Fibonacci Heap aplicado al algoritmo de Dijkstra y Prim

Facultad de Ciencias, UNAM
Programación Declarativa, 2021-1

Villegas Salvador Kevin Ricardo

15 de febrero de 2021

Como proyecto final se quiere mostrar la utilidad de los montículos de Fibonacci (Fibonacci Heap) aplicado al algoritmo de Dijkstra para encontrar la ruta mas corta entre dos vértices, al igual que aplicado al algoritmo de Prim para encontrar el árbol mínimo.

Se mostraran caraccterísticas que hacen a los Fibonacci Heap eficientes por el tiempo amortizado que llevan sus funciones. Así poder ver la comparación que tienen al usar alguna Priority Queue a un Fibonacci Heap. Se verá la implementación desde leer un archivo *.txt* con el contenido de la representación de una gráfica conexa con sus respectivos pesos en la aristas, hasta el proceso de la información para obtener el árbol mínimo (Algoritmo de Prim) y la ruta mas corta entre dos vértices(Algoritmo de Dijkstra)

1. Preliminares

1.1. Algoritmo Dijkstra

El algoritmo Dijkstra, nombrado así por su creador Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002), es un algoritmo para encontrar el camino mas corto de un vértice a el resto de los vértices de un grafo con pesos en las aristas. El algoritmo consiste en ir explorando todos los caminos posibles de un vértice v_i a un vértice v_j, y de éstos caminos tomar el de peso mínimo.

Ya que de un vértice v_i a un vértice v_j tiene que ver todos los caminos posibles, éste vértice v_i debe pasar por todos los demás vértices para poder llegar a determinar cual es el camino con peso mínimo.

Es por éso que llegamos a que la complejidad del algoritmo es de $O(|V|^2+|E|) = O(|V|^2)$, ahora bien usando Priority Queue, llegamos a que la complejidad del algoritmo llega a ser $O((|E| + |V|) \log |V|) = O(|E| \log |V|)$[2]

1.2. Algoritmo Prim

El algoritmo Prim, diseñado por Vojtěch Jarník (1897-1970), después nombrado por así por el cientifico Robert C. Prim, es un algoritmo para encontrar el árbol generador mínimo empezando desde un vértice v_i hasta llegar a cada uno de los vértices de un grafo conexo con pesos en las aristas.

Ya que de un vértice v_i se debe computar el recubrimiento de llegar a cada uno de los vértices del grafo, se debe comparar cada uno de los caminos que hay del vértice v_i a un vértice v_j, es decir, sea la arista (v_i,v_j) la arista de peso mínimo, a esta arista se le anexa la arista (v_j,v_k), siendo ésta otra arista de peso mínimo, para ello se debio comparar con el resto de las demás aristas en el grafo. Además se debío seguir el proceso hasta poder tener a todos los vértices del grafo en el árbol generador mínimo.

Ahora bien siguiendo éste proceso es por lo cual llegamos a que la complejidad del algoritmo es $O(|V|^2)$, sin embargo, si utilizamos Priority Queue tenemos una complejidad de $O((|E| + |V|) \log |V|) = O(|E| \log |V|)$[3]

1.3. Fibonacci Heap

Michel L. Fredman y Robert E. Tarjan, en 1987 presentan la estructura de datos Fibonacci Heap, la cual mejora los algoritmos de optimización en un flujo de redes.

Un Fibonacci Heap es un bosque de árboles Heap-Ordenados, no siguiendo una estructura definida, es decir, no hay condiciones en el número de árboles o su estructura, es parecido a un Heap Binomial sin seguir un orden en especial. La única restricción que siguen los Heap Fibonacci son la manera de manipularlos. Ya que es parte de Priority Queue, sigue las operaciones como INSERTA, FUNDE, ENCUENTRA MÍNIMO, LIGA, BORRA MÍNIMO, DECREMENTA LLAVE, CORTE EN CASCADA.

Para poder mantener la estructura de un Fibonacci Heap se sigue que:

- El propósito de marcar los nodos es guardar la huella por dónde se harán los cortes en cascada.
- Tarjan y Fredman generan dos propiedades cruciales:
  1. Cada árbol en un Fibonacci Heap no necesariamente es un árbol binomial, pero tiene un tamaño al menos exponencial en el rango de su raíz.
  2. El número de cortes en cascada que durante una secuencia de operaciones está acotado por el número de operaciones que realizan ELIMINA y DECREMENTA LLAVE
- La propiedad 1 se basa en lo siguiente:
  - **Lema.** Sea x cualquier nodo en un Fibonacci Heap. Acomodar los hijos de x en el orden en que estos fueron ligados a x. Entonces, el i-ésimo hijo de x tiene un rango de al menos $(i-2)$.
  - **Corolario.** Un nodo de rango k en un Fibonacci Heap tiene al menos: F_{k+2} descendientes, incluyendo el mismo. Donde F_k es el k-ésimo número de Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$, $k > 3$
  - **Teorema.** Sea x un nodo en un Fibonacci Heap. Sea $k = rank(x)$.
    El tamaño del árbol enraizado en x satisface: $k \geq F_{k+2}$

Del **Corolario** es de donde tenemos el nombre de la estructura Fibonacci Heap, y del comportamiento de la estructura de datos, es que podemos obtner las siguientes complejidades.[4]

- **Inserta.** Se crea un núevo heap, después sólo une el nuevo Heap a la estructura Fibonacci Heap. Ya que ésta operación ocupa la operación FUNDE, la misma que requiere tiempo constante, INSERTA gasta tiempo $\Theta(1)$
- **Funde.** Combina dos Heaps, verifica cual de las dos raíces es menor, de ahí se agrega los árboles de un heap a otro, como solo consta de la asignación, ésta acción requiere tiempo constante.
- **Encuentra mínimo.** Ya que se tiene asignado el árbol mínimo, ésta acción requiere de tiempo $O(1)$
- **Liga.** Sean dos Heaps del mismo rango, ahora bien, se verifíca cual es la raíz mínima seguido se crea un nuevo Heap el cual tiene la raíz mínima seguido de la unión de los hijos de ambos Heaps. Como son sólo asignaciones, se requiere de un tiempo $O(1)$
- **Elimina mínimo.** Se elimina el elemento mínimo del Fibonacci Heap, seguido de, se reorganizan los hijos, ligando aquellos que tienen un mismo rango, hasta que no halla dos Heaps con el mismo rango. De acuerdo al análisis de Tarjan y Fredman, ésta acción requiere de un tiempo total amortizado de $O(\log |V|)$

- **Decrementa llave.** Dado que sólo se cambia el valor de un nodo, y verificar si el nodo padre es marcado o no y solo deslindarlo de la lista de hijos, ésta acción requiere de un tiempo constante.

Dado éstas acciones podemos ver que Fibonacci Heap es muy eficiente a comparación de otros Heaps.[5]

Operation	Linked list	Binary Heap	Binomial Heap	Fibonacci Heap
Make-Heap	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
Insert	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
Minimum	$O(n)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$
Extract-Min	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Merge	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
Decrease-Key	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
Delete	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$

Para poder ver el tiempo amortizado de la operaciones usamos la función potencial:

$$\Phi(H) = t(H) + 2 \cdot m(H)$$

Donde $t(H)$ son los árboles en el Fibonacci Heap y $m(H)$ son los nodos marcados.

Ahora bien, seguimos en los análisis de las operaciones:

- Inserta
  Sea H' el Fibonacci Heap después de insertar un nuevo nodo.

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= (t(H') + 2 \cdot m(H')) - (t(H) + 2 \cdot m(H)) \\ &= (t(H) + 1 + 2 \cdot m(H)) - (t(H) + 2 \cdot m(H)) \\ &= t(H) - t(H) + 1 + 2 \cdot m(H) - 2 \cdot m(H) \\ &= 1 \in O(1)\end{aligned}$$

- Extract-Min
  Dado el costo actual tenemos $O(r(H)) + O(t(H))$, donde $O(r(H))$ es el tiempo para fusionar los hijos del árbol raíz, ahora bien, $O(r(n)) + O(t(H))$ el tiempo que tarda en actualizar el elemento mínimo, además de consolidar los árboles restantes.

$$t(H') \leq r(H) + 1 \text{ ya que dos árboles no tienen el mismo rango}$$
$$\Delta\Phi = r(H) + 1 - t(H) = O(r(H)) \in O(\log n)$$

- Decrease-Key
  Sea c el número de cortes en cascada, $O(1)$ el tiempo para cambiar la clave y $O(1)$ el tiempo para cortar y añadir el nodo a la lista raíz.

$$\begin{aligned}t(H') &= t(H) + c \\ m(H') &\leq m(H) - c + 2 \\ \Delta\Phi &\leq c + 2(-c + 2) = 4 - c \in O(1)\end{aligned}$$

1.4. Fibonacci Heap aplicado en el Algoritmo Dijkstra y Prim

Como ya vimos las complejidades de los algoritmos Dijkstra y Prim, ahora bien, ya que sabemos el timepo amortizado con la estructura de datos Fibonacci Heap podemos usar ésta estructura y mejorar el tiempo de complejidad de los algoritmos.

Sabiendo que los tiempos de la estructura Fibonacci Heap son:

- Insertar $O(1)$
- Fusionar $O(1)$
- Encontrar mínimo $O(1)$
- Extraer mínimo $O(\log n)$ tiempo amortizado
- Decrementar llave $O(1)$ tiempo amortizado

Tenemos el costo de tiempo para los algoritmos de Dijkstra y Prim como:

$$\begin{aligned} O(nT_{insertar} + nT_{extract-min} + mT_{decrease-key}) \\ = O(n + n\log n + m) \\ = O(m + n\log n) \end{aligned}$$

Que es un tiempo asintóticamente más rápido.

2. Especificaciones

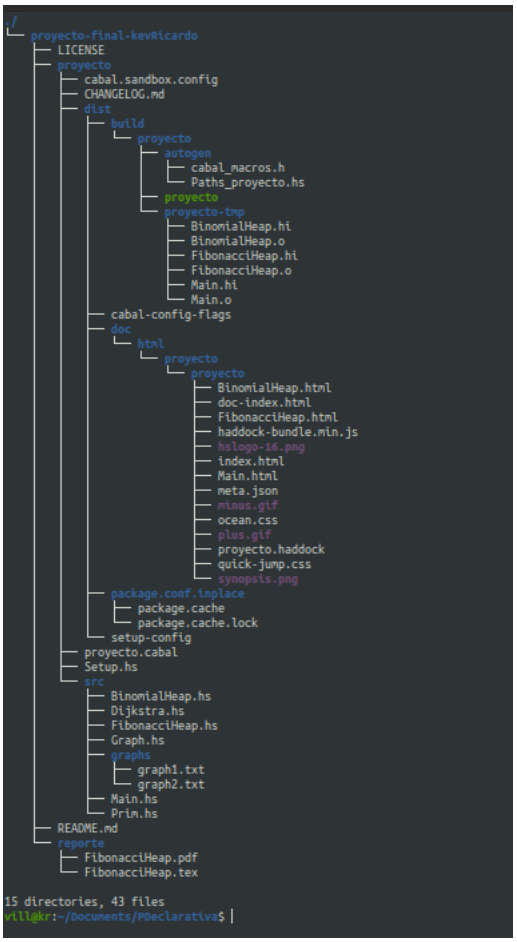
Se presentan las herramientas utilizadas para la construcción del sistema, modulos utilizados para llevar acabo la resolución del problema, así como las pruebas del algoritmo.

2.0.1. Herramientas

- **Lenguaje de Programación.**
  Haskell
- **Sistema de Construcción.**
  Cabal (The Common Architecture for Building Applications and Libraries) 2.4.0.0
- **Documentación.**
  Haddock 2.22.0
- **Control de versiones.**
  GitHub 2.30.0 Fibonacci Heap (Dijkstra y Prim)

Estructura

En conjunto con **Cabal** se realizó la construcción del directorio de la siguiente manera:



Dentro de la carpeta **./reporte** podemos encontrar, éste archivo. Seguido de la carpeta **./proyecto** donde se encuentra todo lo relacionado con el sistema.

Ahora bien seguimos con la siguiente estructura:

- **./dist/build**. Se encuentra el archivo ejecutable.
- **./dist/doc**. La documentación del sistema.
- **./src**. Código fuente
- Seguido de la configuraciónes necesarias para poder correr el código

2.1. Manejo del sistema

Descarga del proyecto

El proyecto se puede encontrar en la siguiente liga: *https://github.com/ciencias-unam/proyecto-final-kevRicardo*. Para descargarlo basta con ejecutar *Git* en cualquier directorio del sistema de archivos.

```
$ https://github.com/ciencias-unam/proyecto-final-kevRicardo.git
```

Compilación y ejecución

Para poder compilar el proyecto se dará por hecho que ya se tiene Cabal instalado, de lo contrario podrá ejecutar

```
$ sudo apt-get install cabal-install
```

Una vez ejecutado el comando, podrá ejecutar lo siguiente para poder si Cabal se ha instalado correctamente

```
$ cabal --version
```

Una vez ya teniendo todo listo, podemos comenzar la compilación, y ejecución del programa. Primero nos posicionamos en la ruta

```
.../PDeclarativa/proyecto-final-kevRicardo/proyecto$
```

Ya que estamos en la ruta correcta, para obtener el archivo ejecutable, ponemos el siguiente comando:

```
.../proyecto-final-kevRicardo/proyecto$ cabal build
```

Esto nos generará el ejecutable en la dirección *./dist/buil/proyecto*. Una vez generado nuestro ejecutable, podemos correr el proyecto con el siguiente comando:

```
.../proyecto-final-kevRicardo/proyecto$ cabal run
```

Cabe mencionar que no es necesario, realizar el ejecutable antes de correr el proyecto, ya que run, lo genera por sí solo. Para generar la documentación del proyecto, utilizamos el siguiente comando:

```
.../proyecto-final-kevRicardo/proyecto$ cabal haddock --executables
```

Así la documentación la encontramos en *./dist/doc/html/proyecto/proyecto/*

Una vez ya corriendo el proyecto empezará por pedir los archivos a procesar para poder probar el algoritmo de Dijkstra y Prim usando Fibonacci Heap.

Referencias

[1] Herrera S., Salcedo O., Gallego A.. (2014). Efficiency Graphs Algorithmic's applications oriented to GMPLS networks. Revista Facultad de Ingeniería, 23, 91-104.

[2] Rodríguez R., Lazo M., (2016). Shortest path search using reduced graphs. Universidad de las Ciencias Informáticas, Facultad 3. Vol. XXXVIII, 32-42

[3] Rodríguez M., (2009). PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN ÁRBOLES GENERADORES. Tesis de Universidad. UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID, FACULTAD DE INFORMÁTICA

[4] M. en I. Gasca M., L. en C. C. Juárez Federico. (2004). El análisis Amortizado y sus Aplicaciones. México: Departamento de Matemáticas.

[5] Stajano, F., Sauerwald, T. (2015). Fibonacci Heaps. University of Cambridge, https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1415/Algorithms/fibonacci.pdf