

Dinámica de gases



EPIC 1

Wladimir E. Banda Barragán

2021

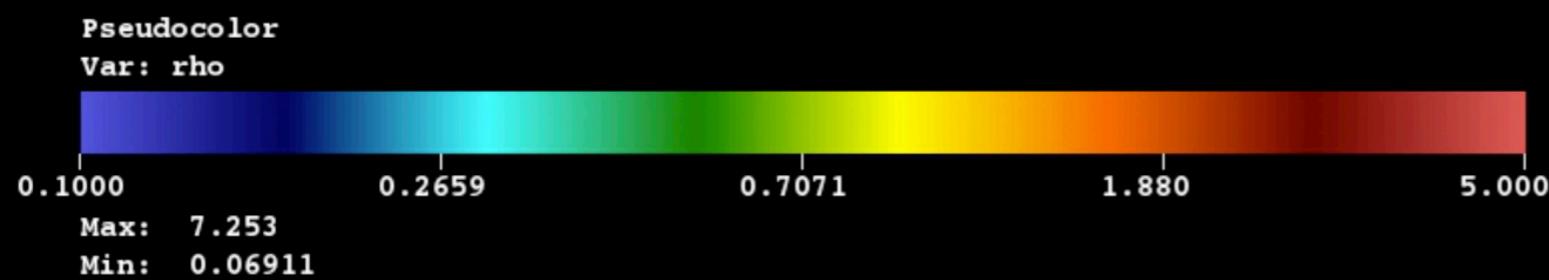
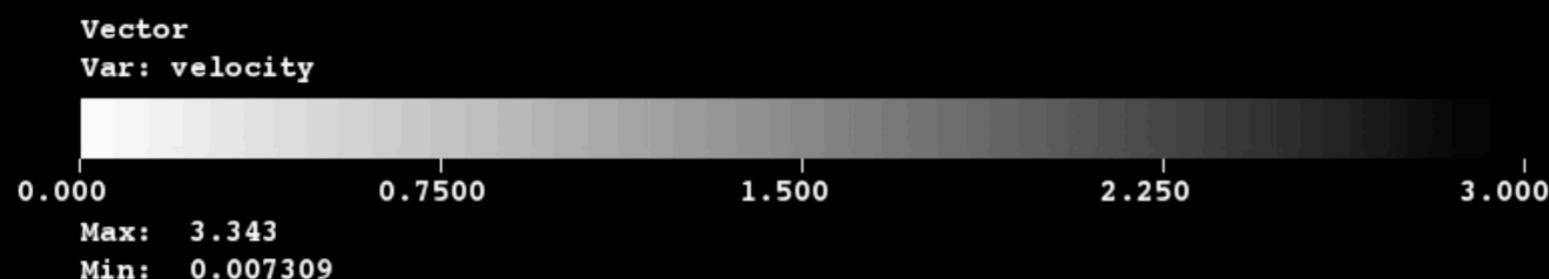
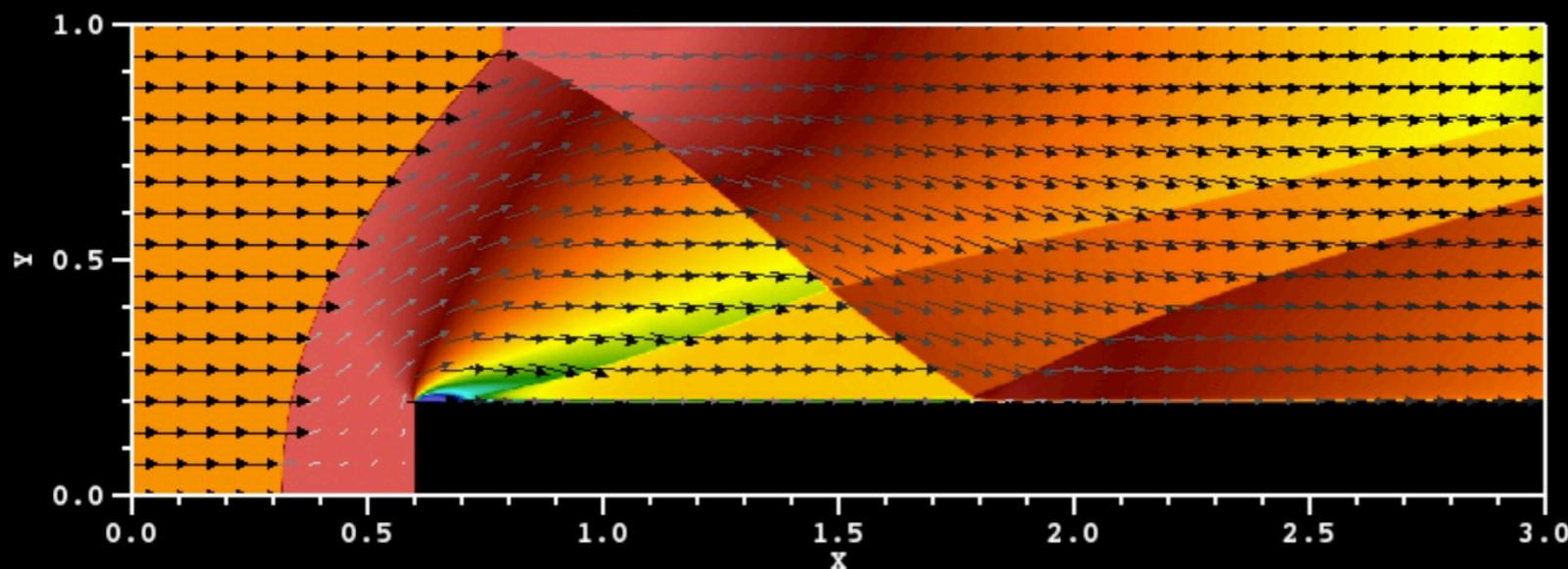
Hidrodinámica

¿Qué estudia la hidrodinámica?



Fluidos

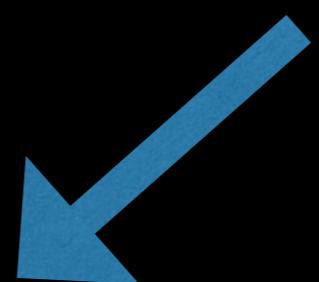
Movimiento



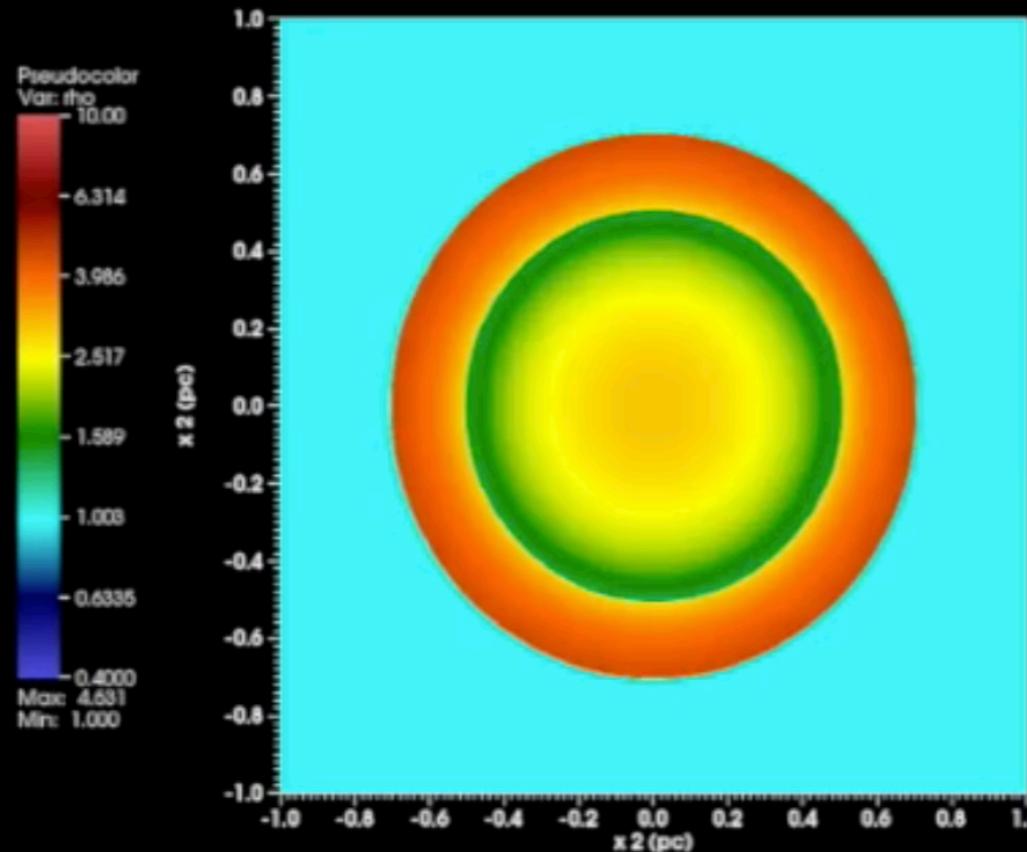
Túnel de viento

Magneto-hidrodinámica

¿Qué estudia la magneto-hidrodinámica?



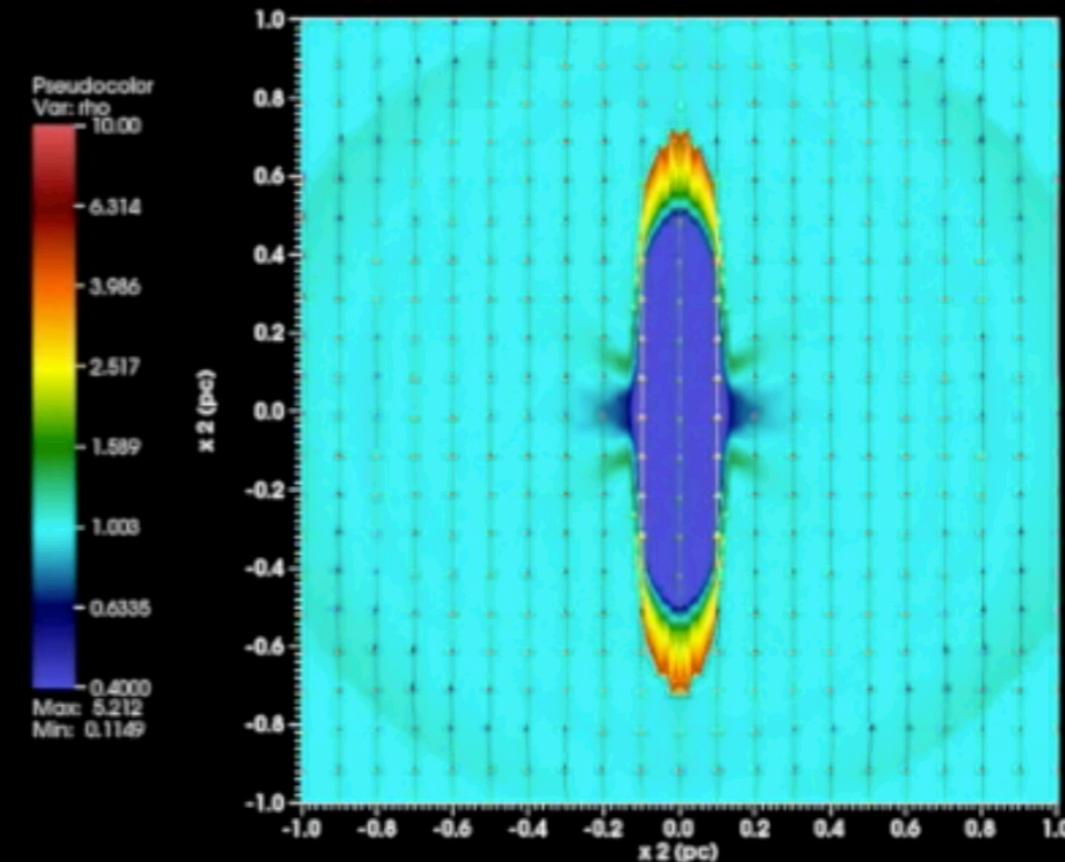
Campos magnéticos



Fluidos



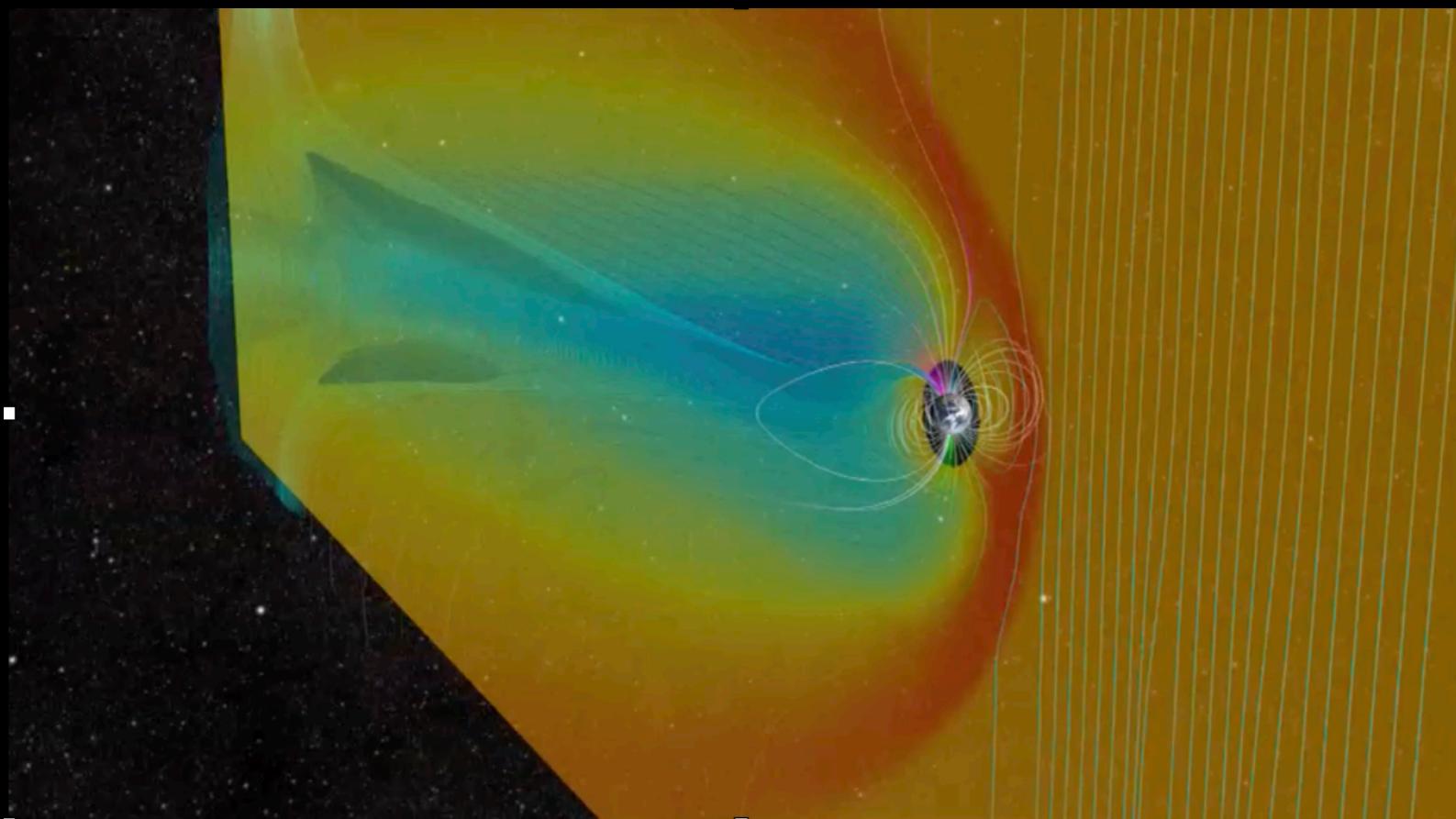
Movimiento



Entonces...

Magneto-hidrodinámica (MHD) del Medio Interestelar (ISM)

Es el estudio de la dinámica (i.e. movimiento) del plasma interestelar en la presencia de campos magnéticos.



Bow shock

Reconección
magnética

MODELIZACIÓN

Usamos el método científico...

Observamos un fenómeno



Modelamos teóricamente



Comparamos

Predecimos con modelos teóricos

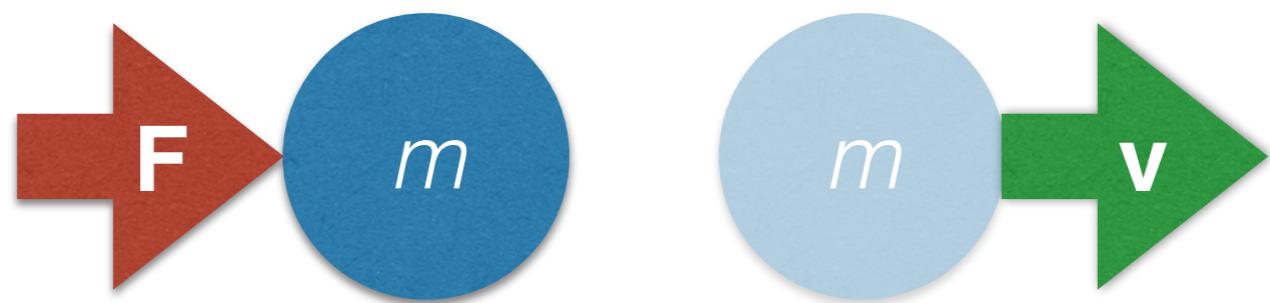


Buscamos el fenómeno



Comparamos

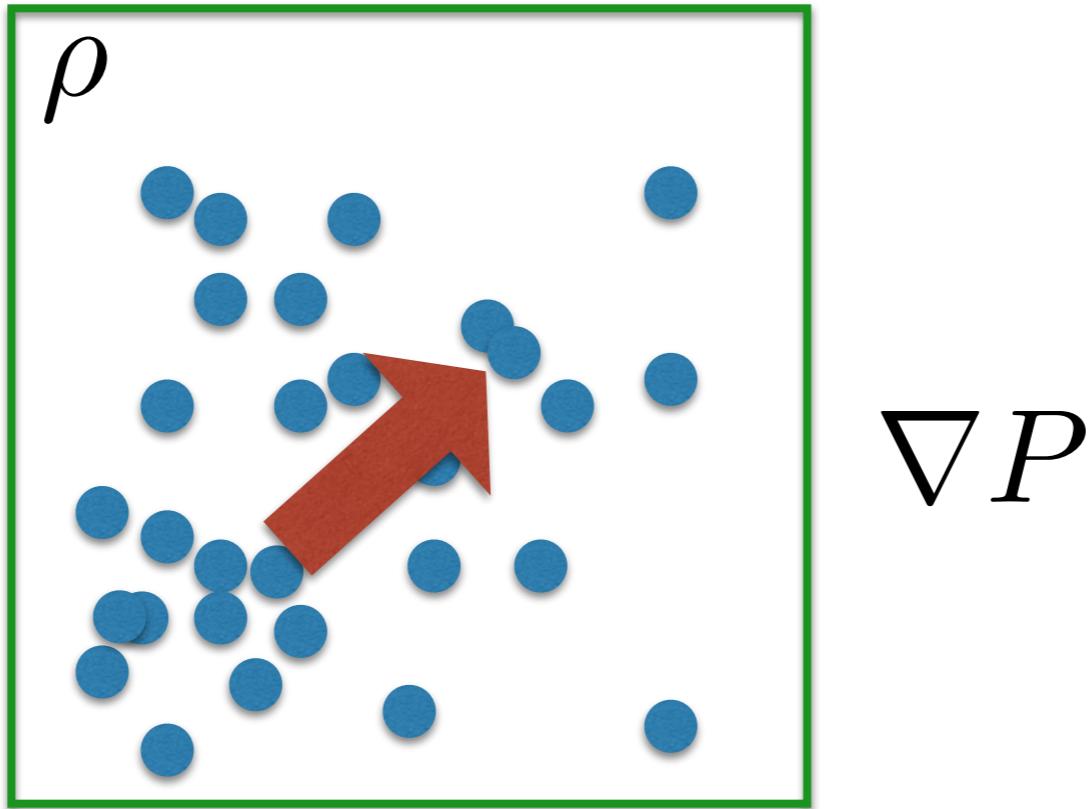
Y ahora modelamos...



Movimiento de un punto de masa:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

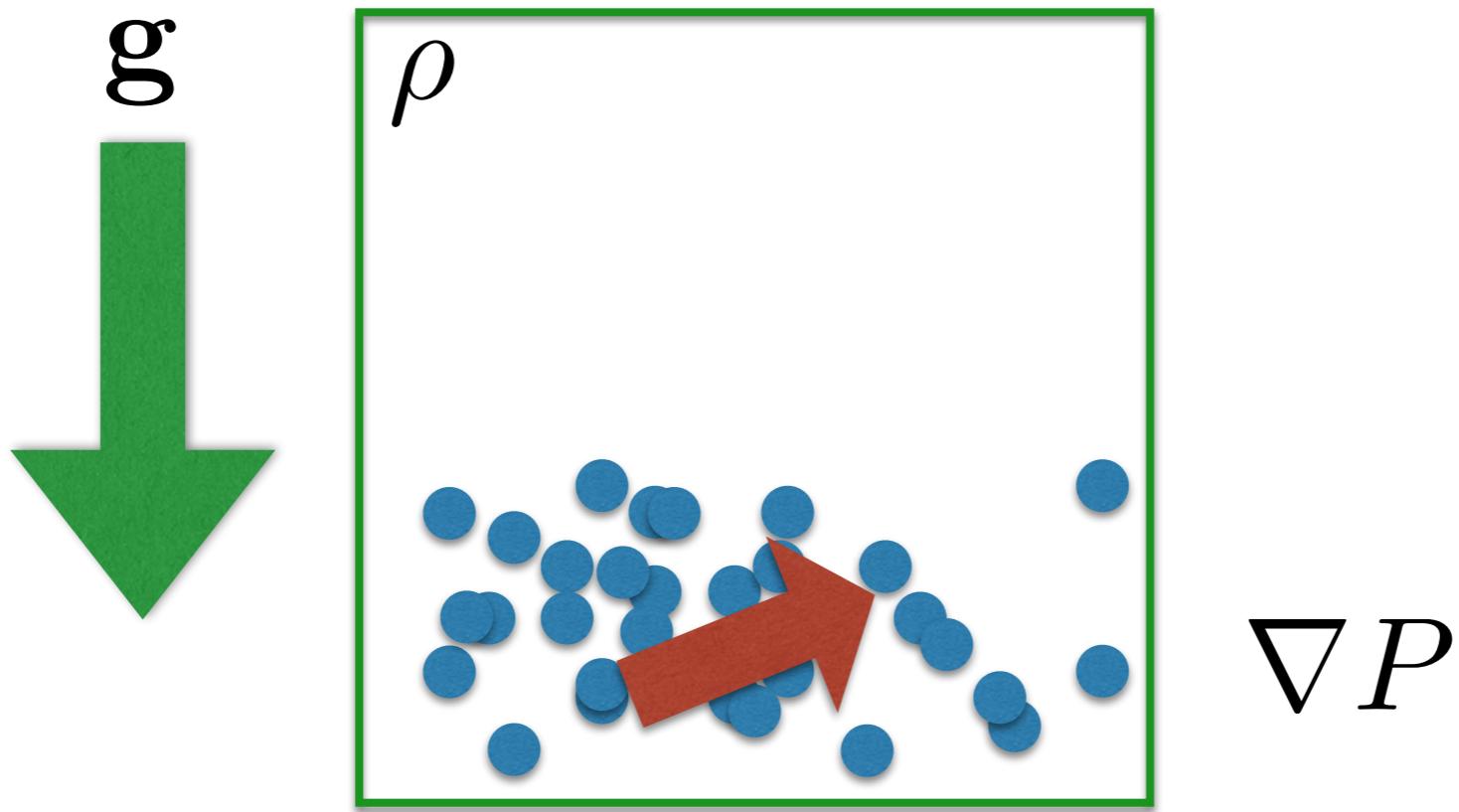
Para un medio continuo (e.g. un fluido):
Definimos la densidad de masa, ρ



$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_v$$

$$\mathbf{F}_v = -\nabla P$$

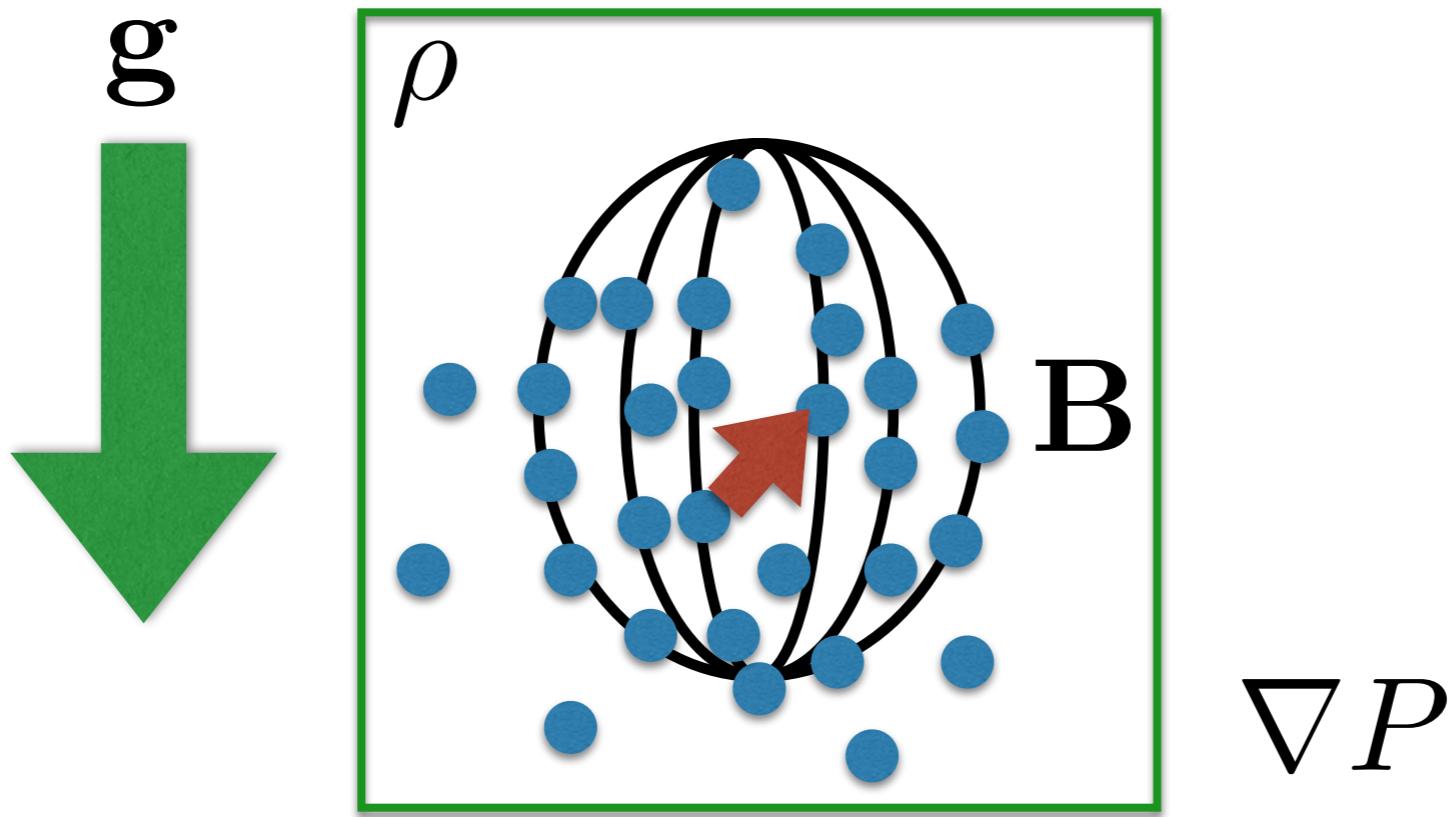
Para un medio continuo (e.g. un fluido):



$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_v$$

$$\mathbf{F}_v = -\nabla P + \rho \mathbf{g}$$

Para un medio continuo (e.g. un fluido):



$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_v$$

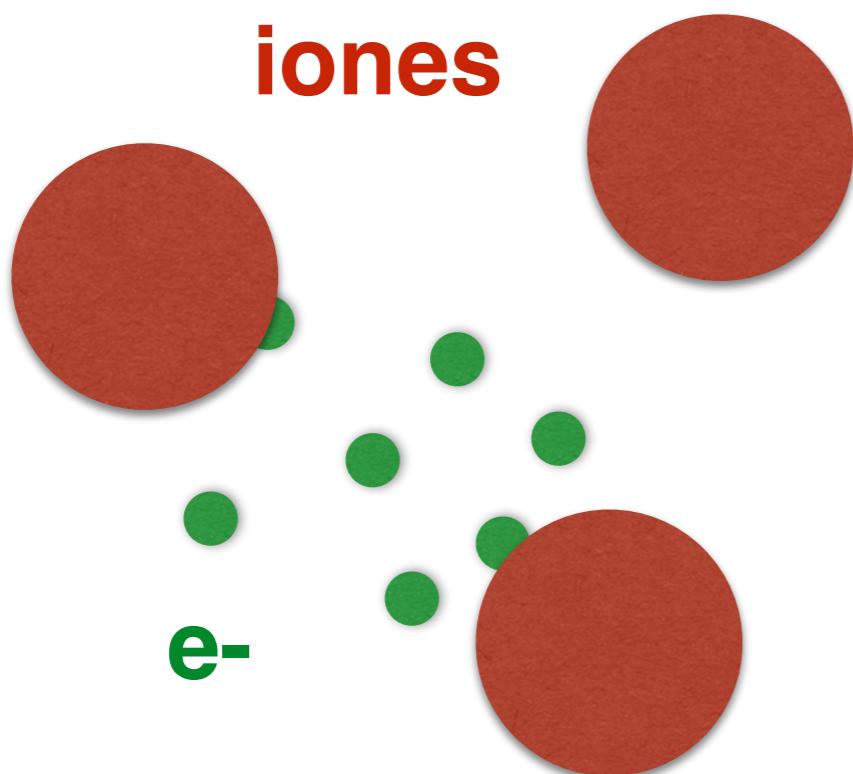
$$\mathbf{F}_v = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Entonces... Conservación de Momentum:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

IMPORTANTE:

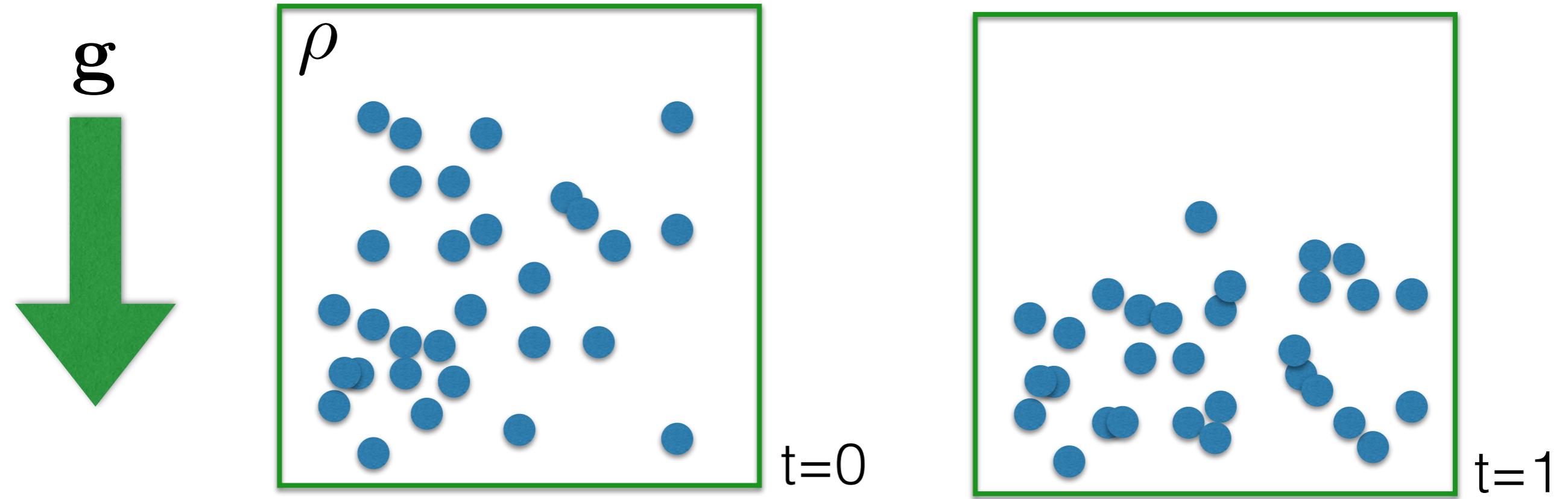
En MHD, los iones y electrones son tratados como un solo fluido.



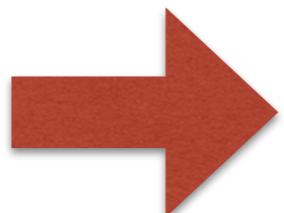
**Electrones llevan la corriente
y “perciben” B.**

Iones llevan la inercia.

Tenemos que cerrar el sistema de ecuaciones...



Conservación
de Masa



Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho v)$$

Fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$



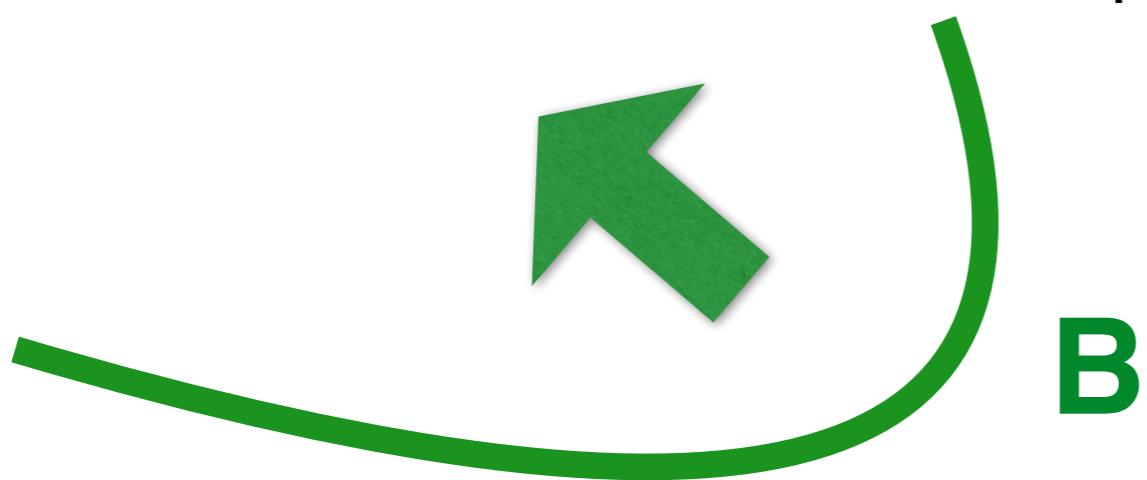
Ley de Ampere para bajas frecuencias.

$$\mathbf{F}_L = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right)$$



Tensión magnética

Presión magnética



Línea de campo actúa como un elástico.

Ecuación de Inducción de Faraday:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

Restricción de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

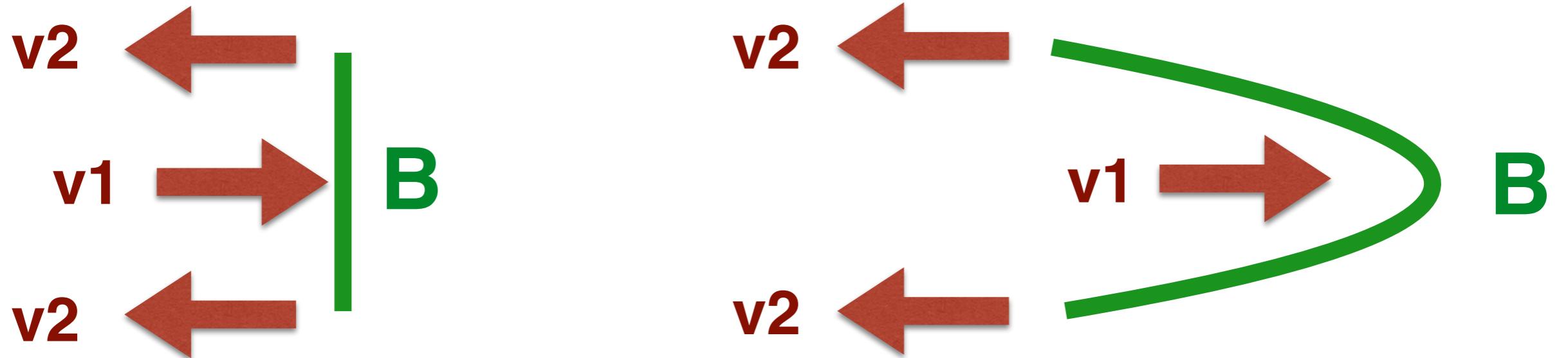
Ley de Ohm

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

MHD ideal implica que las líneas de campo magnético están “congeladas” en el plasma (Teorema de Alfvén).

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



i.e. las líneas de campo se mueven con el plasma.

MHD Ideal

Alfvén 1942 (Navier-Stokes + Maxwell)

B induce corrientes que crean fuerzas.
Estás fuerzas cambian **B**.

Aplicable a:

Fluidos/plasmas con alta conductividad y alta
frecuencia de colisiones.

¿Es esto válido?

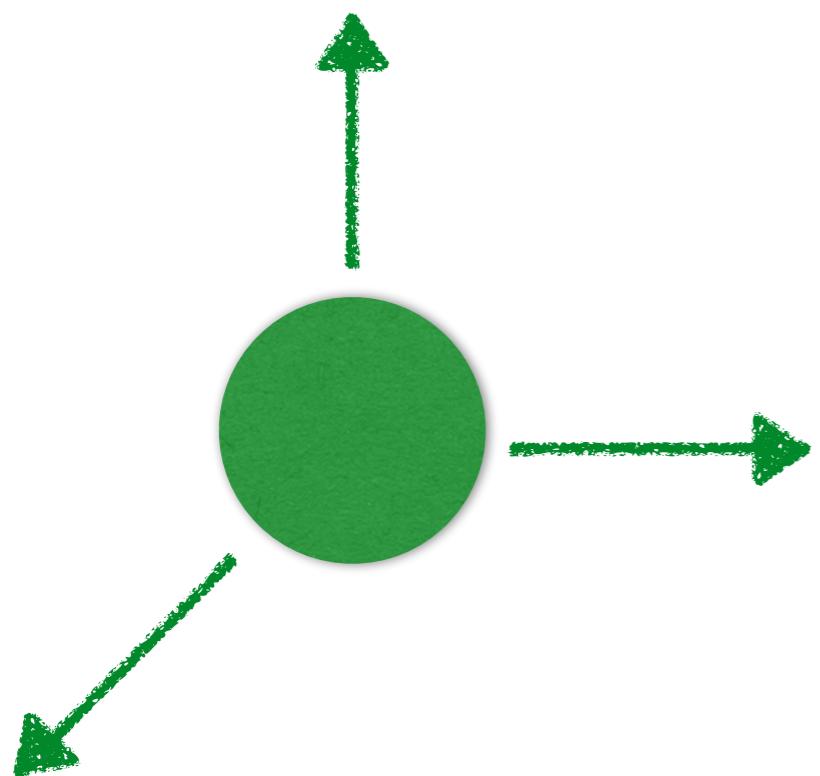
Sí, en gases astrofísicos.

MHD es una confiable primera aproximación.

Índice politrópico:

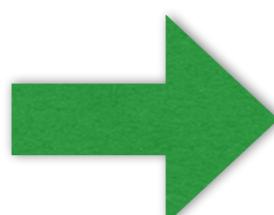
$$\gamma = 1 + \frac{2}{f}$$

f = número de grados de libertad.



Gas monoatómico

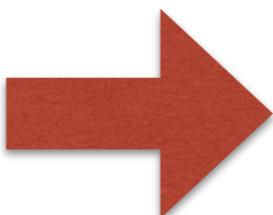
$$f = 3$$



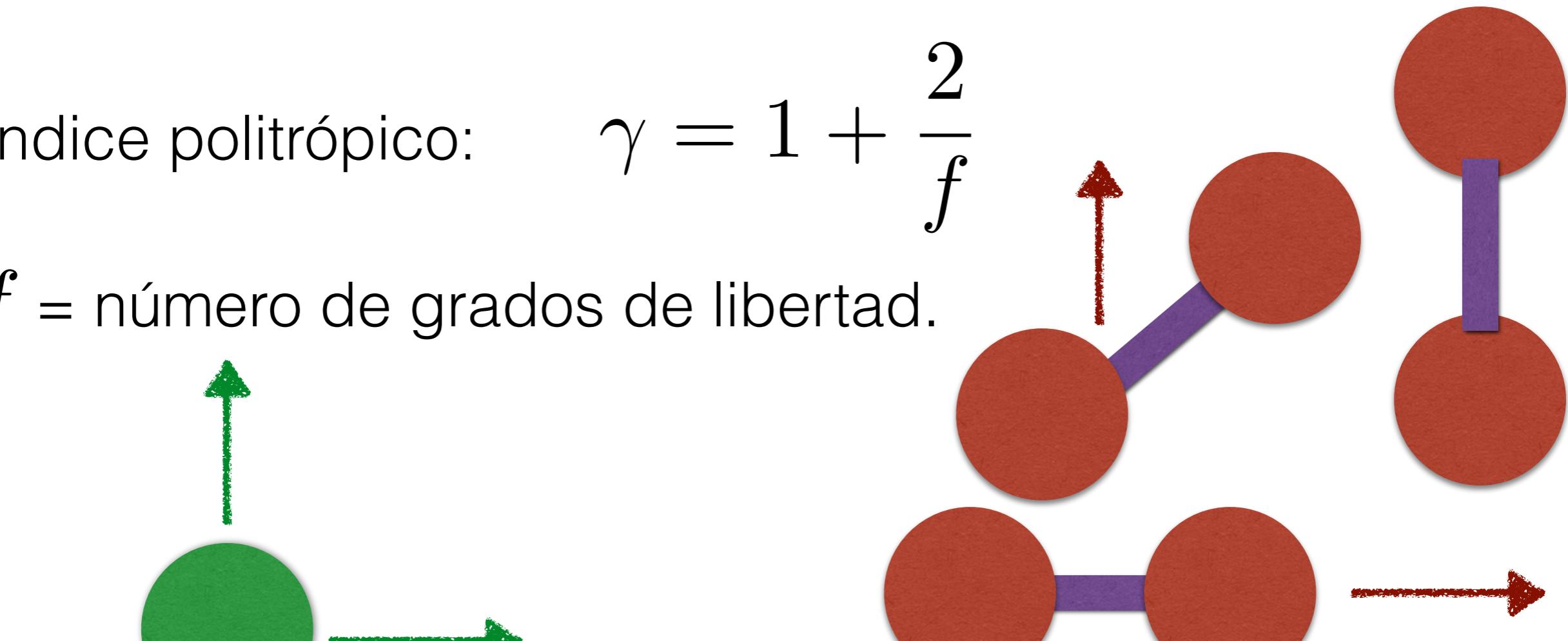
$$\gamma = \frac{5}{3}$$

Gas diatómico

$$f = 5$$



$$\gamma = \frac{7}{5}$$



Ecuación de Estado (Gas Ideal):

$$P = nk_B T$$

Densidad de energía interna:

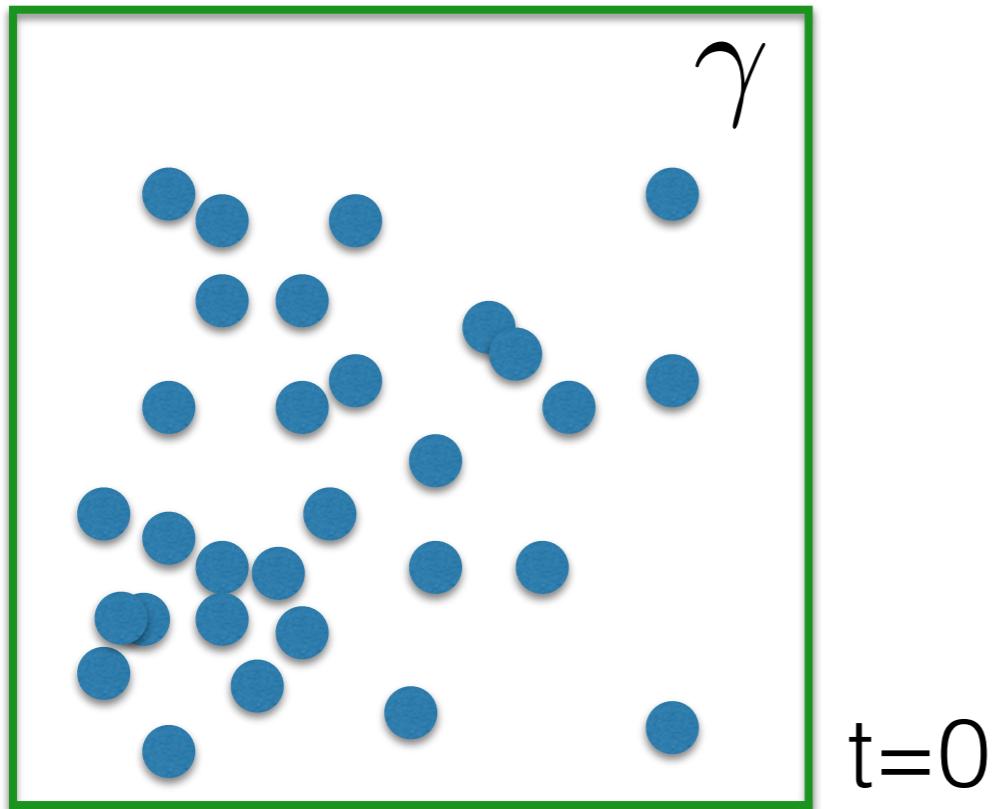
$$U = \frac{f}{2} nk_B T = \frac{nk_B T}{\gamma - 1} = \frac{P}{\gamma - 1}$$

Densidad específica de energía interna

$$\epsilon = \frac{U}{\rho} = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)} \rightarrow$$

$$P = (\gamma - 1)\rho\epsilon$$

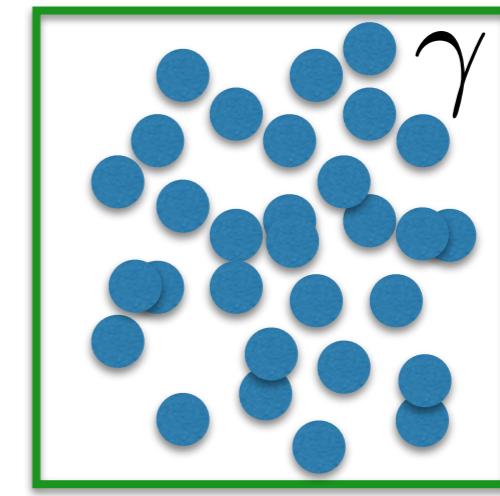
Tenemos que cerrar el sistema de ecuaciones...



$$V_1 < V_0$$

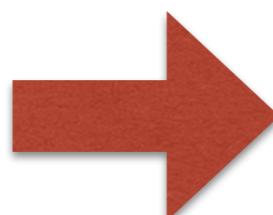
$$\rho_1 > \rho_0$$

$$P_1 > P_0$$



$$PV^\gamma = \text{constante}$$

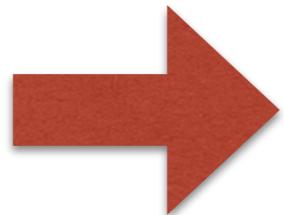
$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{constante}$$



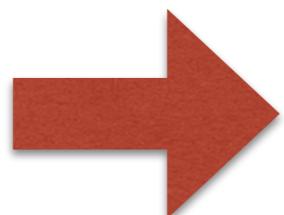
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Entonces....

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0$$



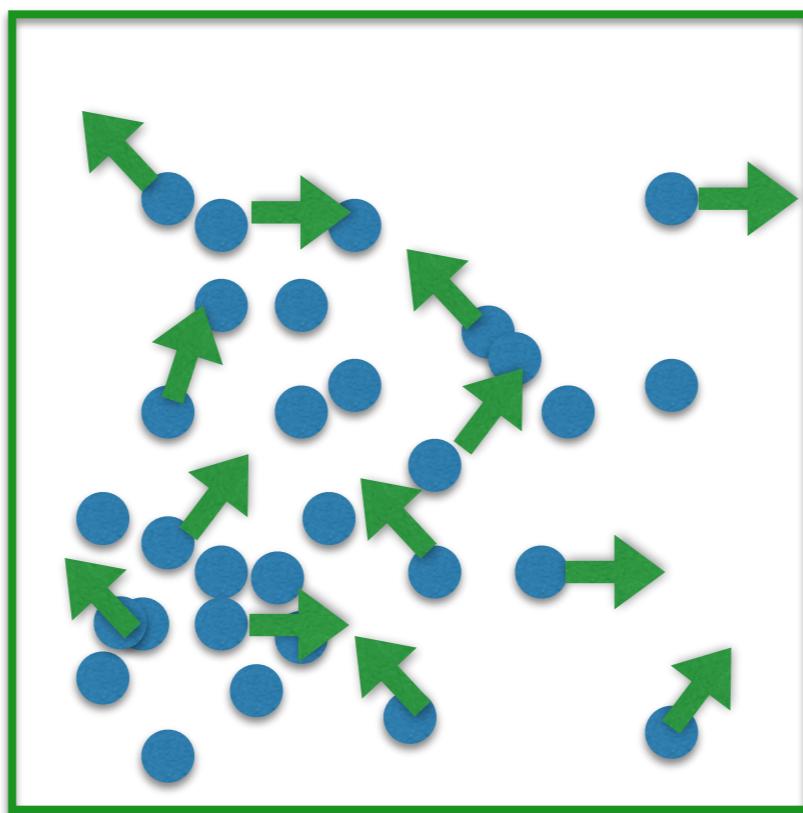
$$\frac{dP}{dt} = -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{v}$$



$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

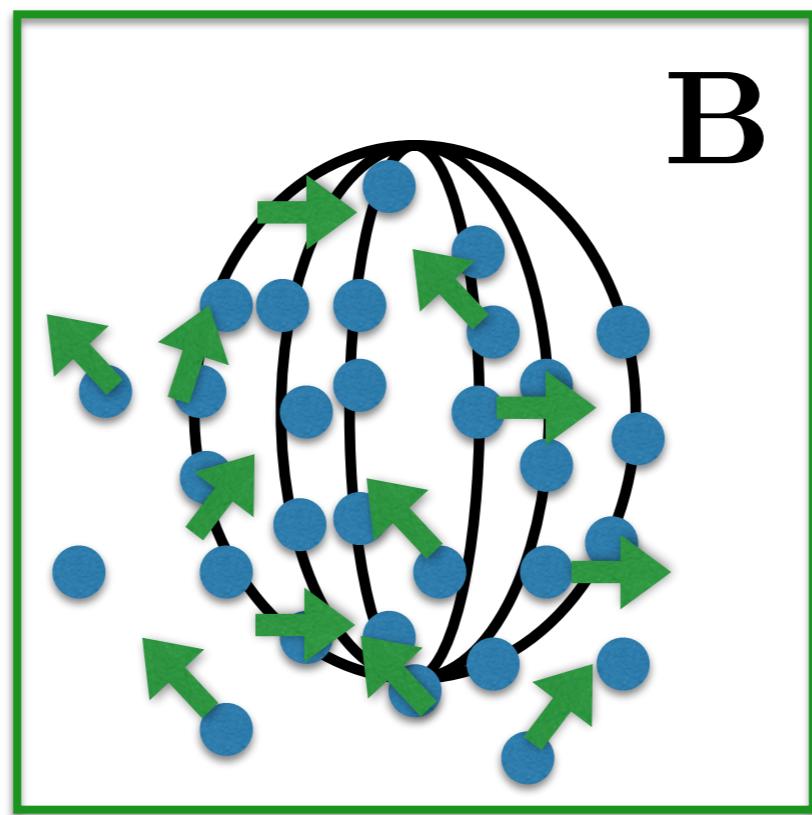
Conservación de la energía.

Densidad de Energía, E:



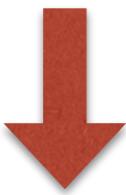
$$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Densidad de Energía, E:



$$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2$$

$$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2$$



$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Conservación de la energía:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(E + P + \frac{1}{2}B^2)\mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}$$

En resumen, llegamos a ecuaciones matriciales:

Hidrodinámica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0,$$

$$\frac{\partial [\rho \mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{I} \mathbf{P}] = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P) \mathbf{v}] = 0,$$

—

Masa

Momento

Energía

Inducción

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0,$$

$$\frac{\partial [\rho \mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B} + \mathbf{I} \mathbf{P}] = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P) \mathbf{v} - \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})] = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0,$$

donde: $P = P_{\text{th}} + (P_{\text{mag}})$ con $P_{\text{mag}} = \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2$.

$E = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + (\frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2)$, con ϵ siendo la energía interna.

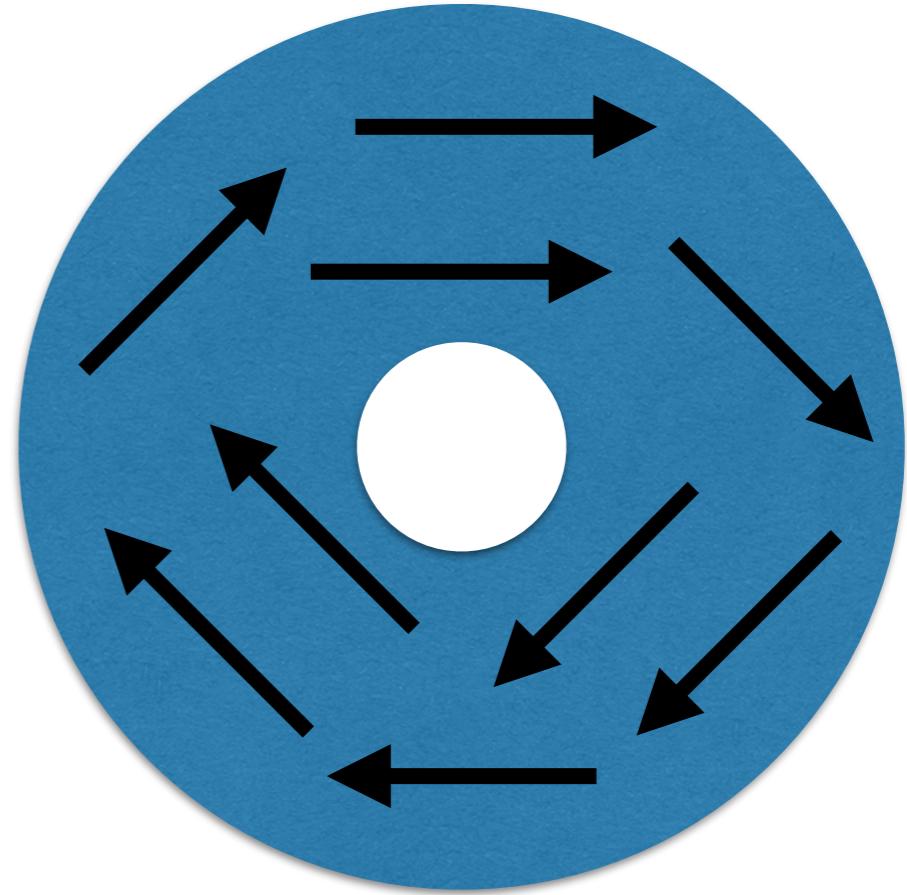
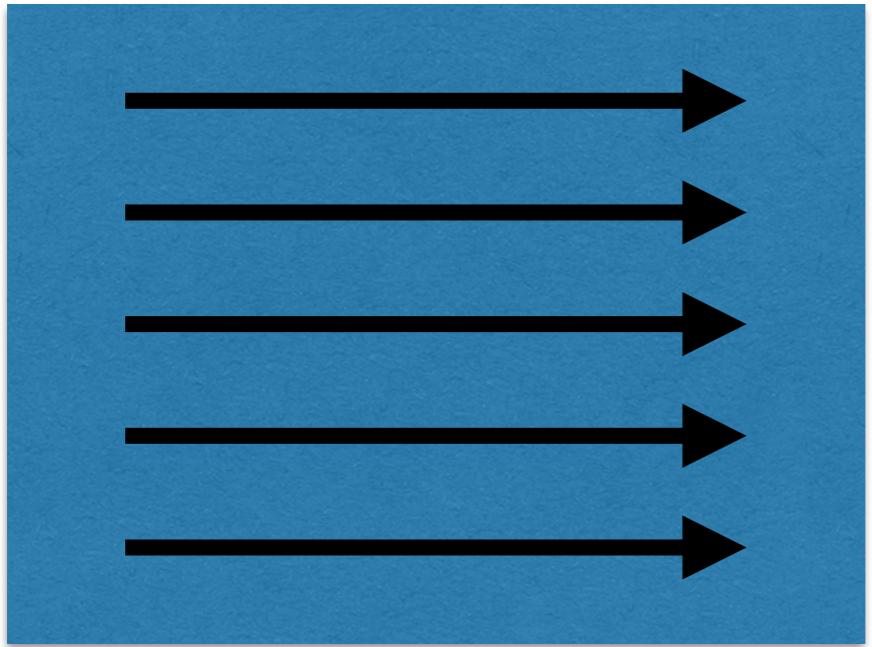
Ecuación de Estado

$$P_{\text{th}} = P_{\text{th}}(\rho, \epsilon) = (\gamma - 1) \rho \epsilon$$

Magneto-hidrodinámica

FENÓMENOS HD Y MHD

Vorticidad de un fluido



$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$$

i.e. cuantifica la rotación de un fluido

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = \nabla P \times \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

↓

Baroclinicidad de un fluido

Formación de Vórtices

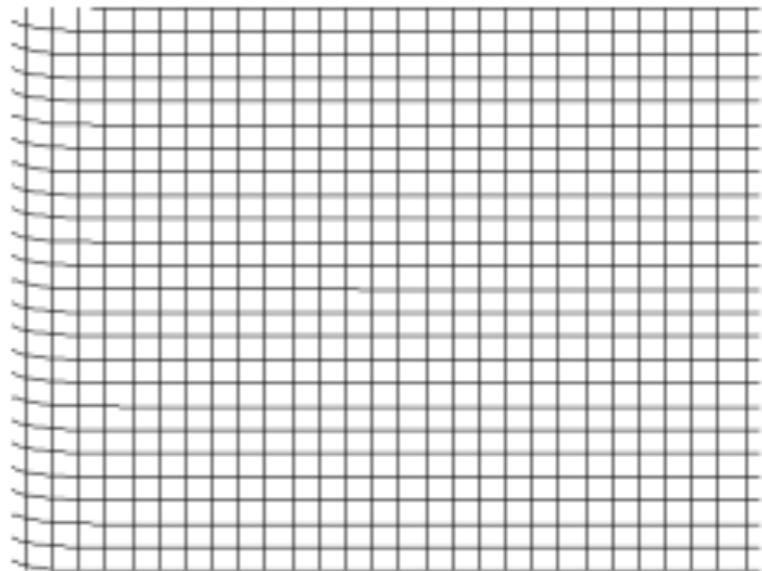
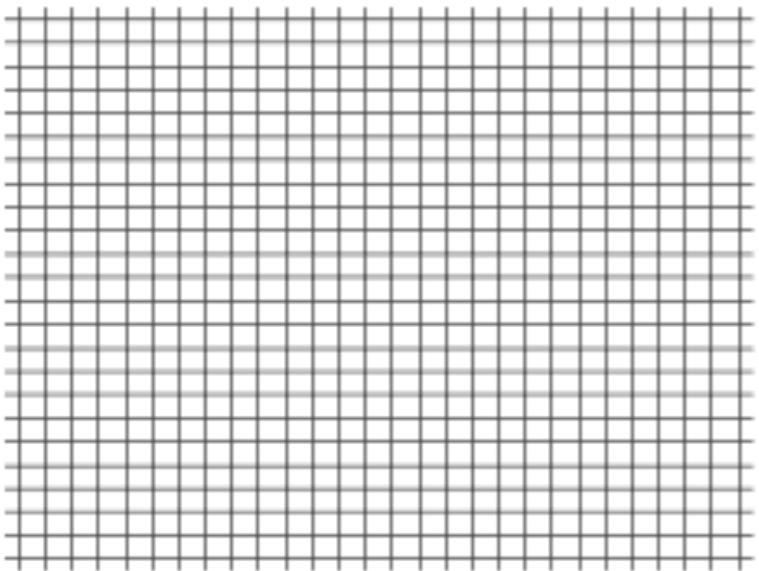
Los vórtices son estructuras tridimensionales.

Importantes en procesos de transporte de masa y turbulencia.



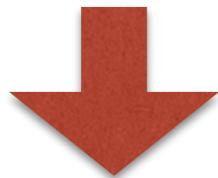
Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=72LWr7BU8Ao>

Ondas

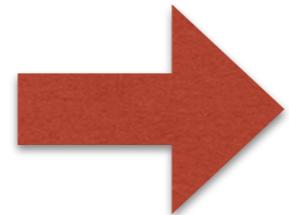


Dang C., & Chan, N
Tomado de: <https://commons.wikimedia.org>

Longitudinal

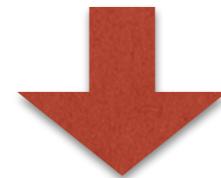


e.g. El sonido



$$w^2 = k^2 c_s^2$$

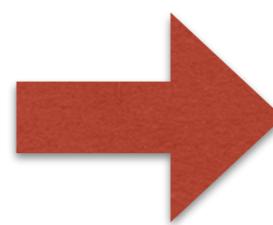
Transversa



e.g. La luz

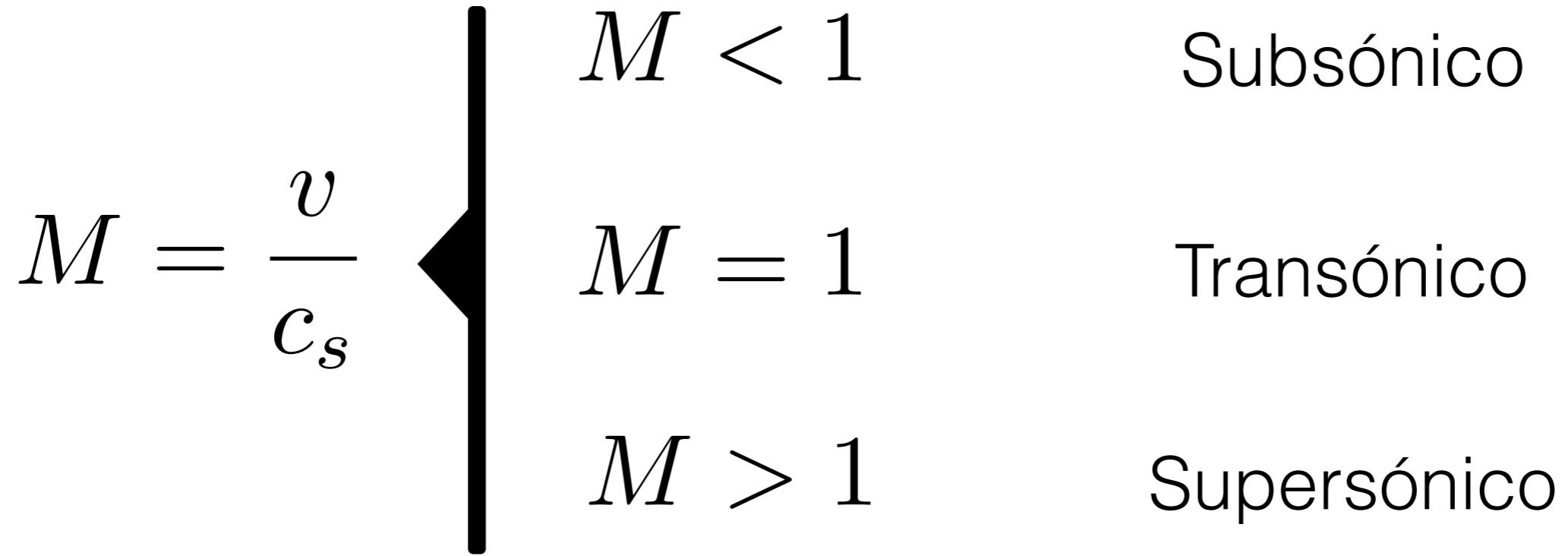
Velocidad del sonido en el gas:

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$$



$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$$

Número de Mach



Ondas de choque

Discontinuidad en densidad,
presión, y temperatura.

Ondas de choque

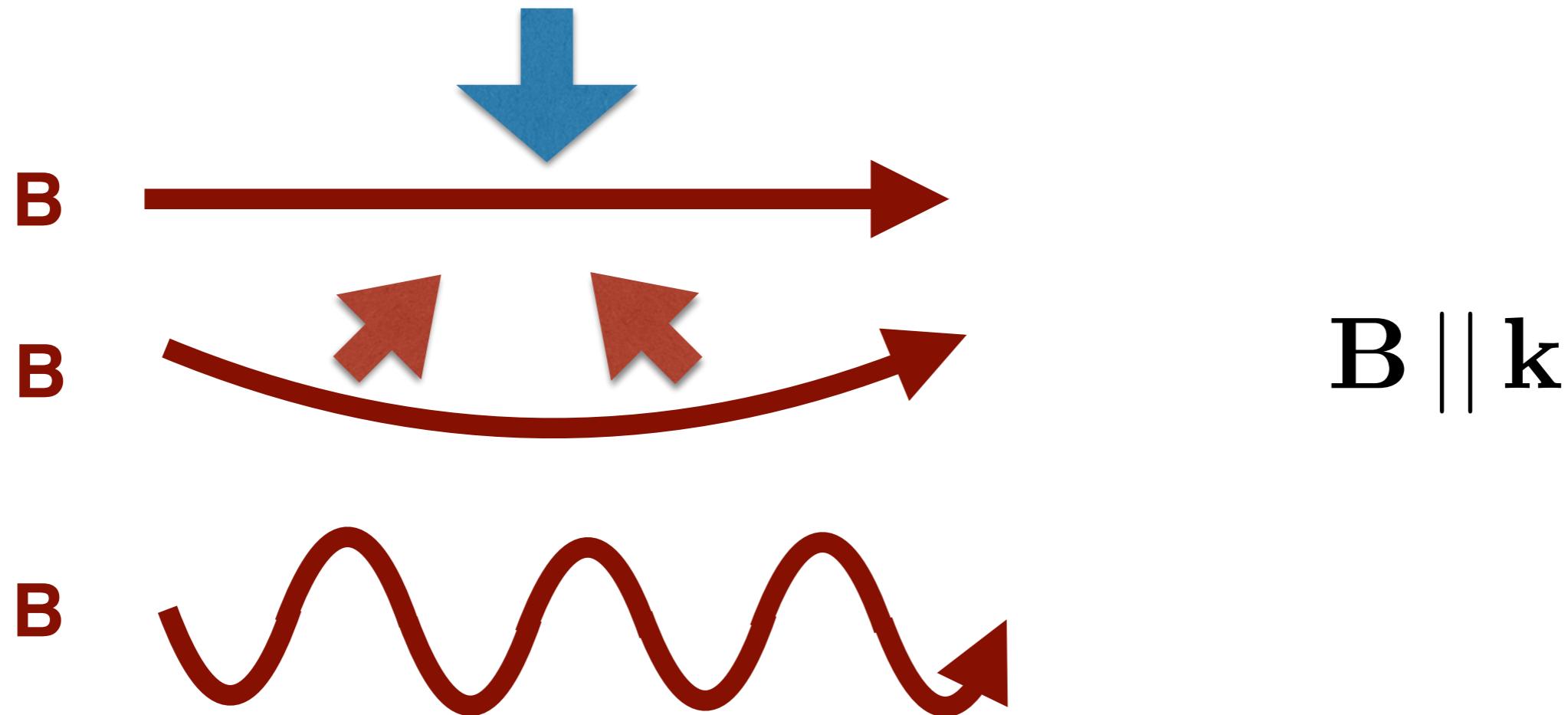
Se observa un “boom” sónico y un “bow shock”.

Ondas MHD

Ondas de Alfvén:

$$w^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 \quad \text{con:} \quad v_A^2 = \frac{B^2}{\rho}$$

Velocidad de
Alfvén



i.e. propagan la torsión magnética (no compresión).

Ondas MHD

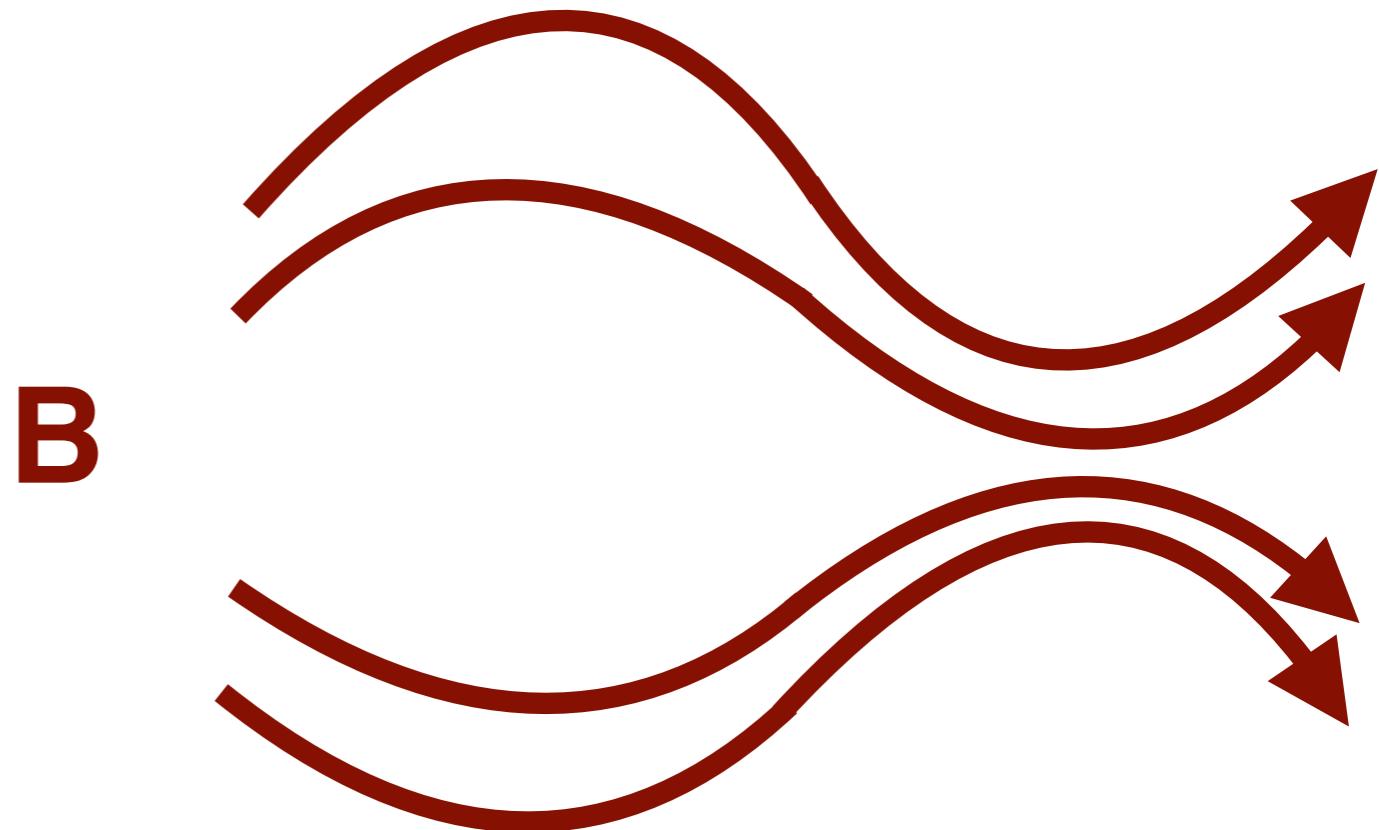
Magneto-sónicas
rápidas:



$$w^2 = k^2(v_A^2 + c_s^2)$$

i.e. propagan presión
térmica y magnética
en todas direcciones.

Magneto-sónicas
lentas:



$$w^2 \sim k_{\parallel}^2 c_s^2$$

i.e. mantiene:

$$P + \frac{1}{2}B^2 = \text{constante}$$

Densidad de Energía Magnética

$$E_M = \frac{1}{2} B^2$$

i.e. la energía magnética se guarda como presión o torsión de líneas de campo.

En Astrofísica **B** es difícil de medir, entonces usamos “Plasma Beta”.

$$\beta = \frac{P}{E_M} = \frac{2P}{B^2}$$

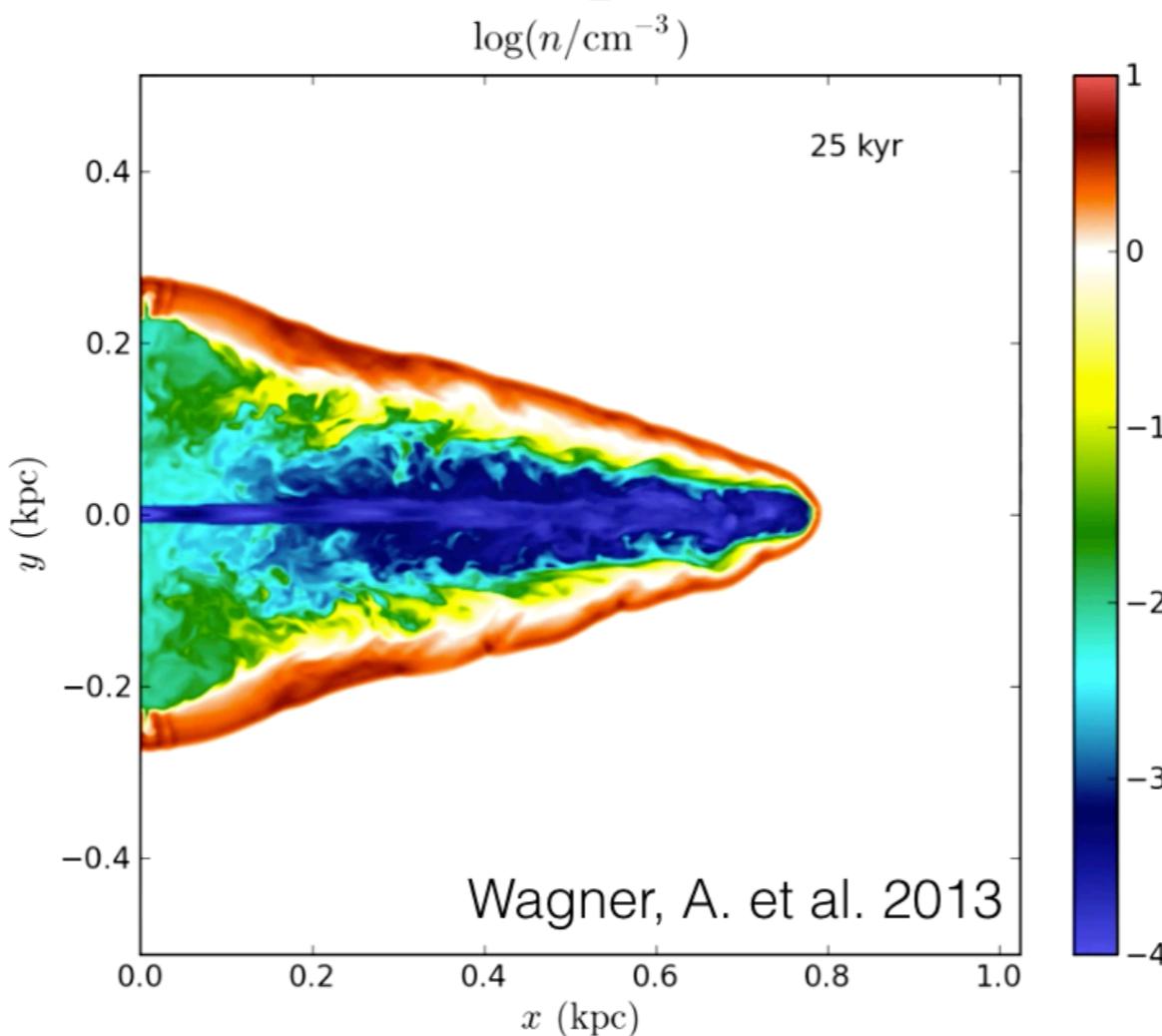


$\beta < 1$	Campos fuertes
$\beta = 1$	Equipartición
$\beta > 1$	Campos débiles

Régimenes:

Lineal:

Analítico

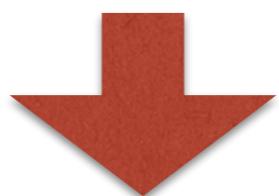


No-lineal
Numérico

Los gradientes producen inestabilidades.



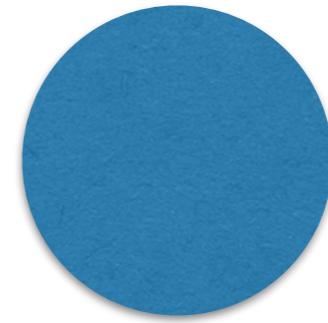
Inestabilidades son medios para liberar energía.
A través de ondas que son canales de desfogue.



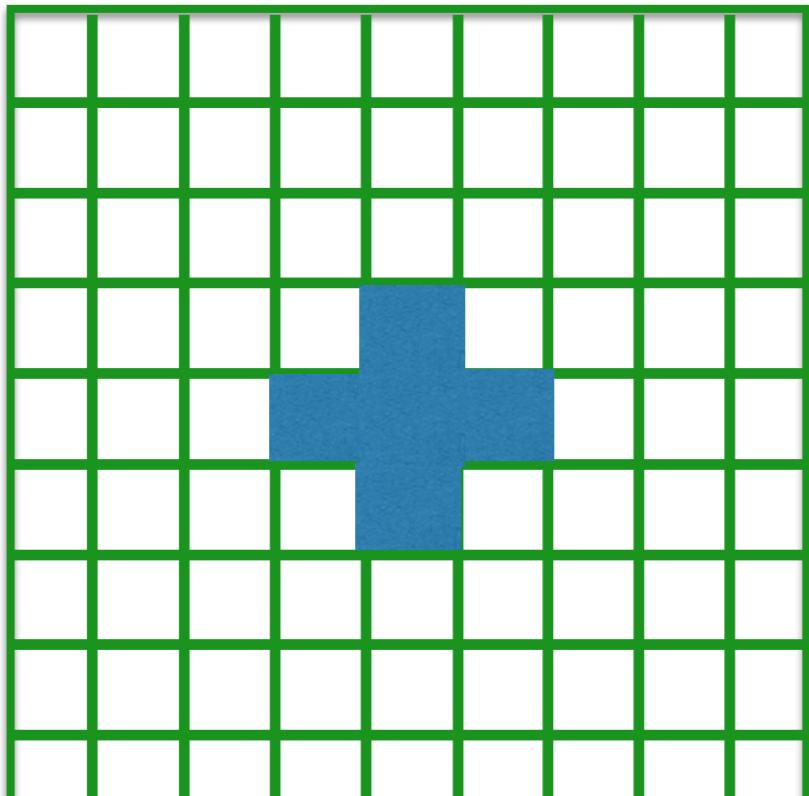
Los fluidos tienden a volverse turbulentos.

SIMULACIONES MHD

Dos tipos de discretizaciones...

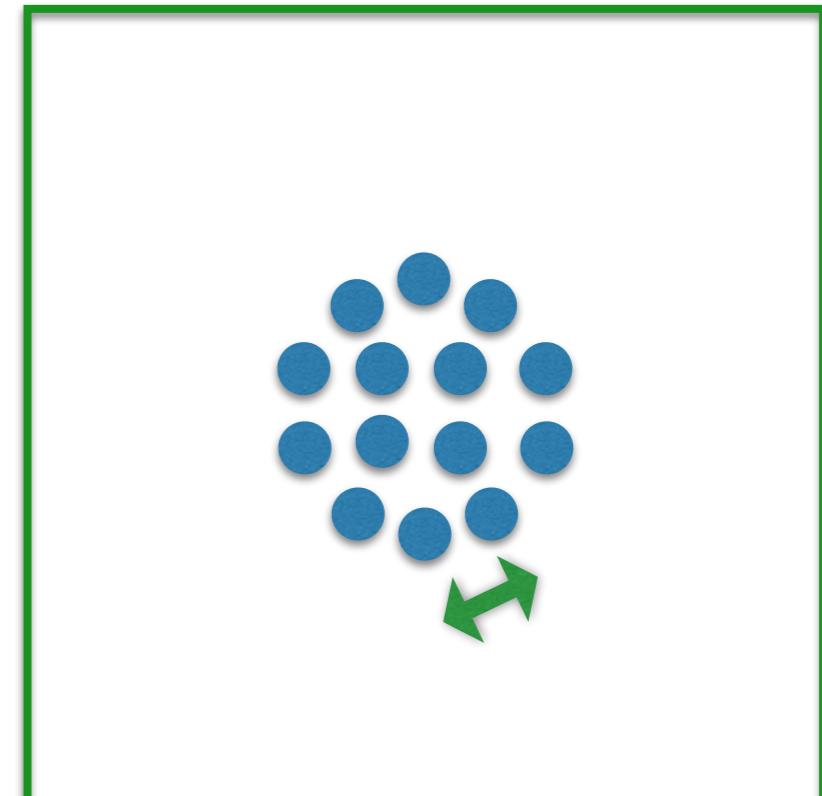


Basados en una grilla
(Grid-based hydrodynamics)



Resolución: Δx

Basados en partículas
(Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)



Resolución: Δh

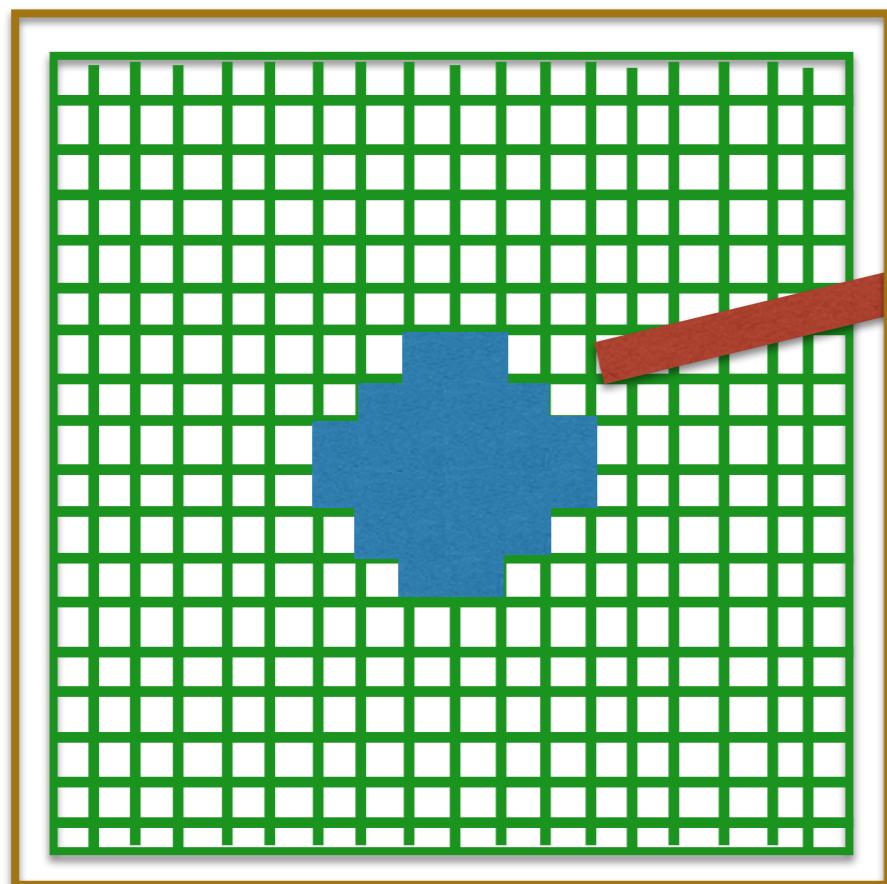
Basados en una grilla

HD y MHD de alta fidelidad

Propagación de ondas

Vorticidad e inestabilidades

ISM

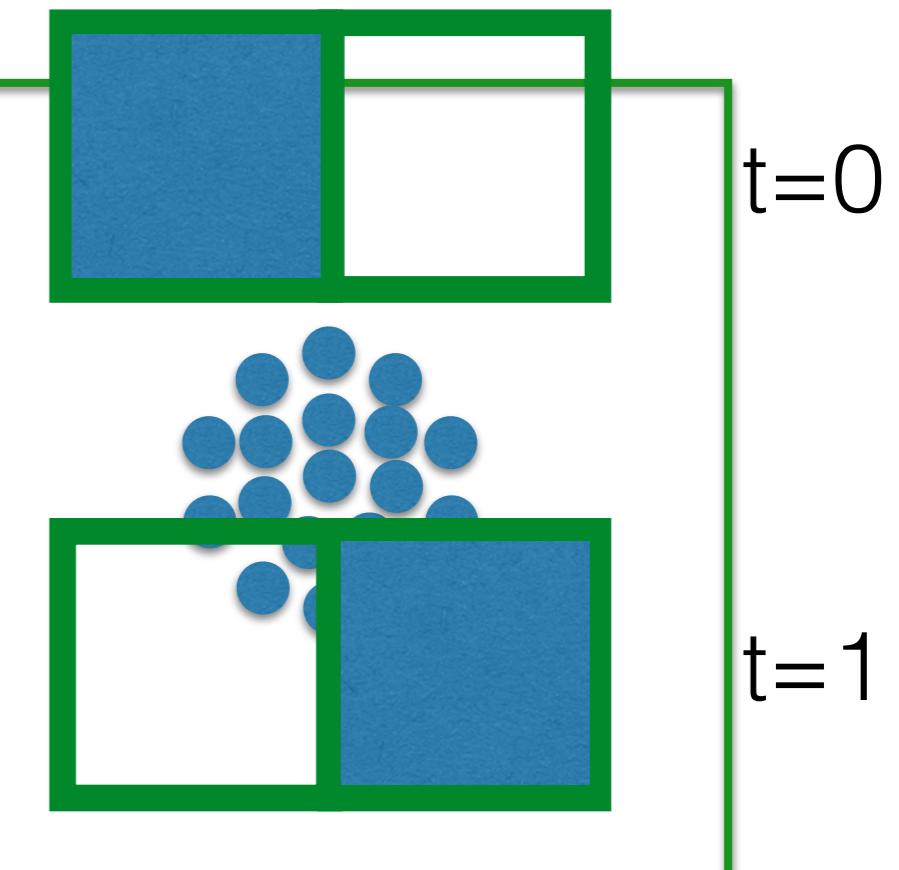


Condiciones de Frontera

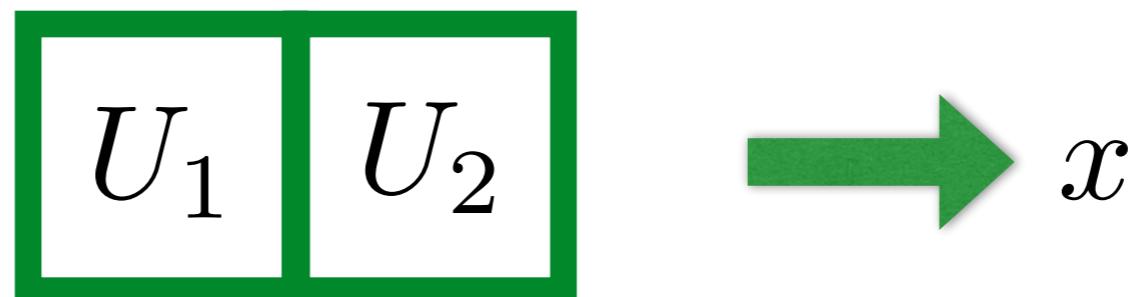
Basados en partículas

Galaxias

Agujeros negros



Solución numérica en modelos de grilla:



Ecuaciones hiperbólicas de Euler:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

Entonces... Problema de Riemann

Paquetes modernos cuentan con estos algoritmos y son libres:

OPENFOAM

FLASH

PLUTO

ASTROBEAR

ATHENA

ZEUS

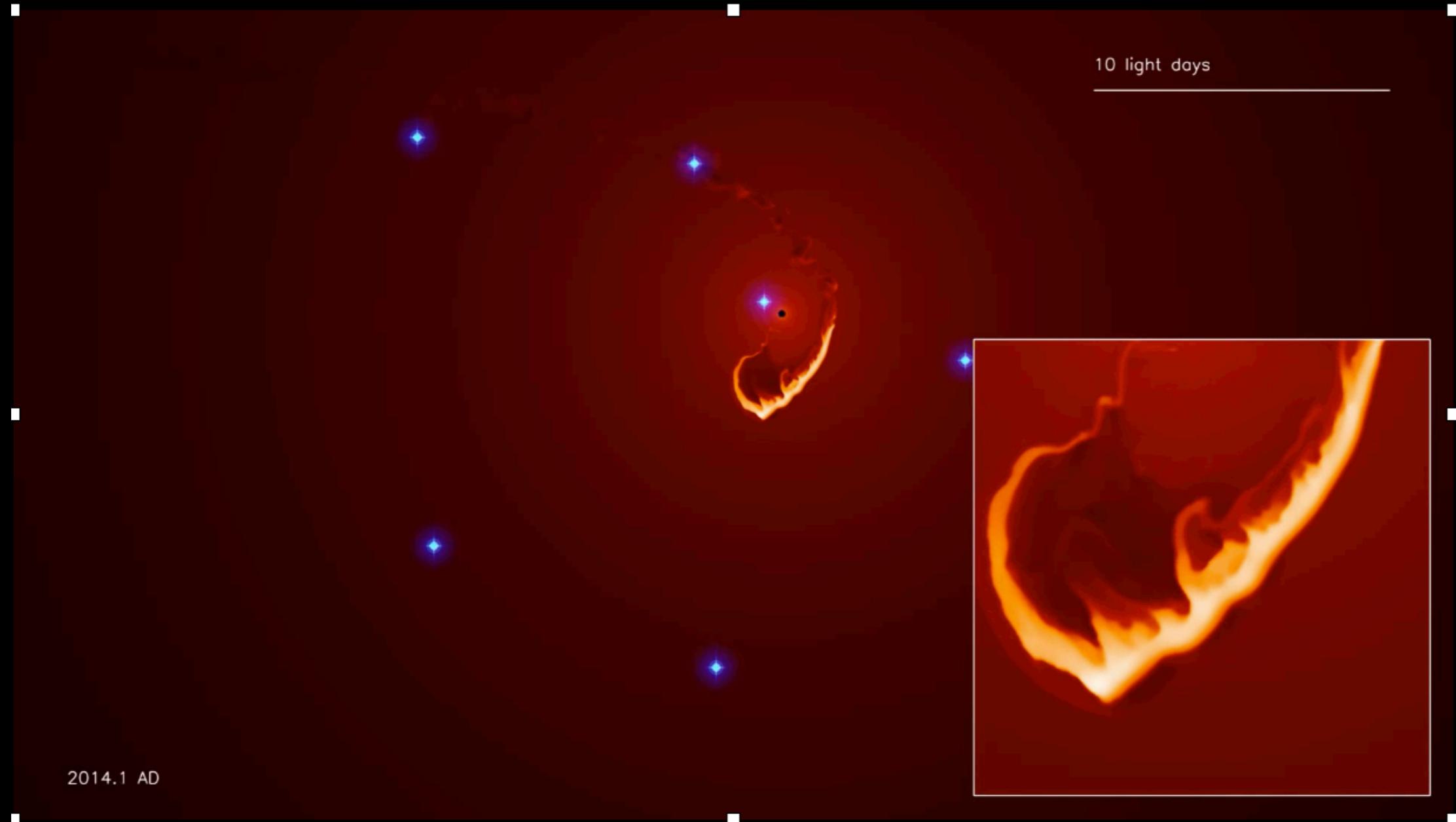
FYRIS

GADGET (SPH)

PHANTOM (SPH)

WRF (Meteorología)

PLUTO



Simulation by: M. Schartmann, A. Burkert, C. Alig, S. Gillessen, R. Genzel
using PLUTO 3.1.1 (Mignone et al. 2007)

PHANTOM (SPH)



Nealon, Price and Nixon (2015)

Bardeen-Peterson effect: [Nealon et. al 2015](#)
(<https://www.youtube.com/watch?v=AaNTY42zgtA>)

¿Animación o simulación?

Animación (Propósito divulgativo y didáctico)

Simulación (Propósito científico)

Análisis de Datos y Visualización

PYTHON

IDL

C

VISIT

SPLASH (SPH)

GRADS (WRF)

FIN