Fundamentos de Combinatoria

Ciro Iván García López

Mayo 2021

1. Al observar el triángulo de Pascal, en la 14va fila se tiene:

1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1

Se puede afirmar que ofrecen Panqueques Neerlandeses con 4 o 10 aderezos entre 14 diferentes opciones.

4. Sea $\xi_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $\xi_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, observe que:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2}) \\
\xi_2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i(\frac{\sqrt{3}}{2}) \\
1+\xi_1 &= \frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\xi_2 \\
1+\xi_2 &= \frac{1}{2} - i(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\xi_1 \\
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} &= (1+1)^n = 2^n \\
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi_1^k &= (1+\xi_1)^n = (-\xi_2)^n \\
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi_2^k &= (1+\xi_2)^n = (-\xi_1)^n
\end{aligned}
$$

Además según el valor de $n \pmod 6$:

- Si $n = 6q$ para algún entero q: $(-\xi_1)^n = (-\xi_1)^{6q} = e^{4q\pi i} = 1$ y $(-\xi_2)^n = (-\xi_2)^{6q} = e^{8q\pi i} = 1$.
- Si $n = 6q+1$ para algún entero q: $(-\xi_1)^n = (-\xi_1)^{6q+1} = (-\xi_1)^1 = -\xi_1$ y $(-\xi_2)^n = (-\xi_2)^{6q+1} = (-\xi_2)^1 = -\xi_2$.
- Si $n = 6q+2$ para algún entero q: $(-\xi_1)^n = (-\xi_1)^{6q+2} = (-\xi_1)^2 = \xi_2$ y $(-\xi_2)^n = (-\xi_2)^{6q+2} = (-\xi_2)^2 = \xi_1$.
- Si $n = 6q+3$ para algún entero q: $(-\xi_1)^n = (-\xi_1)^{6q+3} = (-\xi_1)^3 = -1$ y $(-\xi_2)^n = (-\xi_2)^{6q+3} = (-\xi_2)^3 = -1$.
- Si $n = 6q+4$ para algún entero q: $(-\xi_1)^n = (-\xi_1)^{6q+4} = (-\xi_1)^4 = \xi_1$ y $(-\xi_2)^n = (-\xi_2)^{6q+4} = (-\xi_2)^4 = \xi_2$.
- Si $n = 6q+5$ para algún entero q: $(-\xi_1)^n = (-\xi_1)^{6q+5} = (-\xi_1)^5 = -\xi_2$ y $(-\xi_2)^n = (-\xi_2)^{6q+5} = (-\xi_2)^5 = -\xi_1$.

Seguidamente, se analiza el valor de $1 + \xi_1^k + \xi_2^k$ de acuerdo a $k \pmod 3$:

- Si $k = 3q$ para algún entero q: $\xi_1^k = e^{2q\pi i} = 1$, $\xi_2^k = e^{4q\pi i} = 1$ y por lo tanto $1 + \xi_1^k + \xi_2^k = 3$.
- Si $k = 3q + 1$ para algún entero q: $\xi_1^k = e^{2q\pi i}e^{\frac{2\pi i}{3}} = \xi_1$, $\xi_2^k = e^{4q\pi i}e^{\frac{4\pi i}{3}} = \xi_2$ y por lo tanto $1 + \xi_1^k + \xi_2^k = 1 + \xi_1 + \xi_2 = 0$.
- Si $k = 3q + 2$ para algún entero q: $\xi_1^k = e^{2q\pi i}e^{\frac{4\pi i}{3}} = \xi_2$, $\xi_2^k = e^{4q\pi i}e^{\frac{8\pi i}{3}} = \xi_1$ y por lo tanto $1 + \xi_1^k + \xi_2^k = 1 + \xi_2 + \xi_1 = 0$.

De esta manera,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi_1^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi_2^k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1 + \xi_1^k + \xi_2^k) \\
&= \sum_{\substack{0\le k\le n \\ k\equiv 0 \pmod 3}}\binom{n}{k}(1 + \xi_1^k + \xi_2^k) \\
&= 2^n + (-\xi_2)^n + (-\xi_1)^n
\end{aligned}$$

De lo que se puede deducir que el número de subconjuntos congruentes con cero módulo tres dependen de la forma de $n \pmod 6$ y se obtienen los siguientes resultados:

- $n \equiv 0 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + (-\xi_2)^n + (-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 2)$.
- $n \equiv 1 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + (-\xi_2)^n + (-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 1)$.
- $n \equiv 2 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + (-\xi_2)^n + (-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n - 1)$.
- $n \equiv 3 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + (-\xi_2)^n + (-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n - 2)$.
- $n \equiv 4 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + (-\xi_2)^n + (-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n - 1)$.
- $n \equiv 5 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + (-\xi_2)^n + (-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 1)$.

Para poder calcular el número de subconjuntos congruentes con uno módulo tres, se utiliza la siguiente modificación:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \xi_1^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi_1^k + \xi_2^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi_2^k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1 + \xi_1^{k+2} + \xi_2^{k+2}) \\
&= 2^n + \xi_1^2(-\xi_2)^n + \xi_2^2(-\xi_1)^n \\
&= 2^n + \xi_2(-\xi_2)^n + \xi_1(-\xi_1)^n
\end{aligned}$$

Y de manera análoga al caso anterior se obtiene que $1 + \xi_1^{k+2} + \xi_2^{k+2}$ es 0, 3, 0 según k es congruente con cero, uno y dos módulo tres, respectivamente. Y según $n \pmod 6$ se obtiene:

- $n \equiv 0 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + \xi_2(-\xi_2)^n + \xi_1(-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n - 1)$.
- $n \equiv 1 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + \xi_2(-\xi_2)^n + \xi_1(-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n - 2)$.
- $n \equiv 2 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + \xi_2(-\xi_2)^n + \xi_1(-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n - 1)$.
- $n \equiv 3 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + \xi_2(-\xi_2)^n + \xi_1(-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 1)$.
- $n \equiv 4 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + \xi_2(-\xi_2)^n + \xi_1(-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 2)$.
- $n \equiv 5 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n + \xi_2(-\xi_2)^n + \xi_1(-\xi_1)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 1)$.

Por último, para obtener los congruentes con dos módulo tres se utiliza:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \xi_1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi_1^k + \xi_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi_2^k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1 + \xi_1^{k+1} + \xi_2^{k+1}) \\
&= 2^n + \xi_1(-\xi_2)^n + \xi_2(-\xi_1)^n
\end{aligned}$$

Y nuevamente se obtiene que $1+\xi_1^{k+1}+\xi_2^{k+1}$ es 0, 0, 3 según k es congruente con cero, uno y dos módulo tres; respectivamente. Y entonces según $n \pmod 6$ se obtiene:

- $n \equiv 0 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n+\xi_1(-\xi_2)^n+\xi_2(-\xi_1)^n)=\frac{1}{3}(2^n-1)$.
- $n \equiv 1 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n+\xi_1(-\xi_2)^n+\xi_2(-\xi_1)^n)=\frac{1}{3}(2^n+1)$.
- $n \equiv 2 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n+\xi_1(-\xi_2)^n+\xi_2(-\xi_1)^n)=\frac{1}{3}(2^n+2)$.
- $n \equiv 3 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n+\xi_1(-\xi_2)^n+\xi_2(-\xi_1)^n)=\frac{1}{3}(2^n+1)$.
- $n \equiv 4 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n+\xi_1(-\xi_2)^n+\xi_2(-\xi_1)^n)=\frac{1}{3}(2^n-1)$.
- $n \equiv 5 \pmod 6$: $\frac{1}{3}(2^n+\xi_1(-\xi_2)^n+\xi_2(-\xi_1)^n)=\frac{1}{3}(2^n-2)$.

5. Observe primero que $\binom{t+1}{i+1}=\binom{t}{i+1}+\binom{t}{i}\geq\binom{t}{i}$, por lo que entonces si $y\leq x$ entonces $\binom{y}{k}\leq\binom{x}{k}$ para cualquier k.

   Sea k un entero positivo y N un entero no negativo. Se procede por inducción sobre k; para el caso en que $k=1$ entonces para todo entero no negativo N; $\binom{N}{1}=N$ y $x_1=N\geq 0$, recuerde que $0=\binom{0}{1}$.

   Suponga la afirmación cierta para k y para todo entero no negativo N_1, es decir que N_1 se puede escribir de manera única como $\binom{x_k}{k}+...+\binom{x_1}{1}$. Para $k+1$ considere los siguientes casos:

   - $N=0$: se cumple $0=\binom{k}{k+1}+\binom{k-1}{k}+...+\binom{0}{1}$, $x_k>x_{k-1}>...>x_1\geq 0$ y además es la única manera de escribir al cero cumpliendo con las condiciones.
   - $N\neq 0$: sea $X=\{t\in\mathbb{N}:\binom{t}{k+1}\leq N\}$; X cumple que es no vacío pues $k+1\in X$ y es finito, en caso contrario existiría una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinita estrictamente creciente de naturales que para todo $n\in\mathbb{N}$ cumplen $N-\binom{t_n}{k+1}\geq 0$ y usando la observación inicial se puede construir una sucesión infinita estrictamente decreciente de naturales $N-\binom{t_0}{k+1}>N-\binom{t_1}{k+1}>...>N-\binom{t_n}{k+1}...$, lo cual es una contradicción; así, por el principio de buena ordenación X tiene un máximo, x, y cumple que $x\geq k+1$.
     Tomando $N_1=N-\binom{x}{k+1}$ se puede aplicar la hipótesis y obtener una escritura $N_1=\binom{x_k}{k}+...+\binom{x_1}{1}$ en donde $x_k>...>x_1\geq 0$, es así que $N=\binom{x}{k+1}+\binom{x_k}{k}+...+\binom{x_1}{1}$. La escritura de N es única pues si existiera una escritura $N=\binom{y_{k+1}}{k+1}+\binom{y_k}{k}+...+\binom{y_1}{1}$ se sigue que $N\leq\binom{y_{k+1}}{k+1}$ y por lo tanto $x=y_{k+1}$; a su vez de la unicidad en la escritura de N_1 se sigue que para $1\leq i\leq k$, $x_i=y_i$.
     Para finalizar se prueba que $x>x_k$, suponga lo contrario $x\leq x_k$ luego por la observación inicial $\binom{x_k}{k}\geq\binom{x}{k}$ y de las propiedades de combinatoria $N=\binom{x}{k+1}+\binom{x_k}{k}+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{x_i}{i}\geq\binom{x}{k+1}+\binom{x}{k}+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{x_i}{i}\geq\binom{x+1}{k+1}$, contradiciendo la elección de x, por lo tanto $x>x_k$.

   De manera que, todo entero no negativo N se puede escribir de la manera solicitada en el caso $k+1$ y por el principio de inducción matemática sobre k se sigue el resultado.

8. Sea X un conjunto de n elementos, observe que una permutación cíclica de los n puntos puede ser escrita como $(x_1,...,x_n)$, no obstante al variar el punto de inicio existen n representaciones del mismo ciclo, por ejemplo $(x_n,x_1,...,x_{n-1})$. Por lo cual de las $n!$ permutaciones $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ corresponden a ciclos distintos sobre n puntos.

10. Para calcular el número de palabras a partir de las letras de ESTATE se cuenta a partir de las 'E' o 'T' presentes de la siguiente manera:

    - 1 'T', 1 'E'

Longitud	Descripción	Cantidad
0	Palabra vacía	1
1	Letras individuales	4
2	Palabras de dos letras	4*3
3	Palabras de tres letras	4*3*2
4	Palabras de cuatro letras	4!

    - 1 'T', 2 'E'

Longitud	Descripción	Cantidad
2	Se agrega la combinación 'EE'	$\frac{2}{2}=1$
3	Se escriben dos 'E' y una diferente	$\binom{3}{1}\frac{3!}{2}$
4	Se escriben dos 'E' y dos diferentes	$\binom{3}{2}\frac{4!}{2}$
5	Se escriben palabras en todos los ordenes	$\frac{5!}{2}$

Observe que aquí no se cuentan las palabras de longitud 0 y 1, dado que ya se tuvieron en cuenta; además, se divide en dos cada resultado pues no se distinguen las letras repetidas. El caso en que se tienen 2 'T' y 1 'E' es análogo al anterior y se obtienen el mismo número de palabras.

- 2 'T', 2 'E'

Longitud	Descripción	Cantidad
4	Se escriben las posibles combinaciones de 'E' y 'T'	$\frac{4!}{2*2}$
5	Se escriben 2 'E', 2 'T' y se escoge una de las restantes	$\binom{2}{1}\frac{5!}{2*2}$
6	Se escriben todas las palabras posibles	$\frac{6!}{2*2}$

Observe que también aparecen palabras repetidas y por lo tanto es necesario dividir en 4.

Luego, la cantidad de palabras que se pueden formar es un total de $65 + 106 + 106 + 246 = 523$.

11. Sea W una palabra de longitud n en la cual aparecen repetidas m-veces una letra particular. Considere los siguientes casos particulares: el más sencillo se da cuando se toma solo una de las m repeticiones de la letra, en este caso se disponen de $n-m+1$ letras y la cantidad de palabras son:

Longitud	Cantidad
0	1
1	n-m+1
2	(n-m+1)(n-m)
3	(n-m+1)(n-m)(n-m-1)
$\vdots$	$\vdots$
$n-m+1$	(n-m+1)!

El siguiente caso sencillo es cuando se toman dos de las m letras repetidas, aquí se obtienen:

Longitud	Cantidad	
2	Palabras con la letra repetida	$\frac{2!}{2!}$
3	Se toman las dos del caso y una entre las $n-m$ restantes	$\binom{n-m}{3-2}\frac{3!}{2!}$
$\vdots$	$\vdots$	
$n-m+1$	Se toman las dos del y caso y $n-m-1$ entre las $n-m$ restantes	$\binom{n-m}{n-m-1}\frac{(n-m+1)!}{2!}$
$n-m+2$	Se toman las dos del y caso y las $n-m$ restantes	$\binom{n-m}{n-m}\frac{(n-m+2)!}{2!}$

Observe que no se tienen en cuenta las palabras de longitud cero y uno, además de dividir por dos ya que no se distinguen las letras repetidas. En el caso general al tomar j de las m letras repetidas se obtiene:

Longitud	Cantidad	
j	Palabras con la letra repetida	$\binom{n-m}{j-j}\frac{j!}{j!}$
j+1	Se toman las j del caso y las faltantes entre las $n-m$ no repetidas	$\binom{n-m}{j+1-j}\frac{(j+1)!}{j!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-m+j$	Se toman las j del y caso y las faltantes entre las $n-m$ no repetidas	$\binom{n-m}{n-m}\frac{(n-m+j)!}{j!}$

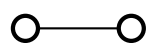
Observe que no se consideran las palabras de longitud menor a j dado que estas se cuentan en los casos anteriores y además se deben contar las múltiples repeticiones por lo que siempre se divide entre $j!$. Así se obtiene que la fórmula general es:

$$\sum_{j=2}^{m} \sum_{i=j}^{n-m+j} \binom{n-m}{i-j} \frac{i!}{j!} + \sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{(n-m+1)!}{(n-m+1-i)!} + 1$$

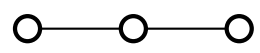
En donde i denota la longitud de las palabras que se están considerando y j la cantidad de veces que aparece la letra repetida.

12. A continuación se muestran los árboles según su tamaño.

- $n = 2$.

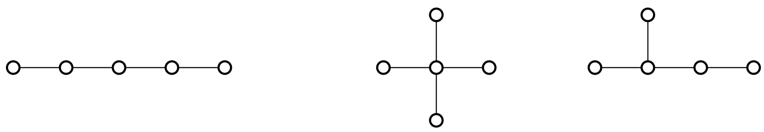


- $n = 3$.

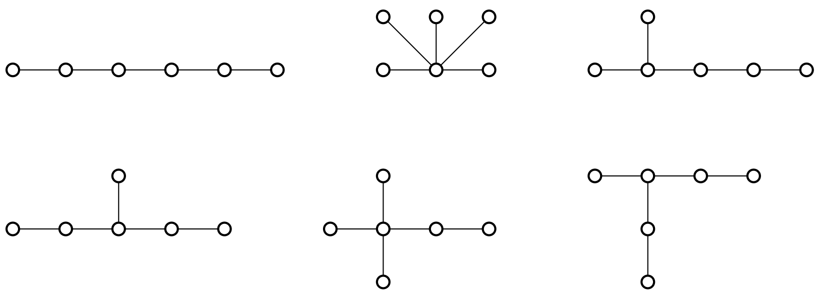


- $n = 4$.

- $n = 5$.



- $n = 6$.



13. Para probar esta afirmación se usan las ideas del teorema 3.6.1. Observe que:

$$\begin{aligned}
\ln n! + \frac{1}{2}\ln(n+1) &\leq \int_1^{n+1} \ln x dx \\
\ln n! + \frac{1}{2}\ln(n+1) &\leq (n+1)\ln(n+1) - n \\
\ln n! + \frac{1}{2}\ln(n+1) &\leq n\ln n + 1 + \ln(n+1) - n \\
\ln n! + \frac{1}{2}\ln(n+1) &\leq n\ln n + \ln(n+1) - (n-1)\ln e \\
\ln n! &\leq \ln n^n + \ln\sqrt{n+1} - \ln e^{n-1} \\
\ln n! &\leq \ln \frac{n^n\sqrt{n+1}}{e^{n-1}} \\
n! &\leq e\sqrt{n+1}(\frac{n}{e})^n
\end{aligned}$$

14. Sea n un entero positivo y $T = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, por la fórmula de Stirling se cumple:

$$\frac{n!}{T} - 1 = O(\frac{1}{n})$$

Usando la definición de O se tiene que existe una constante c y una N tal que para toda $n > N$:

$$\begin{aligned} |\frac{\frac{n!}{T} - 1}{\frac{1}{n}}| &\leq c \\ |\frac{n!}{T} - 1| &\leq \frac{c}{n} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede afirmar que $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ y entonces:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &\sim \frac{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)^2} \\ &\sim \frac{2\sqrt{\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}} \\ &\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

15. Sea X un conjunto de tamaño $n = 2k$ para cierto entero positivo k. Tenga presente que un elemento de un factor está determinado por los elementos de X que lo conforman. Es así que para calcular el número de factores para X se puede partir de considerar:

$$\begin{array}{cccc} \boxed{\binom{2k}{2}} & \boxed{\binom{2k-2}{2}} & \cdots & \boxed{\binom{2}{2}} \\ 1 & 2 & & k \end{array}$$

No obstante al contar de esta manera se consideran las particiones de manera ordenada y por lo tanto es necesario dividir entre $k!$ para eliminar las repeticiones. Es así que, el número de factores es $\frac{1}{k!}\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}...\binom{2}{2}$.
Se mostrará que $\frac{1}{k!}\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}...\binom{2}{2} = (2k-1)...(5)(3)(1)$, para ello se prueba por inducción sobre k que:

- $\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}...\binom{2}{2} = \frac{(2k)!}{2^k}$.
- $\frac{(2k)!}{2^k k!} = (2k-1)...(5)(3)(1)$.

Si $k = 1$, $\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!} = \frac{2!}{2^1}$ y $\frac{1}{1!}\binom{2}{2} = 1$. Suponga los resultados ciertos para k y considere $k+1$, por la hipótesis de inducción sobre la primera afirmación:

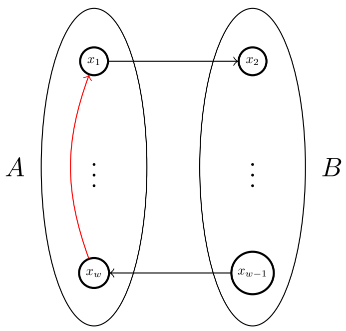
$$\begin{aligned} \binom{2k+2}{2}\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}...\binom{2}{2} &= \binom{2k+2}{2}\frac{(2k)!}{2^k} \\ &= \frac{(2k+2)!}{(2k)!2}\frac{(2k)!}{2^k} \\ &= \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Y aplicando la hipótesis de inducción a la segunda afirmación:

$$\begin{aligned}\frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!} &= \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{2(k+1)(k)!} \\ &= (2k+1)(2k-1)...(5)(3)(1)\end{aligned}$$

Concluyendo las afirmaciones para el caso $k+1$ y por el principio de inducción matemática para todo natural.

b. Suponga que una permutación P de X intercambia algún k-subconjunto con su complemento, llame A al k-subconjunto y $B = X \setminus A$. Suponga que la permutación tiene un ciclo impar $(x_1, .., x_{w-1}, x_w)$ y sin perdida de generalidad que el ciclo tiene su origen en A. Se sigue entonces que al ser el ciclo impar necesariamente $x_w \in A$ y por lo tanto x_w no se intercambia con algún elemento de B, contradiciendo lo supuesto sobre A.



En sentido contrario, suponga que todos los ciclos de la permutación P son pares; luego para cada uno de los ciclos fije un punto de inicio y etiquete los elementos de manera alternada con a y b, al final tome A como el subconjunto de los elementos con etiqueta a y B el subconjunto de los elementos con etiqueta b.

Observe que como cada elemento de X aparece en un ciclo y por lo tanto deberá aparecer en A o en B, además como cada elemento de X aparece en un único ciclo y una única vez, ya que el punto inicial está fijado, entonces $A \cap B = \emptyset$. Adicionalmente como los ciclos son pares, se distribuyen por mitades los elementos entre A y B, concluyendo que A es un k-subconjunto de X. También la permutación P intercambia A por B ya que en los ciclos el siguiente de un elemento pertenece al conjunto contrario.

Se intentará probar que el número de permutaciones de este tipo son $((2n-1)!!)^2$; sea $\mathcal{F}$ el conjunto de factores sobre X y $\mathcal{P}$ el conjunto de permutaciones cuyos ciclos son todos pares. Se buscará establecer una biyección $\mathcal{P} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Antes que nada, suponga que para cada uno de los ciclos que componen las permutaciones se ha fijado un punto de inicio, el cual no va a permanecer fijo a lo largo del razonamiento.

En primer lugar, considere un ciclo $C = (x_1, x_2, ..., x_{2i})$ siendo i un entero positivo. Para $H = \{x_1, ..., x_{2i}\}$ los conjuntos $C^U = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, ..., \{x_{2i-1}, x_{2i}\}\}$ y $C^D = \{\{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}, ..., \{x_{2i}, x_1\}\}$ son factores, ya que se forman i conjuntos de cardinalidad 2 que son partición de H. Así, al considerar una permutación $P = C_1C_2...C_r$ en $\mathcal{P}$ y $F_1 = \bigcup_{1\leq j\leq r} C_j^U$, $F_2 = \bigcup_{1\leq j\leq r} C_j^D$, del hecho que todo elemento de X aparece en algún ciclo y que los ciclos son disyuntos se sigue que F_1, F_2 son factores de X.

Por otro lado considere que se tienen dos factores F_1 , F_2 y tome $\{x_1, x_2\} \in F_1$, se intentará construir un ciclo a partir de este elemento. Como F_2 es una partición de X existirá un elemento $\{x_2, x_3\} \in F_2$ y hay dos posibles casos, si $x_3 = x_1$ entonces se construye el ciclo (x_1, x_2), en caso contrario se razona de la misma manera en F_1.

Suponga que se han tomado los factores $\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, ..., \{x_i, x_{i+1}\}\}$ de manera alternada en F_1, F_2 con los elementos $x_1, ..., x_i, x_{i+1}$ distintos entre si. Hay dos casos según el último factor:

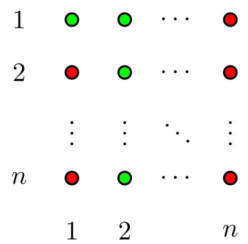
- $\{x_i, x_{i+1}\} \in F_2$: existirá un factor $\{x_{i+1}, x_{i+2}\}$ en F_1, observe que dicho factor no ha sido considerado pues en caso contrario x_{i+1} sería igual a algún elemento anterior a él y contradice lo supuesto sobre los elementos. Y esto nos lleva al segundo caso.

- $\{x_i, x_{i+1}\} \in F_1$: deberá existir un factor $\{x_{i+1}, x_{i+2}\}$ en F_2, observe que este factor no ha sido considerado pues en caso contrario x_{i+1} sería igual a un elemento anterior. Por otro lado, x_{i+2} no puede ser x_2, x_3,..., x_{i+1} ya que en caso contrario se vuelve a contradecir que que se han tomado elementos distintos. Se puede tener que $x_1 = x_{i+2}$ y en este caso el ciclo buscado es $(x_1, x_2, ..., x_{i+1})$, en caso que $x_1 \neq x_{i+2}$ se procede por el caso anterior.

Observe que este proceso se detiene pues los elementos en X son finitos. Además, cuando se genera el ciclo $(x_1, x_2, ..., x_{i+1})$ el índice $i+1$ es par, pues cuando la construcción se detiene lo hace en el factor F_2 y no agrega elementos nuevos, por lo que se puede afirmar que se han tomado los elementos $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, ..., $\{x_i, x_{i+1}\}$ de F_1 y por lo tanto $i+1$ es un número par. De esta manera se pueden construir de los factores una permutación para X cuyos ciclos son todos pares.

Resumiendo, se ha definido una función entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{F}$, dicha función no es propiamente biyectiva ya que no es inyectiva; por ejemplo si $X = \{1, 2, 3, 4\}$ las permutaciones $P_1 = (4, 1, 2, 3)$, $P_2 = (1, 4, 3, 2)$ son enviadas a la misma pareja de factores $\{\{4, 1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Por lo que solo se obtiene la cota inferior $((2k-1)!!)^2 \leq |\mathcal{P}|$.

16. Observe que para un conjunto de n puntos, una relación puede ser abstraída como una matriz de tamaño $n \times n$ sobre la cual se marcan con verde los elementos que pertenecen a la relación.



Por lo tanto es posible reconocer las propiedades sobre una relación de la siguiente manera:

- Reflexiva: Los elementos de la diagonal se encuentran marcados.
- Simétrica: La matriz es simétrica.
- Antisimétrica: Si un elemento por debajo de la diagonal está marcado, entonces el elemento simétrico[1] no está marcado.

Esta representación nos permite contar de manera sencilla las relaciones según sus propiedades:

- Reflexivas: todos los elementos de la diagonal deben estar marcados, por lo tanto solo falta considerar los $n^2 - n$ elementos restantes. Así la cantidad de relaciones reflexivas es de 2^{n^2-n}.
- Simétricas: basta considerar marcar los elementos en o por debajo de la diagonal, se tienen entonces un total de $N = \frac{n(n+1)}{2}$ elementos y un total de 2^N relaciones.
- Reflexiva y simétrica: se combinan los casos anteriores y se tienen un total de $N = \frac{n(n+1)}{2} - n$ elementos por marcar y un total de 2^N relaciones.
- Reflexiva y antisimétrica: en este caso es necesario que los elementos de la diagonal se encuentren marcados y siempre que un elemento por encima o debajo de la diagonal se encuentra marcado su simétrico no lo está. Por lo que entonces basta conocer las marcas de los elementos por debajo de la diagonal para conocer la relación y por lo tanto hay $\frac{n(n+1)}{2} - n$.

17. Sea X un conjunto, P el conjunto de relaciones irreflexivas, antisimétricas y transitivas sobre X; Q el conjunto de relaciones reflexivas, antisimétricas y transitivas sobre X. Defina $+ : P \mapsto Q$ por $R^+ = \{(x, y) : (x, y) \in R \text{ o } x = y\}$. Observe que por la definición $R \subseteq R^+$.

Veamos que $+$ es una biyección. Sean $R_1, R_2 \in P$ tales que $R_1 \neq R_2$, entonces existen x_1, x_2 tales que o bien $(x_1, x_2) \in R_1$ y $(x_1, x_2) \notin R_2$ o bien $(x_1, x_2) \in R_2$ y $(x_1, x_2) \notin R_1$, de la irreflexividad de las relaciones

[1]Se toma como elemento simétrico de (i, j) el elemento (j, i).

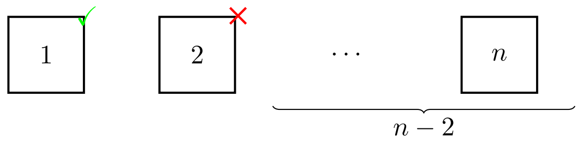
se sigue que $x_1 \neq x_2$. Ahora, en cualquiera de los dos casos se tiene que $R_1^+ \neq R_2^+$ pues $(x_1, x_2) \in R_1$ ó $(x_1, x_2) \in R_2$ pero no ambas al tiempo, concluyendo así la inyectividad de $+$.

Se probará ahora la sobreyectividad, sea $R' \in Q$ y $R = R' \setminus \Delta$ en donde $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$, observe que R es irreflexiva por su definición. Suponga que existen $x, y \in X$ tales que $(x,y), (y,x) \in R$, dado que $R \subseteq R'$ y R' es antisimétrica se sigue que $x = y$ pero esto contradice la definición de R y así R deberá ser antisimétrica ya que para todo par de elementos de X se cumple $(x,y) \notin R$ o $(y,x) \notin R$. Por otro lado, si $(x,y), (y,z) \in R$ entonces por la transitividad en R' se tiene que $(x,z) \in R'$, también se sigue que $x \neq z$ pues en el caso contrario de la antisimetría $x = y = z$ y esto contradice la definición de R, así $(x,z) \in R$ y se sigue la transitividad en R. De todo lo anterior, $R \in P$ y $R^+ = R'$, así $+$ es una función sobreyectiva.

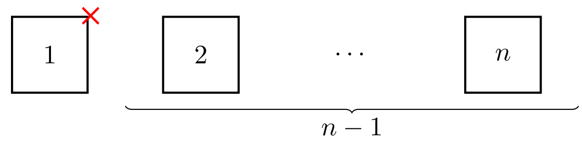
Por último, si $R \in P$ tiene la propiedad de tricotomía y se toman dos elementos $x, y \in X$ ocurren tres casos: si $x = y$ entonces $(x,x) \in R^+$ de su definición, por otro lado si $x \neq y$ la tricotomía en R indica que $(x,y) \in R$ o $(y,x) \in R$ y como $R \subseteq R^+$, $(x,y) \in R^+$ o $(y,x) \in R^+$. Concluyendo la propiedad de tricotomía en R^+, es decir que $+$ preserva la propiedad.

20. Sea X un conjunto de n elementos y $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ una permutación cualquiera de X; observe que se puede asociar la siguiente partición a la permutación $\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, ..., \{x_n\}$, por lo que entonces se tiene que $B_n \leq n!$. Por otro lado, observe que $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n), (x_2, x_1, x_3, ..., x_n)$ son dos permutaciones diferentes las cuales van a tener la misma partición asociada y entonces se sigue que $B_n < n!$, aquí es imprescindible que $n > 2$ para garantizar al menos tres elementos y tener una clase con dos elementos y al menos una clase con un elemento.

1. Sea un conjunto con n elementos ubicados de manera lineal. Para calcular el número de subconjuntos tales que dos elementos elegidos no son consecutivos se puede razonar de la siguiente ubicados de



Elegir el primer elemento y por lo tanto el segundo no puede ir y se deben elegir los demás entre los $n-2$ restantes.

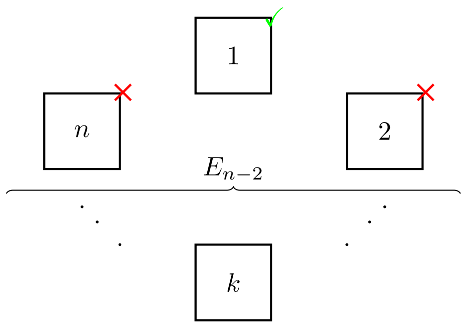


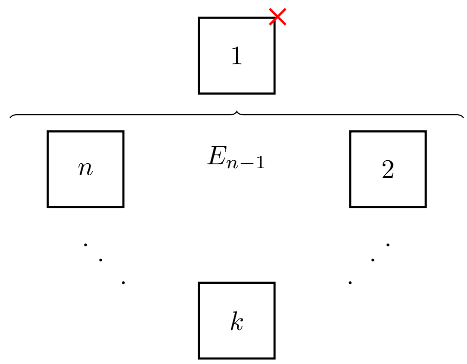
No elegir el primero y tomar el subconjunto de los $n-1$ elementos restantes.

Se procede a hacer la prueba por inducción sobre n, llame E_n el número requerido. Para un conjunto de un elemento se puede escoger o no el elemento por lo que el número de subconjuntos es $E_1 = F_2$. Suponga que la afirmación es cierta para todos los subconjuntos con menos de n elementos y suponga ahora que se toma un conjunto con n elementos, por lo expuesto con anterioridad $E_n = E_{n-1} + E_{n-2} = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$. Concluyendo la afirmación para todo natural n por inducción.

b. Siguiendo la notación del literal anterior, se cumple que para un conjunto de n elementos arreglados en un círculo se pueden tener los siguientes casos:

- Tomar el elemento uno y por lo tanto no puede ir el elemento n y el segundo. Para los $n-2$ elementos restantes, se pueden pensar arreglados de manera lineal y se pueden tomar los subconjuntos de E_{n-3} maneras.
- No tomar el primer elemento y hacer un arreglo lineal de los $n-1$ elementos y por lo tanto se pueden tomar los subconjuntos de E_{n-1} maneras.





En conclusión, se pueden tomar los subconjuntos de $E_{n-3} + E_{n-1} = F_{n-2} + F_n$ maneras.

2. Se prueba por inducción sobre n. Para el caso $n = 1$ se tiene que $-1 = 1 - 2(1) = F_1 - F_2F_0 = (-1)^1$, suponga que la afirmación es cierta para $k \leq n$. Así:

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n &= (F_n + F_{n-1})^2 - (F_{n+1} + F_n)F_n \\
&= F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1} - F_{n+1}F_n - F_n^2 \\
&= F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1} - (F_n + F_{n-1})F_n \\
&= F_{n-1}^2 + F_nF_{n-1} - F_n^2 \\
&= F_{n-1}^2 + F_nF_{n-1} - F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) \\
&= F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2} \\
&= (-1)^{n-1} = (-1)^2(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Por lo que se cumple el caso $n+1$ y por inducción matemática se sigue la afirmación para todo $n \geq 1$.

b. Se procede por inducción sobre n. Si $n = 0$ entonces $\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 1 = 2 - 1 = F_2 - 1$. Suponga que se cumple la afirmación para todo $k \leq n$, por la hipótesis de inducción $F_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1$. Por inducción sobre n se sigue la afirmación.

c. Se va a demostrar usando inducción sobre n. Para esta afirmación la inducción comienza en $n = 1$ y de esta manera $F_0^2 + F_1^2 = 1 + 1 = 2 = F_2$ y $F_0F_1 + F_1F_2 = 1 + 2 = 3 = F_3$ por lo que se cumple el caso base, suponga la afirmación cierta para todo $k < n$ y por la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
F_{2n} &= F_{2n-1} + F_{2n-2} = F_{2(n-1)+1} + F_{2(n-1)} \\
&= F_{n-2}F_{n-1} + F_{n-1}F_n + F_{n-2}^2 + F_{n-1}^2 \\
&= F_{n-2}(F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-1}F_n + F_{n-1}^2 \\
&= F_{n-2}F_n + F_{n-1}F_n + F_{n-1}^2 \\
&= F_n(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_{n-1}^2 \\
&= F_n^2 + F_{n-1}^2
\end{aligned}$$

Quedando establecido el caso $2n$ y así:

$$\begin{aligned}
F_{2n+1} &= F_{2n} + F_{2n-1} = F_{2n} + F_{2(n-1)+1} \\
&= F_{n-1}^2 + F_n^2 + F_{n-2}F_{n-1} + F_{n-1}F_n \\
&= F_{n-1}(F_{n-1} + F_{n-2}) + F_n(F_n + F_{n-1}) \\
&= F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1}
\end{aligned}$$

Obteniendo que la afirmación es válida para n y por inducción se deduce el resultado.

d. Nuevamente se procede por inducción sobre n. Para $n = 0$, $F_0 = \sum_{i=0}^{\lfloor 0/2 \rfloor} \binom{0-i}{i} = \binom{0}{0} = 1$. Suponga que la afirmación se cumple para todo $k < n$, entonces para $n \geq 1$ se siguen dos casos según su paridad:

- $n = 2t$; $t - 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ y aplicando la hipótesis de inducción se obtiene:

$$\begin{aligned}
F_n = F_{n-1} + F_{n-2} &= \sum_{i=0}^{t-1} \binom{n-1-i}{i} + \sum_{i=0}^{t-1} \binom{n-2-i}{i} \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1-1}{1} + \binom{n-1-2}{2} + \dots + \binom{n-1-(t-1)}{t-1} + \\
&\quad \binom{n-2}{0} + \binom{n-2-1}{1} + \dots + \binom{n-2-(t-1)}{t-1} \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1-1}{1} + \binom{n-1-2}{2} + \dots + \binom{n-1-(t-1)}{t-1} + \\
&\qquad \binom{n-1-1}{0} + \binom{n-1-2}{1} + \dots + \binom{n-1-(t-1)}{t-2} + \binom{n-1-t}{t-1} \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-(t-1)}{t-1} + \binom{n-1-t}{t-1}
\end{aligned}$$

  Como $n \geq 1$, $\binom{n-1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$; $\binom{n-1-t}{t} = 0$ ya que $n - 1 - t = 2t - 1 - t = t - 1 < t$ y $\binom{n-t}{t} = \binom{n-1-t}{t} + \binom{n-1-t}{t-1}$, se sigue que la última igualdad es $\sum_{i=0}^{t} \binom{n-i}{i}$. Concluyendo la afirmación en este caso.

- $n = 2t + 1$; $t = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, $t - 1 = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$, además como $n \leq 1$ se cumple $\binom{n-1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$ y aplicando la hipótesis de inducción se obtiene:

$$
\begin{aligned}
F_n = F_{n-1} + F_{n-2} &= \sum_{i=0}^{t} \binom{n-1-i}{i} + \sum_{i=0}^{t-1} \binom{n-2-i}{i} \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1-1}{1} + \binom{n-1-2}{2} + ... + \binom{n-1-t}{t} + \\
&\quad \binom{n-2}{0} + \binom{n-2-1}{1} + ... + \binom{n-2-(t-1)}{t-1} \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1-1}{1} + \binom{n-1-2}{2} + ... + \binom{n-1-t}{t} + \\
&\quad \binom{n-1-1}{0} + \binom{n-1-2}{1} + ... + \binom{n-1-t}{t-1} \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + ... + \binom{n-t}{t} \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + ... + \binom{n-t}{t} \\
&= \sum_{i=0}^{t} \binom{n-i}{i}
\end{aligned}
$$

Concluyendo la afirmación para este caso.

Como en ambos casos se obtiene lo deseado, se sigue la afirmación por inducción para todo n.

3. Del punto 2.c para todo $m \geq 1$ se cumple $F_{2m+1} = F_{m-1}F_m + F_mF_{m+1} = F_m(F_{m-1} + F_{m+1})$, entonces si $n > 3$ necesariamente $m > 1$ y $F_m > 1$, por lo que F_n será compuesto.

4. Se prueba la afirmación por inducción sobre n. Para el caso $n = 1$, $F_2 - 1 = \sum_{i=0}^{0/2} F_{1-2i} = F_1 = 1$, suponga entonces que la afirmación es cierta para todo $k < n+1$. Para el caso $n+1$ se desprenden dos escenarios según la paridad de $n+1$:

   - $n+1 = 2t$; $t-1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, $t-2 = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ y aplicando la hipótesis de inducción:

$$
\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= 2 + \sum_{i=0}^{t-1} F_{n-2i} + \sum_{i=0}^{t-2} F_{n-1-2i} \\
&= 2 + F_n + F_{n-2} + ... + F_{n-2(t-2)} + F_{n-2(t-1)} + F_{n-1} + F_{n-3} + ... + F_{n-1-2(t-2)} \\
&= 2 + (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) + ... + (F_{n-2(t-2)} + F_{n-1-2(t-2)}) + F_{n-2(t-1)} \\
&= 2 + F_{n+1} + F_{n-1} + ... + F_{n+1-2(t-2)} + F_{n-2(t-1)}
\end{aligned}
$$

   Y de observar que; $n+1-2(t-1) = 2t - 2t + 2 = 2$, $n - 2(t-1) = 2t - 1 - t2 + 2 = 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = t-1$ y $\sum_{i=0}^{t-1} F_{n+1-2i} = F_{n+1} + F_{n-1} + ... + F_{n+1-2(t-2)} + F_{n+1-2(t-1)}$ se concluye que:

$$
\begin{aligned}
F_{n+2} - 1 &= 1 + F_{n+1} + F_{n-1} + ... + F_{n+1-2(t-2)} + F_1 \\
&= F_{n+1} + F_{n-1} + ... + F_{n+1-2(t-2)} + F_2 \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} F_{n+1-2i}
\end{aligned}
$$

- $n+1=2t+1$; $t-1=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ y aplicando la hipótesis de inducción:

$$
\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1}+F_n \\
&= 2+\sum_{i=0}^{t-1} F_{n-2i} + \sum_{i=0}^{t-1} F_{n-1-2i} \\
&= 2+F_n+F_{n-2}+...+F_{n-2(t-2)}+F_{n-2(t-1)}+F_{n-1}+F_{n-3}+...+F_{n-1-2(t-1)} \\
&= 2+(F_n+F_{n-1})+(F_{n-2}+F_{n-3})+...+(F_{n-2(t-2)}+F_{n-1-2(t-2)})+(F_{n-2(t-1)}+F_{n-1-2(t-1)}) \\
&= 2+F_{n+1}+F_{n-1}+...+F_{n+1-2(t-2)}+F_{n+1-2(t-1)}
\end{aligned}
$$

Y nuevamente observando: $n+1-2t=1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = t$ y $\sum_{i=0}^{t} F_{n+1-2i} = F_{n+1}+F_{n-1}+...+F_{n+1-2(t-1)}+F_{n+1-2t}$ se concluye que:

$$
\begin{aligned}
F_{n+2}-1 &= 1+F_{n+1}+F_{n-1}+...+F_{n+1-2(t-1)} \\
&= F_{n+1}+F_{n-1}+...+F_{n+1-2(t-2)}+F_1 \\
&= \sum_{i=0}^{t} F_{n+1-2i}
\end{aligned}
$$

Dado que en ambos casos se sigue el resultado, se concluye por inducción la afirmación.

5. Se prueba por inducción sobre n. Para $n=0$ no hay enteros no negativos por debajo de F_1, por lo que trivialmente se cumple la afirmación. Suponga que para todo entero $k<n$, si x_0 es menor a F_{k+1} entonces se puede escribir de la manera solicitada en una única manera.

   Sea ahora x un entero no negativo tal que $F_n \leq x < F_{n+1}$, por el ejercicio 4 se cumple que el mayor entero que se puede expresar sin tomar a F_n es $F_n - 1$, y así necesariamente $x = F_n + x_0$ para algún entero no negativo x_0; como $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ y $F_n \leq F_n + x_0 < F_{n+1}$, se sigue que $0 \leq x_0 < F_{n-1}$. Aplicando la hipótesis de inducción a x_0 se obtiene una escritura $x_0 = F_{i_2}+...+F_{i_r}$ en dónde $i_2,...,i_r \in \{1,..,n-2\}$ y $i_2 > ... > i_r$. Al tomar $i_1 = n$ se tiene que $i_1 > n-2 \geq i_2$, además $i_1,...,i_r \in \{1,...,n\}$ logrando una escritura $x = F_{i_1}+F_{i_2}+...+F_{i_r}$ que cumple con las condiciones solicitadas.

   Para la unicidad suponga que $x = F_{j_1}+...+F_{j_s}$ con $j_1,...,j_s \in \{1,...,n\}$, $j_1 > ... > j_s$. Nuevamente por el ejercicio 4 necesariamente $j_1 = n$, ya que de no incluirlo en la expresión no se podría superar el valor F_n y por lo tanto nunca se alcanzaría x. Así que la unicidad en la escritura de x_0 nos permite concluir que $r=s$ y que $i_2 = j_2$, ..., $i_r = j_s$.

   Por inducción matemática se sigue la afirmación para todo n.

9.1. Observe que los primeros valores de la relación son $f(0)=2$, $f(1)=4=2^2$, $f(2)=f(1)^2=(2^2)^2=2^4$ y $f(3)=f(2)^2=(2^4)^2=2^8$. Se probará que $f(n)=2^{2^n}$ por inducción sobre n; para el caso en que $n=0$ entonces se tiene que $f(0)=2^{2^0}=2^1=2$. Suponga que la afirmación se cumple para n y considere ahora $n+1$, se cumple que $f(n+1)=f(n)^2$ y por la hipótesis de inducción $f(n+1)=(2^{2^n})^2=2^{2^n*2}=2^{2^{n+1}}$. Así, se cumple la afirmación para $n+1$ y por inducción matemática para todo natural.

9.2. Considere la relación $f(n+1)=f(n)+f(n-1)+f(n-2)$, esta relación es lineal y por lo tanto se puede resolver usando la técnica del polinomio característico. El polinomio de esta relación es $P(x) = x^3 - x^2 - x^1 - 1$, lo primero que se observa es que el polinomio no tiene ceros racionales, por el teorema de los ceros racionales si los tuviera deberían ser 1 o -1.

   Observando que $f(1)=-1$ y $f(2)=1$, por el teorema del valor intermedio existe un valor $1<x_1<2$ tal que $f(x_1)=0$, aproximadamente x_1 tiene el valor de $1,84$ y al realizar división sintética se obtiene que $P(x) \sim (x-x_1)(x^2+0,84x+0,5456)$, por otro lado el polinomio $x^2+0,84x+0,5456$ tiene por discriminante $-2,182$ y por lo tanto sus raíces son complejas conjugadas $x_2 = -0,4196+0,6063i$, $x_3 = -0,4196-0,6063i$.

   Todo lo anterior nos permite afirmar que $P(x)$ tiene tres raíces diferentes, una real y dos complejas conjugadas, por lo que la solución a la relación va a ser de la forma $f(n) = ax_1^n + bx_2^n + cx_3^n$ y para determinar los valores de a, b, c se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 1 \\ ax_1+bx_2+cx_3 &= 1 \\ ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones, aproximadas, son $a = 0{,}435608 - 2{,}02958 \times 10^{-17}i$, $b = 0{,}282196 - 0{,}359233i$ y $c = 0{,}282196 + 0{,}359233i$.

9.3. Observe el comportamiento de los primeros elementos:

- $n = 0$: $f(0+1) = 1 + \sum_{i=0}^{0-1} f(i) = 1$
- $n = 1$: $f(1+1) = 1 + \sum_{i=0}^{1-1} f(i) = 1 + f(0) = 2$
- $n = 2$: $f(2+1) = 1 + \sum_{i=0}^{2-1} f(i) = 1 + f(0) + f(1) = 3$
- $n = 3$; $f(3+1) = 1 + \sum_{i=0}^{3-1} f(i) = 1 + f(0) + f(1) + f(2) = 5$

Por lo que se presume que para todo n, $f(n) = F_n$ en dónde F_n representa el m-ésimo número de Fibonacci. El caso base es cuando $n = 0$, $f(0) = 1 = F_0$ y para $n = 1$ se cumple que $f(1) = 1 = F_1$. Suponga que la afirmación es cierta para $k < n$ y que $n \geq 2$, entonces se puede suponer que n es de la forma $m+1$ para algún m entero positivo, se respeta que $f(m+1) = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} f(k) = (1 + \sum_{k=0}^{m-2} f(k)) + f(m-1)$ y entonces por hipótesis de inducción $f(m+1) = f(m) + f(m-1) = F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$. Por lo que entonces se concluye la afirmación para todo n por inducción matemática.

9b. Primero se presentan algunos ejemplos, considere $T(n)$ la manera de escribir n de la manera solicitada. Los paréntesis muestran como se aplican los casos anteriores:

- $n = 1$: hay $T(1) = 2^{1-1} = 1$ maneras, 1.
- $n = 2$: hay $T(2) = 2^{2-1} = 2$ maneras, 2, $1+1$.
- $n = 3$: hay $T(3) = 2^{3-1} = 4$ maneras, 3, $2+1$, $(1+1)+1$, $1+2$.
- $n = 4$: hay $T(4) = 2^{4-1} = 8$ maneras, 4, $3+1$, $(2+1)+1$, $(1+2)+1$, $(1+1+1)+1$, $2+2$, $(1+1)+2$, $1+3$.

En general se tiene la siguiente recurrencia: dado un número n siempre existe la manera sin sumandos de escribir el número, para contar los demás casos se observa que $n = (n-1)+1 = (n-2)+2 = (n-3)+3 = ... = 1+(n-1)$ y por lo tanto basta contar las maneras de escribir $n-1$, $n-2$, ..., 1, es decir que $T(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} T(i)$. Observe que al considerar $n = (n-k)+k$ no es necesario contar las descomposiciones de k toda vez que dichas descomposiciones son consideradas en casos anteriores, así por ejemplo si $k = s+t$ entonces $(n-k)+s+t$ es una descomposición en el caso $(n-t)+t$.

Se prueba la afirmación por inducción matemática; para el caso $n = 1$ se cumple que $T(1) = 2^{1-1} = 1$, suponga que la afirmación es cierta para todo $k < n$ y considere el caso n. Se cumple que $T(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} T(i)$ y por la hipótesis de inducción, $T(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i = 1 + 2^{n-1} - 1$, quedando establecido el caso n y por inducción matemática se concluye la prueba.

11. Se presentan los ejemplos primero:

- $s(0) = 1$: pues la única sucesión es la vacía $\{\}$.
- $s(1) = 2$: $\{\}$,$\{1\}$.
- $s(2) = 4$: $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$.
- $s(3) = 6$: $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$.
- $s(4) = 10$: $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{1,2,4\}$.

Ahora considere el siguiente razonamiento; sea $n \geq 1$, en una sucesión $(x_1, ..., x_k)$ pueden suceder dos casos el primera es que $x_k = n$ y el segundo es que $x_k \neq n$, en el primer caso se tiene que dicha sucesión también satisface las condiciones para $n-1$ y en el segundo se deberá cumplir que $2x_{k-1} \leq n$ y por lo tanto $x_k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, así $(x_1, ..., x_{k-1})$ cumple las condiciones para $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. De aquí que $s(n) = s(n-1) + s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. Sea $S(t) = \sum_{n\geq 0} s(n)t^n$ la función generadora de $s(n)$, de esta manera:

$$\begin{aligned}
(1-t)S(t) &= (1+t)S(t^2) \\
S(t) &= tS(t) + S(t^2) + tS(t^2) \\
&= \sum_{n\geq 0} s(n)t^{n+1} + \sum_{n\geq 0} s(n)t^{2n} + \sum_{n\geq 0} s(n)t^{2n+1} \\
&= \sum_{n\geq 1} s(n-1)t^n + \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n\equiv 0 \pmod 2}} s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)t^n + \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n\equiv 1 \pmod 2}} s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)t^n \\
&= \sum_{n\geq 0} (s(n-1) + s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor))t^n
\end{aligned}$$

Y por la observación inicial se cumple la igualdad.

11b. Sea $(x_1, ..., x_k)$ una sucesión tal que $1 \leq x_i \leq n$ para todo i y $x_{i+1} \geq 2x_i$ para $i = 1, .., k-1$, se probará por inducción sobre k que $x_{i+1} > \sum_{j=1}^{i} x_j$ para $i = 1, .., k-1$. Si $k = 1$, entonces la afirmación se cumple por vacuidad ya que no hay índices por debajo de uno. Suponga que la afirmación es cierta para todas las sucesiones con tamaño menor a k y tome una sucesión $(x_1, ..., x_k)$ de tamaño $k \geq 2$, observe que $x_{i+1} \geq 2x_i$ para $i = 1, ..., k-2$ y entonces por hipótesis de inducción se cumple que $x_{i+1} > \sum_{j=1}^{i} x_j$ para $i = 1, ..., k-2$. En particular, $x_{k-1} > \sum_{j=1}^{k-2} x_j$ y por lo tanto $x_k \geq 2x_{k-1} > \sum_{j=1}^{k-1} x_j$. Por lo que se cumple la afirmación para el caso k y por inducción para las sucesiones de tamaño finito.

De lo anterior se puede afirmar que $u(n) \geq s(n)$. Adicionalmente observe que las sucesiones en $u(n)$ son aquellas que tienen a n y aquellas que no, en el primer caso la sucesión es del tipo $u(n-1)$ y de esta manera $u(n) = u(n-1) + A$. Por otro lado, la cantidad A hace referencia a las sucesiones $(x_1, ..., x_k, n)$ tales que $\sum_{i=1}^{k} x_k < n$.

Considere $T(p)$ como el número de sucesiones $(x_1, ..., x_k)$ tales que $x_{i+1} > \sum_{j=1}^{i} x_j$ para $i = 1, ..., k-1$ y $\sum_{j=1}^{k} x_j = p$. Observe que necesariamente $x_k > \frac{p}{2}$, en caso contrario no sería posible cumplir la segunda condición pues $x_k > \sum_{j=1}^{k-1} x_j$. Para conocer $T(p)$ basta contar recursivamente las sucesiones $(x_1, ..., x_{k-1})$ cuya suma sea exactamente $p - x_k$, dado que al agregar x_k al final se obtiene una del tipo deseado. Es así como:

$$T(p) = \sum_{j=n/2+1}^{p} T(p-j) = \sum_{i=0}^{\lfloor p-1/2 \rfloor} T(i)$$

Observe que $T(2p) = T(2p-1) = T(2p-2) + T(p-1)$ para $p > 0$ y que $A = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) = T(2n)$. Y entonces se probará por inducción que $T(2n) = s(n)/2$ para $n \geq 1$, para cuando $n = 1$ entonces $T(2) = 1$ pues $\{2\}$ es la única sucesión que cumple las condiciones y como $s(1)/2 = 1$, se cumple el caso base. Suponga que la afirmación es cierta para todas las $k < n$ y de esta manera aplicando la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
T(2n) &= T(2n-2) + T(n-1) \\
&= \frac{s(n-1)}{2} + \frac{s(\lfloor n/2 \rfloor)}{2} \\
&= \frac{s(n)}{2}
\end{aligned}$$

De todo lo anterior, $u(n) = u(n-1) + \frac{s(n)}{2}$

12. Sea $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ con $a_0 = 1$, se construye por inducción sobre n, $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ tal que $F(t)G(t) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, lo que significa $c_0 = 1$ y $c_n = 0$ si $n \neq 0$. Así, para $n = 0$ se pide que $a_0 b_0 = 1$ y necesariamente $b_0 = 1$. Para el caso de b_1, se pide $a_0 b_1 + a_1 b_0 = b_1 + a_1 = 0$ y entonces $b_1 = -a_1$. Suponga que se han construido todos los b_k para $k < n$, de la regla general de multiplicación para series formales $0 = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ y entonces $b_n = -a_n - a_{n-1}b_1 - ... - a_1 b_{n-1}$ está definido gracias a la hipótesis de inducción. En conclusión usando inducción sobre n es posible construir todos los b_n que cumplen lo pedido.

   Si todos los coeficientes a_n son enteros entonces los b_n son enteros, pues para su construcción solo se requieren sumas o productos de enteros y este conjunto de números es cerrado bajo dichas operaciones.

13 Considere $\{1, ..., n\}$ un conjunto de n elementos y sea π una permutación cualquiera de los elementos. Siempre es posible encontrar el menor i tal que el conjunto $\{1, .., i\}$ queda fijo bajo la permutación, n siempre funciona. De esta manera π puede ser vista como una permutación conexa de i elementos y otra permutación sobre los $n - i$ elementos restantes. Así, se sigue que hay $c_i(n-i)!$ permutaciones de los n elementos que se componen de una conexa en i elementos y una permutación de los $n - i$, al sumar sobre i se obtiene $\sum_{i=1}^{n} c_i(n-i)! = n!$.

   Para la segunda parte, leyendo sobre las diagonales, observe que:

$$\begin{aligned}
G(t)F(t) &= (1! + 2! + 3! + 4! + ...)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + ...) \\
&= 1!c_1 + 2!c_1 + 3!c_1 + 4!c_1 + ...+ \\
&\quad 1!c_2 + 2!c_2 + 3!c_2 + 4!c_2 + ...+ \\
&\quad 1!c_3 + 2!c_3 + 3!c_3 + 4!c_2 + ...+ \\
&\quad 1!c_4 + 2!c_4 + 3!c_4 + 4!c_4 + ...+ \\
&= \sum_{n\geq 2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)!c_i
\end{aligned}$$

   De todo lo anterior y como $c_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
1 &= (1 - G(t))(1 + F(t)) = 1 + F(t) - G(t) - G(t)F(t) \\
&= 1 + 1 + \sum_{n\geq 2} n! - c_1 - \sum_{n\geq 2} c_n - \sum_{n\geq 2} \sum_{i=1}^{n-1} c_i(n-i)! \\
&= 1 + \sum_{n\geq 2} n! - \sum_{n\geq 2} \sum_{i=1}^{n} c_i(n-i)! = 1
\end{aligned}$$

18. Sea $S(t) = \sum_{n\geq 0} s(n)\frac{t^n}{n!}$ la función generadora exponencial (f.g.e.) para $s(n) = s(n-1) + (n-1)s(n-2)$. Considerando que $S'(t) = \sum_{n\geq 1} s(n)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$:

$$\begin{aligned}
S'(t) &= \sum_{n\geq 1} (s(n-1) + (n-1)s(n-2))\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n\geq 1} s(n-1)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 2} s(n-2)\frac{t^{n-1}}{(n-2)!} \\
&= \sum_{n\geq 0} s(n)\frac{t^n}{(n)!} + t\sum_{n\geq 2} s(n-2)\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\
&= \sum_{n\geq 0} s(n)\frac{t^n}{(n)!} + t\sum_{n\geq 0} s(n)\frac{t^n}{(n)!} \\
&= S(t)(1+t)
\end{aligned}$$

Y resolviendo la ecuación diferencial $S'(t) = S(t)(1+t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S(t)}dy &= (1+t)dt \\ \int \frac{1}{S(t)}dy &= \int (1+t)dt \\ \ln S(t) &= \frac{1}{2}t^2 + t + t_0 \end{aligned}$$

Al aplicar la condición inicial $S(0) = 1$, se obtiene que $S(t) = e^{\frac{1}{2}t^2+t}$.

19. Sean b_n los números de Bernoulli, observe que $\binom{2}{0}b_0 + \binom{2}{1}b_1 = 0$ y por lo tanto $b_1 = \frac{-1}{2}$, además para $n \geq 1$ se cumple que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0$ y

$$\binom{n+1}{n+1} b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k = b_{n+1}$$

Como $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} b_{n-k} = b_n$, para $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} b_{n-k} &= b_n \\ \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{t^n}{n!} &= b_n \frac{t^n}{n!} \\ \sum_{k=0}^{n} (\frac{t^k}{k!})(b_{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}) &= b_n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Sumando los términos $n \geq 2$:

$$\sum_{n\geq 2} \sum_{k=0}^{n} (\frac{t^k}{k!})(b_{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}) = \sum_{n \geq 2} b_n \frac{t^n}{n!}$$

Si se considera $f(t) = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}$ como la función generadora exponencial para b_n entonces la parte derecha corresponde con $f(t) + \frac{1}{2}t - 1$ y la parte izquierda es el producto de $f(t)$ con la función exponencial $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}$ sin los dos primeros términos, de modo que:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 2} \sum_{k=0}^{n} (\frac{t^k}{k!})(b_{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}) &= \sum_{n \geq 2} b_n \frac{t^n}{n!} \\ f(t)e^t - ((b_0 \frac{t^0}{0!})(\frac{t}{1!}) + (b_1 \frac{t}{1!})(\frac{t^0}{0!})) - (b_0 \frac{t^0}{0!})(\frac{t^0}{0!}) &= f(t) + \frac{1}{2}t - 1 \\ f(t)e^t - \frac{1}{2}t - 1 &= f(t) + \frac{1}{2}t - 1 \\ f(t)e^t - f(t) &= t \end{aligned}$$

Razón por la cual $f(t) = \frac{t}{e^t-1}$. Ahora, si $g(t) = f(t) + \frac{1}{2}t = \frac{t}{e^t-1} + \frac{1}{2}t = \frac{t(e^t+1)}{2(e^t-1)}$:

$$g(-t) = \frac{-t(\frac{1}{e^t}+1)}{2(\frac{1}{e^t}-1)} = \frac{-t(\frac{1+e^t}{e^t})}{2(\frac{1-e^t}{e^t})} = \frac{-t(1+e^t)}{2(1-e^t)} = g(t)$$

De manera que $g(t)$ es una función par y por lo tanto para $n \geq 3$ se cumple:

$$\sum_{n\geq 3} b_n \frac{1}{n!} = \sum_{n\geq 3} b_n \frac{(-1)^t}{n!}$$

Y para los n impares se deberá cumplir $b_n = -b_n$ por lo que necesariamente $b_n = 0$.

19b. Considere ahora la recurrencia $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k = 0$, luego se cumple que $c_n = -\sum_{k=0}^{n-1} c_k$. Suponga que $C(t) = \sum_{n\geq 0} c_n \frac{t^n}{n!}$ es la función generadora exponencial, de esta manera:

$$\begin{aligned}
C(t) - 1 &= \sum_{n\geq 1} c_n \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 1} (-\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} c_k) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{n!}{k!(n-k)!} c_k \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{t^{n-k}}{(n-k)!} c_k \frac{t^k}{k!} \\
&= (\sum_{k\geq 1} -\frac{t^k}{k!})(\sum_{n\geq 0} c_n \frac{t^n}{n!}) \\
&= -(e^t - 1)C(t)
\end{aligned}$$

De donde resulta que $C(t) = \frac{1}{e^t}$.

P. En la Tarea 1 se estableció que $(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ por lo que se convendrá que $(-1)!! = 1$. Sea $s(n)$ el número de involuciones sobre n elementos, se prueba la afirmación por inducción sobre n, para el caso en que $n = 1$ se tiene que $s(1) = \sum_{k=0}^{0} \binom{1}{2k}(2k-1)!! = \binom{1}{0}(-1)!! = 1$ y para $n = 2$ se tiene que $\sum_{k=0}^{1} \binom{2}{2k}(2k-1)!! = \binom{2}{0}(-1)!! + \binom{2}{2}(1)!! = 1 + 1 = 2$, por lo que para los dos primeros casos se cumple la afirmación. Suponga que $n \geq 3$ y que la afirmación se cumple para todo $i < n$. Por un lado se sabe que $s(n) = s(n-1) + (n-1)s(n-2)$ y además según la paridad de n se tienen dos escenarios:

- $n = 2t$: primero observe que $\binom{2t-1}{2t-1} = 1 = \binom{2t-2}{2t-2}$. Por otro lado, para $0 \leq k \leq t-1$:

$$\begin{aligned}
(2t-1)\binom{2t-2}{2k}(2k-1)!! &= \frac{2k+1}{2k+1}(2t-1)\frac{(2t-2)!}{(2k)!(2t-2-2k)!}(2k-1)!! \\
&= \frac{(2t-1)!}{(2k+1)!(2t-1-2k-1)!}(2k+1)!! \\
&= \binom{2t-1}{2k+1}(2k+1)!!
\end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned}
(n-1)\sum_{k=0}^{t-1} \binom{2t-2}{2k}(2k-1)!! &= (2t-1)\binom{2t-2}{0}(-1)!! + ... + (2t-1)\binom{2t-2}{2t-2}(2t-3)!! \\
&= \binom{2t-1}{1}(1)!! + ... + \binom{2t-2}{2t-2}(2t-1)!! \\
&= \sum_{k=1}^{t} \binom{2t-1}{2k-1}(2k-1)!!
\end{aligned}$$

Para finalizar, como $\binom{2t-1}{0} = 1 = \binom{2t}{0}$, $\binom{2t-1}{2t-1} = 1 = \binom{2t}{2t}$ y de todo lo establecido hasta este punto:

$$\begin{aligned}
s(n) &= \sum_{k=0}^{t-1} \binom{2t-1}{2k}(2k-1)!! + (n-1)\sum_{k=0}^{t-1} \binom{2t-2}{2k}(2k-1)!! \\
&= \sum_{k=0}^{t-1} \binom{2t-1}{2k}(2k-1)!! + \sum_{k=1}^{t} \binom{2t-1}{2k-1}(2k-1)!! \\
&= \binom{2t-1}{0}(-1)!! + (\binom{2t-1}{2} + \binom{2t-1}{1})(2-1)!! + ... + \binom{2t}{2t}(2t-1)!! \\
&= \binom{2t}{0}(-1)!! + \binom{2t}{2}(2-1)!! + ... + \binom{2t}{2t}(2t-1)!! \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{2t}{2k}(2k-1)!!
\end{aligned}$$

- $n = 2t+1$: de manera análoga al caso anterior se puede establece que $(n-1)\sum_{k=0}^{t-1} \binom{2t-1}{2k}(2k-1)!! = \sum_{k=1}^{t} \binom{2t}{2k-1}(2k-1)!!$ y de esta manera:

$$\begin{aligned}
s(n) &= \sum_{k=0}^{t} \binom{2t}{2k}(2k-1)!! + (n-1)\sum_{k=0}^{t-1} \binom{2t-1}{2k}(2k-1)!! \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{2t}{2k}(2k-1)!! + \sum_{k=1}^{t} \binom{2t}{2k-1}(2k-1)!! \\
&= \binom{2t}{0}(-1)!! + (\binom{2t}{2} + \binom{2t}{1})(2-1)!! + ... + (\binom{2t}{2t} + \binom{2t}{2t-1})(2t-1)!! \\
&= \binom{2t+1}{0}(-1)!! + \binom{2t+1}{2}(2-1)!! + ... + \binom{2t+1}{2t}(2t-1)!! \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{2t+1}{2k}(2k-1)!!
\end{aligned}$$

Como en ambos casos se cumple la afirmación, entonces se cumple para n y por inducción se concluye la afirmación.

5.3.5. Sea $N = \{1, ..., n\}$, $K = \{1, ..., k\}$ y $f : N \mapsto K$ una función sobreyectiva. Es posible definir sobre N una partición por medio de f, para ello considere la relación $x \sim y$ si y solo si $f(x) = f(y)$, se probará que la relación es de equivalencia:

- Es reflexiva pues $f(x) = f(x)$ para cualquier $x \in N$.
- Es simétrica pues para cualesquiera $x, y \in N$, si $f(x) = f(y)$ también se cumple que $f(y) = f(x)$.
- Por último, si $x, y, z \in N$, $f(x) = f(y)$ y $f(y) = f(z)$ entonces $f(x) = f(z)$ y por lo tanto x se relaciona con z.

Como la función es sobreyectiva se cumple que N queda partido en k clases de equivalencia y observe que se pueden permutar de $k!$ los valores de K para obtener funciones distintas y por lo tanto existen $k!S(n, k)$ funciones sobreyectivas de N en K.

Por otro lado, aplicando el PIE se obtiene que el número de funciones sobreyectivas de N a K es $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$, cambiando el índice de i a $k-j$ y aplicando el hecho que $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$; se obtiene el resultado.

5.5.3. En primer lugar, se probará que toda permutación puede ser escrita como producto de ciclos. Suponga que π es una permutación sobre el conjunto X, se prueba la afirmación usando inducción sobre la cantidad de elementos en X. En el caso que $X = \{1\}$ entonces la única permutación es la identidad y es igual al ciclo $(1, 1)$. Suponga que para todos los conjuntos de menos de n elementos cualquiera de sus permutaciones se puede descomponer en producto de ciclos. Considere que X tiene n elementos, π una permutación sobre X y $x_1 \in X$; del hecho que π es una biyección y X finito, es posible encontrar $x_2, ..., x_k$ tales que $\pi x_1 = x_2$, $\pi x_2 = x_3$, ..., $\pi x_k = x_1$ obteniendo el ciclo $(x_1, ..., x_k)$, hay dos escenarios según el valor de k: si $k = n$ entonces toda la permutación π es un ciclo y se sigue el resultado, en el caso que $k < n$ se puede considerar π restringida al conjunto $X \setminus \{x_1, ..., x_k\}$, aplicar la hipótesis de inducción y generar una descomposición en ciclos de π. De esta manera cualquier permutación de un conjunto finito se puede descomponer en producto de ciclos por inducción.

En segundo lugar, se probará que todo ciclo C se puede escribir como producto de transposiciones. La prueba se hace mediante inducción en la longitud del ciclo, el caso base es cuando el ciclo tiene longitud uno, (x) y por lo tanto la transposición asociada es (x, x). Suponga entonces que todos los ciclos de longitud menor a n se cumple la afirmación y considere $C = (x_1, ..., x_n)$ un ciclo de longitud n. Si $D = (x_1, x_2)(x_n, x_2, ..., x_{n-1})$ se probará que $C = D$, basta observar como actúa D en cada uno de los elementos, para x_j, $2 \leq j \leq n-2$, $Dx_j = x_{j+1}$, además $Dx_1 = x_2$ y $Dx_n = x_1$, por lo que C actúa igual a D y por lo tanto son iguales. De esta manera, aplicando la hipótesis de inducción en a $(x_n, x_2, ..., x_{n-1})$ se puede obtener una descomposición como producto de transposiciones y por inducción se cumple para cualquier ciclo.

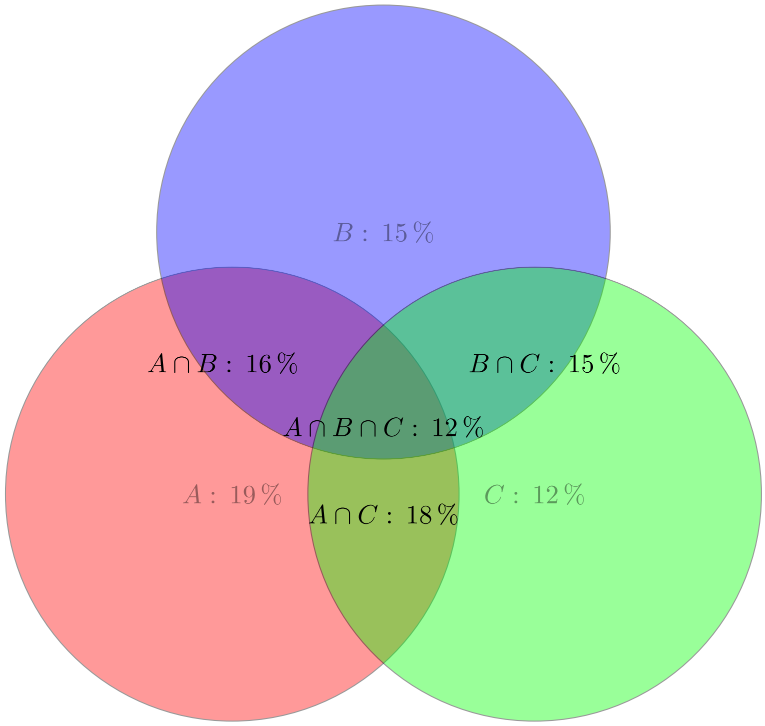
Utilizando los resultados previos, si $\pi = C_1..C_k$ al tomar una descomposición para cada uno de los ciclos, se obtiene una descomposición de la permutación como producto de transposiciones.

Sea $sgn : S_n \to \{-1, 1\}$ la aplicación signatura, por un lado la aplicación está bien definida pues asigna un único valor a cada elemento y por otro:

- Si π par, σ par y $\pi\sigma$ es el producto de un número par de transposiciones, de esta manera $sgn(\pi\sigma) = 1 = 1 * 1 = sgn(\pi)sgn(\sigma)$.
- Si π par, σ impar y $\pi\sigma$ es el producto de un número impar de transposiciones, de esta manera $sgn(\pi\sigma) = -1 = 1 * -1 = sgn(\pi)sgn(\sigma)$. El argumento es análogo cuando π es impar y σ par.
- Si π impar, σ impar y $\pi\sigma$ es el producto de un número par de transposiciones, de esta manera $sgn(\pi\sigma) = 1 = -1 * -1 = sgn(\pi)sgn(\sigma)$.

En conclusión sgn es un homeomorfismo de grupos.

1. La situación problema es la siguiente:



Y de esta manera el porcentaje de personas que no comparte con ninguno de los tres candidatos es del $100\,\% - (15 + 16 + 19 + 18 + 12 + 12 + 15)\,\% = -7\,\%$, lo cual no es posible y por lo tanto hay un error en la encuesta.

3. Sea X un conjunto con n elementos, luego:

   - Al pensar $S(n, 1)$ como el número de particiones que tienen una sola clase de equivalencia se debe cumplir que dicha clase es todo el conjunto X. Por lo tanto, $S(n, 1) = 1$.
   - Considere que se tienen dos clases de equivalencia A, B, cada elemento de X puede pertenecer o no a A y de esta manera se obtiene que A se puede conformar de 2^n maneras, no obstante al buscar particiones se deben eliminar los casos en que A o B resulten vacíos, en otras palabras que todos los elementos queden en A o que todos queden en B y por lo tanto hay $2^n - 2$ maneras de tomar A cumpliendo que ni A ni B son vacíos. Por último, para hablar de particiones es necesario eliminar el orden y es necesario dividir en 2 que son las veces que se cuenta la misma partición. Concluyendo que $S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$.
   - Nuevamente, se puede partir de considerar que se necesitan $n - 1$ subconjuntos no vacíos de X, por lo que hay $n(n - 1)...(3)(2)$ maneras de tomar un elemento en cada conjunto. El siguiente paso es ubicar el elemento que falta y hay $n - 1$ formas de ponerlo en alguno de los subconjunto.

     Ahora se debe eliminar múltiples conteos que se inducen al considerar los subconjuntos de manera ordenada y se deberá dividir por $\frac{1}{(n-1)!}$, adicionalmente en el subconjunto que quedan los dos elementos se tiene un doble conteo dependiendo de cuál de los elementos fue elegido en la primera etapa. Por lo que el número de maneras de conformar las particiones es $S(n, n - 1) = (n(n - 1)...(3)(2))(n - 1)\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!} = \binom{n}{2}$.
   - Parta de considerar que se necesitan $n - 2$ subconjuntos no vacíos de X, por lo que hay $n(n - 1)...(3)$ maneras de tomar un elemento en cada uno de los subconjuntos y hay que dividir por $\frac{1}{(n-2)!}$ para considerar los subconjuntos de manera no ordenada. Los dos elementos restantes se pueden ubicar de la siguiente manera:

     - En un solo subconjunto, de esta manera queda un conjunto de tres elementos y los restantes de a uno. Entonces para elegir el subconjunto de tres hay $n - 2$ maneras de lograrlo, sin embargo se debe dividir por $\frac{1}{3}$ ya que depende de cuál elemento es tomado en la primera etapa.

- En dos subconjuntos, en este caso hay que tomar dos subconjuntos y esto se puede lograr de $(n-2)(n-3)$ maneras, pero además hay que dividir por $\frac{1}{4}$ ya que por cada subconjunto de dos elementos se cuenta doble dependiendo cuál de sus elementos es tomado primero.

En resumen hay $\frac{n(n-1)...(3)}{(n-2)!}(\frac{n-2}{3}+\frac{(n-2)(n-3)}{4})$ maneras de formar las clases de equivalencia y esto es igual a $\frac{n(n-1)...(3)(2)}{(3)(2)(n-3)!}+\frac{1}{2}(\frac{n(n-1)...(3)(2)}{(2)(n-2)!})(\frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{2(n-4)!})=\binom{n}{3}+\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$

4. Al pensar a $s(n,1)$ como el número de permutaciones que tienen un ciclo se observa que $n \geq 1$. Se prueba la afirmación por inducción sobre n, por lo observado al inicio el caso base es cuando $n=1$ y en este caso solo existe una permutación y además $|s(n,1)|=0!=1$. Suponga que la afirmación es cierta para todo $k \leq n$ y considere el caso $n+1$, aplicando la hipótesis de inducción $|s(n+1,1)|=|-ns(n,1)|+|s(n,0)|=n(n-1)!+0=n!$. De esta manera queda establecido el caso $n+1$ y por inducción resulta verdadera la afirmación para todo n.

   Por último, una permutación cíclica se puede representar como una permutación $(x_1,...,x_n)$, sin embargo existen n permutaciones que representan el mismo ciclo, al cambiar el punto de inicio, y es así como el número de permutaciones cíclicas en un conjunto de n elementos es $\frac{n!}{n}=(n-1)!$.

5. Sea t un entero positivo y considere $T=\{1,...,t\}$, $N=\{1,...,n\}$, para cada uno de los elementos de N hay t maneras de emparejarlo con un elemento de T y por lo tanto el número de funciones $f: N \mapsto T$ es t^n.

   Al fijar una función $f: N \mapsto T$ se puede definir una relación sobre N, para $i,j \in N$, $i \cong j$ si y solo si $f(i)=f(j)$, tal como en la proposición 5.3.5 resulta una relación de equivalencia.

   Ahora, es posible enumerar las clases de equivalencia $C_1,...,C_k$ de tal manera que $1 \in C_1$ y para los demás si $x_q = min(N \setminus \cup_{p=1}^{q} C_p)$, $x_q \in C_{q+1}$. Por otro lado como $f(C_1)=y_1$, $f(C_2)=y_2$,.., $f(C_k)=y_k$ entonces se puede identificar a f por medio de la partición que se genera y los elementos $y_1,..,y_k$ de T.

   Pero observe que al variar los elementos $y_1,...,y_k$ se obtiene un total de $(t)_k$ de funciones diferentes y como existen $S(n,k)$ particiones posibles entonces la cantidad de funciones que tienen k clases de equivalencia bajo la relación $\cong$ es $(t)_k S(n,k)$.

   Al variar la cantidad de clases se obtiene que existen $t^n=\sum_{k=1}^{n}(t)_k S(n,k)$ funciones diferentes.

5b. Sean $F(t), G(t)$ dos polinomios los cuales cumplen que $F(n)=G(n)$ para todo entero positivo n. Suponga que $F(t) \neq G(t)$ de esta manera es posible afirmar que $H(t)=F(t)-G(t) \neq 0$, es decir que H es un polinomio no nulo. Pero además $H(n)=0$ para todo entero positivo, lo cual contradice que un polinomio tiene finitos ceros. En conclusión $F(t)=G(t)$.

8. La afirmación se prueba por inducción en la longitud del ciclo m. Para $m=2$ es cierto. Suponga que es válida la afirmación para todo ciclo de longitud menor a m y sea $C=(x_1,...,x_m)$ un ciclo de longitud m, al tomar la transposición (x_1,x_2) y el ciclo $(x_m,x_2,...,x_{m-1})$ tal como se mostró en la proposición 5.5.3 $(x_1,x_2)(x_m,x_2,...,x_{m-1})$ es igual a C. La hipótesis de inducción garantiza que $(x_m,x_2,...,x_{m-1})$ se puede escribir como el producto de $m-2$ transposiciones y por lo tanto C se puede escribir como el producto de $m-2+1$ transposiciones. Por inducción, se sigue la afirmación para todo m.

b. Si una permutación es un ciclo de longitud $2n+1$ entonces puede ser escrito como el producto de $2n$ transposiciones y por lo tanto es una permutación par. En el otro sentido, suponga que la permutación es par y que tiene una longitud par $2n$, se tendría entonces que es producto de $2n-1$ transposiciones lo cual es un absurdo.

c. Por último, en una permutación, π cualquier ciclo de longitud impar puede ser escrito como el producto de un número par de transposiciones y por lo tanto la paridad de la permutación estará dada por la cantidad de ciclos pares, ya que éstos aportan un número impar de transposiciones. Suponiendo que $C_1,..,C_k$ son los ciclos pares de la permutación, entonces se podrá descomponer π como una cantidad par de transposiciones si y solo si las transposiciones de $C_1,..,C_k$ son una cantidad par y esto sucede si y solo si $k=2t$ para algún t entero no negativo.

11a. Si el producto $(x_1, y_1)...(x_k, y_k)$ es el ciclo $(w_1, ..., w_p, z_1, ..., z_q)$ con $w_1 = x_1$, $z_1 = y_1$, $p \geq 2$ entonces el producto $(x_2, y_2)...(x_k, y_k)$ es igual al producto de los ciclos $(w_1, ..., w_p)(z_1, ..., z_q)$ ya que:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1), ..., (x_k, y_k) &= (w_1, ..., w_p, z_1, ..., z_q)\\(x_1, y_1)(x_1, y_1), ..., (x_k, y_k) &= (x_1, y_1)(w_1, ..., w_p, z_1, ..., z_q)\\(x_2, y_2), ..., (x_k, y_k) &= (w_1, ..., w_p)(z_1, ..., z_q)\end{aligned}$$

Aquí se utilizo el hecho que las transposiciones se asocian, $(x_1, y_1)(x_1, y_1)$ es igual a la identidad, al ser el n-ciclo una función biyectiva $w_2, ..., w_p$ no son y_1 ni $z_2, .., z_q$ son x_1 y que $C = (x_1, y_1)(w_1, ..., w_p, z_1, ..., z_q)$ se divide en $D = (w_1, ..., w_p)(z_1, ..., z_q)$ ya que para $1 \leq i < p$, $Cw_i = w_{i+1}$ lo mismo que en D, para $1 \leq j < q$, $Cz_j = z_{j+1}$ lo mismo que en D, por otro lado, $Cw_p = x_1 = w_1$ y $Cz_q = y_1 = z_1$.

En primer lugar, observe que al tomar las $n - 1$ transposiciones $(x_1, x_n), (x_1, x_{n-1}), ..., (x_1, x_2)$ se construye el n-ciclo $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$, por lo que ahora se probará que no es posible con menos de $n - 1$ transposiciones.

Se procede por inducción sobre n, el caso base es cuando $n = 2$ y para tener un 2-ciclo es necesaria una transposición. Suponga $2 < n$, para toda $k < n$ la afirmación cierta y que es posible construir un n-ciclo con $1 \leq k < n - 1$ transposiciones, sean $(x_1, y_1), ..., (x_k, y_k)$ dichas transposiciones, hay dos casos. En el primero el producto es $(z_1, z_2, ..., z_n)$ con $z_1 = x_1$ y $z_2 = y_1$, razonado de la misma manera a la proposición 5.5.3 el n-ciclo es $(x_1, y_1)(z_n, z_2, ..., z_{n-1})$, pero entonces se obtiene $(z_n, z_2, ..., z_{n-1})$ un $n - 1$-ciclo, usando $k - 1 < n - 2$ ciclos, lo que contradice la hipótesis de inducción.

En el segundo caso usando lo observado al inicio $(x_2, y_2)...(x_k, y_k)$ forman dos ciclos de longitudes p, q menores a n y tales que $p + q = n$, por la hipótesis de inducción se tiene que para construir un ciclo de longitud p se requieren al menos $p - 1$ transposiciones y $q - 1$ para el ciclo de longitud q. De esta manera $k - 1 = p + q - 2$ o en otras palabras $n - 1 = k$ lo que es una contradicción, se concluye que no era posible construir un ciclo de longitud n con menos de $n - 1$ transposiciones y queda establecido en caso n. La afirmación se sigue por inducción.

11b. Para empezar, se probará que si el producto de $(x_1, y_1)...(x_k, y_k)$ es un n ciclo entonces $\{x_i, y_i\}$, $1 \leq i \leq k$, son las aristas de un árbol, para esto se utiliza la equivalencia que un árbol de n vértices es un grafo conexo con $n - 1$ aristas.

Suponga que $(x_1, y_1)...(x_{n-1}, y_{n-1})$ tiene por producto un n ciclo, llámelo $(z_1, ..., z_n)$, observe que el árbol subyacente que generan $\{x_1, y_1\}$,...,$\{x_{n-1}, y_{n-1}\}$ tiene n vértices. Se probará que en el árbol existe un recorrido entre z_i y z_{i+1} para $1 \leq i < n$, considere que $(x_1, y_1)...(x_{n-1}, y_{n-1})z_i = z_{i+1}$ y entonces si $(x_{i_1}, y_{i_1}), ..., (x_{i_k}, y_{i_k})$ (en el mismo orden que son aplicadas) son las transposiciones que se aplican para obtener z_{i+1} entonces al tomar las respectivas aristas se obtiene un recorrido en el árbol, pues cada transposición (exceptuando la primera) comparte un elemento con la transposición a su izquierda. Además como $z_{i+1} \in \{x_{i_1}, y_{i_1}\}$ y $z_i \in \{x_{i_k}, y_{i_k}\}$ entonces se obtiene un recorrido que une estas vértices.

Para finalizar, sean i, j dos vértices distintas del árbol con aristas $\{x_1, y_1\}$,..., $\{x_{n-1}, y_{n-1}\}$ y sin perdida de generalidad suponga que $z_1 = i$ y que $z_p = j$, usando los puntos $z_2, ..., z_{p-1}$ y aplicando el razonamiento anterior se construye un recorrido que conecte a i con j y en particular una trayectoria. En conclusión, al tomar $\{x_1, y_1\}$,..., $\{x_{n-1}, y_{n-1}\}$ como aristas se obtiene un árbol pues tiene $n - 1$ aristas y es conexo.

Ahora se probará que si $\{x_i, y_i\}$, $1 \leq i < n$ son las aristas de un árbol, entonces $(x_1, y_1)...(x_{n-1}, y_{n-1})$ tienen por producto un n ciclo. Se procede por inducción en n, en el caso que $n = 2$ solo hay una arista en el árbol y por lo tanto se esta hablando de una transposición o un 2 ciclo. Suponga la afirmación cierta para todos los $k < n$, tome n y llame T al árbol que generan las aristas, al tomar $\{x_1, y_1\}$ hay dos escenarios:

- x_1 o y_1 son una hoja de T, sin pérdida de generalidad suponga que x_1 es la hoja. De esta manera, aplicando la hipótesis de inducción se cumple que $(x_2, y_2)...(x_{n-1}, y_{n-1})$ es un $n - 1$ ciclo pero como y_1 hacer parte del árbol sin la hoja entonces el ciclo tiene la forma $(y_1, ..., y_{n-1})$ y al multiplicar por (x_1, y_1) se obtiene el n ciclo $(y_1, ..., y_{n-1}, x_1)$.
- Al retirar $\{x_1, y_1\}$ se desconecta T y se obtienen dos subárboles T_1, T_2, observe que en este caso se puede suponer que x_1 está en T_1 y y_1 está en T_2, pues si estuvieran en el mismo subárbol T no es acíclico y por esto mismo los subárboles son disyuntos.

De esta manera, las transposiciones asociadas a $T1$ son disyuntas a las asociadas a $T2$ y por lo tanto conmutan entre si. Entonces se puede suponer que $\{x_2, y_2\}, .., \{x_p, y_p\}$ son las asociadas a T_1 y $\{x_{p+1}, y_{p+1}\}, .., \{x_{n-1}, y_{n-1}\}$ las asociadas a T_2 y aplicando la hipótesis de inducción se obtienen los ciclos $(x_1, ..., x_s)$, $(y_1, ..., y_t)$ tales que $s + t = n$ y de esta manera el producto $(x_1, y_1)...(x_{n-1}, y_{n-1})$ es igual a $(y_1, ..., y_t, x_1, ..., x_s)$.

En ambos casos el producto de las aristas del árbol es un n ciclo y por inducción se sigue la afirmación para todo n.

De lo anterior se tiene que el producto $(x_1, y_1)...(x_{n-1}, y_{n-1})$ es un n ciclo si y solo si $\{x_1, y_1\}$,...,$\{x_{n-1}, y_{n-1}\}$ son las aristas de un árbol. Aplicando el teorema de Cayley se sigue que existen n^{n-2} árboles etiquetados para el conjunto $\{1, .., n\}$, pero de cada árbol es posible obtener $(n-1)!$ n-ciclos dependiendo el orden en el cual se tomen las aristas, esto es importante dado que el producto de transposiciones en general no es conmutativo y pueden representar resultados distintos.

Pero como existen $(n-1)!$ n-ciclos, entonces cada uno de estos es representado $\frac{n^{n-2}(n-1)!}{(n-1)!}$ productos de transposiciones.

3a. Suponga que los tres elementos son a, b, c, la elección de la primera fila se puede hacer suponiendo que la primera pareja ordenada es (a, b), entonces para la entrada $2, 1$ hay dos opciones: en la primera obtiene el valor b y nuevamente hay dos opciones para $2, 2$ cuando su valor es a y no se obtiene un cuadrado latino y cuando vale c se repite la pareja (b, c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \mathbf{b} & \_ & \\ & & \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & \mathbf{c} \\ b & a & \mathbf{c} \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & a \\ & & \end{pmatrix}$$

En el segundo escenario la entrada $2, 1$ es c y forzosamente se genera un cuadrado que repite la pareja (b, c).

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c} & a & b \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & a \end{pmatrix}$$

En conclusión no es posible construir un cuadrado latino que sea completo por filas para $n = 3$. Aplicando el mismo razonamiento se construirá un cuadrado latino que sea completo por filas. Suponga que los elementos son etiquetados por a, b, c, d, conveniente se elige la permutación identidad como la primera fila para la matriz y de esta manera en la entrada $2, 1$ se podría tomar b, c ó d; se prefiere tomar b y la entrada $2, 2$ necesariamente deberá ser d: no puede ser c pues la pareja (c, d) ya está ubicada y tampoco puede ser a pues nos lleva a cuadrados que no respetan la propiedad:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & \_ & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} & \mathbf{c} & d \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & & \\ \_ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ b & a & d & c \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & \mathbf{d} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{c} & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Esta elección determina automáticamente todo el cuadrado, pues ya que la única opción válida para la entrada $3, 1$ es c, ya que si fuera d se llega a cuadrados que no respeten la propiedad:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \\ \_ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & \mathbf{d} & \mathbf{a} & c \\ \mathbf{d} & \mathbf{a} & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \\ d & c & a & b \\ & & & \end{pmatrix}$$

Dando valores a las letras se obtiene un cuadrado que cumple la propiedad de ser completo por filas:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \\ c & a & d & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el caso $n = 5$ lo primero que se debe observar es que la propiedad de ser completo por filas es invariante al permutar filas y se puede suponer que en el cuadrado se va a ver de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ & a & & & \\ & & a & & \\ & & & a & \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

Las únicas opciones para acompañar a los elementos en la diagonal es d, e, c ó e, c, d, pero automáticamente queda determinado todo el cuadrado, que no es completo por filas.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & d & c & b \\ b & c & a & e & d \\ d & e & \mathbf{b} & \mathbf{a} & c \\ c & d & e & \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & a & e & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ e & d & a & c & b \\ c & e & b & a & d \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & d & e & a \end{pmatrix}$$

3b. Un cuadrado latino A se dirá completo por columnas si para cada pareja ordenada (x, y) de elementos distintos, existe una única columna para la cual los elementos son consecutivos, es decir $x = a_{i,j}$ y $y = a_{i+1,j}$ para algunos índices i, j.

Se probará que un cuadrado latino A es completo por filas si y solo si A^T (la transpuesta) es completo por columnas.

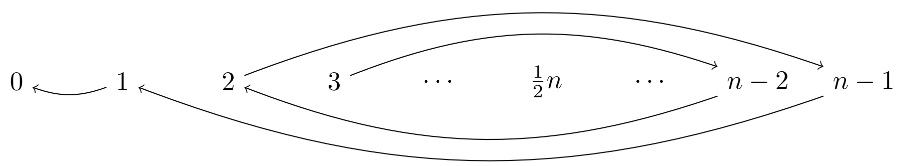
En la ida, suponga que (x, y) es una pareja ordenada de elementos distintos, al ser A un cuadrado latino completo por filas existen índices i, j tales que x está en i, j y y está en $i, j+1$ en A, es así que x está en j, i y y está en $j+1, i$ en A^T. Al aparecer de manera única esta pareja en A deberá aparecer de manera única en A^T, en caso contrario no sería única en A. La vuelta es análoga.

3c. Observe que la i-sima fila de A representa la suma por izquierda con x_i, mientras que la i-sima columna de A representa la suma por derecha con x_i y como $\mathbb{Z}_n$ es Abeliano se cumple que $A = A^T$ es decir que el cuadrado latino es simétrico y por lo tanto si es completo por filas será completo por columnas.

Se procede a probar por contradicción que es completo por filas, suponga que A no es cuadrado completo por filas de esta manera existe una pareja (x, y) que no aparece en el cuadrado o hay una pareja que aparece más de una vez. En el segundo caso, como hay $n(n-1)$ parejas y $n(n-1)$ parejas consecutivas en A (en una fila hay $n-1$ parejas consecutivas y hay n filas) y se repite alguna pareja, por el principio del palomar falta al menos una pareja y este caso se reduce al primero.

Suponga que (x_p, x_q) es la pareja que no aparece en el cuadrado, como A es cuadrado latino x_p aparece en todas las columnas y para todo $1 \leq j \leq n$ si $x_p = a_{i,j} = x_i + x_j$ entonces siempre que $j+1 \leq n$ se cumple que $a_{i,j+1} = x_i + x_{j+1} \neq x_q$ y de esta manera $x_p + (x_{j+1} - x_j) \neq x_q$ y por la propiedad se cumple que para todo elemento no cero z, $x_p + z \neq x_q$ lo cual contradice que A es un cuadrado latino. En conclusión dicha pareja no existe y por lo tanto A es completo por filas.

3d. Observe que bajo el orden indicado, las restas conforman la siguiente gráfica dirigida, la dirección indica la manera en que se resta:



Hay dos tipos de resta: los que van de derecha a izquierda comenzando en $n-1$ y terminando en $\frac{1}{2}n+1$ y aquellas que van de izquierda a derecha comenzando en 2 y terminando en $\frac{1}{2}n-1$. Se analizan los resultados en ambos casos:

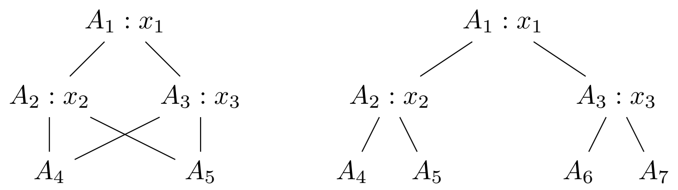
- Las restas que van de derecha a izquierda son positivas y se obtienen los elementos $n-2$, $n-4$,...,$\frac{1}{2}n+1-(\frac{1}{2}n-1) = 2$.
- Las restas que van de izquierda a derecha son negativas y se generan los elementos $3-n$,...,$\frac{1}{2}n-(\frac{1}{2}n+1) = -1$; se sumará n a todos para obtener el representante (en $\mathbb{Z}_n$) positivo y se obtienen 3, 5,...,$-1+n$.

En conclusión, se cubren todos los elementos $1, 2, ..., n-1$.

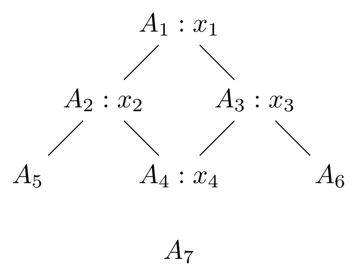
4a. Considere la familia $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$. Esta familia tiene únicamente 3 SDR, ya que al elegir un representante para el primer conjunto quedan determinados los representantes de los demás, así hay tantos SDR como elementos en el primer conjunto.

4b. De la familia es puede extraer información previa que va a resultar importante: dos conjuntos comparten un solo elemento y un número aparece en 3 conjuntos diferentes.

Se buscará demostrar que existen $3 * 2 * 2 * 2 = 24$, SDRs para la familia. Sin pérdida de generalidad suponga que siempre se escoge representante x_1 para $A_1 = \{1,2,3\}$, en principio existen 3 posibilidades para x_1, como se observó existen dos conjuntos A_2, A_3 que comparten x_1 con A_1 y no se podrá tomar dicho elemento para estos conjuntos. Por otro lado, A_2 y A_3 comparten un solo elemento, éste deberá ser x_1 y de esta manera existen $2 * 2$ posibilidades para tomar un represente x_2 para A_2 y x_3 para A_3. Nuevamente existen dos conjuntos que comparten x_2 con A_2 y dos que comparten x_3 con A_3, como x_2 ni x_3 están en A_1 hay dos tres posibilidades:



La primera es que sean dos conjuntos diferentes A_4, A_5, pero estos dos conjuntos compartirían dos elementos diferentes y esto es una contradicción. La segunda opción es que sean cuatro conjuntos diferentes A_4, A_5, A_6 y A_7; del hecho que A_2 comparte x_1 con A_1, A_3 y x_2 con A_4, A_5, si $A_2 = \{x_1, x_2, b\}$ se deberá cumplir que $b \in A_6$ y $b \in A_7$ y esto es un absurdo pues A_6 y A_7 comparten dos elementos b y x_3. En conclusión la única opción es que sean 3 conjuntos diferentes:



En este punto, el representante de A_4 es a fuerza x_4, y dicho número deberá aparecer obligatoriamente en A_7, si llama d al elemento que comparten A_5 y A_6, entonces se puede suponer que $A_5 = \{x_2, d, e\}$ y $A_6 = \{x_3, d, f\}$. Como e no puede estar en A_2 ni en A_4, solo puede estar en A_1 o en A_3 pero no en ambos y debe aparecer en 3 elementos de la familia entonces está en A_7, análogamente f está en A_7 y $A_7 = \{x_4, e, f\}$. Hay 2 opciones para elegir representante para A_5, pero al hacer esta elección quedan seleccionados los representantes restantes. Al final, hay $3 * 2 * 2 * 2$ maneras de tomar un SDR.

5. Sea $(A_1, ..., A_n)$ una familia de subconjuntos de $\{1, ..., n\}$ y defina la matriz de adyacencia para esta familia. Observe que en la fórmula del determinante el valor $sgn(\pi)$ únicamente le da signo a $a_{i,\pi i}$, del hecho que A es invertible, se sigue que $det(A) \neq 0$ y son dos los casos:

- Si $det(A) > 0$ entonces $per(A) > 0$, ya que en el cálculo del determinante posiblemente se cancelaron parejas de unos pero en $per(A)$ no se cancelan dichas parejas.
- Si $det(A) < 0$ entonces $per(A) > 0$, ya que todos los valores negativos en el cálculo del determinante se vuelven positivos en el cálculo de $per(A)$.

En ambos casos se obtiene que $per(A) \neq 0$ y aplicando la proposición 6.5.1 se obtiene que existen SDRs para A.

6. Considere la familia $A_i = \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$ para $1 \le i \le n$, observe que si se toma una SDR para la familia, se obtiene precisamente una permutación que no deja puntos fijos, es decir un desarreglo. Observe que esta familia cumple las condiciones del Teorema 6.5.2 para $r = n - 1$ y de esta manera se obtiene que el número de SDRs es al menos $n!(\frac{n-1}{n})^n$ y esta cota también sirve para los desarreglos.

   Por el Teorema 4.4.1 se tenia que el número de desarreglos es el entero más cercano a $\frac{n!}{e}$, además se tiene que $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n = \frac{1}{e}$ y de esta manera para valores de n grandes se va a cumplir que la cota propuesta se acerca a su valor real.

7. Sea $(A_1, ..., A_n)$ una familia se subconjuntos de X tales que $|A(J)| \ge |J| - r$ para todo $J \subseteq \{1, ..., n\}$. Tome $X^* = X \cup \{z_1, ..., z_r\}$ con $z_j \notin X$, $1 \le j \le r$, y $A_i^* = A_i \cup \{z_1, ..., z_r\}$, $1 \le i \le n$. Si $J \subseteq \{1, ..., n\}$ se tiene que $A^*(J) = |A(J)| + r \ge |J| - r + r = |J|$ y la familia A^* cumple la condición de Hall, por lo tanto existe un sistema de representantes para A^*, observe que al eliminar los conjuntos cuyo representante es algún z_j se obtiene una subfamilia de A con un SDR y en el peor de los casos los r elementos z_j son representantes. En conclusión, se puede obtener una subfamilia con $n - r$ conjuntos de A que tiene un SDR.

1. Sea $(X, \mathcal{F})$ la familia de Steiner del conjunto con 7 puntos X, para contar el número de subconjuntos que contienen una tripla se procede de la siguiente manera: es cierto que todo el conjunto X y los subconjuntos de cardinalidad 6 de X contienen al menos una tripla de $\mathcal{F}$.

   Considere ahora los subconjuntos de X con cardinalidad 5, para tener un subconjunto de cardinalidad 5 basta retirar dos puntos a X, como cada punto de X pertenece solo a 3 triplas en $\mathcal{F}$, por cada punto retirado el subconjunto de cardinalidad 5 puede no contener 3 triplas de $\mathcal{F}$, es decir podría no contener 6 de las 7 triplas de $\mathcal{F}$ y obligatoriamente el elemento restante está contenido en el conjunto de cardinalidad 5.

   Por último, los subconjuntos de cardinalidad 4 se obtienen al agregar un elemento a alguien de la familia, pero del hecho que las triplas en $\mathcal{F}$ se intersectan en un solo punto, al agregar un cuarto punto cualquiera, no es posible que contenga a dos triplas de $\mathcal{F}$ distintos.

   De esta manera hay $1 + \binom{7}{6} + \binom{7}{5} + 7 * 4 = 64$, subconjuntos de X que contienen a alguna tripla de $\mathcal{F}$.

2. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tales que k divide a n, es decir $n = kt$ para algún $t \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las particiones de X en t clases de equivalencia, cada una con k elementos. Al tomar las parejas de la forma (B, C) siendo B un k-subconjunto, $C \in \mathcal{C}$ y $B \in C$, si D es la cantidad de particiones en donde aparece el k-subconjunto B entonces por doble conteo:

$$\binom{n}{k} D = t|\mathcal{C}|$$

   Esto del hecho que por cada elemento de $\mathcal{C}$ aparecen t parejas. Ahora, si $\mathcal{F}$ es una familia intersectante de k-subconjuntos entonces contando las parejas del tipo (B, C) con $B \in \mathcal{F}$ se extrae que:

$$D|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{C}|$$

   Ya que no es posible que dos clases de una misma partición estén en $\mathcal{F}$ (son disyuntos) y como $D = \frac{|\mathcal{C}|}{\binom{n-1}{k-1}}$, al remplazar por D se obtiene el resultado.

3. Sea X un n-conjunto y n, $k \in \mathbb{N}$ tales que $k|n$ y $n \geq 3k$, considere $\mathcal{F}$ una familia intersectante con tamaño $\binom{n-1}{k-1}$ de k-subconjuntos de X. Por el punto anterior se deberá cumplir que $\mathcal{F}$ contiene un elemento de cada partición de X cuyas clases sean k-subconjuntos.

   Lo primero que se debe observar es que existen dos conjuntos cuya intersección es unipuntual, sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que tienen intersección mínima, suponga que $|A \cap B| = l > 1$ y $x \in A \cap B$, como $n \geq 3k$ existen l puntos $z_1, ..., z_l$ que no están en $A \cup B$ y con ellos se pueden construir $U = \{x, z_2, ..., z_l\} \cup A \setminus B$ y $V = \{z_1\} \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \setminus \{x\}$ que son k-subconjuntos de X disyuntos. Ahora se puede tomar una partición de X que tenga a U, V como clases y por lo observado al inicio se deberá tener que U o V están en $\mathcal{F}$, pues las demás clases son disyuntas de A y B, pero si $U \in \mathcal{F}$ entonces $B \cap U = \{x\}$ y si $V \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap V = (A \cap B) \setminus \{x\}$, en ambos casos se contradice la minimalidad de la intersección $A \cap B$ y entonces dicha intersección deberá ser unipuntual.

   Fije entonces $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \cap B = \{x\}$. Se mostrará que todo $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ está en $\mathcal{F}$, como $n \geq 3k$ entonces si $|A \cap U| = s + 1$ y $|B \cap U| = t + 1$ entonces existen $y_1, ..., y_s$, $z_1, ..., z_t$ puntos tales que no están en $A \cup B \cup U$, se pueden construir los conjuntos $V = \{y_1, .., y_s\} \cup A \setminus U$, $W = \{z_1, ..., z_t\} \cup B \setminus U$ que resultan disyuntos entre si y con U.

   Al tomar una partición de X tales que U, V, W hacen parte de dicha partición, por la observación inicial, algún elemento de la partición debe hacer parte de $\mathcal{F}$ pero como cualquier clase distinta a U, V, W es disyunta a A y B, V es disyunta a B y W es disyunta a A entonces necesariamente debe ser U. De esta manera todos los k-subconjuntos que tienen a x hacen parte de $\mathcal{F}$ y como hay $\binom{n-1}{k-1}$ subconjuntos de este tipo, necesariamente $\mathcal{F}$ es la familia de k-subconjuntos que tienen a x, concluyendo la afirmación.

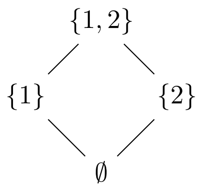
5. Sea $n \in \mathbb{N}$ que no es potencia de dos, X un n conjunto. Se divide en dos casos la prueba: si $n = 2k + 1$ (impar) entonces tome la familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ como aquellos subconjuntos de n que tienen $k + 1$ o más elementos. Para $A, B \in \mathcal{F}$ si fueran disyuntos entonces $|A| + |B| \geq k + 1 + k + 1 > n$ lo cual es contradictorio, por lo tanto no son disyuntos.

Por otro, dado un $x \in X$ entonces del hecho que se están tomando todos los subconjuntos de cardinalidad igual o mayor a $k+1$, se sigue que x está en $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} + ... + \binom{n-1}{n-1}$ subconjuntos de $\mathcal{F}$ y de esta manera la familia es regular. Por último, se están tomando exactamente la mitad de los subconjuntos de X, es decir 2^{n-1} subconjuntos. En conclusión la familia $\mathcal{F}$ cumple lo requerido.

En el segundo caso $n = 2k$, por el Teorema 7.4.2 es posible obtener una familia intersectante regular con número replicante r, de tamaño $\frac{1}{2}\binom{n}{k}$ de k-subconjuntos de X, considere a $\mathcal{F}$ como la familia de subconjuntos que tienen $k+1$ o más elementos y los elementos de la familia intersectante anterior. Si se supone que existen dos subconjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ cuya intersección es vacía entonces ambos no pueden ser k-subconjuntos, pues los k-subconjuntos que están en $\mathcal{F}$ son intersectantes, de manera que se puede suponer que $|A| \geq k+1$ y por lo tanto $|A| + |B| \geq k+1+k > n$ lo cual es absurdo, y entonces los subconjuntos en $\mathcal{F}$ son intersectantes.

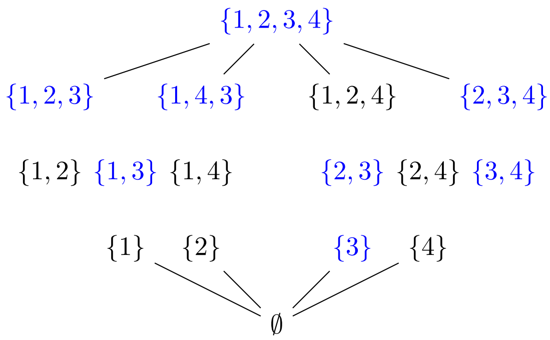
Dado $x \in X$, dicho elemento está en $r + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} + ... + \binom{n-1}{n-1}$ subconjuntos de $\mathcal{F}$ y por lo tanto $\mathcal{F}$ es regular. Por otro lado, como se están tomando la mitad de los k-subconjuntos de X y todos los subconjuntos de cardinalidad mayor a $k+1$, se cumple que esta es exactamente la mitad de subconjuntos totales de X, es decir que $\mathcal{F}$ tiene 2^{n-1} subconjuntos. Concluyendo lo pedido.

b. Para el caso en que $n = 2$ y $X = \{1, 2\}$ el retículo de subconjuntos es:



La única manera de tomar $2^{2-1} = 2$ subconjuntos que se intersecten, es un unipuntual y todo X, pero esta elección no es regular. Por lo tanto no hay una familia intersectante regular.

Para el caso $n = 4$ el retículo es:



Suponga que existe un una familia intersectante regular $\mathcal{F}$ para $n = 4$, lo primero que se debe observar es que si $\{x\} \in \mathcal{F}$ entonces para que la familia sea intersectante, se deberá tomar subconjuntos que tienen a x como elemento, por ej. la familia azul, pero dicha familia no cumple ser regular pues x aparece al menos una vez más que todos los demás.

De esta manera la familia deberá tener conjuntos de más de dos elementos, por otro lado la familia no se puede componer de subconjuntos de 3 y 4 elementos, pues no hay suficientes subconjuntos de dicha cardinalidad, además el máximo número de subconjuntos de 2 elementos es 3 pues la pareja complementaria no puede estar en la familia. De lo anterior, hay un elemento que aparece en los tres subconjuntos de cardinalidad 2 y la familia no es regular. En conclusión no hay una familia que cumpla las características pedidas.

Suponga ahora que X es un conjunto con 8 elementos y $\mathcal{F}$ es una familia intersectante de cardinalidad 2^7, se debe notar que por ser una familia intersectante de cardinalidad máxima, entonces debe contener un subconjunto por parejas complementarias, es decir si $A \subseteq X$, A o $X \setminus A$ están en $\mathcal{F}$. Por ser también una familia de cardinalidad máxima, se deberá cumplir que si $Y \in \mathcal{F}$ entonces para todo $Y \subseteq Z \subseteq X$ se cumple que $Z \in \mathcal{F}$.

Suponga que $\{x\} \in \mathcal{F}$, por tratarse de una familia intersectante necesariamente para todo $F \in \mathcal{F}$, $x \in F$ y de esta manera x aparece al menos una vez más que los demás elementos, es decir que la familia no puede ser regular. En conclusión $\mathcal{F}$ no tiene unipuntuales.

Ahora suponga que $\mathcal{F}$ tiene 2-subconjuntos, se debe cumplir que existe un punto común x a los subconjuntos de cardinalidad dos: cuando hay un solo 2-subconjunto tome cualquiera de los elementos, si hay dos se cumple la afirmación pues se intersectan y si hay tres o más suponga que no existe dicho elemento, entonces existen tres conjuntos tales que el primero intersecta al segundo y el segundo al tercero, luego el tercero es disyunto al primero, lo cual es absurdo y por lo tanto se garantiza la existencia de x.

Como los conjuntos viven en $\mathcal{F}$ por pares complementarios y cualquier superconjunto de los subconjuntos de cardinalidad 2 están en $\mathcal{F}$ el elemento x aparece una mayor cantidad de veces que los demás y esto impide la regularidad de $\mathcal{F}$. En conclusión, tampoco hay subconjuntos de cardinalidad 2 en $\mathcal{F}$.

Al tomar la familia de $2^7 = 128$ subconjuntos compuesta por aquellos de cardinalidad mayor a 4 y la mitad de cardinalidad 4 se obtiene una familia en la cual los elementos aparecen en promedio una mayor cantidad de veces (son los subconjuntos más grandes y por lo tanto los que se intersectan más) y en dicho promedio es de $\frac{8+8*7+28*6+56*5+35*4}{8} = 81{,}5$. Por lo que cualquier familia intersectante regular no debería tener un factor replicante mayor a 81.

A este punto, se ha deducido que en $\mathcal{F}$ no hay subconjuntos de cardinalidad 1 y 2, lo que significa que un elemento cualquiera se encuentra en:

$$\begin{array}{r|l} \text{Subconjuntos de cardinalidad 8} & \binom{7}{7} = 1 \\ \text{Subconjuntos de cardinalidad 7} & \binom{7}{6} = 7 \\ \text{Subconjuntos de cardinalidad 6} & \binom{7}{5} = 21 \\ \text{Subconjuntos de cardinalidad 4} & \binom{7}{3} = 35 \end{array}$$

Y si hay k, $1 \leq k \leq 56$, conjuntos de cardinalidad 3 entonces en $\mathcal{F}$ viven $\binom{8}{5} - k = 56 - k$ conjuntos de cardinalidad 5, pues son complementarios y la familia siempre tiene a uno de los subconjuntos por parejas complementarias. De este modo un punto cualquiera está al menos $(k = 56)$ $1+7+21+35+\frac{3k+5(56-k)}{8} = 1+7+21+35+\frac{3k+5(56-k)}{8} = 99 - \frac{2k}{8} = 85$ veces, lo que contradice que su grado es menor o igual a 81.

Llegados a este punto, se debe cumplir entonces que $\mathcal{F}$ se compone de todos los subconjuntos de cardinalidad 5 o más y la mitad de subconjuntos de cardinalidad 4. Esto obliga a que los 8 elementos estén distribuidos de manera uniforme entre los subconjuntos de cardinalidad 4, pero esto es imposible pues hay 35 subconjuntos de cardinalidad 4 y $\frac{35*4}{8}$ no es entero, lo que se traduce que hay elementos que aparecen más veces que otros, es decir la familia no es regular.

En conclusión, tampoco es posible obtener una familia intersectante regular del conjunto de 8 puntos.

8. Sea $\mathcal{F}$ una familia de Sperner del n conjunto X y $b(\mathcal{F})$ la familia definida en el ejercicio. Para $Y, Z \in b(\mathcal{F})$ distintos, si se supone que $Y \subseteq Z$ ó $Z \subseteq Y$ se viola la condición (ii) de la familia $b(\mathcal{F})$ pues Z o Y no serían minimales.

b. Sean $F \in \mathcal{F}$ y $y \in F$, se construirá el conjunto Y de manera inductiva, parta de considerar $F_1, ..., F_p$ una enumeración para $\mathcal{F}$ tal que $F_1 = F$ y $Y_1 = \{y\}$, sucesivamente para $2 \leq i \leq p$ considere:

- Si $F_i \cap Y_{i-1} \neq \emptyset$: tome $Y_i = Y_{i-1}$
- Si $F_i \cap Y_{i-1} = \emptyset$: del hecho que la familia es de Spencer se puede tomar $x_i \in F_i \setminus F$ y de esta manera $Y_i = Y_{i-1} \cup \{x_i\}$

Al final si $Y_p = Y$ se cumple que $F \cap Y = \{y\}$ pues en cada paso (si) se agregan elementos que no están en F, además la construcción garantiza que Y corta todos los subconjuntos en $\mathcal{F}$ y por lo tanto está en $b(\mathcal{F})$, además por construcción es minimal pues al retirar un punto cualquiera de Y no se intersectaría a algún F_i, solo se agregan los puntos necesarios en cada paso. Concluyendo la afirmación.

c. Sea $F \in \mathcal{F}$, por la condición (i) de $b(\mathcal{F})$ se sigue que $F \cap Y \neq \emptyset$ para todos los subconjuntos en $b(\mathcal{F})$. Además por el hecho anterior no es posible retirar puntos de F, al retirar un punto $y \in F$ es posible encontrar un subconjunto Y tal que $F \setminus \{x\} \cap Y = \emptyset$, en otras palabras F es minimal respecto a la propiedad (i). Y esto se traduce en que $\mathcal{F} \subseteq b(b(\mathcal{F}))$.

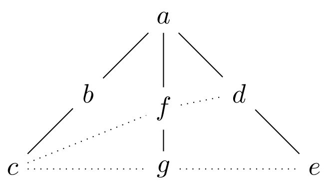
   Sea ahora $Z \in b(b(\mathcal{F}))$, al suponer que para todo $F \in \mathcal{F}$ se cumple que $F \not\subseteq Z$ entonces existe un $x_F \in F$ tal que $x_F \notin Z$ y por lo tanto aplicando un razonamiento similar al punto anterior se puede tomar $Y \subseteq \{x_F : F \in \mathcal{F}\}$ que sea minimal respecto a la propiedad (ii). Es así que $Y \in b(\mathcal{F})$ pues corta a todos los conjuntos y es minimal, pero $Y \cap Z = \emptyset$, lo cual es absurdo. Por lo que entonces existe un $X \in \mathcal{F}$ tal que $X \subseteq Z$ y por la minimalidad de Z se sigue que $X = Z$, es decir que $\mathcal{F} = b(b(\mathcal{F}))$.

d. Sea $Y \in b(\mathcal{F}_k)$ y suponga que Y tiene menos de $n+1-k$ elementos, entonces en $X \setminus Y$ hay contenido al menos un elemento de $\mathcal{F}_k$ pues $X \setminus Y$ tiene más de $k-1$ elementos y de esta manera existe un subconjunto que no corta a Y y por lo tanto contradice que está en $b(\mathcal{F}_k)$. Es decir, que todos los elementos de $b(\mathcal{F}_k)$ tienen $n+1-k$ o más elementos.

   Por otro lado, si $F \in \mathcal{F}_k$ se cumple que $X \setminus F$ tiene $n-k$ puntos y entonces para cada $x \in F$ el conjunto $(X \setminus Y) \cup \{x\}$ tiene $n+1-k$ puntos y corta todo elemento en $\mathcal{F}_k$, pues corta a F y como la familia es de Spencer, cualquier otro elemento en $\mathcal{F}_k$ distinto a F tiene elementos en $X \setminus F$, concluyendo que $\mathcal{F}_{n+1-k} \subseteq b(\mathcal{F}_k)$.

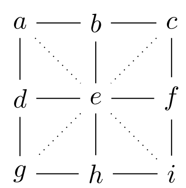
   Por último sea Z un conjunto que tiene más de $n+1-k$ puntos, luego existe un Y con $n+1-k$ puntos tal que $Y \subseteq Z$, fijando $x \in Y$ se puede observar que $F = (X \setminus Y) \cup \{x\}$ está en $\mathcal{F}_k$ y como $Y \cap F \neq \emptyset$ y cualquier otro subconjunto en $\mathcal{F}_k$ corta a $X \setminus F \subseteq Y$, Y está en $b(\mathcal{F}_k)$, implicando que Z no está en $b(\mathcal{F}_k)$ y esto permite concluir que $b(\mathcal{F}_k) = \mathcal{F}_{n+1-k}$.

3. Sea $(X, \mathcal{F})$ un STS(7) cualquiera. Por el Teorema 8.1.2 se cumple que cada punto está en 3 triplas y además hay un total de 7 triplas. Fije una tripla cualquiera y suponga que es de la forma $T_1 = \{a, b, c\}$, por la definición de sistema de Steiner se cumple que las otras dos triplas en donde vive a no cortan a T_1 en un punto distinto a a y por lo tanto se pueden suponer de la forma $\{a, d, e\}$ y $\{a, f, g\}$. Del hecho que cada dos puntos están en una tripla, deberá existir triplas T_2, T_3 que tenga los puntos c, d y c, e respectivamente, por lo que necesariamente dichas triplas deben incluir a f ó g cada una y sin perdida de generalidad se puede suponer que T_2 incluye a f y T_3 a g. En este punto se tiene la siguiente configuración:



   Y automáticamente quedan determinadas las triplas restantes pues deben ser $\{b, e, f\}$ y $\{b, d, g\}$. Por lo que etiquetando como $1, 3, 2, 5, 4, 7, 6$ á a, b, c, d, e, f, g respectivamente se obtiene el resultado.

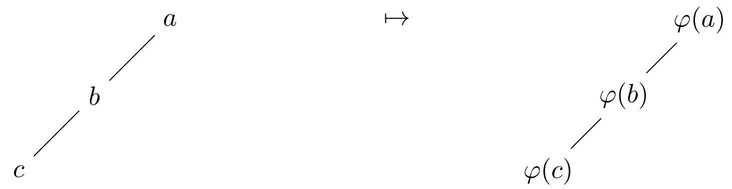
   Considere $(X, \mathcal{G})$ un STS(9) cualquiera y T_1 una tripla cualquiera del sistema, por el Teorema 8.1.2 se cumple que cada punto de T_1 está en 4 triplas diferentes y por lo tanto cada punto está en otras 3 triplas, de manera que los puntos de T_1 están en 9 triplas diferentes a T_1 y como hay 12 triplas entonces existen T_2, T_3 triplas disyuntas a T_1, suponga que $T_1 = \{a, b, c\}$, y $T_2 = \{d, e, f\}$. Existen triplas que tiene a a, d, b, e y c, f, pero dichas triplas deberán cortar necesariamente a $T_3 = \{g, h, i\}$ y entonces se puede suponer que lo hacen en g, h, e i respectivamente. Obteniendo:



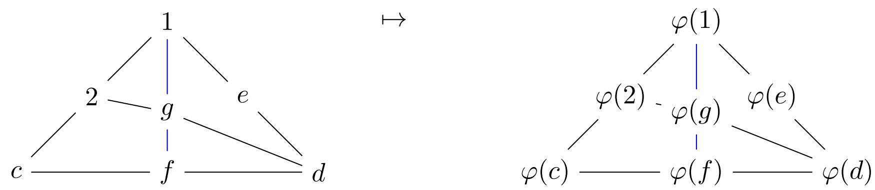
Y por lo tanto esta configuración fuerza a que la tripla que contiene a g, e sea $\{g, e, h\}$ y la que tiene a i, e sea $\{a, e, i\}$. Por lo que todas las triplas restantes quedan determinadas y la enumeración $7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3$ á $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ de las letras cumple lo requerido.

4. En este punto se consideran las representaciones del punto anterior como estándar y se razona partiendo de ellas.

   Sea $(X, \mathcal{F})$ un STS(7) cualquiera, un automorfismo es una biyección $\varphi : X \mapsto X$ que respeta las triplas y para conocer la cantidad de funciones que cumplen estas condiciones, basta analizar cómo se comporta elemento por elemento. Para un primer punto a existen 7 opciones para $\varphi(a)$ ya que se puede asignar sin ninguna restricción; para un segundo punto b existen 6 opciones para $\varphi(b)$ pues con asignar el valor de $\varphi(a)$ no se han introducido restricciones a φ, pero si $\{a, b, c\}$ es la tripla que contiene a a, b, entonces queda automáticamente determinado el valor de c ya que existe una única tripla $\{\varphi(a), \varphi(b), x\}$ y necesariamente $\varphi(c) = x$ para que se cumpla la restricción de respetar triplas.

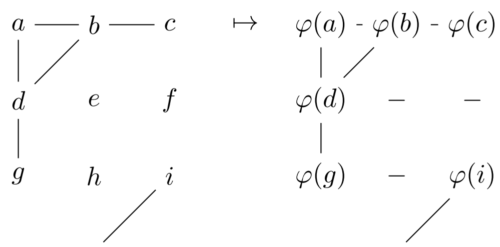


   Para el cuarto punto d existen 4 opciones, pues con los valores asignados hasta el momento no es posible determinar su valor. Sin embargo al asignar este valor, automáticamente quedan determinados todos los demás pues se deben completar las triplas que contienen d, b, d, a y d, c las cuales no se completan con los puntos considerados hasta ahora. Así por ejemplo, si $\{a, e, d\}$ es la tripla que contiene a d, a entonces existe un z tal que $z = \varphi(e)$ pues hay una tripla que contiene a $\varphi(a), \varphi(d)$ y z no puede ser $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$ o $\varphi(d)$ pues se tendría que en el sistema hay una pareja que pertenece a dos triplas, razonando de manera análoga se obtiene toda la biyección. Por lo que entonces queda la siguiente configuración:



   Pero hay una única manera de completar las triplas y dicha manera de completar respesta las triplas, es decir que la biyección es un automorfismo. Del hecho que cualquier automorfismo puede ser reconstruido razonando de esta manera, se sigue que hay $7 * 6 * 4$ automorfismos.

   Sea ahora $(X, \mathcal{G})$ un STS(9), razonando de la misma manera al caso anterior se analiza la forma en la cual $\varphi : X \mapsto X$ asigna sus valores. Para el primer elemento existen un total de 9 opciones para su imagen y para el segundo existen 8 maneras de asignarle imagen y nuevamente al fijar dos valores automáticamente queda fijo el tercer valor de la tripla que contiene a a, b. Para el siguiente elemento, d, existen 6 maneras de asignarle una imagen:



Al hacer la asignación de d quedan determinados los demás valores, pues primero quedan determinados los valores de g e i y de estos dos, los restantes. Por un razonamiento análogo al caso anterior se puede verificar que se respetan las triplas. En conclusión, existen $9 * 8 * 6$ automorfismos.

7. Sea $(X, \mathcal{B})$ un SQS(n). Considere $x \in X$ un punto cualquiera, si (y, z, B) es una tripla tal que $x, y, z \in B$, por un lado existen $(n-1)(n-2)$ formas de tomar los puntos y, z y para cada elección hay una única B que las contiene junto a x, por otro lado si x está en r cuádruplas de $\mathcal{B}$ por cada una de ellas se pueden tomar triplas (y, z, B) de $3 * 2 * r$ maneras pues en cada cuádrupla hay 3 elementos diferentes a x. Concluyendo que $6r = (n-1)(n-2)$.

   Dados dos puntos $x, y \in X$ se cuentan las parejas (z, B) tales que x, y, z están en B. Se cumple que se puede tomar z de $n-2$ formas y hay una única pareja que contiene los tres puntos, pero también que si s es la cantidad de cuádruplas que contiene a x, y entonces existen $2s$ maneras de tomar las parejas. Por lo tanto $n - 2 = 2s$.

   Como se parte de que existe un SQS, entonces r y s deberán ser enteros. Como $r = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$ se debe cumplir que $3 \not| n$ pues dados 3 números consecutivos $(n, n-1, n-2)$ solo uno de ellos es divisible en 3 y se necesita que sea $n-1$ ó $n-2$, por lo tanto $n \not\equiv 0, 3 (mod\ 6)$. Quedan las opciones que sea congruente con 1, 2, 4, 5 módulo 6: no se puede cumplir que $n = 6k+1$ pues $s = \frac{n-2}{2} = \frac{2(3k-1)+1}{2}$ no es entero, tampoco se puede cumplir que $n = 6k+5$ pues $s = \frac{n-2}{2} = \frac{2(3k+2)+1}{2}$ no es entero. Concluyendo que $n \equiv 2, 4 (mod\ 6)$.

8. Suponga las condiciones del punto anterior, ahora se cuentan las parejas (x, B) con $x \in B$ para una cuádrupla $B \in \mathcal{B}$. Se tiene que cada punto de X está en r cuádruplas y por lo tanto hay nr parejas, además como cada cuádrupla tiene 4 puntos, entonces existen $4|\mathcal{B}|$ parejas, es decir que $nr = 4|\mathcal{B}|$. Remplazando el valor de r por lo obtenido anteriormente, se sigue el resultado.

13. Sean $(X, \mathcal{B})$, $(Y, \mathcal{C})$ dos STS de orden n y m respectivamente. Tome $Z = X \times Y$ y $\mathcal{D}$ las triplas descritas en el problema, en Z hay nm puntos y la cantidad de triplas según el tipo son:

    - I: con un punto de X se pueden formar un total de $\frac{m(m-1)}{6}$ triplas.
    - II: con un punto de Y se pueden formar un total de $\frac{n(n-1)}{6}$ triplas.
    - III: por cada pareja de triplas se pueden obtener un total de 6 triplas nuevas, ya que se pueden combinar de 3*2 maneras diferentes los puntos y por lo tanto hay un total de $6\frac{n(n-1)}{6}\frac{m(m-1)}{6}$ triplas.

    Para obtener un total de $\frac{1}{6}(nm(m-1)+nm(n-1)+nm(n-1)(m-1)) = \frac{nm}{6}(nm-1)$ por lo que entonces se cumple la primera condición para ser sistema de Steiner. Tome ahora $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Z$ diferentes, hay tres opciones:

    - $x_1 = x_2$: en este caso se requiere una pareja de tipo I y como las parejas son diferentes entonces $y_1 \neq y_2$, por lo que existe una tripla $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{C}$ y de esta manera $\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3)\} \in \mathcal{D}$. Del hecho que se necesite una tripla de tipo I y que la tripla en $\mathcal{C}$ es única se sigue la unicidad de la tripla para la pareja.
    - $y_1 = y_2$: en este caso se requiere una pareja de tipo II y al ser parejas diferentes entonces $x_1 \neq x_2$, por lo que existe una tripla $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{B}$ y de esta manera $\{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1)\} \in \mathcal{D}$. Nuevamente de requerir una pareja de tipo II y la unicidad de la pareja en $\mathcal{B}$, se sigue la unicidad.
    - $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$: en este caso se necesita una tripla del tipo III. Existen triplas $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{B}$ y $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{C}$, por lo que entonces la tripla $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ está en $\mathcal{D}$. De la unicidad de las triplas en $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y que las parejas (x_1, y_1), (x_2, y_2) son ordenadas, se puede concluir la unicidad de la tripla construida.

    Concluyendo que dos parejas siempre están en una única tripla y por lo tanto $(Z, \mathcal{D})$ es un sistema de Steiner.

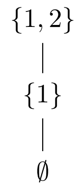
    Suponga que $n, m > 1$, de esta manera existe una tripla $T = \{p, q, r\} \in \mathcal{B}$ y una tripla $S = \{a, b, c\} \in \mathcal{C}$. Al tomar $Y = T \times S$ y $\mathcal{G}$ las triplas generadas por:

    - $\{(x, a), (x, b), (x, c)\}$ para $x \in T$.
    - $\{(p, y), (q, y), (r, y)\}$ para $y \in S$.

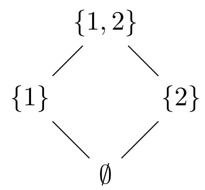
- $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ para $x_i \in T$, $y_j \in S$, $1 \leq i, j \leq 3$.

Se cumple que Y tiene 9 puntos y $\mathcal{G}$ tiene 12 triplas, además razonando de la misma manera que antes se puede concluir que dadas dos parejas ordenadas en Y hay una única tripla que las contiene. Entonces $(Y, \mathcal{G})$ es un sistema de Steiner y por lo tanto un subsistema de $(Z, \mathcal{D})$.

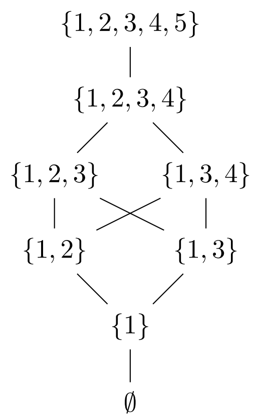
1. Observe que como $1 \leq 2$, entonces cualquier subconjunto que tenga a 2 deberá tener a 1 obligatoriamente y por lo tanto $L(P)$ es:



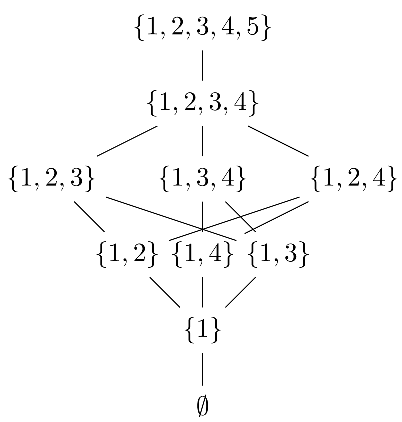
En el segundo caso, como los elementos son incomparables no surgen restricciones y por lo tanto $L(P)$ es:



Observe que cualquier elemento es menor o igual a 5 y por lo tanto cualquier subconjunto que tenga al 5 deberá tener todos los elementos. Por otro lado, cualquier subconjunto que tenga a 4 deberá tener forzosamente a 3 y 1. Por último, cualquier subconjunto que tenga a 2 ó 3 deberá tener al 1 y por lo tanto $L(P)$:



Nuevamente el 5 resulta mayor o igual a todos los elementos y por lo tanto cualquier subconjunto que lo contenga deberá tener a todos. Por otro lado, cualquier subconjunto que tenga al 2,3 ó 4 deberá tener al 1 como elemento. Por lo que entonces $L(P)$ es:



2. Lo primero que se debe observar es que para dos elementos comparables, $x \leq y$ se cumple lo siguiente: para cualquier cota inferior z de x, y entonces $z \leq x$ y por lo tanto si se diera el caso que $x \leq z$ entonces por la antisimetria se sigue que $x = z$, es decir x es un elemento maximal del conjunto de cotas inferiores, pero además es único ya que cualquier cota inferior está por debajo de x, en conclusión x es el único ínfimo de los elementos. Por un razonamiento análogo se cumple que y es el único supremo de los elementos y de esta manera para los elementos comparables siempre existe el ínfimo y supremo.Así, para determinar que los ordenes son retículos es necesario comprobar que dos elementos no comparables tienen único ínfimo y supremo.

   De ahora en adelante se escribirá $\wedge_1, \vee_1, \wedge_2, \vee_2$ para referirse al ínfimo y supremo del pentágono y la línea con tres puntos, respectivamente. Para el pentágono:

$$\begin{array}{r|c||r|c} 2 \wedge_1 4 & 1 & 2 \vee_1 4 & 5 \\ 2 \wedge_1 3 & 1 & 2 \vee_1 3 & 5 \end{array}$$

   Y para la línea de tres puntos:

$$\begin{array}{r|c||r|c} 2 \wedge_2 4 & 1 & 2 \vee_2 4 & 5 \\ 2 \wedge_2 3 & 1 & 2 \vee_2 3 & 5 \\ 4 \wedge_2 3 & 1 & 4 \vee_2 3 & 5 \end{array}$$

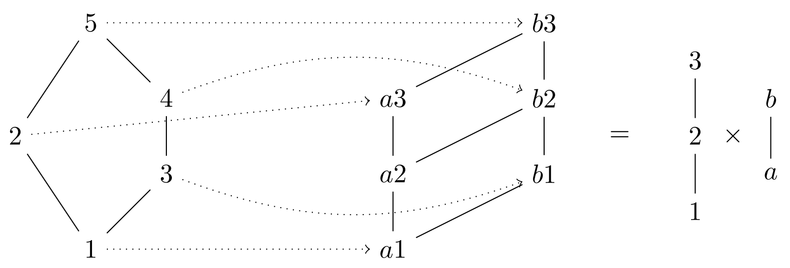
   En todos los casos son únicos el ínfimo y supremo pues son los únicos elementos que están por debajo ó encima de los dos elementos. Se concluye entonces que los ordenes son retículos.

   Considere que:

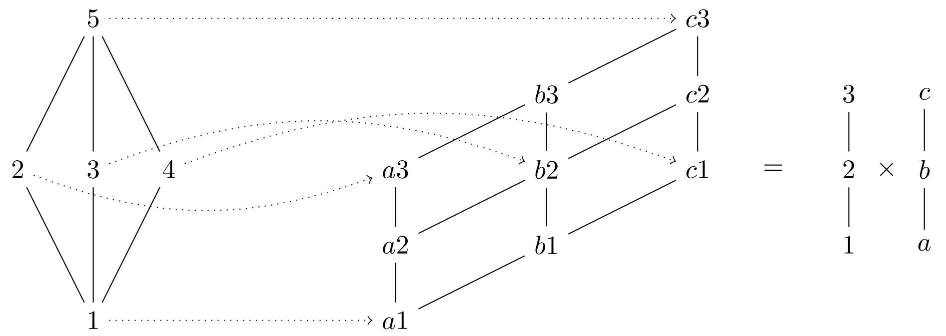
$$\begin{aligned} 4 \wedge_1 (3 \vee_1 2) &=^? (4 \wedge_1 3) \vee_1 (4 \wedge_1 2) \\ 4 \wedge_1 5 &=^? 3 \vee_1 1 \\ 4 &\neq 3 \\ 4 \wedge_2 (2 \vee_2 3) &=^? (4 \wedge_2 2) \vee_2 (4 \wedge_2 3) \\ 4 \wedge_2 5 &=^? 1 \vee_2 1 \\ 4 &\neq 1 \end{aligned}$$

   Por lo que entonces los ordenes no constituyen retículos distributivos.

5a. Lo primero que se debe mencionar es que la dimensión para el pentágono como la línea de tres puntos no es uno, ya que no son lineales. Para el pentágono considere:



   La linea punteada representa una función φ que es inyectiva y que además respeta el orden, es decir es una inmersión. Para el caso de la línea de tres puntos:



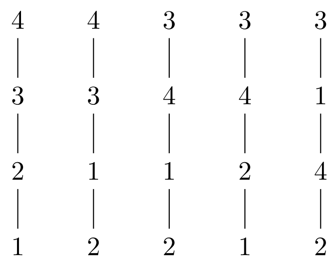
En este caso la linea punteada representa una función ψ que también es inyectiva y respeta el orden.

De esta manera la dimensión de ambos ordenes es 2.

5b. Para buscar los ordenes lineales que surgen del orden N se procede tal como en la prueba del Teorema 12.2.1 y en cada momento se toma un par de elementos incomparables (si los hay) y se extiende el orden. Para comenzar las parejas incomparables son 3,4; 1,2 ó 4,1:

Elección	Rel. nuevas	No comp.	Elección	Rel. nuevas	No comp.	Elección	Rel. nuevas
(3,4)	$3 \leq 4$, $1 \leq 4$	1,2	(1,2)	$1 \leq 2$	-	-	-
		1,2	(2,1)	$2 \leq 1$	-	-	-
(4,3)	$4 \leq 3$	1,4 ; 1,2	(1,4)	$1 \leq 4$	1,2	(1,2)	$1 \leq 2$
					1,2	(2,1)	$2 \leq 1$
		1,4 ; 1,2	(4,1)	$4 \leq 1$, $2 \leq 1$	-	-	-
(1,4)	$1 \leq 4$	3,4 ; 1,2	(3,4)	$3 \leq 4$	1,2	(1,2)	$1 \leq 2$
					1,2	(2,1)	$2 \leq 1$
			(4,3)	$4 \leq 3$	1,2	(1,2)	$1 \leq 2$
					1,2	(2,1)	$2 \leq 1$
(4,1)	$4 \leq 1$, $2 \leq 1$, $4 \leq 3$, $2 \leq 3$	-	-	-	-	-	-
(1,2)	$1 \leq 2$, $1 \leq 4$	3,4	(3,4)	$3 \leq 4$	-	-	-
		3,4	(4,3)	$4 \leq 3$	-	-	-
(2,1)	$2 \leq 1$	3,4	(3,4)	$3 \leq 4$	-	-	-
		3,4	(4,3)	$4 \leq 3$	-	-	-

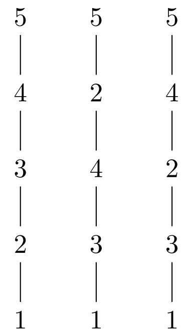
Por lo que entonces los ordenes lineales son:



Para encontrar los ordenes lineales que surgen del pentágono, se procede tal como en la prueba del Teorema 12.2.1 en cada momento se toma una par de elementos no comparables (si los hay) y se extiende adecuadamente el orden, en principio se tienen los pares 2,4 ó 2,3 de elementos no comparables:

Elección	Rel. nuevas	No comp.	Elección	Rel. nuevas
(2,3)	$2 \leq 3$, $2 \leq 4$	-	-	-
(2,4)	$2 \leq 4$	2,3	(2,3)	$2 \leq 3$
		2,3	(3,2)	$3 \leq 2$
(3,2)	$3 \leq 2$	2,4	(2,4)	$2 \leq 4$
		2,4	(4,2)	$4 \leq 2$
(4,2)	$4 \leq 2$, $3 \leq 2$	-	-	-

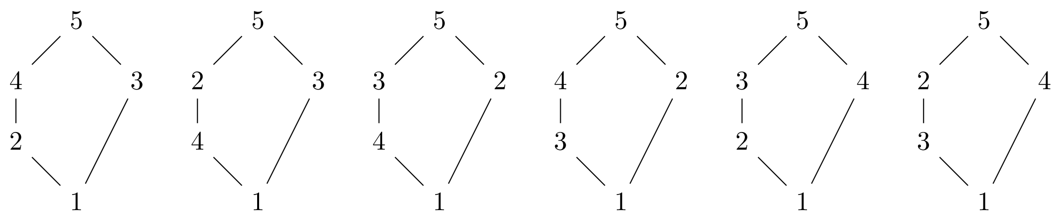
De esta manera los ordenes que se obtienen son:



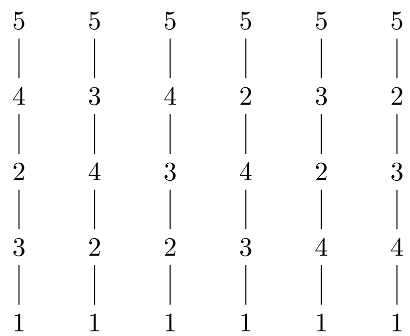
Línea de tres puntos, al igual que en el caso anterior se extiende el orden una pareja a la vez, en este caso el par de elementos iniciales son 2,4; 2,3 ó 3,4. A continuación se muestra cómo procede la búsqueda en un caso:

Elección	Rel. nuevas	No comp.	Elección	Rel. nuevas	No comp.	Elección	Rel. nuevas
(2,3)	$2 \leq 3$	2,4 ; 3,4	(2,4)	$2 \leq 4$	3,4	(3,4)	$3 \leq 4$
					3,4	(4,3)	$4 \leq 3$
			(4,2)	$4 \leq 2$, $4 \leq 3$	-	-	-
			(3,4)	$3 \leq 4$, $2 \leq 4$	-	-	-
			(4,3)	$4 \leq 3$	2,4	(2,4)	$2 \leq 4$
					3,4	(4,2)	$4 \leq 2$

Para los demás casos se observa lo siguiente: al hacer la primera elección se llega a un orden isomorfo al pentágono y por lo tanto se pueden obtener sus ordenes lineales a partir del caso anterior:



Por lo que los ordenes lineales que surgen son:



12.6.1. Considere la siguiente afirmación: sean L, K dos retículos (vistos como en la proposición 12.1.2) y $f : L \to K$, f es un isomorfismo entre los retículos si y solo si es un isomorfismo entre los ordenes.

Demostración. Para esta prueba se utiliza fuertemente el hecho que si $x \leq y$ sii $x \vee y = y$. Suponiendo que f es un isomorfismo entre retículos y $x \leq y$, luego $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y)$, de lo cual $f(x) \leq f(y)$. Aplicando al inyectividad y un razonamiento análogo, no es difícil de ver que si $f(x) \leq f(y)$ se sigue $x \leq y$.

Al suponer que f es un isomorfismo entre ordenes ($x \leq y$ si y solo si $f(x) \leq f(y)$), se sigue que $f(x \vee y) = f(y) = f(x) \vee f(y)$, note que se aplica la propiedad del supremo tanto en L como en K. De manera análoga se prueba para el ínfimo, con lo cual queda demostrado el teorema. □

En virtud del Teorema 12.1.2 y la proposición anterior, se prueban las afirmaciones encontrando isomorfismos sobre las estructuras vistas como conjuntos equipados con dos operaciones binarias $\wedge$, $\vee$.

Sean $X = \{x_1, ..., x_n\}$, $\mathcal{P}(X)$ el retículo del conjunto potencia de X y $L = \{0,1\}^n$ el producto directo de n copias del retículo $\{0,1\}$. Se define la aplicación $\varphi : \mathcal{P}(X) \to L$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\varphi : \mathcal{P}(X) \to L \\ &\qquad A \mapsto \varphi(A) = (a_1, ..., a_n) \text{ en donde } a_i = 1 \text{ si y solo si } x_i \in A. \end{aligned}$$

La aplicación resulta ser una función pues la imagen de un subconjunto cualquiera de X está determinado por sus elementos y por lo tanto es única, de hecho es la función indicadora. Sean entonces $A, B \subseteq X$ tales que $A \neq B$, se puede suponer sin perdida de generalidad que existe $x_i \in A$ tal que $x_i \notin B$, de esta manera se cumple que la entrada i-sima de $\varphi(A)$ es no cero mientras que en $\varphi(B)$ es cero, por lo que $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, es decir que φ es inyectiva.

Por otro lado sea $U \in L$, tome $A = \{x_i : U_i = 1,\ 1 \leq i \leq n\}$, se cumple que $A \subseteq X$ y que $\varphi(A) = U$ pues precisamente está tomando los elementos en donde aparece un 1. Concluyendo que φ es sobreyectiva. Además, se cumple que $\varphi(\emptyset) = (0, .., 0)$ y $\varphi(X) = (1, ..., 1)$ por lo que entonces la función respeta el mínimo y máximo.

Tome $A, B \in \mathcal{P}(X)$, como el infimo y supremo del producto se calcula entrada por entrada $\varphi(A) \vee \varphi(B) = (a_1 \vee b_1, ..., a_n \vee b_n)$ y entonces se cumple que $a_i \vee b_i = 1$ si y solo si $a_i = 1$ o $b_i = 1$ es decir si y solo si $x_i \in A$ o $x_i \in B$ que es lo mismo a $x_i \in A \cup B$, en resumen $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$. Por un razonamiento análogo se obtiene que $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \wedge \varphi(B)$.

En conclusión φ es un isomorfismo de retículos.

b. Sea $n = p_1^{i_1} ... p_t^{i_t}$ un natural en su descomposición en factores primos y $D(n)$ el retículo de divisores de n. Considere $\varphi : D(n) \to D(p_1^{i_1}) \times ... \times D(p_t^{i_t})$ la aplicación:

$$\begin{gathered} \varphi : D(n) \to D(p_1^{i_1}) \times ... \times D(p_t^{k_t}) \\ m = p_1^{j_1} ... p_t^{j_t} \mapsto \varphi(m) = (p_1^{j_1}, ..., p_t^{j_t}), \end{gathered}$$

La aplicación es una función pues la descomposición en factores primos es única (observe que los primos considerados tienen una enumeración preestablecida). Por otro lado tome $r, q | n$ diferentes, si $r = p_1^{j_1} .... p_t^{j_t}$, $q = p_1^{k_1} .... p_t^{k_t}$ luego existe un $1 \leq s \leq t$ tal que $j_s \neq k_s$ y por lo tanto $\varphi(r)$ difiere en la entrada s-sima de $\varphi(q)$, en conclusión φ es inyectiva. Si $(p_1^{j_1}, ..., p_t^{j_t}) \in D(p_1^{i_1}) \times ... \times D(p_t^{i_t})$ entonces tomando $r = p_1^{j_1} ... p_t^{j_t}$ se cumple que $r | n$ pues para todo $1 \leq s \leq t$, $j_s \leq i_s$ y de este modo φ es sobreyectiva. Observe que $\varphi(1) = (1, ..., 1)$ y $\varphi(n) = (p_1^{i_1}, ..., p_t^{i_t})$, lo que significa que φ respeta el mínimo y máximo de los retículos.

Tome $r = p_1^{j_1} .... p_t^{j_t}$, $q = p_1^{k_1} ... p_t^{k_t}$ divisores de n, se cumple que $mcd(q, r) = r \wedge q = p_1^{min(j_1, k_1)} ... p_t^{min(j_t, k_t)}$

y que $mcm(q,r) = r \vee q = p_1^{max(j_1,k_1)}...p_t^{max(j_t,k_t)}$, esto implica:

$$\begin{aligned}
\varphi(r \wedge q) &= (p_1^{min(j_1,k_1)}, ..., p_t^{min(j_t,k_t)}) \\
&= (p_1^{j_1} \wedge p_1^{k_1}, ..., p_t^{j_t} \wedge p_t^{k_t}) \\
&= (p_1^{j_1}, ..., p_t^{j_t}) \wedge (p_1^{k_1}, ..., p_t^{k_t}) \\
&= \varphi(r) \wedge \varphi(q) \\
\varphi(r \vee q) &= (p_1^{max(j_1,k_1)}, ..., p_t^{max(j_t,k_t)}) \\
&= (p_1^{j_1} \vee p_1^{k_1}, ..., p_t^{j_t} \vee p_t^{k_t}) \\
&= (p_1^{j_1}, ..., p_t^{j_t}) \vee (p_1^{k_1}, ..., p_t^{k_t}) \\
&= \varphi(r) \vee \varphi(q)
\end{aligned}$$

Lo anterior, del hecho que los ínfimos y supremos del producto directo se calculan componente a componente y que el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos potencias del mismo primo son el mínimo y máximo entre los números, respectivamente. De esta manera, φ respeta los ínfimos y supremos.

En conclusión φ es un isomorfismo entre los retículos.

12.6.2. En lugar de abordar la afirmación directamente, se probará que el producto de m ordenes totales, cada uno con más de un punto, tiene dimensión m. En primer lugar considere P un conjunto parcialmente ordenado y $Q \subseteq P$, suponga que es posible sumergir el orden P en el producto directo de $R_1 \times ... \times R_m$ siendo R_i un orden total para cada $1 \leq i \leq m$, luego existe una inmersión $\varphi : P \to R_1 \times ... \times R_m$. Por otro lado, la función identidad $id : Q \to R$ es inyectiva y respeta el orden, por lo que también es una inmersión de Q en P. De esta manera, se cumple que $\varphi \circ id : Q \to R_1 \times ... \times R_m$ es una inmersión, pues la composición de funciones inyectivas es inyectiva y respeta el orden porque φ respeta el orden. Lo anterior permite concluir que $dim(Q) \leq dim(P)$.

Considere ahora el conjunto parcialmente ordenado estándar de $2m$ puntos definido en el problema sumergido en un producto directo (sus puntos serán vistos como tuplas), se demostrara que dicho orden tiene dimensión al menos m. Si existe un $1 \leq i \leq m$ tal que para todo $1 \leq j \leq m$ existe un $k \neq i$ tal que la entrada j-sima de b_i es mayor o igual a la entrada j-sima de b_k; por ejemplo considere $j = 1$, se garantiza la existencia de un $k \neq i$ tal que $(b_i)_1 \geq (b_k)_1$ pero como $b_k \geq a_i$ en particular $(b_i)_1 \geq (b_k)_1 \geq (a_i)_1$, en las demás entradas se puede aplicar el mismo argumento gracias a la existencia de los b_k y la transitividad de los ordenes. En conclusión, se cumple que $a_i \leq b_i$ pues elemento por elemento son menores las entradas de a_i respecto a las de b_i y esto es una contradicción pues en el orden estándar estos elementos no son comparables.

Por lo tanto, para cada i existe un j tal que la coordenada j-sima de b_i es estrictamente menor a la entrada j-sima de los demás b_k, $k \neq i$, es más dicha j es única para cada i por ser la comparación estricta. Pero para que esto sea posible, se necesitan de al menos m coordenadas, una por cada i. Por lo que la dimensión del orden estándar es al menos m.

Tome ahora $P = R_1 \times .... \times R_m$ con cada $1 \leq i \leq m$, R_i un orden total de al menos dos puntos. Para cada R_i, $1 \leq i \leq m$, es posible tomar dos puntos $u_i < v_i$ y considerar las m-tuplas:

$$\begin{aligned}
a_i &= (u_1, ..., v_i, ..., u_m) \\
b_j &= (v_1, ..., u_j, ..., v_m)
\end{aligned}$$

Observe que existe un total de $2m$ tuplas, pues por cada v_i hay una m-tupla a_i y por cada u_j hay una m-tupla b_j.

Por un lado, si $i, j \leq m$ tales que $i \neq j$ entonces: el elemento i-simo de a_i tanto como el de b_j es v_j, la entrada j-sima de a_i como de b_j es u_j y para las demás entradas k se tiene u_k en a_i y v_k en b_j, por lo que entonces se cumple a_i es menor o igual a b_j pues es menor o igual entrada por entrada. En sentido contrario, si se supone que $a_i \leq b_j$ con $i = j$ se obtiene una contradicción pues en la entrada i-sima se tiene que $v_i \leq u_i$ lo cual contradice la elección de u_i, v_i. En conclusión P tiene como subconjunto ordenado al orden parcial estándar de $2m$ puntos $Q = \{a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m\}$. De esta manera, utilizando lo demostrado anteriormente $m \leq dim(Q) \leq dim(P) = m$ y esto implica que necesariamente $dim(P) = m$.

Lo demostrado permite concluir la afirmación, ya que gracias a los isomorfismos del punto anterior se sigue que si X es un conjunto finito entonces la dimensión de $\mathcal{P}(X)$ es $|X|$ y para $n = p_1^{i_1}....p_t^{i_t}$ un natural, la dimensión de $D(n)$ es t.

12.6.3. De acuerdo a la definición: la dimensión de un conjunto parcialmente ordenado P es el menor natural d tal que es posible sumergir el orden en el producto directo de d ordenes totales, por lo que basta probar que existe una inmersión de P en el producto de sus extensiones lineales.

Suponga que $(X, \preceq_1), ..., (X, \preceq_k)$ son las extensiones lineales de P. Considere la función:

$$\begin{aligned} \varphi : P &\to (X, \preceq_1) \times .... \times (X, \preceq_k) \\ x &\mapsto \varphi(x) = (x, ..., x) \end{aligned}$$

La función es inyectiva por su definición. En primer lugar observe que si $x \leq y$ entonces se cumple que $x \preceq_i y$ para todo $1 \leq i \leq k$ pues son extensiones del orden original y por lo tanto $(x, ..., x) \leq (y, ..., y)$. En segundo lugar, si se cumple que $(x, .., x) \leq (y, ..., y)$ entonces para todo $1 \leq i \leq k$ se cumple que $x \preceq_i y$, pero por la construcción de cada uno de las extensiones, la única forma en la cual dos elementos son comparables en todas las extensiones es porque eran comparables en el orden original y por lo tanto se debe cumplir que $x \leq y$.

De todo lo anterior se sigue que φ es una inmersión de P en el producto de sus extensiones lineales.

15.3.1. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X con n elementos, esta acción induce una nueva sobre el conjunto de todos los k-subconjuntos y por lo tanto se puede considerar el número de órbitas de G actuando en los k-subconjuntos, se denotará por f_k.

Sea $fix_k(g)$ la cantidad de k-subconjuntos que quedan fijos al aplicar $g \in G$. Por el Teorema 15.1.1 se cumple que $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} fix_k(g) = f_k$ para $1 \leq k \leq n$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} f_k t^k &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} fix_k(g)\right)t^k \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{k=0}^{n}\sum_{g\in G} fix_k(g)t^k \\
&= \frac{1}{|G|}\left(\sum_{g\in G} fix_0(g)t^0 + ... + \sum_{g\in G} fix_n(g)t^n\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{n} fix_k(g)t^k
\end{aligned}$$

Si $g \in G$ tiene $c_i(g)$ ciclos de longitud i, $1 \leq i \leq n$, para cada colección $\{b_i\}_{1\leq i\leq n}$ de números tales que $0 \leq b_i \leq c_i(g)$ y $\sum_{i=1}^{n} ib_i = k$ es posible tomar b_i ciclos diferentes entre los $c_i(g)$ y formar un subconjunto de X uniendo los ciclos seleccionados. Dicho subconjunto tiene cardinalidad k pues $\sum_{i=1}^{n} ib_i = k$ y además queda fijo al aplicar g, ya que precisamente es unión de ciclos.

Por otro lado, todo k-subconjunto fijo bajo g es posible descomponerlo como la unión disyunta de ciclos de g en X: parta de un elemento y construya por aplicaciones sucesivas de g el ciclo que contiene dicho elemento y repita el proceso hasta que haya construido los ciclos para todos los elementos del subconjunto.

Así que si $\{b_i\}_{1\leq i\leq n}$ es una de estas colecciones entonces hay $\prod_{i=1}^{n}\binom{c_i(g)}{b_i}$ maneras de formar los k-subconjuntos que permanecen fijos bajo g para dicha colección y por lo tanto $fix_k(g) = \sum^{*}\prod_{i=1}^{n}\binom{c_i(g)}{b_i}$ en donde $\sum^{*}$ se hace sobre todas las posibles colecciones $\{b_i\}$. Concluyendo:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k t^k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum^{*}\prod_{i=1}^{n}\binom{c_i(g)}{b_i}\right)t^k$$

Observe que $\prod_{i=1}^{n}\binom{c_i(g)}{0}t^{i*0} + \binom{c_i(g)}{1}t^{i*1} + ...\binom{c_i(g)}{c_i(g)}t^{i*c_i(g)}$ es exactamente la suma de productos de la forma $\binom{c_1(g)}{b_1}\binom{c_2(g)}{b_2}...\binom{c_n(g)}{b_n}t^{1*b_1+...+n*b_n}$, en donde $\sum_{i=1}^{n} ib_i = k$ para cierto $0 \leq k \leq n$, ya que $0 \leq b_i \leq c_i(g)$ para todos los i y $\sum_{i=1}^{n} ic_i(g) = n$ (todos los ciclos forman X). De este modo que $\sum_{k=0}^{n}(\sum^{*}\prod_{i=1}^{n}\binom{c_i(g)}{b_i})t^k = \prod_{i=1}^{n}\sum_{b=0}^{c_i(g)}\binom{c_i(g)}{b}t^{ib}$ pues tienen exactamente los mismos sumandos y entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} f_k t^k &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum^{*}\prod_{i=1}^{n}\binom{c_i(g)}{b_i}\right)t^k \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{i=1}^{n}\sum_{b=0}^{c_i(g)}\binom{c_i(g)}{b}t^{ib} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{i=1}^{n}(1+t^i)^{c_i(g)} \\
&= Z(G; 1+t, 1+t^2, ..., 1+t^n)
\end{aligned}$$

La última igualdad es por la definición de índice de ciclo de G en las indeterminadas $1+t, ..., 1+t^n$.

1. Se procede de la misma manera que el ejemplo visto en clase, para este problema G es el grupo de rotaciones del cubo. Cuando se consideran las caras X es el conjunto de las r^6 coloraciones posibles para las caras del cubo. Y de esta manera se cumple que una coloración permanece fija bajo g sii todos los

ciclos de g tienen la misma coloración y por lo tanto $fix(g) = r^{c(g)}$ siendo $c(g)$ el número de ciclos de g en las caras del cubo. Por lo tanto:

Tipo	c(g)	fix(g)	Contribución
1	6	r^6	r^6
2	4	r^4	$3r^4$
3	3	r^3	$6r^3$
4	3	r^3	$6r^3$
5	2	r^2	$8r^2$

De esta manera el número de coloraciones para las caras del cubo son $\frac{1}{24}(r^6 + 3r^4 + 12r^3 + 8r^2)$.

Ahora considere el grupo de rotaciones del cubo actuando sobre las vértices, se utiliza la misma idea salvo que en este caso X es el conjunto de las r^8 coloraciones para las vértices del cubo (hay 8 vértices).

Tipo	c(g)	fix(g)	Contribución
1	8	r^8	r^8
2	4	r^4	$3r^4$
3	2	r^2	$6r^2$
4	4	r^4	$6r^4$
5	4	r^4	$8r^4$

De este modo el número de coloraciones para las vértices del cubo son $\frac{1}{24}(r^8 + 17r^4 + 6r^2)$.

Por último para el caso de las aristas, X es el conjunto de las r^{12} coloraciones para las 12 aristas del cubo. De este modo:

Tipo	c(g)	fix(g)	Contribución
1	12	r^{12}	r^{12}
2	6	r^6	$3r^6$
3	3	r^3	$6r^3$
4	8	r^8	$6r^8$
5	5	r^5	$8r^5$

Y por lo tanto el número de coloraciones para las vértices del cubo son $\frac{1}{24}(r^{12} + 3r^6 + 6r^3 + 6r^8 + 8r^5)$.

2. Para este punto X es el conjunto de 2-subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Para determinar la cantidad de grafos no etiquetados sobre 4 vértices se sigue el ejemplo 3:

   - Estructura de los puntos 1^4, es decir que la permutación es la identidad.

     En este caso no subyacen ciclos del tipo (i). Y para los ciclos del tipo (ii) hay $(1, 1) = 1$ ciclos de longitud $1 * 1/1 = 1$ al combinar dos 1-ciclos, dichos 1-ciclos se pueden tomar de $\binom{4}{2} = 6$ formas. Por lo que entonces la estructura sobre los 2-subconjuntos es 1^6.

   - Estructura de los puntos $1^2 2^1$, es decir la permutación tiene dos 1-ciclos y un 2-ciclo. S_4 tiene 6 elementos de este tipo.

     Del tipo (i) hay un ciclo de longitud $2/2 = 1$, surge de considerar el 2-ciclo.

     Del tipo (ii) hay $(1, 1) = 1$ ciclos de longitud $1 * 1/1$ al combinar los dos 1-ciclos. Por otro lado, al combinar un 1-ciclo con el 2-ciclo hay $(1, 2) = 1$ ciclos de longitud $1 * 2/1 = 2$.

     En conclusión la estructura sobre los 2-subconjuntos es $1^2 2^2$.

   - Estructura de los puntos $1^1 3^1$, es decir una permutación tiene un 1-ciclo y un 3-ciclo. En S_4 hay 8 elementos de este tipo.

     Del tipo (i) hay $(3 - 1)/2 = 1$ ciclos de longitud 3 que surgen del 3-ciclo. Del tipo (ii) hay $(3, 1) = 1$ ciclos de longitud $1 * 3/1 = 3$ que surge de combinar el 1-ciclo con el 3-ciclo.

     Por lo tanto la estructura de 2-subconjuntos es 3^2

- Estructura de los puntos 2^2, es decir una permutación tiene dos 2-ciclos. Hay 3 elementos de S_4 con estas características.
  Del tipo (i) hay dos ciclos de longitud $2/2 = 1$ en los 2-subconjuntos por por cada uno de los ciclos de longitud 2.
  Del tipo (ii) hay $(2, 2) = 2$ ciclos de longitud $2 * 2/2 = 2$ que surgen de los 2-ciclos.
  En resumen la estructura sobre los 2-subconjuntos es $1^2 2^2$.
- Estructura de los puntos 4^1, es decir la permutación se compone de un solo ciclo, de este tipo hay en total 6 elementos en S_4.
  Del tipo (i) hay un ciclo de longitud $4/2 = 2$, además de $(4 - 2)/2 = 1$ ciclos de longitud 4. Del tipo (ii) no subyacen ciclos en los 2-subconjuntos.
  De este modo la estructura sobre los 2-subconjuntos es $2^1 4^1$.

Por lo que el índice del ciclo es:

$$G(S_5; s_1, s_2, ..., s_6) = \frac{1}{24}(s_1^6 + 6s_1^2 s_2^2 + 3s_1^2 s_2^2 + 8s_3^2 + 6s_2 s_4)$$

Y de esta manera al considerar que se tienen figuras de orden 0 y orden 1 (nodos y aristas) en el Teorema del índice del ciclo se obtiene el polinomio:

$$1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 2t^4 + t^5 + t^6$$

Y por lo tanto el número de grafos simples no etiquetados de 4 aristas son 11 y se pueden enumerar de la siguiente manera: el monomio at^i indica que existen a grafos con i aristas.

3. Para calcular el número de collares distintos de 10 perlas a dos colores, se procede similar al ejemplo visto en clase. Lo primero que se debe calcular es el índice de ciclo para C_{10}, recordando que el índice de ciclo para este grupo es:

$$Z(C_{10}) = \frac{1}{10}\sum_{d|10} \phi(d) s_d^{n/d}$$

Entonces, los divisores de 10 son $1, 2, 5, 10$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} Z(C_{10}) &= \frac{1}{10}(\phi(1)s_1^{10} + \phi(2)s_2^5 + \phi(5)s_5^2 + \phi(10)s_{10}^1) \\ &= \frac{1}{10}(s_1^{10} + s_2^5 + 4s_5^2 + 4s_{10}) \end{aligned}$$

Y por lo tanto el índice de ciclo para D_{20} es:

$$\begin{aligned} Z(D_{20}) &= \frac{1}{2}(\frac{1}{10}(s_1^{10} + s_2^5 + 4s_5^2 + 4s_{10}) + \frac{1}{2}(s_2^5 + s_1^2 s_2^4)) \\ &= \frac{1}{20}(s_1^{10} + s_2^5 + 4s_5^2 + 4s_{10} + 5s_2^5 + 5s_1^2 s_2^4) \\ &= \frac{1}{20}(s_1^{10} + 6s_2^5 + 4s_5^2 + 4s_{10} + 5s_1^2 s_2^4) \end{aligned}$$

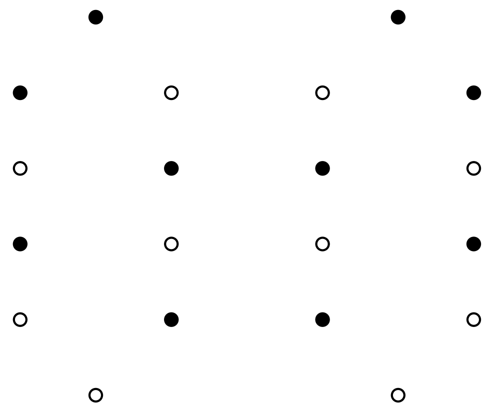
De esta manera se obtiene que el número de collares con 10 perlas a 2 colores enumerados según la cantidad de perlas negras es:

$$1 + t + 5t^5 + 8t^3 + 16t^4 + 16t^5$$

Por otro lado, al considerar r colores se obtienen los siguientes índices de ciclos:

$$\begin{aligned} Z(C_{10}, r...) &= \frac{1}{10}(r^{10} + r^5 + 4r^2 + 4r) \\ Z(D_{20}, r, ..) &= \frac{1}{20}(r^{10} + 5r^6 + 6r^5 + 4r^2 + 4r) \end{aligned}$$

En donde el primer índice calcula el número de collares a r colores teniendo en cuenta solo rotaciones y el segundo rotaciones y reflexiones. Por otro lodo, se puede verificar que para $r = 1$ se obtienen en ambos casos 1, para $r = 2$ se obtienen 108 y 78 (en el segundo caso se obtiene lo mismo obtenido en la enumeración de los collares a dos colores) la razón es que existen coloraciones que no son alcanzables solo por rotaciones:



Ya que la única manera de alinear los dos puntos blancos (negros) consecutivos es una rotación antihorario (horario) y esto no conduce a la misma coloración.