea de campo actúa como un elástico.**

Ecuación de Inducción de Faraday:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

Restricción de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

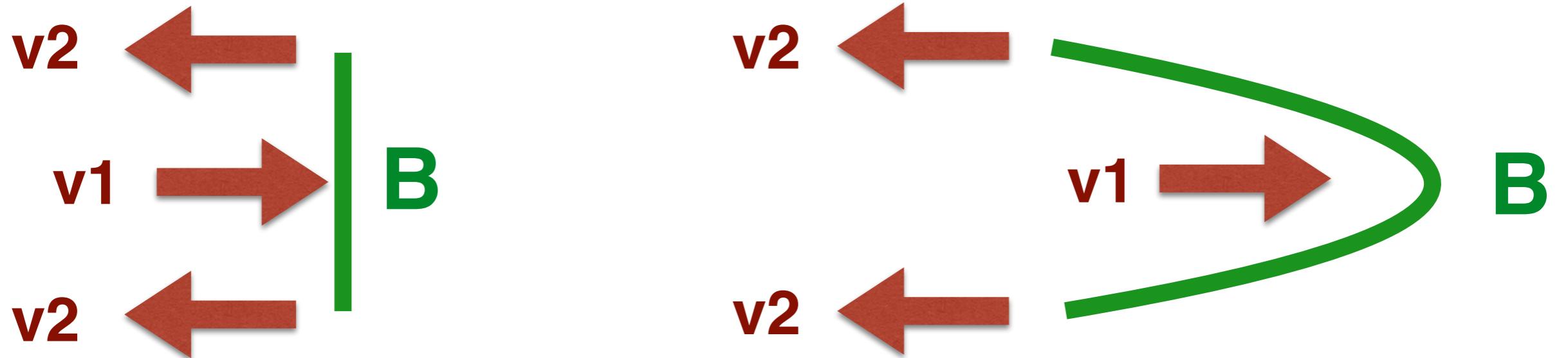
Ley de Ohm

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

MHD ideal implica que las líneas de campo magnético están “congeladas” en el plasma (Teorema de Alfvén).

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



i.e. las líneas de campo se mueven con el plasma.

# MHD Ideal

Alfvén 1942 (Navier-Stokes + Maxwell)

**B** induce corrientes que crean fuerzas.  
Estás fuerzas cambian **B**.

**Aplicable a:**

Fluidos/plasmas con alta conductividad y alta  
frecuencia de colisiones.

¿Es esto válido?

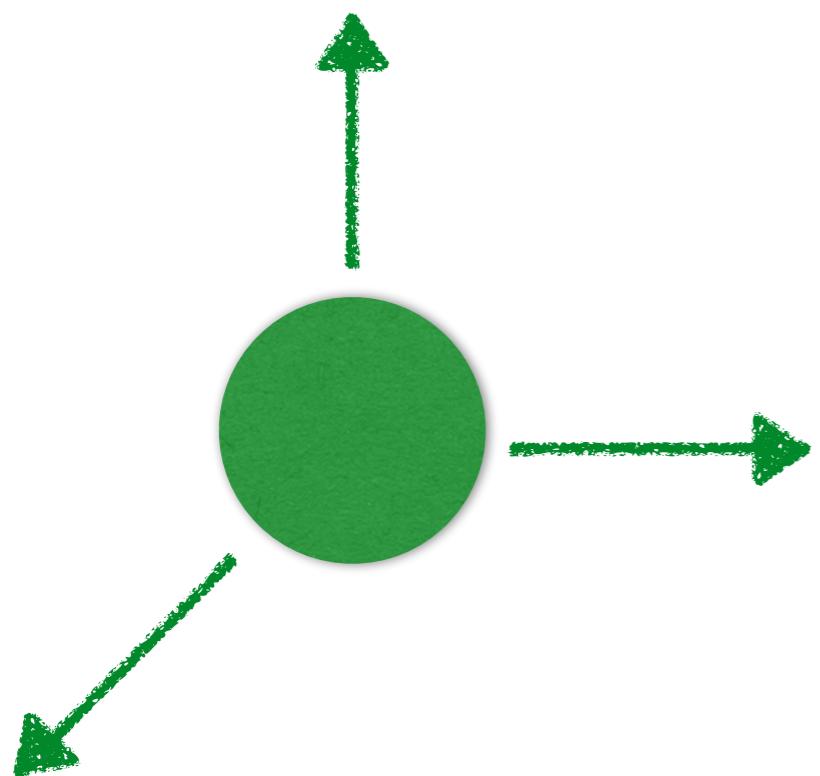
**Sí, en gases astrofísicos.**

**MHD es una confiable primera aproximación.**

Índice politrópico:

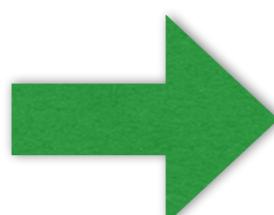
$$\gamma = 1 + \frac{2}{f}$$

$f$  = número de grados de libertad.



Gas monoatómico

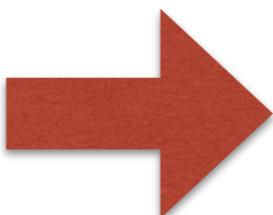
$$f = 3$$



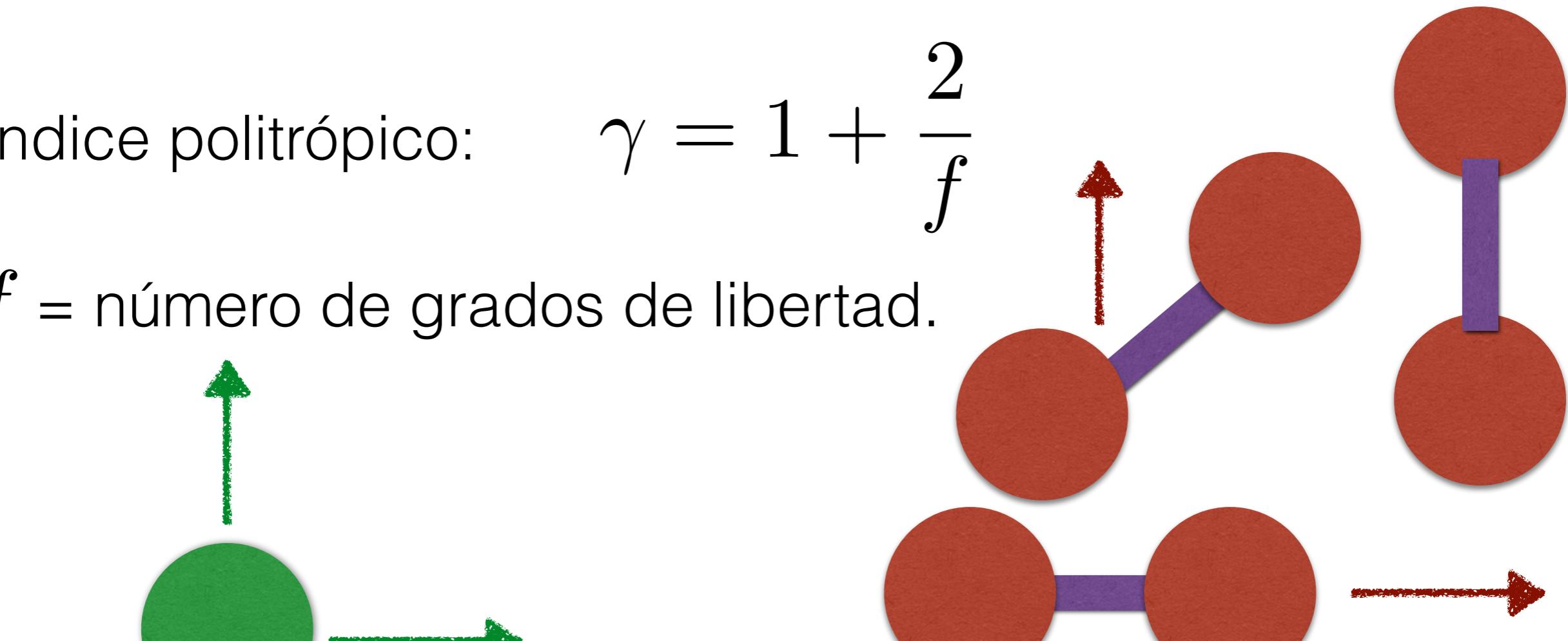
$$\gamma = \frac{5}{3}$$

Gas diatómico

$$f = 5$$



$$\gamma = \frac{7}{5}$$



Ecuación de Estado (Gas Ideal):

$$P = nk_B T$$

Densidad de energía interna:

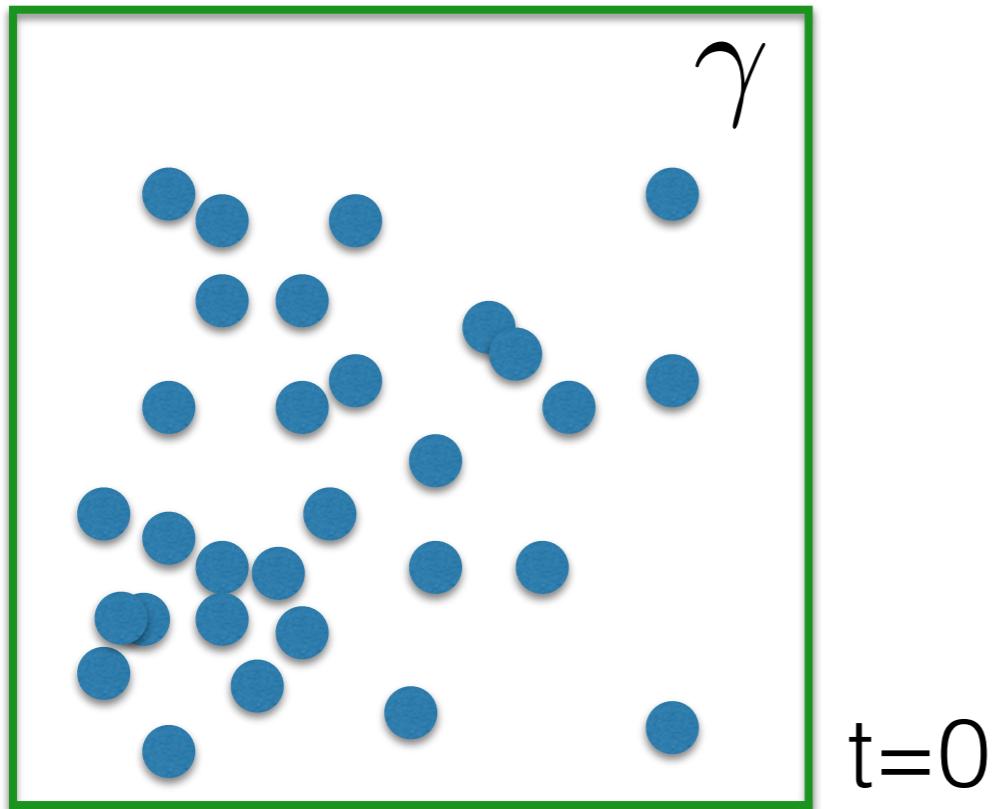
$$U = \frac{f}{2} nk_B T = \frac{nk_B T}{\gamma - 1} = \frac{P}{\gamma - 1}$$

Densidad específica de energía interna

$$\epsilon = \frac{U}{\rho} = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)} \rightarrow$$

$$P = (\gamma - 1)\rho\epsilon$$

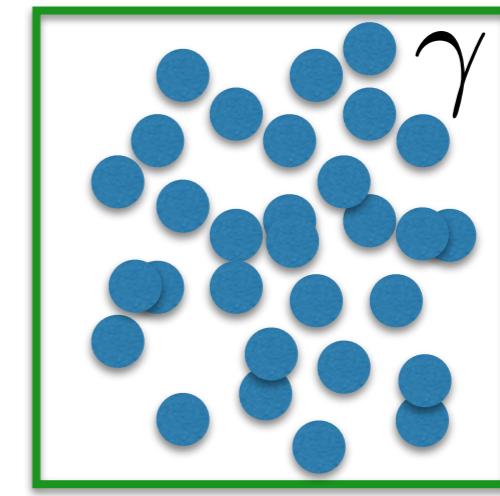
Tenemos que cerrar el sistema de ecuaciones...



$$V_1 < V_0$$

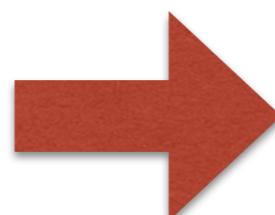
$$\rho_1 > \rho_0$$

$$P_1 > P_0$$



$$PV^\gamma = \text{constante}$$

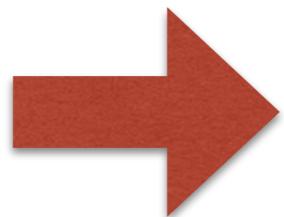
$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{constante}$$



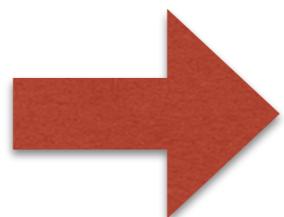
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Entonces....

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0$$



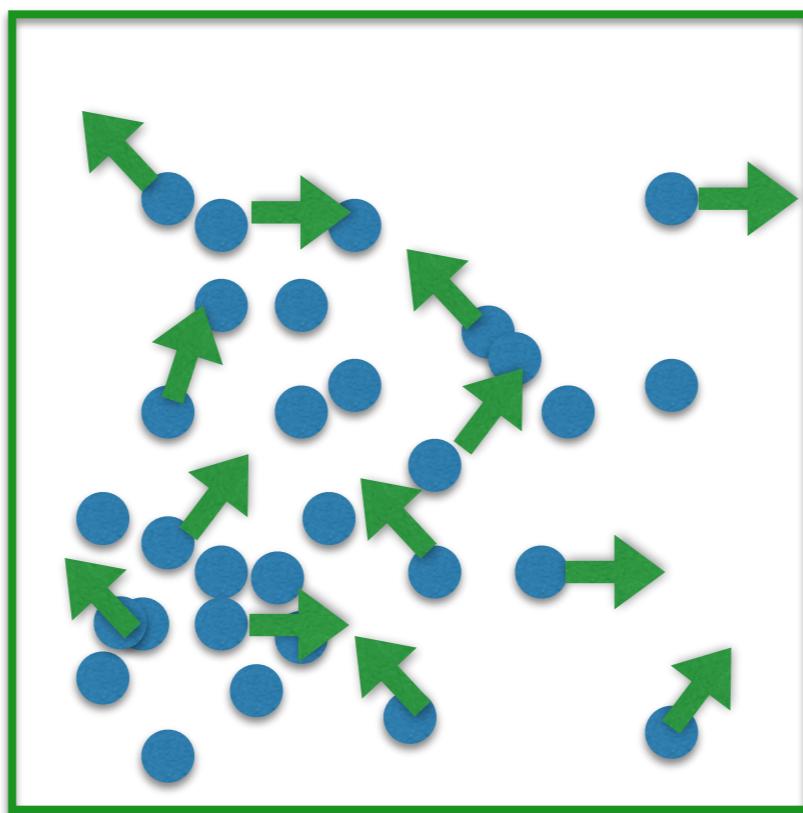
$$\frac{dP}{dt} = -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{v}$$



$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

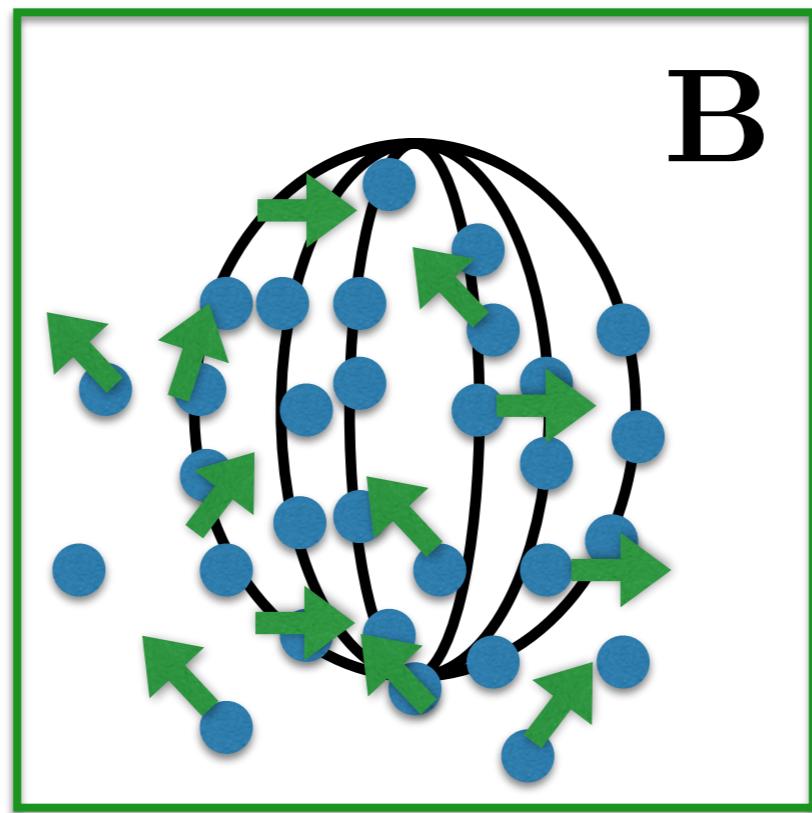
Conservación de la energía.

# Densidad de Energía, E:



$$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2$$

# Densidad de Energía, E:



$$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2$$

$$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2$$



$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Conservación de la energía:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ (E + P + \frac{1}{2}B^2)\mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}$$

En resumen, llegamos a ecuaciones matriciales:

## Hidrodinámica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0,$$

$$\frac{\partial [\rho \mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{I} \mathbf{P}] = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P) \mathbf{v}] = 0,$$

—

Masa

Momento

Energía

Inducción

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0,$$

$$\frac{\partial [\rho \mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B} + \mathbf{I} \mathbf{P}] = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P) \mathbf{v} - \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})] = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0,$$

donde:  $P = P_{\text{th}} + (P_{\text{mag}})$  con  $P_{\text{mag}} = \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2$ .

$E = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + (\frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2)$ , con  $\epsilon$  siendo la energía interna.

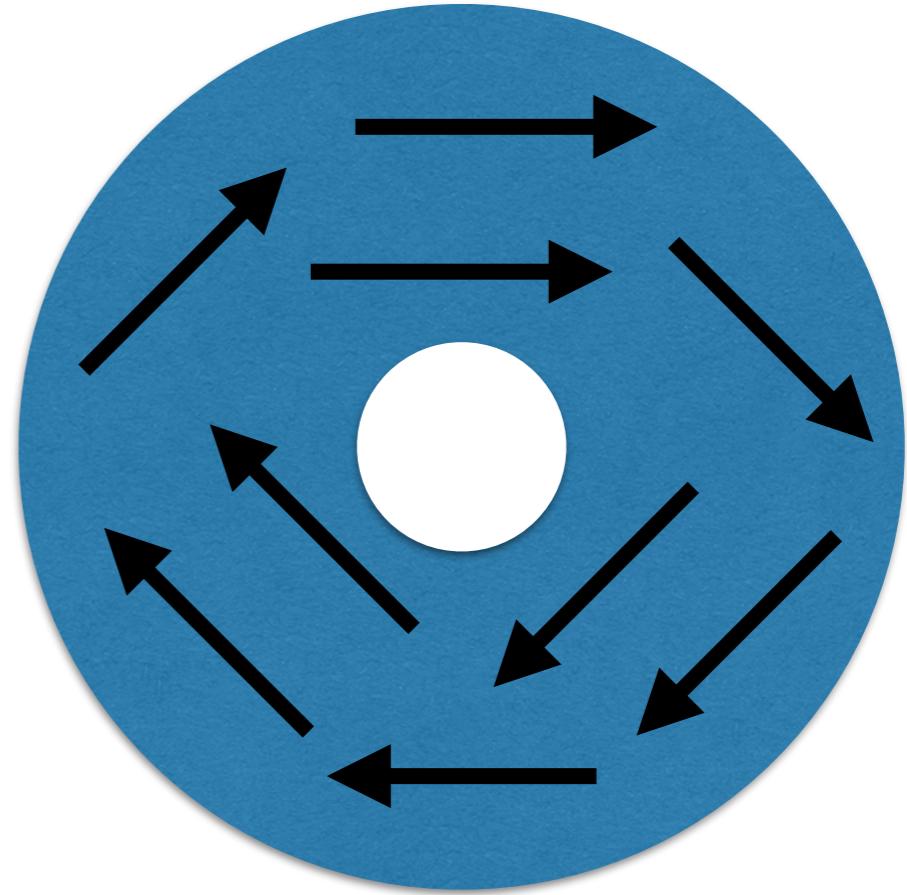
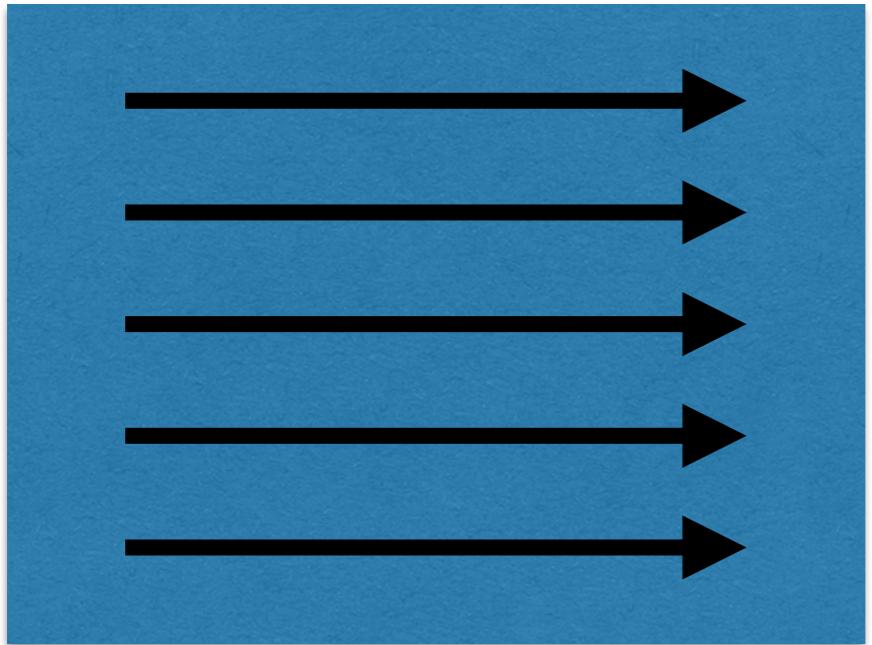
## Ecuación de Estado

$$P_{\text{th}} = P_{\text{th}}(\rho, \epsilon) = (\gamma - 1) \rho \epsilon$$

## Magneto-hidrodinámica

# FENÓMENOS HD Y MHD

# Vorticidad de un fluido



$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$$

i.e. cuantifica la rotación de un fluido

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = \nabla P \times \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

↓

Baroclinicidad de un fluido

# **Formación de Vórtices**

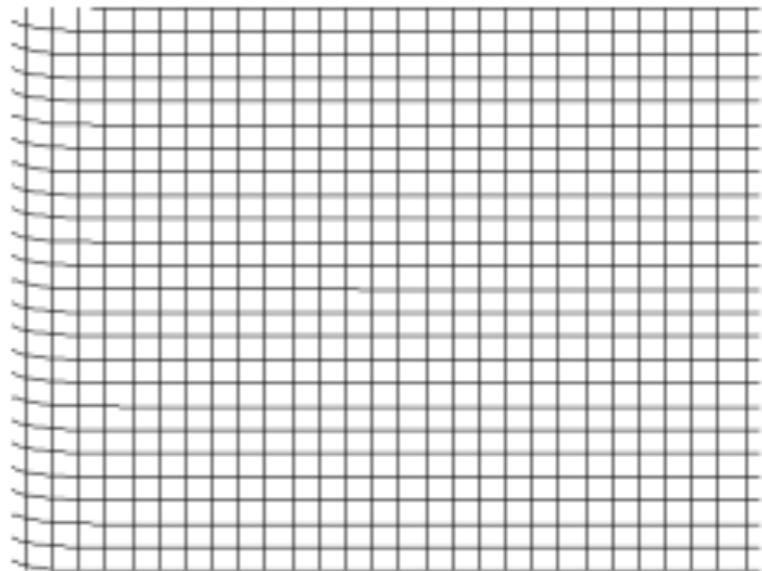
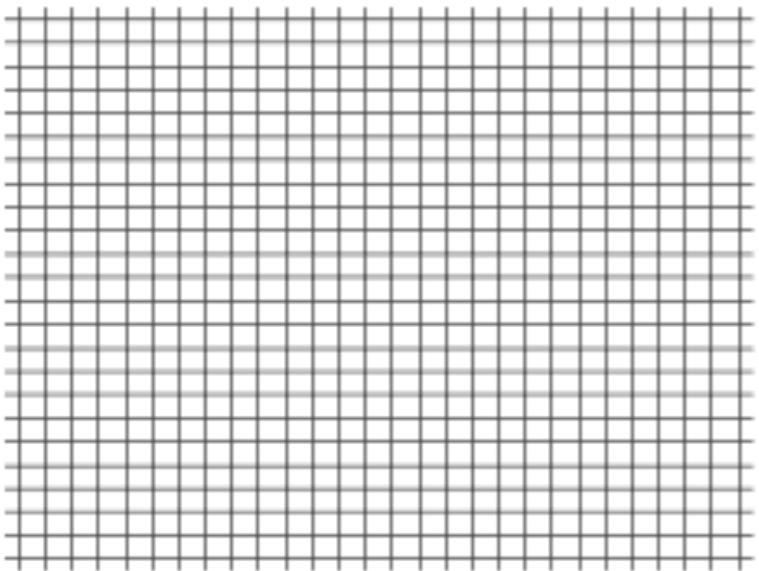
Los vórtices son estructuras tridimensionales.

Importantes en procesos de transporte de masa y turbulencia.



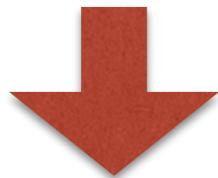
Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=72LWr7BU8Ao>

# Ondas

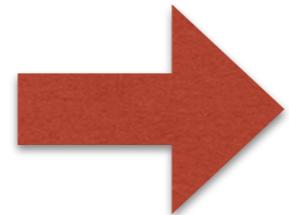


Dang C., & Chan, N  
Tomado de: <https://commons.wikimedia.org>

Longitudinal

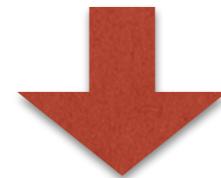


e.g. El sonido



$$w^2 = k^2 c_s^2$$

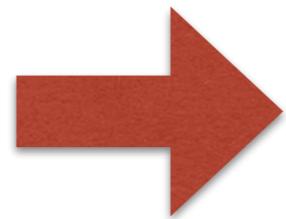
Transversa



e.g. La luz

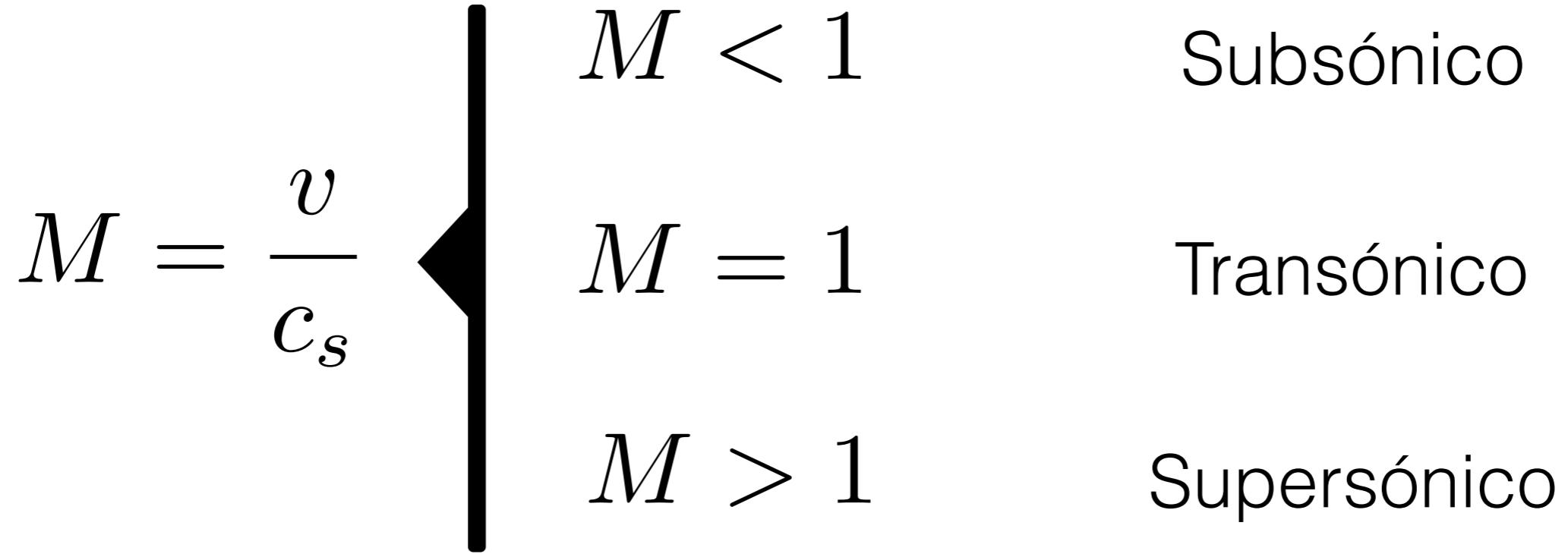
Velocidad del sonido en el gas:

$$c_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$$



$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$$

# Número de Mach

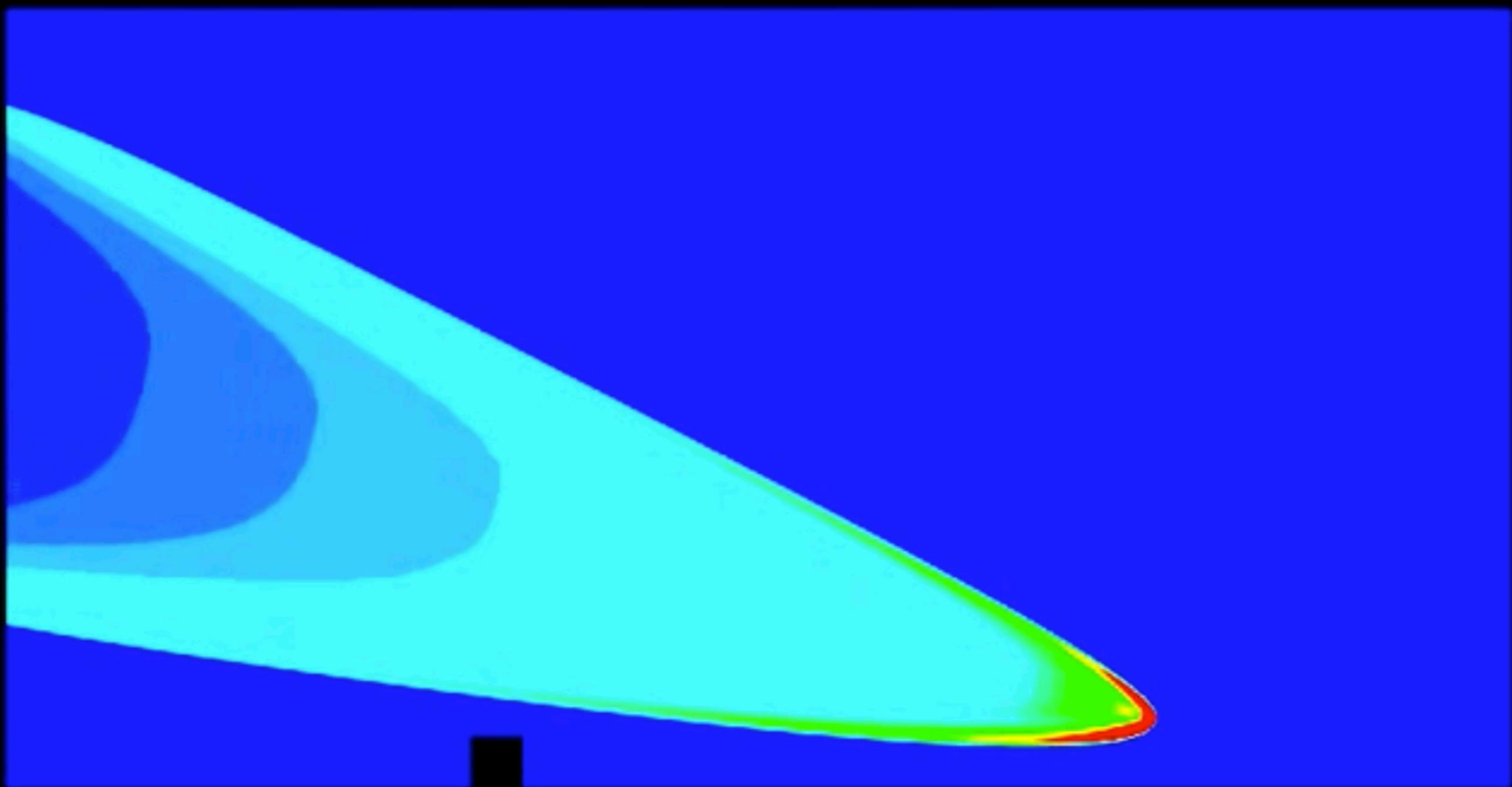


## Ondas de choque

Discontinuidad en densidad,  
presión, y temperatura.

# Ondas de choque

Se observa un “boom” sónico y un “bow shock”.

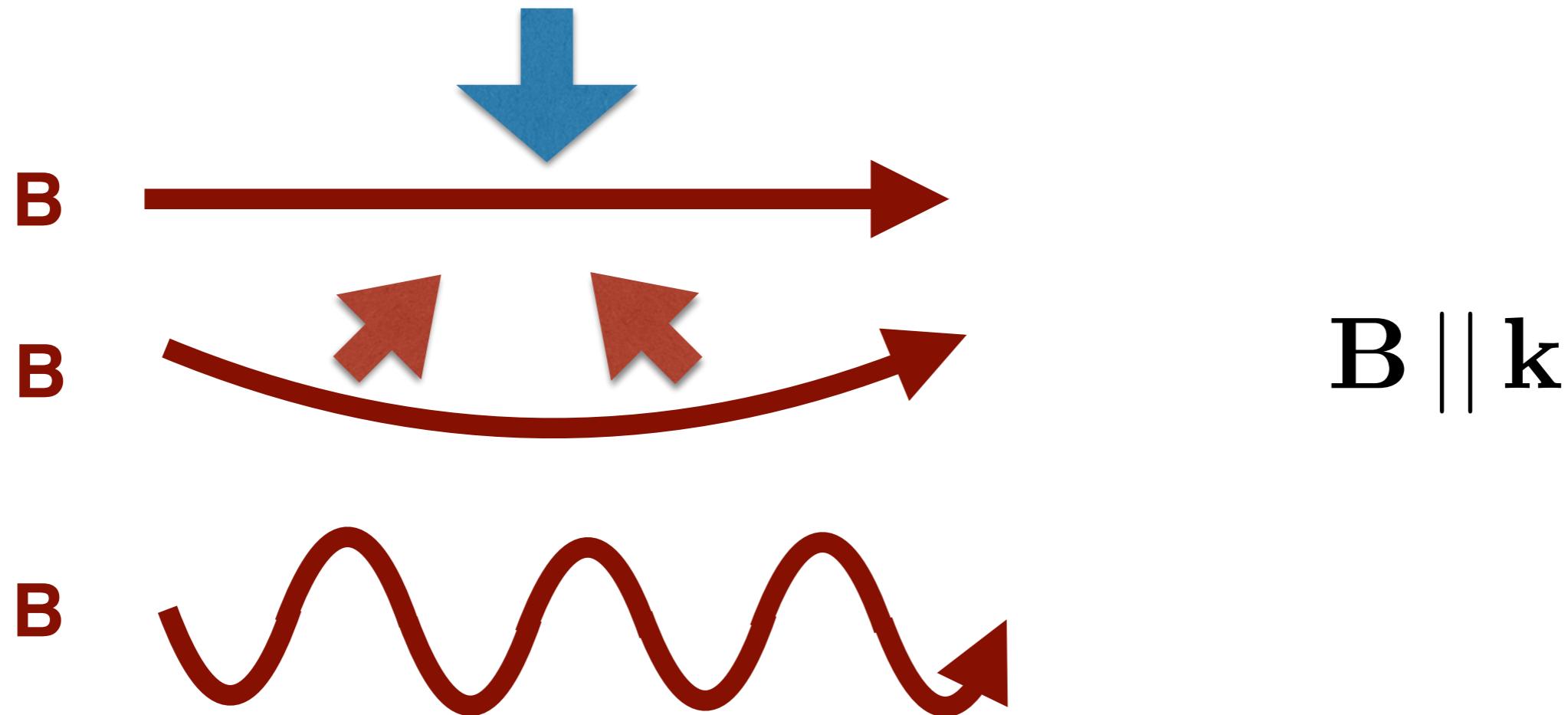


# Ondas MHD

Ondas de Alfvén:

$$w^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 \quad \text{con:} \quad v_A^2 = \frac{B^2}{\rho}$$

Velocidad de  
Alfvén



i.e. propagan la torsión magnética (no compresión).

# Ondas MHD

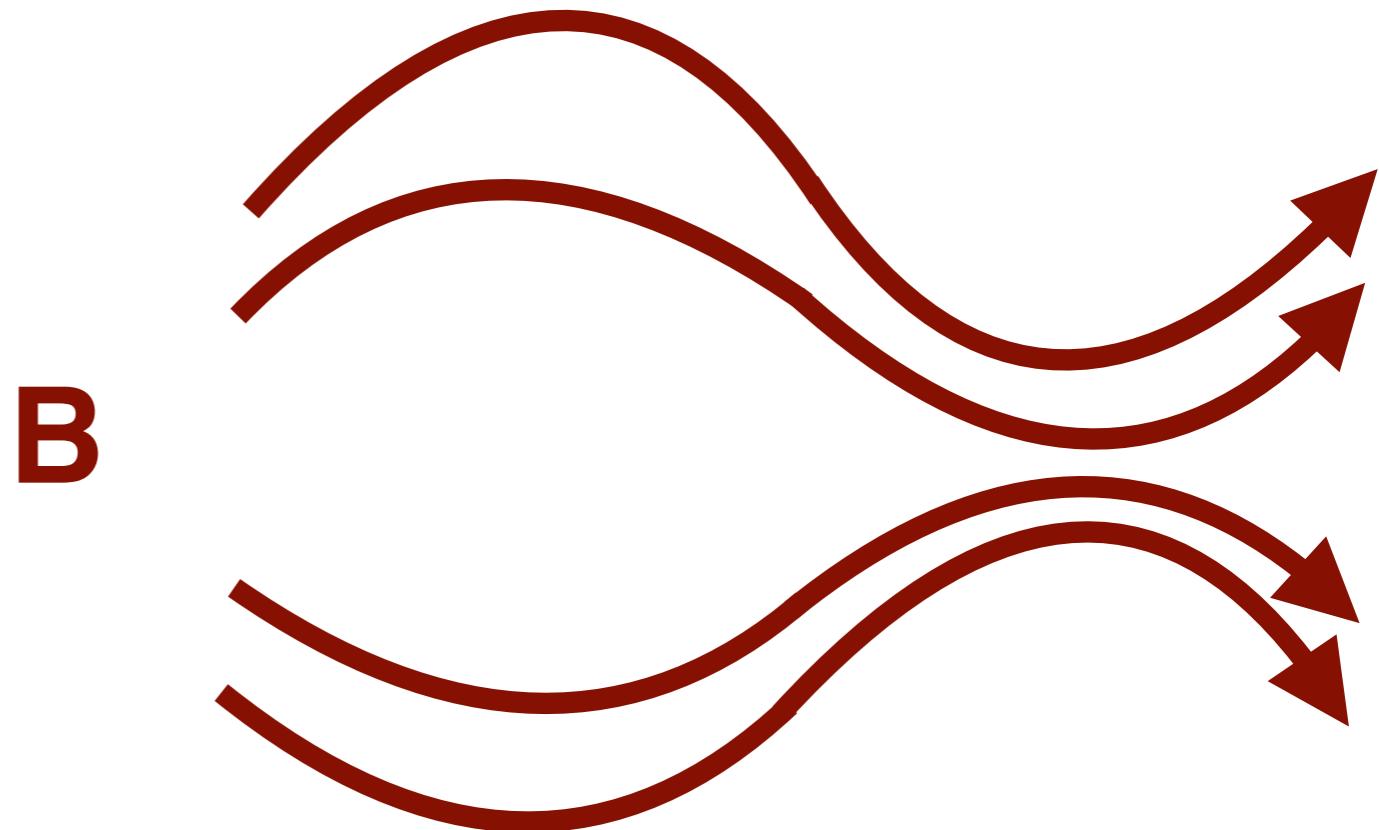
Magneto-sónicas  
rápidas:



$$w^2 = k^2(v_A^2 + c_s^2)$$

i.e. propagan presión  
térmica y magnética  
en todas direcciones.

Magneto-sónicas  
lentas:



$$w^2 \sim k_{\parallel}^2 c_s^2$$

i.e. mantiene:

$$P + \frac{1}{2}B^2 = \text{constante}$$

# Densidad de Energía Magnética

$$E_M = \frac{1}{2} B^2$$

i.e. la energía magnética se guarda como presión o torsión de líneas de campo.

En Astrofísica **B** es difícil de medir, entonces usamos “Plasma Beta”.

$$\beta = \frac{P}{E_M} = \frac{2P}{B^2}$$

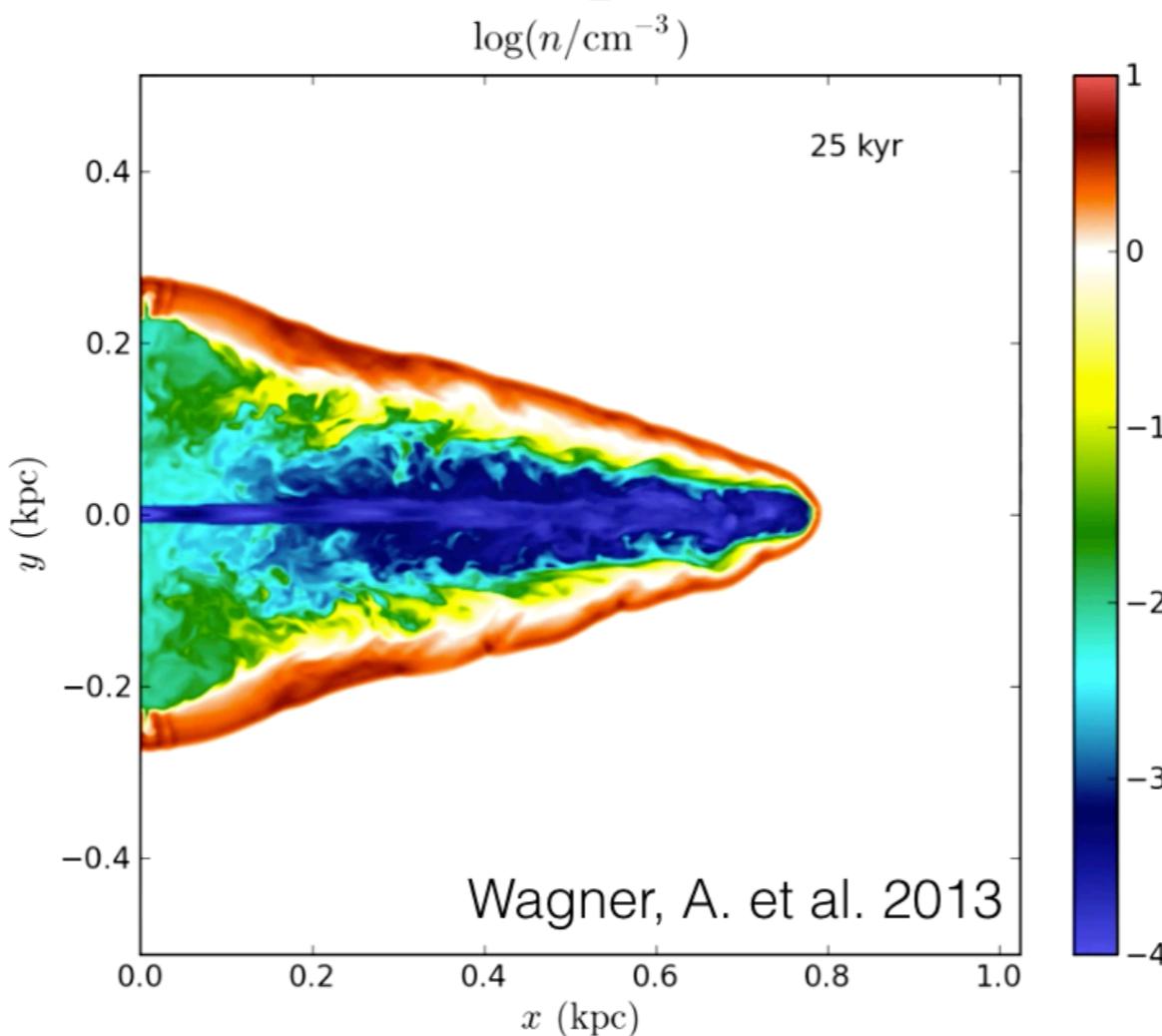


$\beta < 1$	Campos fuertes
$\beta = 1$	Equipartición
$\beta > 1$	Campos débiles

Régimenes:

**Lineal:**

Analítico

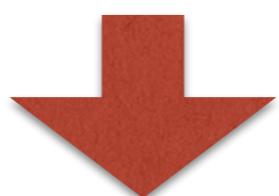


**No-lineal**  
Numérico

Los gradientes producen inestabilidades.



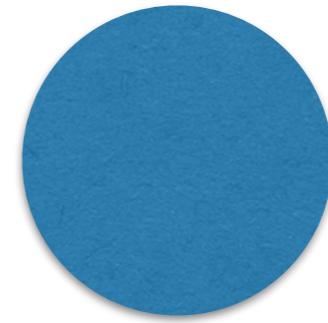
Inestabilidades son medios para liberar energía.  
A través de ondas que son canales de desfogue.



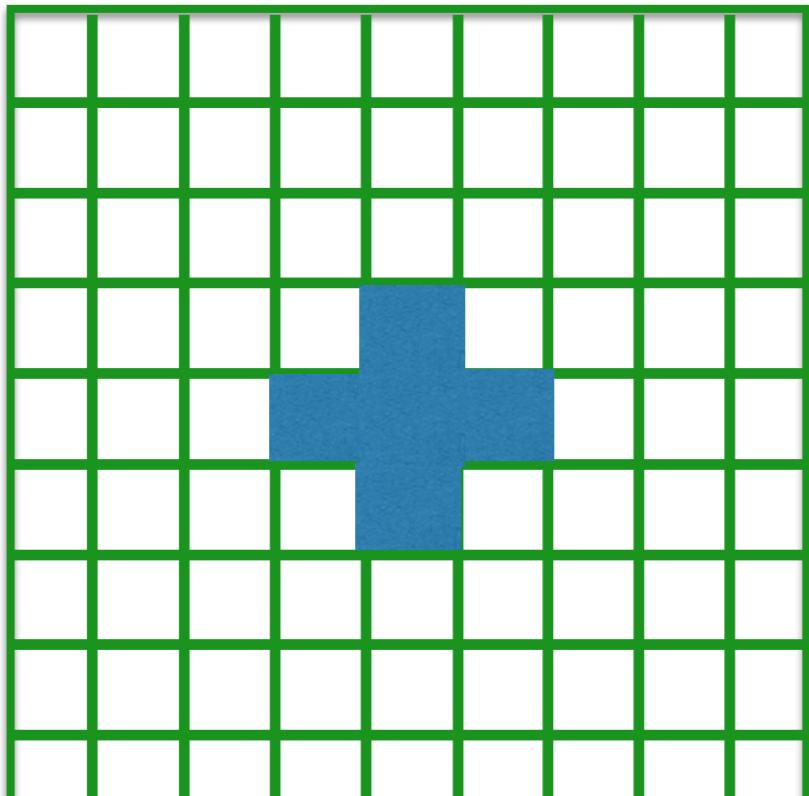
Los fluidos tienden a volverse turbulentos.

# SIMULACIONES MHD

# Dos tipos de discretizaciones...

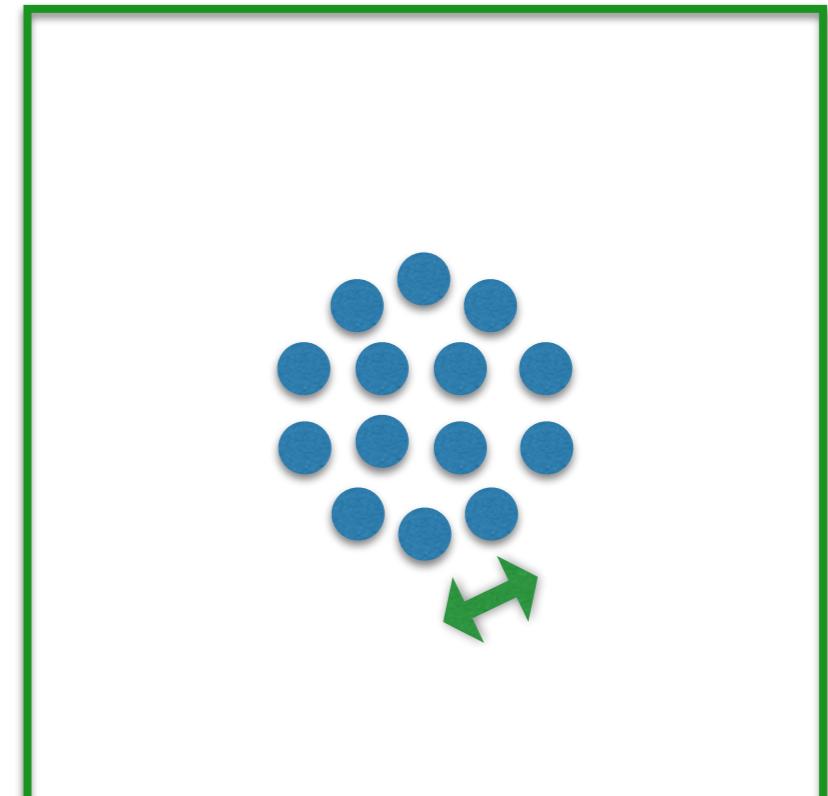


Basados en una grilla  
(Grid-based hydrodynamics)



Resolución:  $\Delta x$

Basados en partículas  
(Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)



Resolución:  $\Delta h$

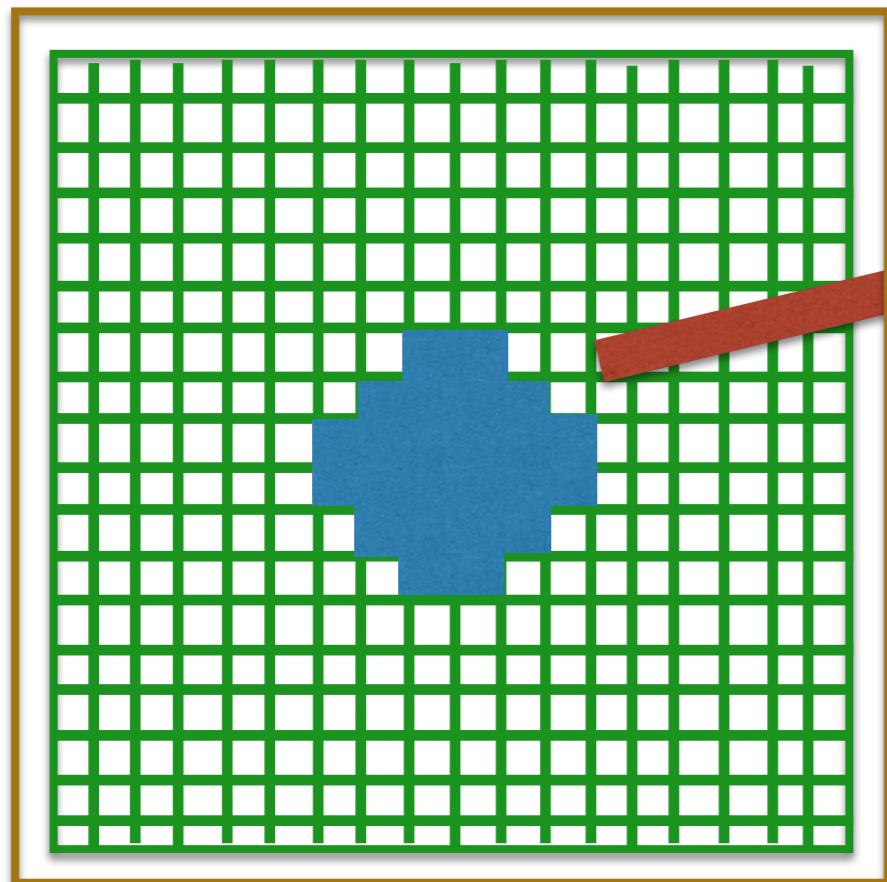
## **Basados en una grilla**

HD y MHD de alta fidelidad

Propagación de ondas

Vorticidad e inestabilidades

ISM

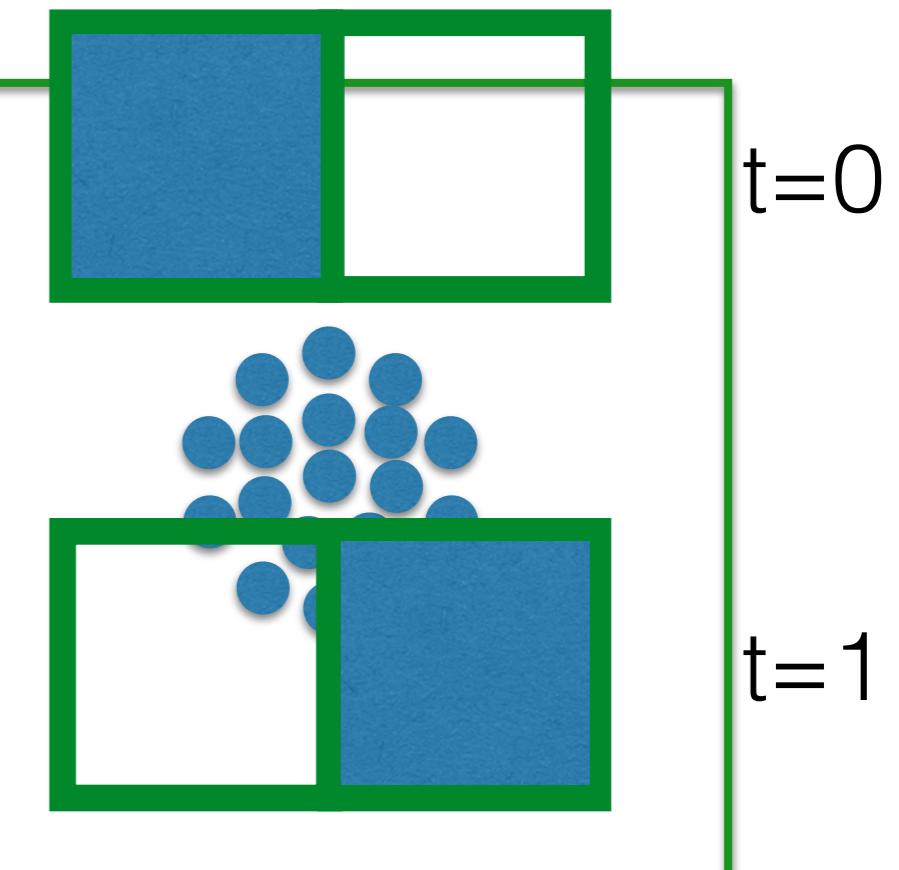


**Condiciones de Frontera**

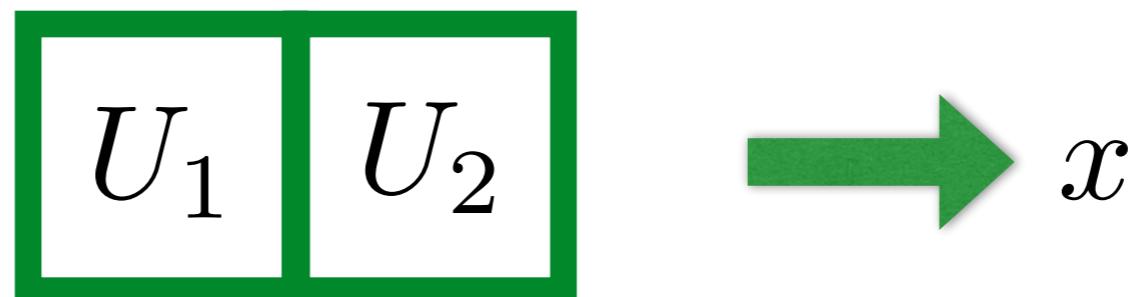
## **Basados en partículas**

Galaxias

Agujeros negros



Solución numérica en modelos de grilla:



Ecuaciones hiperbólicas de Euler:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

Entonces... Problema de Riemann

Paquetes modernos cuentan con estos algoritmos y son libres:

OPENFOAM

FLASH

PLUTO

ASTROBEAR

ATHENA

ZEUS

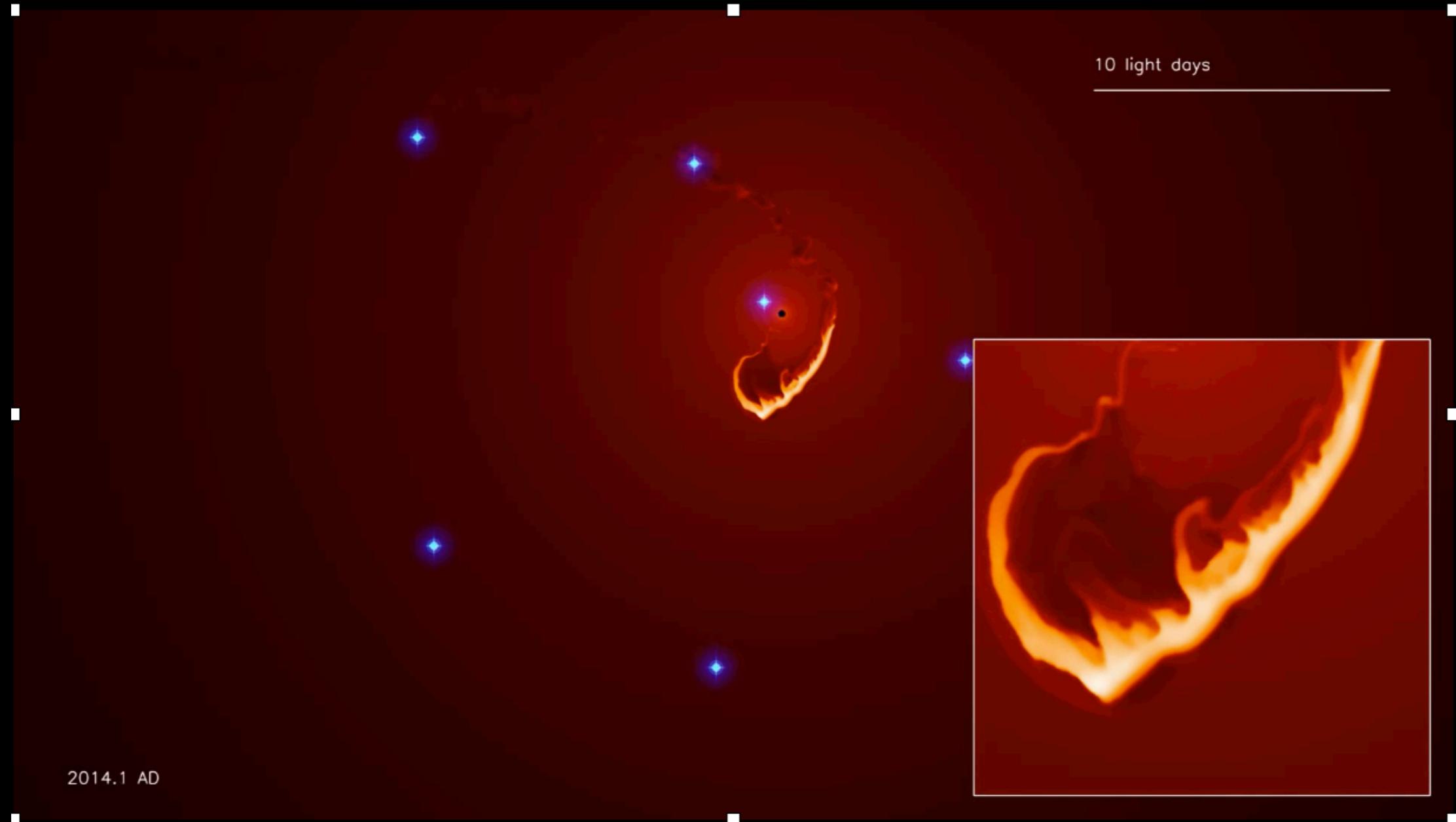
FYRIS

GADGET (SPH)

PHANTOM (SPH)

WRF (Meteorología)

# PLUTO



Simulation by: M. Schartmann, A. Burkert, C. Alig, S. Gillessen, R. Genzel  
using PLUTO 3.1.1 (Mignone et al. 2007)

# PHANTOM (SPH)



Nealon, Price and Nixon (2015)

Bardeen-Peterson effect: [Nealon et. al 2015](#)  
(<https://www.youtube.com/watch?v=AaNTY42zgtA>)

# **¿Animación o simulación?**

Animación (Propósito divulgativo y didáctico)

Simulación (Propósito científico)

## **Análisis de Datos y Visualización**

PYTHON

IDL

C

VISIT

SPLASH (SPH)

GRADS (WRF)

**FIN**