Finanzas Matemáticas

Ciro Iván García López

Abril 2021

1. Caso Interbolsa: Interbolsa fue una empresa de origen Colombiano dedicada al corretaje e inversiones,fundada en 1990 en la ciudad de Medellín - Colombia como una respuesta al vacío que dejo el cierre de la Bolsa de Valores de Medellín. Para los 2000 Interbolsa era una firma sólida, llegando a obtener una calificación AAA de Standard & Purce y que de acuerdo al documento de evaluación "... contaba con una estructura empresarial solida ... "[Jen13]. Su prosperidad también era visible en el extranjero, llegando a estructurar filiales en Brasil y Panamá.

   Para el año 2009, Interbolsa logra un papel protagónico en el mercado bursátil colombiano y captura la atención de inversionistas en todos los niveles sociales, la meta era poner en marcha un plan de compraventa de acciones de Fabricato, una empresa de textiles. Tal como documenta [Esp, Cer] dicha atención fue mediante "lobby" político y social de sus directivos.

   La entrada en vigencia de tratados de libre comercio hizo pensar a los directivos de Interbolsa que Fabricato crecería a un ritmo constante y se convertiría en una empresa líder en el mercado, por lo que resultaría razonable invertir en las acciones de la empresa. Interbolsa utilizo la figura de Repos para negociar con las acciones, los Repos son definidos en el artículo 2.36.3.1.1 del Decreto 2555 de 2010 como:

   > Las operaciones de reporto o repo son aquellas en las que una parte (el "Enajenante"), transfiere la propiedad a la otra (el "Adquirente") sobre valores a cambio del pago de una suma de dinero (el "Monto Inicial") y en las que el Adquirente al mismo tiempo se compromete a transferir al Enajenante valores de la misma especie y características a cambio del pago de una suma de dinero ("Monto Final") en la misma fecha o en una fecha posterior previamente acordada

   Mediante dicha figura, Interbolsa logró elevar el precio de ĺa acción un 270 % en menos de un año, la acción pasaría de costar 27 COP en Enero de 2011 a costar 73 COP en Diciembre de 2011, ver Figura 1, no obstante la realidad sería diferente y Fabricato no lograría el crecimiento esperado. Por otro lado, los exorbitantes incrementos en el valor de la acción de Fabricato no pasaron desapercibidos en el mercado bursátil y no era para menos ya que la segunda acción con mayor crecimiento en el mercado no superaba el 10 %.

   El 2 de Noviembre de 2012 se ventila públicamente los malos manejos en la compañía de corretaje y se da la intervención de la firma por parte de la Superintendencia financiera, se descubre un entramado de corrupción, desvió de utilidades y malversación del dinero de los inversionistas, muchos de los cuales no tenían información al respecto [Cer]. En el momento de la intervención el precio de la acción de Fabricato era de 92.5 COP y tres meses después el precio de la acción cae a 22 COP, ver Figura 2.

   En el trabajo de Duque [Seb14, Tela] se analiza el papel que cumplió el estado Colombiano en este caso, partiendo de la constitución y leyes del territorio concluye que hay responsabilidad estatal en el millonario robo. La falta de inspección y vigilancia a Interbolsa por parte de la Superintendencia Financiera permitió el crimen, dicha omisión se puede atribuir a la buenas relaciones que tenían los ejecutivos de Interbolsa con el Gobierno.

   En la actualidad, la justicia colombiana no ha sido capaz de procesar a los responsables y la gran mayoría de los delitos imputados han prescrito[1], convirtiéndose en una de las mayores estafas de cuello blanco cometidas en Colombia [Telc, dC], en donde ha primado la impunidad y una casi nula reparación a las

[1] Dicho de un derecho, de una responsabilidad o de una obligación: Extinguirse por haber transcurrido cierto período de tiempo, especialmente un plazo legal. [RAE]

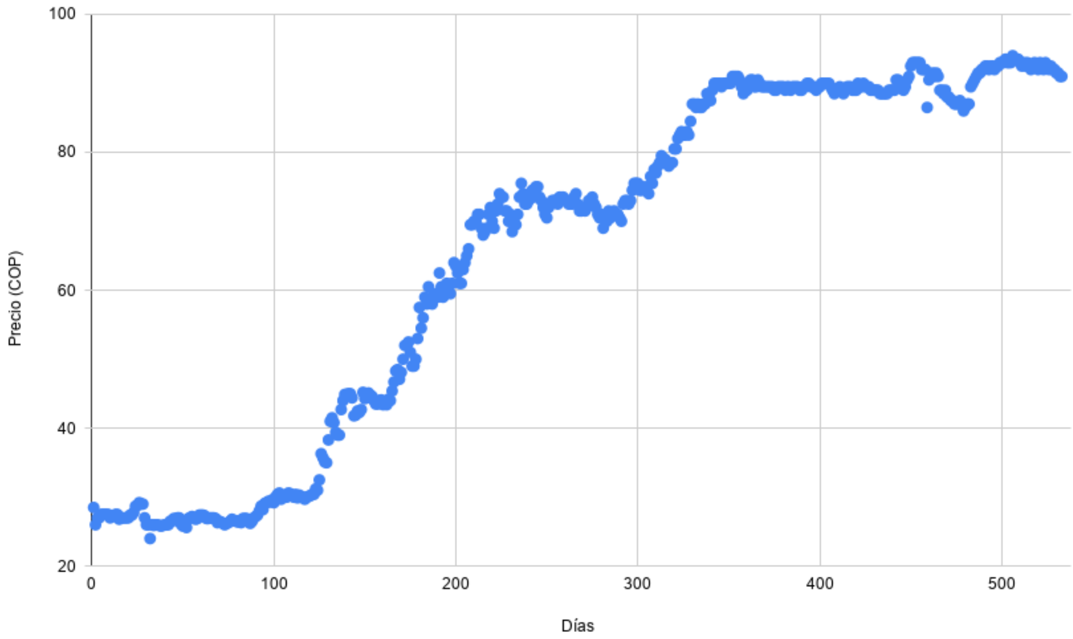

Figura 1: Precio de la acción Fabricato [dVdC], la ventana de tiempo es del 01/09/2010 al 02/11/2012

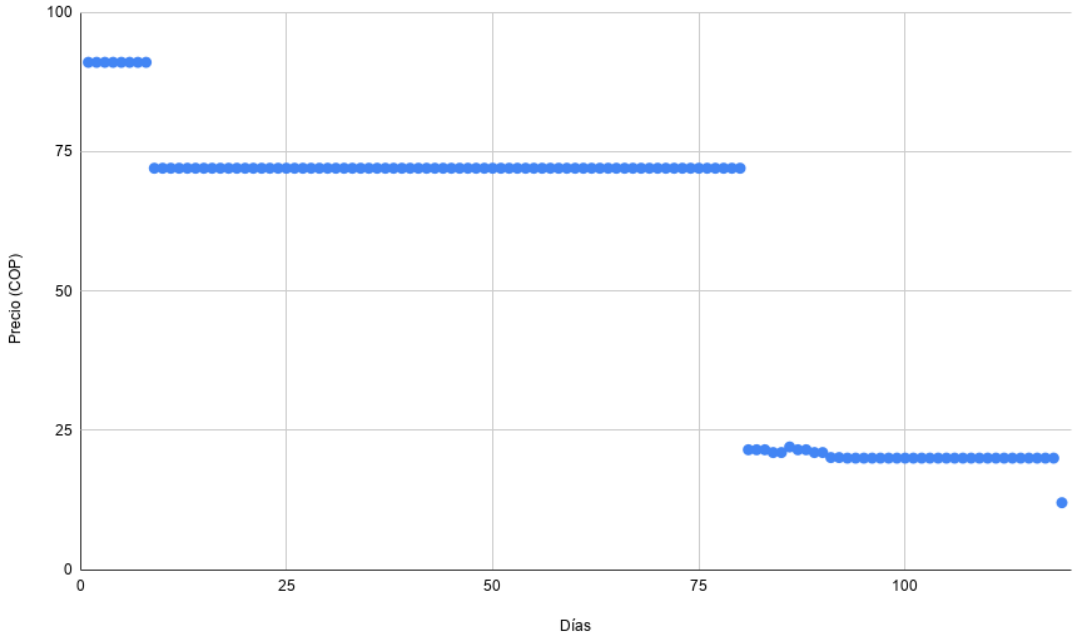

Figura 2: Precio de la acción Fabricato [dVdC], la ventana de tiempo es del 02/11/2012 al 03/04/2013

víctimas. Se estima que, para ese momento, las perdidas de los inversionistas rondaron el medio billón de Pesos Colombianos, con esta cifra se le podría dar techo a 20 mil familias sin hogar.

El impacto real de este caso sobre el mercado colombiano aún no ha sido totalmente cuantificado, como se sugiere en [Rep] hubo perdida en la confianza de los inversionistas para con el mercado colombiano y una crisis bursátil derivada del hecho que Interbolsa contaba con una partición cercana al 20 % en el mercado local.

2. Considere contratos futuros a doce meses en el tipo cambio, una estrategia de inversión $\xi \in \mathbb{R}^6$ se compone de:

   - ξ_0: un contrato es vendido por ξ_0 GBP en $t = 1$, de tal manera que se pagan ξ_0 GBP a cambio de recibir $\xi_0 * \tau$ USD.
   - ξ_1: un contrato es comprado por ξ_1 USD en $t = 1$, de tal manera que se pagan ξ_1 USD a cambio de recibir $\xi_1 \tau^{-1}$ GBP.
   - ξ_2: endeudar por ξ_2 USD en $t = 0$ y por lo tanto invertir $\xi_2 \tau_s^{-1}$ GBP. Se espera en $t = 1$ pagar $\xi_2(1 + r_d)$ USD y recibir $\xi_2 \tau_s^{-1}(1 + r_p)$ GBP.
   - ξ_3: endeudar por ξ_3 GBP en $t = 0$ y por lo tanto invertir $\xi_3 \tau_s$ USD. Se espera en $t = 1$ pagar $\xi_3(1+r_p)$ GBP y recibir $\xi_3 \tau_s(1 + r_d)$ USD.
   - ξ_4: invertir ξ_4 USD en $t = 0$ y por lo tanto pedir prestados $\xi_4 \tau_s^{-1}$ GBP. En $t = 1$ se espera recibir $\xi_4(1 + r_d)$ USD y pagar $\xi_4 \tau_s^{-1}(1 + r_p)$ GBP.
   - ξ_5: invertir ξ_5 GBP en $t = 0$ y por lo tanto pedir prestados $\xi_5 \tau_s$ USD. En $t = 1$ se espera recibir $\xi_5(1 + r_p)$ GBP y pagar $\xi_5 \tau_s(1 + r_d)$ USD.

   El balance en dólares y libras en $t = 1$ es:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\text{USD} & \xi_0\tau & -\xi_1 & -\xi_2(1+r_d) & \xi_3\tau_s(1+r_d) & \xi_4(1+r_d) & -\xi_5\tau_s(1+r_d) \\
\text{GBP} & -\xi_0 & \xi_1\tau^{-1} & \xi_2\tau_s^{-1}(1+r_p) & -\xi_3(1+r_p) & -\xi_4\tau_s^{-1}(1+r_p) & \xi_5(1+r_p)
\end{array}
$$

   Observe que en $t = 0$ no se incurre en algún costo, todo aquello que es invertido proviene de prestamos. De esta manera en $t = 1$ el balance final o perfil de pago en USD es:

$$
\begin{aligned}
f(\tau, \tau_s, r_d, r_p, \xi) = \xi_0\tau - \xi_1 - \xi_2(1 + r_d) + \xi_3\tau_s(1 + r_d) + \xi_4(1 + r_d) - \xi_5\tau_s(1 + r_d) + \\
\tau(-\xi_0 + \xi_1\tau^{-1} + \xi_2\tau_s^{-1}(1 + r_p) - \xi_3(1 + r_p) - \xi_4\tau_s^{-1}(1 + r_p) + \xi_5(1 + r_p)) \\
= (1 + r_d)(\xi_4 - \xi_2 + \tau_s(\xi_3 - \xi_5)) + \tau(1 + r_p)(\xi_5 - \xi_3 + \tau_s^{-1}(\xi_2 - \xi_4)) \\
= -\tau_s(1 + r_d)(\xi_5 - \xi_3 + \tau_s^{-1}(\xi_2 - \xi_4)) + \tau(1 + r_p)(\xi_5 - \xi_3 + \tau_s^{-1}(\xi_2 - \xi_4)) \\
= [\tau(1 + r_p) - \tau_s(1 + r_d)](\xi_5 - \xi_3 + \tau_s^{-1}(\xi_2 - \xi_4))
\end{aligned}
$$

   Para este perfil de pago existirá un arbitraje siempre que $f > 0$ y se consideran primero los siguientes casos:

   - $\xi_5 > \xi_3$ y $\xi_2 > \xi_4$, en este caso se tiene que $(\xi_5 - \xi_3 + \tau_s^{-1}(\xi_2 - \xi_4)) > 0$ y por lo tanto existe arbitraje si:
   $$\tau(1 + r_p) > \tau_s(1 + r_d)$$
   - $\xi_5 < \xi_3$ y $\xi_2 < \xi_4$, en este caso se tiene que $(\xi_5 - \xi_3 + \tau_s^{-1}(\xi_2 - \xi_4)) < 0$ y por lo tanto existe arbitraje si:
   $$\tau(1 + r_p) < \tau_s(1 + r_d)$$

   Para las demás regiones, es decir cuando $\xi_5 > \xi_3$ y $\xi_2 < \xi_4$ o cuando $\xi_5 < \xi_3$ y $\xi_2 > \xi_4$, se tendrá una dependencia del cambio spot (τ_s) y existirá un arbitraje cuando simultáneamente:

$$\xi_5 - \xi_3 > \tau_s^{-1}(\xi_2 - \xi_4) \qquad \tau(1 + r_p) > \tau_s(1 + r_d)$$

o cuando simultáneamente:

$$\xi_5 - \xi_3 < \tau_s^{-1}(\xi_2 - \xi_4) \qquad\qquad \tau(1+r_p) < \tau_s(1+r_d)$$

En particular, si $\xi = (H, 0, K, 0, 0, 0)$ se obtiene el ejemplo visto en clase para la cual existe oportunidad de arbitraje cuando:

$$\frac{\tau}{\tau_s} > \frac{1+r_d}{1+r_p}$$

3. Considere contratos futuros a doce meses en el tipo cambio, una estrategia de inversión $\xi \in \mathbb{R}^6$ se compone de:

   - ξ_0: un contrato es vendido por ξ_0 GBP en $t = 1$, de tal manera que se pagan ξ_0 GBP a cambio de recibir $\xi_0 * \tau$ USD.
   - ξ_1: un contrato es comprado por ξ_1 USD en $t = 1$, de tal manera que se pagan ξ_1 USD a cambio de recibir $\xi_1\tau^{-1}$ GBP.
   - ξ_2: endeudar por ξ_2 USD en $t = 0$ y por lo tanto invertir $\xi_2\tau_s^{-1}$ GBP. Se espera en $t = 1$ pagar $\xi_2(1+r_d^C)$ USD y recibir $\xi_2\tau_s^{-1}(1+r_p^D)$ GBP.
   - ξ_3: endeudar por ξ_3 GBP en $t = 0$ y por lo tanto invertir $\xi_3\tau_s$ USD. Se espera en $t = 1$ pagar $\xi_3(1+r_p^C)$ GBP y recibir $\xi_3\tau_s(1+r_d^D)$ USD.
   - ξ_4: invertir ξ_4 USD en $t = 0$ y por lo tanto pedir prestados $\xi_4\tau_s^{-1}$ GBP. En $t = 1$ se espera recibir $\xi_4(1+r_d^D)$ USD y pagar $\xi_4\tau_s^{-1}(1+r_p^C)$ GBP.
   - ξ_5: invertir ξ_5 GBP en $t = 0$ y por lo tanto pedir prestados $\xi_5\tau_s$ USD. En $t = 1$ se espera recibir $\xi_5(1+r_p^D)$ GBP y pagar $\xi_5\tau_s(1+r_d^C)$ USD.

   El balance en dólares y libras en $t = 1$ es:

$$\begin{array}{c|cccccc} \text{USD} & \xi_0\tau & -\xi_1 & -\xi_2(1+r_d^C) & \xi_3\tau_s(1+r_d^D) & \xi_4(1+r_d^D) & -\xi_5\tau_s(1+r_d^C) \\ \text{GBP} & -\xi_0 & \xi_1\tau^{-1} & \xi_2\tau_s^{-1}(1+r_p^D) & -\xi_3(1+r_p^C) & -\xi_4\tau_s^{-1}(1+r_p^C) & \xi_5(1+r_p^D) \end{array}$$

   Y de esta manera en $t = 1$ el balance final o perfil de pago $f(\tau, \tau_s, r_d^C, r_d^D, r_p^C, r_p^D, \xi)$ en USD es:

$$\begin{aligned}
=&\xi_0\tau - \xi_1 - \xi_2(1+r_d^C) + \xi_3\tau_s(1+r_d^D) + \xi_4(1+r_d^D) - \xi_5\tau_s(1+r_d^C) + \\
&\tau(-\xi_0 + \xi_1\tau^{-1} + \xi_2\tau_s^{-1}(1+r_p^D) - \xi_3(1+r_p^C) - \xi_4\tau_s^{-1}(1+r_p^C) + \xi_5(1+r_p^D)) \\
=&(1+r_d^D)(\xi_3\tau_s + \xi_4) - (1+r_d^C)(\xi_2 + \xi_5\tau_s) + \tau(1+r_p^D)(\xi_2\tau_s^{-1} + \xi_5) - \tau(1+r_p^C)(\xi_3 + \xi_4\tau_s^{-1}) \\
=&(1+r_d^D)(\xi_3\tau_s + \xi_4) - (1+r_d^C)(\xi_2 + \xi_5\tau_s) + \tau\tau_s^{-1}(1+r_p^D)(\xi_2 + \xi_5\tau_s) - \tau\tau_s^{-1}(1+r_p^C)(\xi_3\tau_s + \xi_4) \\
=&(\xi_3\tau_s + \xi_4)[(1+r_d^D) - \tau\tau_s^{-1}(1+r_p^C)] + (\xi_2 + \xi_5\tau_s)[\tau\tau_s^{-1}(1+r_p^D) - (1+r_d^C)]
\end{aligned}$$

   Para este perfil de pago existirá un arbitraje siempre que $f > 0$, de esta manera existe un arbitraje siempre que:

$$(\xi_3\tau_s + \xi_4)(1 + r_d^D - \tau\tau_s^{-1}(1+r_p^C)) > (\xi_5\tau_s + \xi_2)(1 + r_d^C - \tau\tau_s^{-1}(1+r_p^D))$$

Referencias

[Cer] Revista Cerosetenta. Los engañados por interbolsa. https://cerosetenta.uniandes.edu.co/los-enganados-por-interbolsa/. Accedido: 2021-03-31.

[dC] Universidad Externado de Colombia. ¿se acuerda de interbolsa? aquí un recuento de lo que sucedió. https://www.uexternado.edu.co/administracion-de-empresas/se-acuerda-de-interbolsa-aqui-un-recuento-de-lo-que-sucedio/. Accedido: 2021-03-31.

[dVdC] Bolsa de Valores de Colombia. Precio de la acción de fabricato. https://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Mercados/enlinea/acciones. Accedido: 2021-03-31.

[Esp] El Espectador. Interbolsa, la historia de un desplome. https://www.elespectador.com/noticias/economia/interbolsa-la-historia-de-un-desplome/. Accedido: 2021-03-31.

[Jen13] Gutierrez Jennifer, Aguilar y Carlos. Base teórica del caso interbolsa. *Universidad de la Sabana*, 2013. Accedido: 2021-03-31.

[Rep] Diario La República. Consecuencias de la caída de interbolsa. https://www.larepublica.co/finanzas/consecuencias-de-la-caida-de-interbolsa-2024897. Accedido: 2021-03-31.

[Seb14] Duque Venegas Sebastián. Responsabilidad estatal en el caso interbolsa. *Universidad de los Andes*, 2014. Accedido: 2021-03-31.

[Tela] Caracol Televisión. Impunidad, la otra pandemia: qué pasó con interbolsa y otros casos de corrupción. https://www.youtube.com/watch?v=dAplrT23Lno. Accedido: 2021-03-31.

[Telb] Caracol Televisión. Interbolsa en pocas palabras. https://www.youtube.com/watch?v=LoJVMgNIEVg. Accedido: 2021-03-31.

[Telc] Caracol Televisión. Interbolsa: pocos condenados, millones de pérdidas y alto riesgo de impunidad. https://www.youtube.com/watch?v=lr82kb8qZtE. Accedido: 2021-03-31.

1. De acuerdo al artículo existe un escenario de especulación que involucra a la reaseguradora Munich RE, se menciona que se incurrió en una pérdida a cuenta de contratos de derivados para los cuales se esperaba obtener una ganancia a partir de la baja en los precios de los bienes subyacentes, pero se presentó un "rally" o incremento súbito en el precio de los bienes y la inversión en los contratos no salió como se esperaba.

   Se pueden mencionar algunos elementos especulativos que se desprenden del artículo, el primero son las posiciones que toman los analistas de Bloomberg respecto a las acciones de Munich RE, la segunda es la afirmación del ejecutivo de Munich RE sobre no tomar posturas riesgosas compensar las perdidas.

2. Para poder hablar de una oportunidad de arbitraje lo primero es convenir que existe un conjunto de posibles escenarios Ω. De esta manera una oportunidad de arbitraje es un conjunto de posiciones (acciones) que voy a ejecutar de tal manera que en todos los escenarios nunca incurro en gastos iniciales, nunca incurro en perdidas finales y en al menos un escenario obtengo ganancia de la inversión.

   Tiene sentido que la teoría de valuación se fundamente en este concepto por dos razones:

   - Al realizar una inversión nunca se espera perder dinero, en el peor de los casos salir de la inversión tal como se entró, pero se invierte esperando en algún momento obtener ganancia.
   - Es favorable no tener que arriesgar el patrimonio propio y siempre es bueno obtener financiación externa pero de tal manera que bajo ningún escenario lo termine perdiendo.

3. Sea Ω el conjunto de escenarios posibles, $\pi \in \mathbb{R}_+^{d+1}$ el sistema de precios iniciales, S los precios en $t = 1$, $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ el portafolio que es oportunidad de arbitraje y suponga que $\xi \cdot \pi < 0$, en caso contrario ya tendría una oportunidad con valor inicial cero.

   Considere el portafolio $\xi' = (\xi_0 - \xi \cdot \pi, \xi_1, .., \xi_d)$, de esta manera:

$$\begin{aligned}
\xi' \cdot \pi &= \sum_{i=0}^{d} \xi_i' \pi_i \\
&= \xi_0 - \xi \cdot \pi + \sum_{i=1}^{d} \xi_i \pi_i \\
&= -\xi \cdot \pi + \sum_{i=0}^{d} \xi_i \pi_i \\
&= -\xi \cdot \pi + \xi \cdot \pi = 0
\end{aligned}$$

   Además del hecho que $\xi \cdot S \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ y que $(1 + r)(-\xi \cdot \pi) \geq 0$ entonces para todo $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\xi' \cdot S &= (1 + r)(\xi_0 - \xi \cdot \pi) + \sum_{i=1}^{d} \xi_i S_i(\omega) \\
&= (1 + r)(-\xi \cdot \pi) + \xi \cdot S \geq 0
\end{aligned}$$

   Y como existe un $\omega_i \in \Omega$ para el cual $\xi \cdot S > 0$ en este caso $(1 + r)(-\xi \cdot \pi) + \xi \cdot S > 0$ y así para éste $\xi' \cdot S > 0$. En conclusión ξ' es una oportunidad de arbitraje para la cual el valor inicial es cero.

4. La venta en corto es una práctica en la cual se apuesta a que el precio de un activo disminuya con el tiempo. De esta manera es posible pedir en préstamo el activo para venderlo y posteriormente recomprarlo a un precio menor, generando una ganancia de esta sucesión de transacciones.

   El riesgo de una venta en corto es que, contrario a lo esperado, el precio del activo suba y de esta manera estar obligado a pagar una precio mayor al que se recibió por la venta, en este caso se incurre en perdidas y constituye un riesgo alto por el hecho que el precio puede subir sin cota.

5. Sea un mercado con dos activos $\pi = (1, \pi_1)$ el vector de precios iniciales y (S_0, S_1) siendo $S_0 = 1 + r$ para $r > 0$, $S_1(\omega) > \pi_1(1 + r)$ para todo $\omega \in \Omega$. Tome $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ un portafolio, el cual para ser oportunidad de arbitraje deberá cumplir:

A1. $\pi \cdot \xi = (1, \pi_1) \cdot (\xi_0, \xi_1) = \xi_0 + \pi_1 \xi_1 \leq 0$.

A2. $\xi \cdot S = (\xi_0, \xi_1) \cdot (1 + r, S_1) = \xi_0(1 + r) + \xi_1 S_1 \geq 0$

A3. $\xi \cdot S > 0$ en al menos un escenario de Ω.

Se procede a analizar según los signos de ξ_0, ξ_1:

- $\xi_0 \geq 0$ y $\xi_1 \geq 0$: en este caso la única manera de cumplir A1 es que $\xi_0 = 0$ y $\xi_1 = 0$, pero bajo estas condiciones es imposible cumplir A3.
- $\xi_0 < 0$ y $\xi_1 < 0$: en este caso no es posible cumplir A3 ya que $\xi_0(1 + r) < 0$ y $\xi_1 S_1 < 0$ para todos los escenarios en Ω.
- $\xi_0 < 0$ y $\xi_1 \geq 0$: en este escenario tome $\frac{-\xi_0}{\xi_1} = \pi_1$ de esta manera se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{\xi_0}{\xi_1} &\leq -\pi_1 \\ \xi_0 &\leq -\pi_1 \xi_1 \\ \xi_0 + \pi_1 \xi_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

  Y como $S_1 > \pi_1(1 + r)$ entonces:

$$\begin{aligned} S_1 &> \pi_1(1 + r) \\ S_1 &> \frac{-\xi_0}{\xi_1}(1 + r) \\ \xi_1 S_1 &> -\xi_0(1 + r) \\ \xi_1 S_1 + \xi_0(1 + r) &> 0 \end{aligned}$$

  Y bajo las condiciones establecidas hay un oportunidades de arbitraje.

6. Un derivado es un documento acordado entre dos actores y en el cual se fijan algunas acciones que pueden ser llevadas a cabo por los involucrados.

   En si mismo el derivado no tiene un valor, el valor va a depender del activo sobre el cual habla el documento o activo subyacente. Por otro lado, el derivado tiene una fecha en la cual "terminará" o fecha de maduración, es decir una fecha en la cual se va a liquidar el documento y cada uno de los agentes involucrados deberá tomar una posición en lo que respecta al documento.

7. Una opción de venta es un contrato financiero que da la opción de vender el activo subyacente al precio de ejercicio (precio de venta) en la fecha de madurez, de esta manera esta constituido por:

   - Un precio de venta (K).
   - Fecha de madurez (t).
   - Un activo subyacente (S).

   Su perfil de pago (rentabilidad) esta determinado de la siguiente manera, si el contrato madura en $t = 1$ entonces hay dos escenarios: en el primero $S_1 < K$, es decir el precio de venta en el mercado en $t = 1$ es menor al precio de ejercicio y por lo tanto se obtiene una ganancia de $K - S_1$, en el segundo escenario se tiene que $K < S_1$ y por lo tanto no hay ganancia alguna. En conclusión el perfil de pago es $max(K - S_1, 0) = (K - S_1)^+$.

   La opción de venta se utilizaría para proteger un bien de una posible devaluación en el mercado. Ejemplos del uso de este instrumento en la vida real es en un mercado de materias primas, por parte del vendedor o quien posee la materia, la opción le puede ayudar a proteger el precio del bien frente a una posible caída en el precio. Mientras que por parte de quién desea poseer el bien, si de antemano conoce que el precio de la materia prima va a subir en el futuro, podría adquirir dicha materia a un menor precio y beneficiarse de esto.

8. La paridad compra-venta nos puede dar indicios de cómo valorar de manera eficiente una opción de compra a partir de una opción de venta y viceversa. Por otro lado al considerar la paridad como $(S-K)^+ + K = (K-S)^+ + S$ se puede decir que existe un equilibrio entre las opciones de compra y venta, de tal modo que una combinación de ellas son una inversión de bajo riesgo.

9. En el artículo el autor intenta introducir algunas realidad detrás de cada hecho que rodea las opciones de compra-venta. Según se menciona las opciones son populares y en general negociar con éstas es mucho mejor que negociar directamente sobre los activos subyacentes, no obstante sobre estos documentos existe una gran cantidad de promesas falsas que surgen a partir de la sobre simplificación del instrumento.

   El punto de partida es la fórmula de Black y Scholes, lo primero que se comenta es que a pesar de la versatilidad de la fórmula asume principios no triviales como: no hay cambios relevantes en las tasas de interés, la volatilidad del subyacente o que no hay pago de dividendos. El autor manifiesta que la mayor incógnita en la fórmula es la volatilidad y para hacer una mejor valuación de las opciones puede ayudar el conocer los movimientos en el mercado, así como la historia de la volatilidad.

   En segundo lugar, se muestra la manera de conformar inversiones de cobertura neutral apoyándose en la razón de cobertura (Hedge ratio), indica que a partir de este valor se puede obtener una postura que tendrá el lomismo resultado al invertir en el bien o en la opción, lo cual resulta atractivo pues es una inversión de bajo riesgo, lo cual no será un movimiento optimista (bullish) pero tampoco pesimista (bearish), sino una postura más conservadora.

   En este punto es posible encontrar una primer conclusión, el autor indica que no hay una formula definitiva para decidir si invertir directamente en el bien o por medio de una opción dicha decisión se ve afectada por factores externos como impuestos, comisiones y movimientos en el mercado, por lo que invita a no realizar una única inversión por medio de un instrumento, sino a optar por una combinación de instrumentos, por ejemplo del mercado de valores o por medio de Spreads, de estos últimos recomienda hacer una combinación especulativa-conservadora a fin de crear un equilibrio y reducir las posibles perdidas.

   De la lectura se pueden extraer algunas conclusiones:

   - Las posturas a tomar en una inversión no deben ser tomadas por lo que diga una fórmula, sino que hace una invitación a analizar otro tipo de factores y situaciones que tienen impacto en el instrumento, por ejemplo si una posible pérdida tiene implicaciones legales es mejor tomar una postura menos especulativa a fin de reducir las posibles pérdidas.
   - Se menciona que nunca se deben perder de vista los cobros que surgen de las inversiones: el primero son los costos asociados por comisiones ya que en algunos escenarios una mala estrategia de inversión puede llevar a pagar una cantidad excesiva de comisiones y de este modo reducir la ganancia.

     Un segundo cobro a considerar son los dividendos, se menciona que se deben evaluar bien los escenarios en lo que respecta al pago de dividendos ya que en algunos casos pueden llevar a un instrumento poco atractivo, pero tampoco niega la posibilidad que algunos instrumentos que pagan dividendos pueden ser una buena inversión.

     El tercer cobro que nunca se debe perder de vista son los impuestos que surgen de negociar sobre opciones y sobre el bien directamente, el autor sugiere que una buena estrategia de inversión puede llevar a compartir las pérdidas con el gobierno o a reducir/compartir la carga fiscal con la contra parte en los movimientos.
   - Por último, es que a partir de una mayor cantidad de información es posible obtener un análisis más fino del mercado y conducir a inversiones más inteligentes. No obstante, también se menciona que la información no pesa igual, hay datos más valiosos que otros, y por esta razón se debe ponderar de manera apropiada; pone de ejemplo el cálculo de la volatilidad, datos muy antiguos podrían no ser relevantes y deben tener un peso menor en el cálculo, mientras que futuras fusiones podrían tener un impacto en los valores.

     A su vez se menciona que los datos e información que se extrae del mercado se debe usar tan pronto como estén disponible, ya que o bien el mercado o los demás agentes del mercado, van a tender a procesar y absorberla a fin de estabilizar/ajustar los precios. Es aquí donde los especialistas generan ventaja para sus posiciones.

Nota: Para un conjunto de escenarios $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, se abusa de la notación y para las variables aleatorias se escribirá $X(\omega_i) = X_i$.

1. Considere el mercado con escenarios dados en la descripción y tome la estrategia $\xi = (-2, -1, 1)$, veamos que se trata de un arbitraje.

   A1. $\xi \cdot \pi \leq 0$: $\xi \cdot \pi = (-2, -1, 1) \cdot (1, 2, 4) = -2 - 2 + 4 = 0$.

   A2. Para todo $\omega_i \in \Omega$, $\xi \cdot S^1(\omega_i) \geq 0$: $\xi \cdot S^1(\omega_1) = 4$, $\xi \cdot S^1(\omega_2) = 2$ y $\xi \cdot S^1(\omega_3) = 8$.

   A3. Observe que en el escenario ω_3, $\xi \cdot S^1(\omega_3) > 0$.

   Por lo tanto, ξ representa un arbitraje. Observe que si $r \in [0, 1]$ entonces la estrategia $\xi = (-1 + r, -1, 1)$ es un arbitraje, ya que en el axioma 1 se tendría $-r$, en el axioma 2 $4 - r$, $2 - r$ y $8 - r$ respectivamente y nuevamente en el escenario ω_3 el precio en $t = 1$ es estrictamente positivo.

2. Suponga $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad y un mercado con $r > -1$, un activo con riesgo cuyo precio inicial es π y precio final $S : \Omega \to \mathbb{R}_+$. Suponga que $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ cumple el papel de función de densidad de S.

   Para establecer la medida equivalente neutral al riesgo, se busca una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que sirva de derivada de Radon-Nykodim $X = \frac{dP^*}{dP}$, para P^* una medida de probabilidad equivalente a P, por lo que se necesita:

   - $X > 0$.
   - $E[X] = 1$.
   - $E_{P^*}[X] = E[SX] = (1 + r)\pi$.

   Se propone que dicha variable tenga la forma $X = \frac{a}{S+1}1_B + \frac{b}{S+1}1_{B'}$ en donde $B = S^{-1}[0, \beta)$ y $B' = S^{-1}[\beta, \infty)$ para cierto $\beta \in (0, \infty)$, observe que $\frac{1}{S+1} \leq 1$ para todo $\omega \in \Omega$. De esta manera las condiciones iniciales se traducen en la necesidad de que $a, b > 0$ y:

   $$E[X] = a \int_B \frac{1}{S+1} dP + b \int_{B'} \frac{1}{S+1} dP = 1$$
   $$E[XS] = a \int_B \frac{S}{S+1} dP + b \int_{B'} \frac{S}{S+1} dP = (1 + r)\pi$$

   Y del hecho que la función S es integrable entonces las integrales están bien definidas, llamando $R = \int_B \frac{1}{S+1} dP$, $R' = \int_{B'} \frac{1}{S+1} dP$, $T = \int_B \frac{S}{S+1} dP$ y $T' = \int_{B'} \frac{S}{S+1} dP$ se obtiene lo siguiente:

   $$aR + bR' = 1$$
   $$aT + bT' = (1 + r)\pi$$

   Y de este modo:

   $$b = \frac{(1 + r)\pi R - T}{RT' - R'T}$$
   $$a = \frac{T' - (1 + r)\pi R'}{RT' - R'S}$$

   Y escogiendo un β adecuado se obtiene una medida neutral al riesgo.

3. Suponga que existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que $\xi \cdot Y = 0$, para todo $\omega \in \Omega$ se cumple $\xi \cdot S = (1 + r)\xi \cdot \pi$. Al tomar $\bar{\xi} = (-\xi \cdot \pi, \xi_1, ..., \xi_d)$ se sigue que $\bar{\xi} \cdot \bar{S} = \bar{\xi_0}(1 + r) + \xi \cdot S = -(1 + r)\xi \cdot \pi + \xi \cdot S = 0$ y por ser un mercado no redundante entonces $\bar{\xi} = 0$ y en particular $\xi = 0$.

   Suponga que el mercado es libre de arbitraje y tome $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que $\bar{\xi} \cdot \bar{S} = 0$, de la ausencia de arbitrajes se sigue que $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = 0$ y de esta manera se cumple que $\bar{\xi} \cdot \bar{S} - (1 + r)\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = 0$. Al llamar $\xi = (\bar{\xi_1}, ..., \bar{\xi_d})$, como $\pi_0 = 1$ y $S^0 = 1 + r$ todo lo expuesto implica que $\xi_0 S^0 + \xi \cdot S - (1 + r)\pi_0 \xi_0 - \xi \cdot \pi = \xi \cdot Y = 0$, de modo que $\bar{\xi_i} = 0$ para $1 \leq i \leq d$ y forzosamente $\bar{\xi} = 0$, ya que si $\bar{\xi_0} \neq 0$ entonces $\bar{\xi} \cdot \bar{S} = (1 + r)\bar{\xi_0} \neq 0$ y esto es una contradicción. En conclusión el mercado es no redundante.

4. Sea un mercado con vector de valores iniciales $\bar{\pi} = (\pi_0, ..., \pi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ y $\bar{S}$ el vector de precios en $t = 1$, libre de arbitraje y no redundante. Considere $w \in \mathbb{R}$ y defina el conjunto $W = \{\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1} : \bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = w \text{ y } \bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0\}$.

   Para demostrar que W es compacto se utilizará el Teorema de Heine-Borel, demostrando que es cerrado y acotado.

   - Tome $(\bar{\xi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en W tal que $\bar{\xi}_n \to \bar{\xi}$, se probará que $|\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} - w| \to 0$, si $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m > N$, $||\bar{\xi} - \bar{\xi}_m|| < \delta = min(\frac{\epsilon}{\pi_0(d+1)}, ..., \frac{\epsilon}{\pi_d(d+1)})$ de esta manera se cumple que $|\xi_i - \xi_{m,i}| < \delta$[2] y entonces:

     $$\begin{aligned} |\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} - w| &= |\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} - \bar{\xi}_m \cdot \bar{\pi} + \bar{\xi}_m \cdot \bar{\pi} - w| \\ &= |\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} - \bar{\xi}_m \cdot \bar{\pi}| \\ &= |\pi_0(\xi_0 - \xi_{m,0}) + ... + \pi_d(\xi_d - \xi_{m,d})| \\ &\leq \pi_0|\xi_0 - \xi_{m,0}| + ... + \pi_d|\xi_d - \xi_{m,d}| \\ &\leq \pi_0\delta + ... + \pi_d\delta \\ &< \frac{\epsilon}{d+1} + ... + \frac{\epsilon}{d+1} = \epsilon \end{aligned}$$

     Al ser ϵ un valor arbitrario se concluye que $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = w$. Por otro lado suponga que existe $\omega_i \in \Omega$ tal que $\bar{\xi} \cdot \bar{S}_i < 0$, llame $T = max\{S_i^0, ..., S_i^d\} + 1$ y $\epsilon = \frac{|\xi \cdot S_i|}{3(d+1)T}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > N$ entonces $||\bar{\xi}_m - \bar{\xi}|| < \epsilon$ y en particular $|\xi_{m,i} - \xi_i| < \epsilon$ y ahora:

     $$\begin{aligned} \bar{\xi}_m \cdot \bar{S} &= \bar{\xi}_m \cdot \bar{S} - \bar{\xi} \cdot \bar{S} + \bar{\xi} \cdot \bar{S} \\ &= (\xi_{m,0} - \xi_0)S_i^0 + ... + (\xi_{m,d} - \xi_d)S_i^d + \bar{\xi} \cdot \bar{S} \\ &\leq |\xi_{m,0} - \xi_0|S_i^0 + ... + |\xi_{m,d} - \xi_d|S_i^d + \bar{\xi} \cdot \bar{S} \\ &\leq \frac{|\xi \cdot S_i|}{3(d+1)T}S_i^0 + ... + \frac{|\xi \cdot S_i|}{3(d+1)T}S_i^d + \bar{\xi} \cdot \bar{S} \\ &< \frac{|\xi \cdot S_i|}{3} + \bar{\xi} \cdot \bar{S} < 0 \end{aligned}$$

     Y esto es una contradicción, por lo tanto $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$. Sumando lo anterior $\bar{\xi} \in W$ y así W contiene sus puntos de acumulación, i.e. es cerrado.

   - Por contradicción suponga que no es acotado, de esta manera existe una sucesión $(\bar{\xi}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|\bar{\xi}'_n| \to \infty$. Construya la sucesión $\bar{\xi}_n = \frac{\bar{\xi}'_n}{|\bar{\xi}'_n|}$, ésta cumple que es acotada en $\mathbb{R}^{d+1}$ y por lo tanto por el teorema de Bolzano contiene una subsucesión que converge a cierto $\bar{\xi}$ que respeta $|\bar{\xi}| = 1$, pero como $\bar{\xi}_n \cdot \bar{\pi} = \frac{\bar{\xi}'_n \cdot \bar{\pi}}{|\bar{\xi}'_n|} \to 0$ entonces $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = 0$ y del hecho que $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$ hay dos casos:
     - Si $\bar{\xi} \cdot \bar{S} = 0$, por la no redundancia se tiene que cumplir que $\bar{\xi} = 0$ y esto contradice que $|\bar{\xi}| = 1$.
     - Si $\bar{\xi} \cdot \bar{S} > 0$, entonces $\bar{\xi}$ es un arbitraje y esto también es un absurdo pues el mercado es libre de arbitraje.

     En conclusión, suponer que no es acotado nos lleva a una contradicción y por lo tanto deberá ser un conjunto acotado.

5. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ y P una medida de probabilidad de referencia, luego el conjunto de medidas de probabilidad equivalentes a P es:

   $$M_1 = \{Q \in [0,1]^3 : Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1,\ Q(\omega_i) = 0 \text{ si y solo si } P(\omega_i) = 0,\ i = 1,2,3\}$$

   Tome $R, S \in M_1$ y $\lambda \in (0,1)$, de esta manera se cumple que si $P(\omega_i) = 0$ si y solo si $\lambda R(\omega_i) + (1-\lambda)S(\omega_i) = \lambda 0 + (1-\lambda)0 = 0$ y como $\lambda \geq \lambda R \geq 0$, $(1-\lambda) \geq (1-\lambda)S \geq 0$ entonces $1 \geq \lambda R + (1-\lambda)S \geq 0$. Por último, $\lambda = \lambda(R_1 + R_2 + R_3)$ y $1 - \lambda = (1-\lambda)(S_1 + S_2 + S_3)$ y por lo tanto sumando estas dos igualdades $1 = \lambda R_1 + (1-\lambda)S_1 + \lambda R_2 + (1-\lambda)S_2 + \lambda R_3 + (1-\lambda)S_3$. En conclusión, M_1 es convexo, pues cualquier combinación convexa de sus elementos vuelve a estar en el conjunto.

[2] Como $|\xi_i - \xi_{m,i}| = \sqrt{(\xi_i - \xi_{m,i})^2}$ entonces $|\xi_i - \xi_{m,i}| \leq \sqrt{(\xi_0 - \xi_{m,0})^2 + ... + (\xi_d - \xi_{m,d})^2}$

Por otro lado si $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable acotada, al considerar $C = \{E_Q[Y] : Q \in M_1\}$, $E_Q[Y], E_R[Y] \in C$, $\lambda \in (0,1)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\lambda E_Q[Y] + (1-\lambda)E_R[Y] &= \sum_{i=1}^{3} \lambda Y_i Q_i + \sum_{i=1}^{3}(1-\lambda)Y_i R_i \\
&= \sum_{i=1}^{3} Y_i(\lambda Q_i + (1-\lambda)R_i)
\end{aligned}$$

Del hecho que M_1 es convexo, C es convexo.

6. Sea $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria y suponga que todos los eventos tienen probabilidad positiva en la medida de referencia P, al tomar $Q \in M_1$ del hecho que $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1$ y de la noción de valor esperado:

$$\begin{aligned}
E_Q[Z] &= Z_1Q_1 + Z_2Q_2 + Z_3Q_3 \\
&= Z_1(1 - Q_2 - Q_3) + Z_2Q_2 + Z_3Q_3 \\
&= Z_1 + Q_2(Z_2 - Z_1) + Q_3(Z_3 - Z_1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se puede suponer sin perdida de generalidad que $Z(\omega_1) < 0$, por la propiedad arquimediana existe un natural, no cero, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{Z_2 - Z_1}{n} < \frac{-Z_1}{3}$, $\frac{Z_3 - Z_1}{n} < \frac{-Z_1}{3}$ y además $\frac{2}{n} < \frac{1}{2}$, así se puede tomar la medida de probabilidad $Q = (1 - \frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ que va a ser equivalente a P y por lo tanto va a estar en M_1. Además esta medida cumple que:

$$\begin{aligned}
E_Q[Z] &= Z_1 + Q_2(Z_2 - Z_1) + Q_3(Z_3 - Z_1) \\
&= Z_1 + \frac{1}{n}(Z_2 - Z_1) + \frac{1}{n}(Z_3 - Z_1) \\
&< Z_1 + \frac{-Z_1}{3} + \frac{-Z_1}{3} < 0
\end{aligned}$$

Entrando en contradicción con lo supuesto para todos los elementos de M_1. Por lo tanto $Z(\omega_1) \geq 0$, deforma análoga se muestra que $Z(\omega_2), Z(\omega_3) \geq 0$.

Ahora, para los casos en que la medida de referencia asigna a dos de tres o uno de tres eventos probabilidad positiva, la prueba es análoga. Concluyendo que $Z \geq 0$ casi seguramente.

7. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria y $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ una medida de probabilidad de referencia.

7a. En un primer caso el conjunto C se reduce a un solo punto y por lo tanto es un intervalo de la forma $[c, c]$. Se procede con la prueba cuando tiene más de un punto, sean $Q, R \in M_1$, llame $a = E_Q[X]$, $c = E_R[X]$,se puede suponer sin perdida de generalidad que $a < c$ y considere $b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b < c$. Tomando $\lambda = \frac{c-b}{c-a}$, se satisface $0 < \lambda < 1$ y cumple:

$$\lambda a + (1-\lambda)c = \lambda a + c - \lambda c = c - \lambda(c-a) = c - \frac{c-b}{c-a}(c-a) = b$$

Del hecho que M_1 sea convexo la distribución $T = \lambda Q + (1-\lambda)R$ está en M_1 y:

$$\begin{aligned}
E_T[X] &= T_1X_1 + T_2X_2 + T_3X_3 \\
&= (\lambda Q_1 + (1-\lambda)R_1)X_1 + (\lambda Q_2 + (1-\lambda)R_2)X_2 + (\lambda Q_3 + (1-\lambda)R_3)X_3 \\
&= \lambda(Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3) + (1-\lambda)(R_1X_1 + R_2X_2 + R_3X_3) \\
&= \lambda a + (1-\lambda)c = b
\end{aligned}$$

Concluyendo que $b = E_T[X] \in C$. Así al tomar elementos cualesquiera de C se logra demostrar que todo punto entre ellos vive en C y esto implica que C es un intervalo.

7b. Sea $Q \in M_1$, como $Q_1+Q_2+Q_3 = 1$ luego $E_Q[X] = Q_1+2Q_2+7Q_3 = 1-Q_2-Q_3+2Q_2+7Q_3 = 1+Q_2+6Q_3$ y $E_Q[X] = Q_1 + 2Q_2 + 7Q_3 = Q_1 + 2Q_2 + 7(1 - Q_1 - Q_2) = 7 - Q_2 - 6Q_1$, por lo que entonces se puede afirmar que todo si $x \in C$ entonces $1 \leq x \leq 7$.

Tome $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < 7$, por la propiedad arquimediana existen naturales $n, m \leq 2$ tales que $\frac{6}{n} < \frac{7-x}{2}$ y $\frac{1}{m} < \frac{7-x}{2}$, de esta manera se tiene que $-\frac{1}{m} - \frac{6}{n} > \frac{x-7}{2} + \frac{x-7}{2} = x - 7$ y sumando 7 en ambos lados $7 - \frac{1}{m} - \frac{6}{n} > x$. Observe que $R = (\frac{1}{n}, \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m})$ es una medida de probabilidad que está en M_1 y por lo tanto la menor cota superior es 7, i.e. $sup(C) = 7$.

Por otro lado, si $y \in \mathbb{R}$ tal que $1 < y$ por la propiedad arquimediana existen enteros $n, m \geq 2$ tales que $\frac{6}{m} < \frac{y-1}{2}$, $\frac{1}{n} < \frac{y-1}{2}$ y por lo tanto $1 + \frac{1}{n} + \frac{6}{m} < y$. Tomando $R = (1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{m})$ y $Q \in M_1$, por lo que la mayor cota superior es 1, i.e. $inf(C) = 1$.

8. Sea $\Pi(C)$ el conjunto de precios libres de un derivado, por el teorema de valuación de derivados se sabe que $\Pi(C) = \{E_P[\frac{C}{1+r}] : P \in M_1,\ E_P[C] < \infty\}$. Si $\lambda \in (0,1)$ y $E_P[\frac{C}{1+r}], E_Q[\frac{C}{1+r}] \in \Pi(C)$ entonces considere $R = \lambda P + (1-\lambda)Q$, por hechos anteriores se cumple que $R \in M_1$ y por otro lado como $E_R = \lambda E_P + (1-\lambda)E_Q$ entonces se tiene que $E_R[\frac{C}{1+r}] = \lambda E_P[\frac{C}{1+r}] + (1-\lambda)E_Q[\frac{C}{1+r}]$ y que $E_R[C] < \infty$. Concluyendo que $E_R[\frac{C}{1+r}] \in \Pi(C)$ y se puede concluir que el conjunto es convexo.

9. Sea $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ un conjunto de eventos posibles, P una medida de probabilidad, $(\pi_0, ..., \pi_d)$ el conjunto de precios iniciales, $(S^0, .., S^d)$ el conjunto de precios, M_1 el conjunto de medidas martingala equivalentes a P y $\bar{\xi}$ un portafolio.

Para que el mercado libre de arbitraje sea completo se necesita que $|M_1| = 1$, observe que si $Q \in M_1$ entonces se deberá cumplir esencialmente que:

$$\begin{aligned} Q_1 + ... + Q_n &= 1 \\ Q_1 S_1^1 + ... + Q_n S_n^1 &= \pi_1(1+r) \\ Q_1 S_1^2 + ... + Q_n S_n^2 &= \pi_2(1+r) \\ &\vdots \\ Q_1 S_1^d + ... + Q_n S_n^d &= \pi_d(1+r) \end{aligned}$$

Lo cual es un sistema lineal de $d+1$ ecuaciones en las variables Q_i, $1 \leq i \leq n$. De esta manera, existe una única solución si y solo si $n = d+1$ y $det(\mathcal{S}) \neq 0$, siendo $\mathcal{S}$ la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ S_1^1 & S_2^1 & ... & S_n^1 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ S_1^d & S_2^d & ... & S_n^d \end{pmatrix}$$

10. El ejemplo es el estudio del modelo binario y las condiciones para que dicho modelo sea libre de arbitraje, se establece que si el modelo es libre de arbitraje es completo pues existe un única valor para la probabilidad p. Posteriormente analiza si el modelo refleja una opción de compra y analiza como por medio de la combinación de la opción con otros instrumentos es posible reducir o aumentar el riesgo de la inversión.

1.4.1. Sea Ω un espacio de muestra y P una medida de probabilidad de referencia que les asigna una probabilidad positiva a cada escenario.

1a. Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $r = \frac{1}{9}$ y el vector de precios iniciales $\pi = (1, 5)$, se mostrará que el mercado es completo.

Lo primero que se debe mostrar es que existe una medida de probabilidad equivalente a P, de esta manera la medida deberá tener la forma $(p, 1-p)$, $0 < p < 1$ y respetará que $\frac{1}{1+r}(S^1(\omega_1)p + S^1(\omega_2)(1-p)) = \frac{20}{3}p + \frac{49}{9}(1-p) = \frac{10}{9}5$, esta ecuación tiene por única solución $p = \frac{1}{11}$ y por lo tanto se obtiene una sola medida de probabilidad martingala equivalente a P, que es $(\frac{1}{11}, \frac{10}{11})$. Concluyendo que el mercado es completo.

1b. Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $r = \frac{1}{9}$ y el vector de precios iniciales $\pi = (1, 5)$. El conjunto de medidas martingala está dado por el conjunto $M_1 = \{(p, q, r) : p, q, r \in (0, 1)\}$ sujeto a las condiciones:

$$\begin{aligned} p + q + r &= 1 \\ \frac{20}{3}p + \frac{49}{9}q + \frac{10}{3}r &= \frac{10}{9}5 \end{aligned}$$

Este sistema admite la solución (0,35; 0,5; 0,15), (0,16; 0,8; 0,04), pero además se generan infinitas soluciones y por el Segundo Teorema Fundamental no es completo.

Para encontrar un contingente $C = f(S^1)$ no alcanzable es necesario que $|\Pi(C)| \neq 1$ y sea un conjunto no vacío. Considere $C = (2, 1, 1)$ de esta manera se cumple que si $P^* = (p, q, r)$ es una medida martingala del mercado original, entonces $E^*[\frac{C}{1+r}] = 2p + q + r$ y como $p + q + r = 1$ entonces se cumple que $E^*[\frac{C}{1+r}] = \frac{9}{10}(1 + p)$ y ya se observo que existen al menos dos medidas martingala diferentes en el valor p, por lo que el mercado extendido tiene más de un precio libre de arbitraje y por lo tanto C no es alcanzable.

1c. Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $r = \frac{1}{9}$ y el vector de precios iniciales $\pi = (1, 5, 10)$. De existir alguna medida martingala equivalente a P, deberán existir $p, q, r \in (0, 1)$ tales que:

$$\begin{aligned} p + q + r &= 1 \\ \frac{20}{3}p + \frac{20}{3}q + \frac{40}{9}r &= \frac{10}{9}5 \\ \frac{40}{3}p + \frac{80}{9}q + \frac{80}{9}r &= \frac{10}{9}10 \end{aligned}$$

Pero este sistema tiene única solución $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ la cual no cumple $0 < q$, por lo tanto el mercado debería aceptar arbitraje y un portafolio $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ para ser arbitraje deberá cumplir:

$$\begin{aligned} \xi_0 + 5\xi_1 + 10\xi_2 &\leq 0 \\ \frac{20}{3}\xi_0 + \frac{20}{3}\xi_1 + \frac{40}{9}\xi_2 &\geq 0 \\ \frac{40}{3}\xi_0 + \frac{80}{9}\xi_1 + \frac{80}{9}\xi_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Del hecho que el tercer escenario tiene los precios más bajos en $t = 1$ se puede considerar el portafolio $(0, 2, -1)$, el cual resulta en una oportunidad de arbitraje:

$$\begin{aligned} \xi_0 + 5\xi_1 + 10\xi_2 &= 5(2) + 10(-1) = 0 \\ \frac{20}{3}\xi_0 + \frac{20}{3}\xi_1 + \frac{40}{9}\xi_2 &= \frac{20}{3}(2) - \frac{40}{9} = \frac{120 - 40}{9} > 0 \\ \frac{40}{3}\xi_0 + \frac{80}{9}\xi_1 + \frac{80}{9}\xi_2 &= \frac{80}{9}(2) - \frac{80}{9} = \frac{80}{9} > 0 \end{aligned}$$

1.4.2. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ un espacio de muestra, P una medida de probabilidad de referencia que les asigna una probabilidad positiva a cada escenario. Considere un mercado libre de arbitraje, con un solo activo con riesgo, $r = 0$, vector de precios iniciales $\pi = (1, 1)$ y tal que los precios en $t = 1$ cumplen $0 < S_1 < S_2 < S_3$.

a. El conjunto de medidas martingala está dado por:

$$\mathcal{P} = \{(p, q, r) : p, q, r \in (0, 1), p + q + r = 1 \text{ sujeto a: } pS_1 + qS_2 + rS_3 = 1\}$$

En segundo lugar el conjunto de medidas absolutamente continuas es:

$$\bar{\mathcal{P}} = \{(p, q, r) : p, q, r \in [0, 1], p + q + r = 1 \text{ sujeto a: } pS_1 + qS_2 + rS_3 = 1\}$$

Cambian los extremos sobre los cuales pueden vivir lo valores de p, q, r ya que como en P no hay valores cero, la condición que si $P_i = 0$ entonces la medida absoluta equivalente tiene valor cero, se cumple por vacuidad. Por último el conjunto de contingentes alcanzables es:

$$\{C = (C_1, C_2, C_3) : \text{existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que: } c = C_1p + C_2q + C_3q \text{ para todo } (p, q, r) \in \mathcal{P}\}$$

b. Se puede suponer sin perdida de generalidad que el mercado tiene dos medidas martingala (p, q, r) y (s, t, u) equivalentes a P y tales que $p \neq s$, por lo que entonces para el activo contingente $C = (1, 0, 0)$ se obtienen los precios libres de arbitraje p y s, al ser diferentes se obtiene que el contingente no es alcanzable.

c. Suponga que $C = (C_1, C_2, C_3)$ sin pérdida de generalidad suponga que $C_1 = max\{C_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ de esta manera se obtiene que para una medida $(p, q, r) \in \bar{\mathcal{P}}$, $E[C] = pC_1 + qC_2 + rC_3 = (1 - q - r)C_1 + qC_2 + rC_3 = C_1 + q(C_2 - C_1) + r(C_3 - C_1)$ y por lo tanto como $C_2 - C_1, C_3 - C_1 \leq 0$ entonces el valor más grande que se puede alcanzar es C_1 y tomando la medida $(1, 0, 0)$ se alcanza dicho valor.

d. Suponga que la asignación es constante, como $\mathcal{P} \subseteq \bar{\mathcal{P}}$ entonces existe $P \in \mathcal{P}$ tal que alcanza la esperanza. En la otra dirección, por la prueba anterior se tiene que el supremo se alcanza en $\bar{\mathcal{P}}$ por una medida que no está en $\mathcal{P}$, por lo que si se alcanza el supremo con un elemento de $\mathcal{P}$ necesariamente la esperanza es constante para todos los elementos en $\bar{\mathcal{P}}$, en caso contrario se puede construir una medida que contradiga el supremo.

1.4.3 Sea $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}$ con una medida de probabilidad de referencia P tal que $P[\omega_i] > 0$ para todo $1 \leq i \leq N$ y un mercado con $r = 0$ y un activo con riesgo cuyo valor inicial es $\pi^1 = 1$ y los precios finales respetan $S_1^1 < S_2^1 < ... < S_N^1$. Por el hecho que el mercado es libre de arbitraje, existe una medida martingala $P^* = (p_1, ..., p_N)$ equivalente a P tal que:

$$p_1 + ... + p_N = 1$$
$$p_1 S_1^1 + ... + p_N S_N^1 = 1$$

Si $2 \leq i \leq N - 1$ tome K_i tal que $S_i^1 < K_i < S_{i+1}^1$, lo cual es posible por la condición sobre los precios del activo con riesgo, además si $S^i = (S^1 - K_i)^+$ por el hecho que $K_i > S_j^1$ para $j \leq i$, entonces $S_j^i = 0$. Al tomar las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 & ... & S_N^1 \\ 0 & 0 & S_3^2 & ... & S_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & S_N^{N-1} \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & S_2^1 - S_1^1 & S_3^1 - S_1^1 & ... & S_N^1 - S_1^1 \\ 0 & 0 & S_3^2 & ... & S_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & S_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

Éstas resultan equivalentes y como $S_2^1 - S_1^1 \neq 0$, $(S_{i+1}^i - K_i)^+ \neq 0$ el determinante de las matrices es no cero y por lo tanto al igualar a los precios iniciales un sistema de ecuaciones va a tener solución única. Se construirán los precios iniciales para las opciones de compra de manera conveniente para $2 \leq i \leq N - 1$ se tomará $\pi^i = p_{i+1} S_{i+1}^i + ... + p_N S_N^i$, observe que de esta manera $\pi^i \geq 0$ pues es suma de no negativos.

Suponga ahora que $Q = (q_1, ..., q_N)$ es otra medida martingala para el mercado extendido, por la construcción se debe cumplir que $q_N S_N^{N-1} = \pi^{N-1} = p_N S_N^{N-1}$ y por lo tanto $q_N = p_N$, nuevamente $q_{N-1} S_{N-1}^{N-2} + q_N S_N^{N-2} = \pi^{N-2} = p_{N-1} S_{N-1}^{N-2} + p_N S_N^{N-2}$, de lo que $q_{N-1} = p_{N-1}$ y sucesivamente para $3 \leq i \leq N$ obligatoriamente $p_i = q_i$. Al final para q_1, q_2 se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$p_1 + p_2 = q_1 + q_2$$
$$p_1 S_1^1 + p_2 S_2^1 = q_1 S_1^1 + q_2 S_2^1$$

Se puede verificar que las soluciones son $p_1 = q_1$ y $p_2 = q_2$, de esta manera la única medida martingala para el mercado extendido es P^* y en conclusión es completo y libre de arbitraje.

1.4.4 Sea $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_{N+1}\}$ equipado con una medida de probabilidad P tal que $P[\omega_i] > 0$ para $1 \leq i \leq N + 1$. Suponga un mercado libre de arbitraje con d activos con riego, precios $\bar{\pi} \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\bar{S}$ en donde $d < N$. Por el hecho que el mercado es libre de arbitraje existe una medida martingala $P^* = (p_1, ..., p_{N+1})$ equivalente a P tal que:

$$\begin{aligned} p_1 + ... + p_{N+1} &= 1 \\ p_1 S_1^1 + ... + p_{N+1} S_{N+1}^1 &= (1+r)\pi^1 \\ &\vdots \\ p_1 S_1^d + ... + p_{N+1} S_{N+1}^d &= (1+r)\pi^d \end{aligned}$$

Para cada $d+1 \leq j \leq N$ se considera un activo con precios: $\pi^j = \frac{p_{j+1}}{1+r} > 0$ y $S^j : \Omega \to [0, \infty)$ tal que $S^j(\omega_{j+1}) = 1$ y para $k \neq j+1$, $S^j(\omega_k) = 0$. Al extender el mercado con dichos activos, si $1 \leq i \leq d$, $E^*[S^i] = (1+r)\pi^i$ pues P^* es martingala para el mercado original y para $d+1 \leq j \leq N$, $E^*[S^j] = S_1^j p_1 + ... + S_{N+1}^j = p_{j+1} = (1+r)\frac{p_{j+1}}{1+r} = (1+r)\pi^j$, por lo que P^* es una medida martingala para el mercado extendido y dicho mercado resulta libre de arbitraje.

Por otro lado, sea una medida martingala $Q = (q_1, ..., q_{N+1})$ para el mercado extendido, al considerar $d+1 \leq j \leq N$ se obtiene que $E_Q[S^j] = q_{j+1} = (1+r)\pi_j$ y de esta manera $q_{j+1} = p_{j+1}$. Adicionalmente, para $1 \leq i \leq d$ es cumple:

$$\begin{array}{r} S_1^i p_1 + S_2^i p_2 + ... + S_{N+1}^i p_{N+1} = (1+r)\pi^i \\ -S_1^i p_1 - S_2^i p_2 - ... - S_{N+1}^i p_{N+1} = -(1+r)\pi^i \\ \hline S_1^i(p_1 - q_1) + S_2^i(p_2 - q_2) + ... + S_d^i(p_d - q_d) = 0 \end{array}$$

Lo que en otras palabras significa que $\bar{S} \cdot \bar{\xi} = 0$, siendo $\bar{\xi} = (0, p_1 - q_1, ..., p_d - q_d)$ y por la no redundancia del mercado $\bar{\xi} = 0$. En conclusión $P^* = Q$ y solo existe una medida martingala para el mercado extendido, i.e. es un mercado completo.

b. Considere el contingente $C = (2, 1, 1)$, para cualquier medida martingala (s, t, u) equivalente a P se cumple que $E^*[\frac{C}{1+r}] = 2s + t + u = 1 + s$. Es razonable suponer que el mercado original tiene más de una medida martingala y se pueden encontrar P^*, Q para las cuales $p_1 \neq q_1$, y por lo tanto el conjunto de precios libres de arbitraje $\Pi(C)$ no es unipuntual y esto implica que el reclamo C no es alcanzable.

   Fije $P^* = (p_1, p_2, p_3)$ una medida martingala del mercado original, de esta manera el mercado extendido está dado por el vector de precios iniciales $\pi = (1, \pi^1, \frac{p_3}{1+r})$ y los precios en $t = 1$ son:

$$S^1 = (1, 2, 3) \qquad\qquad S^2 = (0, 0, 1)$$

   Por último, la única medida martingala para el mercado extendió es (p_1, p_2, p_3).