Teoría de la Prueba

Ciro Iván García López

Mayo 2021

1. Introducción

Los sistemas lógicos permiten obtener conclusiones a partir de un conjunto de premisas dadas y un conjunto de reglas (de derivación) que permiten transformar dichas premisas, por ejemplo dada una implicación y su antecedente se puede obtener el consecuente usando la regla de Modus Ponens:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}\ (\mathrm{mp})$$

Intuitivamente la regla indica que siempre que se tenga un recurso A es posible obtener, a partir de este mismo, un recurso B. Gran parte de la teoría matemática usa sin mayor problema este hecho y la matemática ha logrado avanzar aplicando esta manera de razonar. No obstante emerge una pregunta natural:

¿Qué sucede con A una vez se ha aplicado la regla de Modus Ponens?

La respuesta puede ser inmediata para algunos, simplemente sigue existiendo no va a desaparecer y estará disponible siempre que se necesite. Para ilustrar considere la siguiente afirmación: *Si n es un natural par, entonces se puede evaluar* $n/2$, al tomar 8 se puede dividir a la mitad y obtener 4, pero no por saber que el 4 es la mitad, el 8 como objeto abstracto ha dejado o dejará de existir. Gracias a la naturaleza abstracta de la matemática no es necesario preocuparse por lo que sucede con A una vez se ha aplicado la regla de Modus Ponens.

Este nivel de abstracción se aleja bastante de la realidad, en donde los recursos son finitos y limitados, en donde al contar con un recurso no es posible utilizarlo tantas veces como se desee. Jean Girard introduce en su trabajo [Gir87] la lógica lineal como: *"la lógica que es consciente de los recursos"*, un sistema en donde para obtener un recurso se debe contar con lo justo y necesario para su "construcción". En esta linea de pensamiento Girard [Gir87] comenta que los sistemas usuales (intuicionista y clásico) cuentan con dos reglas poco o nada deseables, debilitamiento y contracción:

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (\mathrm{Cdeb}) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (\mathrm{Ccnt})$$

Dichas reglas de manera informal permiten introducir o eliminar recursos de manera arbitraria, por lo que en un sistema que sea consciente de los recursos es necesario omitir dichas reglas. Sin embargo al evitarlas se pierde capacidad expresiva, Girard introduce los operadores ! y ? como una manera de recuperar dicha expresividad.

Otro de los efectos colaterales de suprimir debilitamiento y contracción es el surgimiento de dos tipos de operadores lineales, *aditivos y multiplicativos*. De manera informal [GM94a] comenta que es el reflejo de la necesidad de contar con lo justo y necesario para construir un resultado, así por ejemplo si se buscan construir dos objetos A, B hay dos maneras de pensar en su construcción: la primera en la cual se construyen y se necesitan recursos para la construcción de ambos $A \otimes B$; la segunda en la cual tenemos la capacidad de construir ambos pero se elige y se construye solo uno de ellos $A \& B$. Dichas cualidades aditivas y multiplicativas se proyectan sobre las reglas de derivación que se introducen más adelante.

Para conocer más sobre la lógica lineal clásica se recomienda revisar el texto de Davoren [GM94a], el cual es un punto de entrada amigable a las ideas de Girard [Gir87, Gir95].

En este documento se expondrá el sistema de lógica lineal intuicionista, las referencias recomendadas para este sistema son [GM94b, Pai90]. De acuerdo con Girard [GL86] es posible obtener un fragmento intuicionista de la lógica lineal clásica y según Bierman [GM94b] la aproximación natural para obtener dicho sistema es mediante la limitación de los secuentes en la parte derecha a una sola conclusión. Su estudio resulta de interés ya que por medio de las traducciones de Girard es posible relacionar la lógica intuicionista con la lógica lineal.

Se buscará introducir y discutir los conceptos básicos del sistema así como sus diferencias significativas con la lógica intuicionista. Posteriormente se introducirá la traducción de Girard y de la lógica intuicionista en la lógica lineal intuicionista.

Por último se presenta la noción de lógica lineal intuicionista dual, estos sistemas encuentran su inspiración en el trabajo de Girard [Gir93] y existen diversas variantes [BBPH92, Bar96]. No obstante aquí se discute el sistema propuesto por Barber [Bar96] y el motivo por el cual puede resultar más adecuado que la formulación original de Girard.

2. Cálculo de Secuentes

El sistema de lógica lineal intuicionista parte de considerar un número infinito de variables proposicionales $p_1, p_2, p_3, ...$ y una constante 0. Los conectores lógicos considerados son $\otimes, \&, \oplus$ (binarios) y ! (unario); las fórmulas de la lógica lineal intuicionista son generadas por la gramática:

$$A, B := p \mid 0 \mid A \otimes B \mid A \& B \mid A \oplus B \mid !A$$

Tal como fue mencionado la lógica lineal encuentra su motivación en el uso limitado de recursos y es posible describir los conectores de manera informal como:

- Conjunción multiplicativa: indica que se disponen y se utilizan ambos recursos.
- Conjunción aditiva: se disponen de ambos recursos pero se utiliza solo uno de ellos y se debe decidir cual.
- Implicación: siempre que sea posible obtener un recurso de tipo A es posible obtener un recurso del tipo B.
- Disyunción aditiva: expresa la posibilidad entre dos opciones, la elección se encuentra "oculta".
- Replicación: es posible obtener tantos recursos del tipo A como sean necesarios.

En el sistema de lógica lineal se escribirán con letras mayúsculas $A, B, C, ...$ las formulas, con letras griegas mayúsculas Γ, Δ multiconjuntos de fórmulas $A_1, ..., A_n$ y los secuentes $A_1, ..., A_n \vdash A$ significaran que A es consecuencia de $A_1 \otimes ... \otimes A_n$. Las reglas de inferencia en estilo de secuentes son:

- Identidad:

$$\frac{}{A \vdash A}$$

- Cero:

$$\frac{}{\Gamma, 0 \vdash A}\ (0)$$

- Implicación:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}\ (L \multimap) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\ (R \multimap)$$

- Conjunción multiplicativa:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}\ (L\otimes) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\ (R\otimes)$$

- Disyunción aditiva:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \oplus B \vdash C}\,(L\oplus) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B}\,(R\oplus_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\,(R\oplus_2)$$

- Conjunción aditiva:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A\&B \vdash C}\,(L\&_1) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A\&B \vdash C}\,(L\&_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}\,(R\&)$$

- Replicación:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\,(L!) \qquad\qquad \frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}\,(R!)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\,(\text{deb}) \qquad\qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma !A \vdash B}\,(\text{cnt})$$

Observe que se ha remplazado el símbolo tradicional $\vdash$ por $\vdash$, para hacer énfasis que se esta trabajando en un sistema diferente; el significado de $!\Gamma$ es replicar cada uno de los elementos de Γ es decir si $\Gamma = \{G_1, ..., G_n\}$ entonces $!\Gamma = \{!G_1, ..., !G_n\}$; además se notará por $A \equiv B$ cuando $A \vdash B$ y $B \vdash A$. Del cálculo de secuentes se deben hacer las siguientes observaciones:

- Una diferencia marcada con los sistemas lógicos clásicos es la regla del secuente inicial, usualmente los secuentes iniciales suelen ser flexibles ($\Gamma, A \vdash A$) mientras que la lógica lineal son rígidos. Observe que esto es coherente con la lectura que se hacen de los secuentes ya que no pueden desaparecer recursos, así por ejemplo $A, B \vdash A$ va a resultar no ser derivable.
- Las reglas $R\otimes$ y $L \multimap$ requieren de contextos diferentes, una explicación intuitiva de este hecho es el siguiente: para el tensor es necesario contar con los recursos suficientes para la construcción tanto de A como de B y por lo tanto en general el mismo contexto podría no funcionar. De manera análoga se razona la necesidad de contextos diferentes para la implicación.
- La regla de debilitamiento permite admitir la siguiente regla para $!\Gamma = \{!A_1, ..., !A_n\}$:

$$\frac{A \vdash A}{A, !\Gamma \vdash A}$$

Considere el tensor ($A \otimes B$), la conmutatividad de este conector puede resultar conveniente ($A \otimes B \equiv B \otimes A$). De manera informal esto se puede visualizar recordando el significado del conector, se tienen y se consumen ambos recursos y esto no deberá depender de la manera en la cual se escriben. Sin embargo, las reglas introducidas hasta el momento son insuficientes para hacer esta derivación, en medida por la rigidez en el orden de las hipótesis.

Del anterior análisis se puede inferir la necesidad de introducir reglas de estructura, la primera es la regla de corte o composición y la segunda es la regla del intercambio de hipótesis:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\,(\text{cut}) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\,(\text{exc})$$

Las reglas anteriores permiten solucionar los inconvenientes presentados anteriormente y obtener los resultados deseados. A continuación se presentan algunas derivaciones en la lógica lineal intuicionista:

1. $A \oplus B \vdash B \oplus A$:

$$\frac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B \oplus A}\,(R\oplus) \qquad \dfrac{B \vdash B}{B \vdash B \oplus A}\,(R\oplus)}{A \oplus B \vdash B \oplus A}\,(L\oplus)$$

2. $A \otimes (B \oplus C) \vdash (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad B \vdash B}{A, B \vdash A \otimes B}\,(R\otimes)}{A, B \vdash (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)}\,(R\oplus) \qquad \dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad C \vdash C}{A, C \vdash A \otimes C}\,(R\otimes)}{A, C \vdash (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)}\,(R\oplus)}{A, B \oplus C \vdash (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)}\,(L\oplus)}{A \otimes (B \oplus C) \vdash (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)}\,(L\otimes)$$

3. $\vdash A \multimap ((A \multimap 0) \multimap 0)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad 0 \vdash 0}{A, A \multimap 0 \vdash 0}\,(L \multimap)}{A \vdash (A \multimap 0) \multimap 0}\,(R \multimap)}{\vdash A \multimap ((A \multimap 0) \multimap 0)}\,(R \multimap)$$

4. $A \multimap B, B \multimap C \vdash A \multimap C$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad B \vdash B}{A \multimap B, A \vdash B}\,(L \multimap) \qquad C \vdash C}{A \multimap B, B \multimap C, A \vdash C}\,(L \multimap)}{A \multimap B, B \multimap C \vdash A \multimap C}\,(R \multimap)$$

5. $!A \multimap !B \vdash !(!A \multimap B)$:

$$\dfrac{\dfrac{!A \multimap !B \qquad \dfrac{B \vdash B}{!B \vdash B}\,(L!)}{!A \multimap B}}{!(!A \multimap B)}\,(L!)$$

El paso sin etiqueta se justifica por la prueba inmediatamente anterior.

6. $!(A\&B) \equiv !A \otimes !B$, esta derivación consta de dos partes:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A\&B \vdash A}\,(L\&)}{!(A\&B) \vdash A}\,(L!)}{!(A\&B) \vdash !A}\,(R!) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A\&B \vdash B}\,(L\&)}{!(A\&B) \vdash B}\,(L!)}{!(A\&B) \vdash !B}\,(R!)}{!(A\&B), !(A\&B) \vdash !A \otimes !B}\,(R\otimes)}{!(A\&B) \vdash !A \otimes !B}\,(\text{cnt}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{!A \vdash A}\,(L!)}{!A, !B \vdash A}\,(\text{deb}) \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B}{!B \vdash B}\,(L!)}{!A, !B \vdash B}\,(\text{deb})}{!A, !B \vdash A\&B}\,(R\&)}{!A, !B \vdash !(A\&B)}\,(R!)}{!A \otimes !B \vdash !(A\&B)}\,(L\otimes)$$

La lógica lineal intuicionista cuenta con una propiedad deseable de un sistema lógico, este hecho va a tener consecuencias importantes como: la propiedad de la subfórmula, la decidibilidad del sistema y sobre lo que puede ser derivado en el sistema.

Teorema 1. *La lógica lineal intuicionista admite la eliminación de la regla de corte.*

Demostración. Bierman [GM94b] demuestra el teorema en tres lemas, primero define la noción de corte múltiple, aquí A^n significa la aparición de n veces de la fórmula A:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad A^n, \Delta \vdash B}{\Gamma^n, \Delta \vdash B} \text{ (cut}_n\text{)}$$

El cual permite encontrar pruebas con una cantidad de cortes menor al rango de la fórmula, de este modo siempre es posible construir una prueba con una cantidad de cortes menor a la original y por inducción sobre el número de cortes se sigue el resultado. Se puede encontrar una prueba alternativa en [BBPH92]. $\square$

Gracias al teorema anterior es posible afirmar que $A, B \vdash A$ no es derivable en la lógica lineal intuicionista: suponga que existe una prueba de este hecho, en particular tome una prueba libre de corte, como no hay conectores en el secuente la última regla de la prueba deberá ser un intercambio o un secuente inicial, pero ambos casos son absurdos.

Tal como los sistemas de la lógica clásica e intuicionista [vP13], algunas reglas del sistema de lógica lineal intuicionista resultan ser invertibles.

Proposición 1.
- *Si* $\Gamma, A \otimes B \vdash C$ *entonces* $\Gamma, A, B \vdash C$.
- *Si* $\Gamma, A \oplus B \vdash C$ *entonces* $\Gamma, A \vdash C$ *y* $\Gamma, B \vdash C$.
- *Si* $\Gamma \vdash A \& B$ *entonces* $\Gamma \vdash A$ *y* $\Gamma \vdash B$.
- *Si* $\Gamma \vdash A \multimap B$ *entonces* $\Gamma, A \vdash B$.

Demostración. Todas las pruebas se siguen de una aplicación de la regla de corte, para ilustrar considera la afirmación que involucra la regla $L\otimes$:

$$\frac{\dfrac{A \vdash A \qquad B \vdash B}{A, B \vdash A \otimes B} (R\otimes) \qquad \Gamma, A \otimes B \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C} \text{ (cut)}$$

$\square$

Para cerrar esta sección, se presenta la relación existente entre la lógica lineal intuicionista y la lógica intuicionista, para ello se fija el sistema de secuentes de la lógica intuicionista expuesto en [vP13]. Girard [Gir95] propone la manera de relacionar la lógica lineal intuicionista con la intuicionista, para ello utiliza lo que se conoce como las traducciones de Girard, la prueba que se presenta es similar a la que se encuentra en la tesis doctoral de Correa [Pai90]. Las constituyen dos traducciones de Girard [Bra96, GM94b]:

$$\begin{aligned}
p^\circ &= p \\
\perp^\circ &= 0 \\
(A \wedge B)^\circ &= A^\circ \& B^\circ \\
(A \vee B)^\circ &= !(A^\circ) \oplus !(B^\circ) \\
(A \to B)^\circ &= !(A^\circ) \multimap (B^\circ) \\
(\neg A)^\circ &= !(A^\circ) \multimap 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|0| &= \perp \\
|p| &= p \\
|!A| &= |A| \\
|A \otimes B| &= |A| \wedge |B| \\
|A \& B| &= |A| \wedge |B| \\
|A \oplus B| &= |A| \vee |B| \\
|A \multimap B| &= |A| \to |B|
\end{aligned}$$

Teorema 2. $\Gamma \vdash A$ *si y solo si* $!\Gamma^\circ \vdash A^\circ$.

Demostración. La prueba se hace por inducción en la altura de la derivación analizando la última regla aplicada. Se comienza por la necesidad, en el caso base la altura de la prueba de $\Gamma \vdash A$ tiene altura uno y por lo tanto es un secuente inicial:

- Si $\Gamma \vdash A$ entonces se cumple que $A \in \Gamma$ y por lo tanto $!A^\circ \in !\Gamma^\circ$ y de este modo:

$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma^\circ, A^\circ \vdash A^\circ}{!\Gamma^\circ, !A^\circ \vdash A^\circ}\,(L!)}{!\Gamma^\circ \vdash A^\circ}\,(cnt)$$

- Si $\bot \in \Gamma$ entonces se cumple que $0 \in !\Gamma^\circ$ y entonces por la regla del cero se obtiene que $!\Gamma^\circ \vdash A^\circ$.

Suponga que todas las pruebas de una altura menor cumplen la afirmación y según la última regla aplicada:

- Se concluye a partir de la regla $R\wedge$, en este caso se desea obtener que $!\Gamma^\circ \vdash A^\circ \& B^\circ$:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,(R\wedge)$$

  Por hipótesis de inducción se va a cumplir que $!\Gamma^\circ \vdash A^\circ$ y $!\Gamma^\circ \vdash B$, de este modo:

$$\dfrac{!\Gamma^\circ \vdash A^\circ \qquad !\Gamma^\circ \vdash B^\circ}{!\Gamma^\circ \vdash A^\circ \& B^\circ}\,(R\&)$$

- La última regla corresponde a $L\wedge$, en este caso se busca concluir $!\Gamma^\circ, !(A^\circ \& B^\circ) \vdash C$:

$$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\,(L\wedge)$$

  Por hipótesis de inducción se cumple que $!\Gamma^\circ, !A^\circ, !B^\circ \vdash C^\circ$ y de este modo:

$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma^\circ, !A^\circ, !B^\circ \vdash C^\circ}{!\Gamma^\circ, !A^\circ \otimes !B^\circ \vdash C^\circ}\,(L\otimes)}{!\Gamma^\circ, !(A^\circ \& B^\circ) \vdash C^\circ}$$

  Observe que el paso no justificado corresponde a la quinta derivación de las presentadas anteriormente.

- Se concluye usando la regla $R\vee$, en este caso se desea concluir $!\Gamma^\circ \vdash !A^\circ \oplus !B^\circ$:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,(R\vee)$$

  Por hipótesis de inducción se obtiene que $!\Gamma^\circ \vdash A^\circ$ y por lo tanto:

$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma^\circ \vdash A^\circ}{!\Gamma^\circ \vdash !A^\circ}\,(R!)}{!\Gamma^\circ \vdash !A^\circ \oplus !B^\circ}\,(R\oplus)$$

- La última regla aplicada fue $L\vee$, en este caso se necesita deducir $!\Gamma^\circ, !(!A^\circ \oplus !B^\circ) \vdash C^\circ$:

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\,(L\vee)$$

  Por hipótesis de inducción se obtiene $!\Gamma^\circ, !A^\circ \vdash C^\circ$, $!\Gamma^\circ, !B^\circ \vdash C^\circ$ y por lo tanto:

$$\frac{!\Gamma^\circ, !A^\circ \vdash C^\circ \qquad !\Gamma^\circ, !B^\circ \vdash C^\circ}{!\Gamma^\circ, !A^\circ \oplus !B^\circ \vdash C^\circ}\ (L\otimes)$$

- La última regla es $R \to$, en este caso se necesita deducir $!\Gamma \vdash !A^\circ \multimap B^\circ$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (R \to)$$

Por hipótesis de inducción $!\Gamma^\circ, !A^\circ \vdash B^\circ$ y por lo tanto:

$$\frac{!\Gamma^\circ !A^\circ \vdash B^\circ}{!\Gamma^\circ \vdash !A^\circ \multimap B}\ (R \multimap)$$

- La última regla aplicada es $L \to$, en este caso se deberá deducir $!\Gamma^\circ, !(!A^\circ \multimap B^\circ) \vdash C^\circ$:

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C}\ (L \to)$$

Por hipótesis de inducción se obtiene que $!\Gamma^\circ, !(!A^\circ \multimap B^\circ) \vdash A^\circ$, $!\Gamma^\circ, !B^\circ \vdash C^\circ$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{!\Gamma^\circ, !(!A^\circ \multimap B^\circ) \vdash A^\circ}{!\Gamma^\circ, !(!A^\circ \multimap B^\circ) \vdash !A^\circ}\ (R!) \qquad !\Gamma^\circ, !B^\circ \vdash C^\circ}{!\Gamma^\circ, !(!A^\circ \multimap B^\circ), !A^\circ \multimap !B^\circ \vdash C^\circ}\ (L \multimap)}{!\Gamma^\circ, !(!A^\circ \multimap B^\circ), !(!A^\circ \multimap B^\circ) \vdash C^\circ}}{!\Gamma^\circ, !(!A^\circ \multimap B^\circ) \vdash C^\circ}\ (deb)$$

La regla no justificada corresponde a la sexta de las derivaciones presentadas anteriormente.

En todos los casos se concluye lo deseado y por lo tanto esta dirección de la prueba resulta verdadera. Ahora se considera la suficiencia se utilizara la segunda traducción y se probará que $|\Delta| \vdash |A|$ siempre que $\Delta \vdash A$, nuevamente se considera inducción sobre la altura de la derivación $\vdash$ analizando la última regla aplicada:

- En el caso base la regla aplicada es la identidad o la regla del cero, en ambos casos se corresponden con secuentes iniciales.
- Al considerar los conectores aditivos $\oplus$ y $\&$, el resultado se sigue por la hipótesis de inducción en una derivación menor. Obsérvese que para la regla $L\wedge$ es necesario aplicar la regla de debilitamiento una vez.
- Para los conectores multiplicativo $\multimap$ y $\otimes$, es necesario aplicar la regla de debilitamiento para hacer coincidir los contextos en las reglas $R\otimes$ y $L \multimap$ y de este modo se sigue el resultado. Considere como ejemplo la regla $L \multimap$:

$$\frac{\Delta_0 \vdash A \qquad \Delta_1, B \vdash C}{\Delta_0, \Delta_1, A \multimap B \vdash C}\ (L \multimap)$$

En donde $\Delta = \Delta_0, \Delta_1$, por hipótesis de inducción se obtiene que $|\Delta_0| \vdash |A|$ y $|\Delta_1|, |B| \vdash |C|$ y entonces:

$$\cfrac{\cfrac{|\Delta_0| \vdash |A|}{|\Delta|, |A| \to |B| \vdash |A|}\ (\text{deb}) \qquad \cfrac{|\Delta_1|, |B| \vdash |C|}{|\Delta|, |B| \vdash |C|}\ (\text{deb})}{|\Delta|, |A| \to |B| \vdash |C|}\ (L \to)$$

- En el caso de las reglas de replicación el argumento es análogo y require en algunos casos aplicar la regla de debilitamiento, en estas reglas es importante el hecho que $|!A| = |A|$.

Ahora se observa que por inducción en la estructura de la fórmula que $|A^\circ| = A$ para las fórmulas intuicionistas:

- Para las letras proposicionales y el símbolo $\perp$, la observaciones se sigue de la definición.
- Si la afirmación es cierta para fórmulas A, B entonces será cierta para la fórmula $A \Box B$ en donde $\Box$ es cualquiera de los conectivos $\wedge$, $\vee$ o $\rightarrow$.

Por lo que entonces, si $!\Gamma^\circ \vdash A^\circ$ entonces de lo demostrado sobre la segunda traducción $|!\Gamma^\circ| \vdash |A^\circ|$ y aplicando lo anterior, $\Gamma \vdash A$; quedando establecida la suficiencia y por lo tanto el teorema. $\Box$

3. Sistemas Duales

El surgimiento de la lógica lineal enriqueció el campo lógico y abrió un nuevo horizonte en el estudio de problemas computacionales [GL86], sin embargo en el estudio de la computación no se hace uso de una única lógica sino que se ha visto provechoso utilizar una combinación de ellas; aquí surge un problema al tratar los diferentes sistemas como "islotes" y la necesidad de "unificar" los sistemas.

Girard [Gir93] concibió el cálculo unificado como una manera de conciliar la lógica clásica y lineal, proponiendo un marco de trabajo en el que es posible trabajar con lógicas diferentes de manera uniforme. En dicho sistema aparecerán los sistemas clásico, intuicionista y lineal como fragmentos entre los cuales es posible intercambiar información. En la formulación original de Girard los secuentes son de la forma $\Gamma; \Gamma' \vdash \Delta'; \Delta$ en donde Γ, Δ tendrán un comportamiento lineal y Γ', Δ' tendrán un comportamiento clásico; no obstante ésta formulación es bastante compleja e incluso el mismo Girard menciona:

> [Gir93]P. 204: El sistema aquí presentado resulta grande, la razón es la necesidad de acomodar el pensamiento intuicionista de manera transparente y la coexistencia de los conectores clásicos, intuicionistas y lineales ...

Esto se traduce en una gran cantidad de reglas, lo cual va a ser poco práctico para el estudio de este tipo de sistemas, en consecuencia hay una necesidad de proponer sistemas alternativos y han surgido diversos trabajos en la materia [Bar96].

Ahora bien, el Teorema 2 permite transformar pruebas del sistema intuicionista en el sistema lineal de manera "sencilla" y nos permite cuestionar la necesidad de los sistemas duales. No obstante, se debe observar que dicha traducción no es gratuita y el precio a pagar es la fuga de información sobre los recursos que necesita una conclusión, pues no es posible trazar los recursos usados a lo largo de la derivación. Aquí los sistemas duales ganan ventaja ya que permiten el manejo de ambos sistemas y evitan dicha fuga, el nuevo precio a pagar es restringir el paso de información de un lado del ";" al otro.

El sistema de secuentes que se presenta encuentra su inspiración en el trabajo de [Bar96]; los secuentes son de la forma $\Gamma; \Delta \vdash A$ en donde Γ va a tener un comportamiento intuicionista, en otras palabras van a ser válidas las reglas de contracción y debilitamiento, y Δ se comportará de manera lineal, es decir hay una conciencia de los recursos. De ahora en adelante se hablará del lado izquierdo (derecho) para referirse a la izquierda (derecha) del ";". Las fórmulas para este sistema son tomadas del lenguaje:

$$A = p \mid 0 \mid A \otimes B \mid A \multimap B \mid !A$$

Las reglas en forma de secuentes son:

- Identidad:

$$\frac{}{\Gamma, A; \_ \vdash A} \qquad\qquad \frac{}{\Gamma; A \vdash A}$$

- Cero:

$$\frac{}{\Gamma; \Delta, 0 \vdash A}\ (0)$$

- Conjunción multiplicativa:

$$\frac{\Gamma;\Delta_1 \vdash A\otimes B \qquad \Gamma;\Delta_2, A, B\vdash C}{\Gamma;\Delta_1,\Delta_2\vdash C}\ (L\otimes) \qquad\qquad \frac{\Gamma;\Delta_1\vdash A \qquad \Gamma;\Delta_2\vdash B}{\Gamma;\Delta_1,\Delta_2\vdash A\otimes B}\ (R\otimes)$$

- Implicación:

$$\frac{\Gamma;\Delta_1 \vdash A\multimap B \qquad \Gamma;\Delta_2\vdash A}{\Gamma;\Delta_1,\Delta_2\vdash B}\ (L\multimap) \qquad\qquad \frac{\Gamma;\Delta, A\vdash B}{\Gamma;\Delta\vdash A\multimap B}\ (R\multimap)$$

- Replicación:

$$\frac{\Gamma;\Delta_1 \vdash !A \qquad \Gamma, A;\Delta_2\vdash B}{\Gamma;\Delta_1,\Delta_2\vdash B}\ (L!) \qquad\qquad \frac{\Gamma;\_\vdash A}{\Gamma;\_\vdash !A}\ (R!)$$

Respecto al sistema de secuentes se pueden realizar algunas observaciones: la primera es que la conclusión es lineal ya que las derivaciones manipulan fórmulas lineales en el lado derecho (componente lineal, Δ), la segunda es que en sentido estricto el lado izquierdo del secuente (Γ) no es intuicionista ya que las fórmulas se forman sobre el lenguaje de la lógica lineal, no obstante gracias a las traducciones de Girard es posible abusar de la notación. De este modo el lazo izquierdo representa la libertad en los recursos, mientras que el derecho la finitud de los mismos.

A diferencia del sistema presentado en la primera parte, en el sistema dual las reglas de debilitamiento y contracción para el lado derecho (componente lineal) son derivables.

Proposición 2. *Las siguientes reglas son derivables:*

$$\frac{\Gamma;\Delta\vdash B}{\Gamma;\Delta, !A\vdash B}\ (deb) \qquad\qquad \frac{\Gamma;\Delta, !A, !A\vdash B}{\Gamma;\Delta, !A\vdash B}\ (cnt)$$

Demostración. Considere las siguientes derivaciones:

$$\frac{\Gamma; !A\vdash !A \qquad \dfrac{\Gamma;\Delta\vdash B}{\Gamma, A;\Delta\vdash B}\ (\text{debI})}{\Gamma; !A,\Delta\vdash B}\ (L!)$$

Para la segunda parte considere la siguiente regla auxiliar, si $\Gamma; !A,\Delta\vdash B$ entonces:

$$\frac{\dfrac{\Gamma; !A,\Delta\vdash B}{\Gamma;\Delta\vdash !A\multimap B}\ (R\multimap) \qquad \dfrac{\Gamma, A;\_\vdash A}{\Gamma, A;\_\vdash !A}\ (L!)}{\Gamma, A;\Delta\vdash B}\ (L\multimap)$$

De este modo:

$$\frac{\Gamma; !A\vdash !A \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma; !A, !A\Delta\vdash B}{\Gamma, A, A;\Delta\vdash B}}{\Gamma, A;\Delta\vdash B}\ (\text{cntI})}{\Gamma; !A,\Delta\vdash B}\ (L!)$$

Aquí el paso no justificado es aplicar dos veces la derivación anterior. □

Al contar con dos contextos (intuicionista y lineal) se obtiene que el sistema está equipado con dos reglas de corte:

$$\frac{\Gamma, A;\Delta\vdash B \qquad \Gamma;\_\vdash A}{\Gamma;\Delta\vdash B}\ (\text{cut}) \qquad\qquad \frac{\Gamma;\Delta_1, A\vdash B \qquad \Gamma;\Delta_2\vdash A}{\Gamma;\Delta_1,\Delta_2\vdash B}\ (\text{cut})$$

Observe como la regla intuicionista requiere de un contexto lineal vacío, lo que significa que se va a cortar un recurso potencialmente no lineal; mientras que para la regla de corte lineal hay un comportamiento multiplicativo en sus partes derechas. El sistema dual cuenta con propiedades deseables:

Teorema 3. *Las siguientes afirmaciones son válidas en el sistema dual:*

- *Si* $\Gamma, A; \Delta \vdash B$ *y* $\Gamma; \_ \vdash A$ *entonces existe una prueba de* $\Gamma; \Delta \vdash B$ *sin cortes.*
- *Si* $\Gamma; \Delta_1, A \vdash B$ *y* $\Gamma; \Delta_2 \vdash A$ *entonces existe una prueba de* $\Gamma; \Delta_1, \Delta_2 \vdash B$ *sin cortes.*

Demostración. Ver [Bar96]. □

Una clase importante de fórmulas para los sistemas duales es las que Girard define como fórmulas positivas.

Definición 1. Una fórmula P de la lógica lineal intuicionista se dirá positiva si $P \equiv !P$. De ahora en adelante se utilizará las letras P, Q, R para referirse a a fórmulas positiva.

Observe que esta definición está expresando que la fórmula P se comporta como una especie de punto fijo para los secuentes duales o para las traducciones de Girard. Esto es una propiedad deseable para que exista un flujo “simple” de información entre las partes del secuente.

Referencias

[Bar96] Andrew G. Barber. Dual intuitionistic linear logic. 1996.

[BBPH92] Nick Benton, Gavin Bierman, Valeria Paiva, and Martin Hyland. Term assignment for intuitionistic linear logic. Technical report, 1992.

[Bra96] Torben Brauner. Introduction to linear logic. Technical report, BRICS, 1996.

[Gir87] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theor. Comput. Sci.*, 50(1):1–102, January 1987.

[Gir93] Jean-Yves Girard. On the unity of logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 59(3):201–217, 1993.

[Gir95] Jean-Yves Girard. Linear logic: Its syntax and semantics. In *Proceedings of the Workshop on Advances in Linear Logic*, page 1–42, USA, 1995. Cambridge University Press.

[GL86] J.Y. Girard and Y. Lafont. Linear logic and lazy computation. Technical Report RR-0588, INRIA, December 1986.

[GM94a] Bierman Gavin M. *Lazy Logician GLL.* PhD thesis, University of Cambridge, UK, 1994.

[GM94b] Bierman Gavin M. *On Intuicionist Linear Logic.* PhD thesis, University of Cambridge, UK, 1994.

[Pai90] Valeria Correa Vaz De Paiva. *The Dialectica Categories.* PhD thesis, University of Cambridge, UK, 1990.

[vP13] J. von Plato. *Elements of Logical Reasoning.* Elements of Logical Reasoning. Cambridge University Press, 2013.

1a. En primer lugar se prueba la transitividad para la implicación: $A \to B; B \to C \vdash_M A \to C$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$A \to B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{B}
\AxiomC{$B \to C$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\, 1)$}
\UnaryInfC{$A \to C$}
\end{prooftree}
$$

Y se acepta como regla:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \to B$}
\AxiomC{$B \to C$}
\RightLabel{\scriptsize (trs)}
\BinaryInfC{$A \to C$}
\end{prooftree}
$$

De esta manera:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(A \to B) \to B]^1$}
\AxiomC{$[B \to A]^2$}
\RightLabel{\scriptsize (trs)}
\BinaryInfC{$(A \to B) \to A$}
\AxiomC{$((A \to B) \to A) \to A$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\, 2)$}
\UnaryInfC{$(B \to A) \to A$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\, 1)$}
\UnaryInfC{$((A \to B) \to B) \to ((B \to A) \to A)$}
\end{prooftree}
$$

1b. Se pide probar la siguiente afirmación: si para todo $A, B \in \mathit{Prop}$, $\vdash_M \mathit{Switch}(A, B)$ entonces para todo $A, B \in \mathit{Prop}$, $\vdash_M \mathit{Pierce}(A, B)$. Es necesario considerar el siguiente resultado auxiliar:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A \to (A \to B)]^1$}
\AxiomC{$[A]^2$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$A \to B$}
\AxiomC{$[A]^2$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{B}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\, 2)$}
\UnaryInfC{$A \to B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\, 1)$}
\UnaryInfC{$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$}
\end{prooftree}
$$

Para $A, B \in \mathit{Prop}$ se cumple $\vdash_M \mathit{Switch}(A, A \to B)$ y aplicando lo anterior:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\mathit{Switch}(A, A \to B)$}
\AxiomC{$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$((A \to B) \to A) \to A$}
\AxiomC{$[(A \to B) \to A]^1$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\, 1)$}
\UnaryInfC{$((A \to B) \to A) \to A$}
\end{prooftree}
$$

1c. Se probarán dos afirmaciones de la lógica clásica.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg A]^1$}
\AxiomC{$[A]^2$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\, 2)$}
\UnaryInfC{$A \to B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\, 1)$}
\UnaryInfC{$\neg A \to (A \to B)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \vee \neg A$}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$\neg(A \to B)$}
\AxiomC{$[\neg A]^1$}
\AxiomC{$\neg A \to (A \to B)$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$A \to B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{\scriptsize $(\vee E;\, 1)$}
\TrinaryInfC{A}
\AxiomC{$B \vee \neg B$}
\AxiomC{$[\neg B]^2$}
\AxiomC{$\neg(A \to B)$}
\AxiomC{$[B]^2$}
\AxiomC{$B \to (A \to B)$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$A \to B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\vee E;\, 2)$}
\TrinaryInfC{$\neg B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\wedge I)$}
\BinaryInfC{$A \wedge \neg B$}
\end{prooftree}
$$

$$\dfrac{A \lor \neg A \qquad [\neg A]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\neg B \qquad \dfrac{[A]^1 \qquad A \to B}{B}\,(\to E)}{\bot}\,(\to E)}{\neg A}}{\neg A}\,(\lor E;\,1)$$

Gracias a lo demostrado, se pueden aceptar las reglas:

$$\dfrac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A}\,(\text{mtt})$$

$$\dfrac{\neg(A \to B)}{A \land \neg B}\,(\text{nic})$$

Y entonces:

$$\dfrac{\dfrac{A \lor \neg A \qquad [A]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \qquad [(A \to B) \to A]^2}{\neg(A \to B)}\,(\text{mtt})}{A \land \neg B}\,(\text{nic})}{A}\,(\land E)}{B}\,(\lor E;\,1)}{((A \to B) \to A) \to A}\,(\to I;\,2)$$

1d. Apoyados en el hecho que $\vdash_C Pierce(A, B)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \to B) \to B]^1 \qquad [B \to A]^2}{(A \to B) \to A}\,(\text{trs}) \qquad Pierce(A, B)}{A}\,(\to E)}{(B \to A) \to A}\,(\to I;\,2)}{((A \to B) \to B) \to (B \to A) \to A)}\,(\to I;\,1)$$

2 Primero se prueba que el TEE implica DIO a nivel de fórmulas, es decir $A \lor (A \to B) \vdash_M (A \to B \lor C) \to (A \to B) \lor C$:

$$\dfrac{\dfrac{A \lor (A \to B) \qquad \dfrac{[A \to B]^1}{(A \to B) \lor C}\,(\lor I_2) \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad [A \to B \lor C]^2}{B \lor C}\,(\to E) \qquad \dfrac{[C]^3}{(A \to B) \lor C}\,(\lor I_1) \qquad \dfrac{\dfrac{B \to (A \to B) \qquad [B]^3}{A \to B}\,(\to E)}{(A \to B) \lor C}\,(\lor I_2)}{(A \to B) \lor C}\,(\lor E;\,3)}{(A \to B) \lor C}\,(\lor E;\,1)}{(A \to B \lor C) \to (A \to B) \lor C}\,(\to I;\,2)$$

Ahora se probará, Si para todos $A, B, C \in Prop$, $\vdash_M (A \to B \lor C) \to (A \to B) \lor C$ entonces para todos $A, B \in Prop$, $\vdash_M A \lor (A \to B)$. Para ello se hacen dos pruebas auxiliares:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1}{B \lor A}\,(\lor I_1)}{A \to (B \lor A)}\,(\to)\text{I; 1}$$

$$\dfrac{A \lor B \qquad \dfrac{[A]^1}{B \lor A}\,(\lor I_1) \qquad \dfrac{[B]^1}{B \lor A}\,(\lor I_2)}{B \lor A}\,(\lor E;\,1)$$

De la prueba anterior se acepta la siguiente regla:

$$\frac{A \vee B}{B \vee A}\ (\vee\text{cmt})$$

Sean $A, B \in Prop$, por la hipótesis se cumple que $\vdash_M (A \to A \vee B) \to (A \to B) \vee A$:

$$\dfrac{\dfrac{(A \to A \vee B) \to (A \to B) \vee A \qquad A \to (B \vee A)}{(A \to B) \vee A}\ (\to E)}{A \vee (A \to B)}\ (\vee\text{cmt})$$

Por lo que entonces del TEE a la DIO se tiene a nivel de fórmulas y la otra dirección a nivel de esquemas.

3a. En la definición de fórmulas de Harrop, se evitan las fórmulas cuyo conectivo principal es la disyunción, por tal motivo no van a surgir casos en una fórmula de este tipo. Adicionalmente si se tuviera una fórmula de Harrop de la forma $F \to G$, como su consecuente es de Harrop, una vez derivado G no aparecerán casos ocultos o disyunciones a considerar. Sin embargo no se pide alguna condición al antecedente y podría (o no) ser de Harrop, por lo que $A \vee B \to C$ es de Harrop siempre que C sea de Harrop. Se podría afirmar que las fórmulas de Harrop son deterministas en el sentido que no van a depender de "escenarios posibles", sino que todo su contenido está bien determinado en si mismo.

3b. Para probar la afirmación se hace inducción sobre la altura de la derivación y se analiza la última regla aplicada. En el caso en que la altura es uno, se tiene alguno de los siguientes casos:

$$\frac{\Gamma}{A \vee B}\ (?)$$

- $\perp E$: en este caso se deberá cumplir que $\perp \in \Gamma$ y se puede aplicar esta misma regla para obtener A, de esta manera $\Gamma \vdash A$.
- $\vee I$: en este escenario necesariamente se debe dar que $A \in \Gamma$ o $B \in \Gamma$ y por lo tanto se puede afirmar $\Gamma \vdash A$ o $\Gamma \vdash B$.
- $A \vee B \in \Gamma$: es absurdo pues $A \vee B$ no es de Harrop.

Para el caso inductivo suponga que la derivación tiene una altura n y que la derivación es normal, según la última regla:

- $\wedge E$, en este caso se obtiene que $A \vee B$ ha sido deducida en una derivación de menor altura tomando como premisas C o D:

$$\dfrac{\Gamma \qquad C \wedge D \qquad \begin{array}{c} [C]^1,\ [D]^1 \\ \vdots \\ A \vee B \end{array}}{A \vee B}\ (\wedge E;\ 1)$$

  Del hecho que $C \wedge D$ es una fórmula de Harrop, entonces se puede concluir que C y D son de Harrop. En el caso que $\Gamma, C \vdash_I A \vee B$ se aplica la hipótesis de inducción y se obtiene que $\Gamma, C \vdash_I A$ o $\Gamma, C \vdash_I B$, análogo cuando $\Gamma, D \vdash_I A \vee B$. En todo caso, se puede aplicar $\wedge E$ y obtener la derivación para $\Gamma \vdash A$ o $\Gamma \vdash B$.

$$\dfrac{\Gamma \qquad C \wedge D \qquad \begin{array}{c} [C]^1,\ [D]^1 \\ \vdots \\ A \end{array}}{A}\ (\wedge E;\ 1)$$

- $\to E$, al aplicar esta regla se tiene la siguiente derivación:

$$\dfrac{\Gamma \qquad C \to D \qquad C \qquad \begin{matrix}[D]^1\\ \vdots \\ A \vee B\end{matrix}}{A \vee B}\;(\to E;\,1)$$

Del hecho que $C \to D$ es una fórmula de Harrop se sigue que D es una fórmula de Harrop y aplicando la hipótesis de inducción a $\Gamma, D \vdash_I A \vee B$ se puede obtener $\Gamma, D \vdash_I A$ o $\Gamma, D \vdash_I B$ y en ambos casos se puede aplicar $\to E$ para derivar lo deseado.

$$\dfrac{\Gamma \qquad C \to D \qquad C \qquad \begin{matrix}[D]^1\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{B}\;(\to E;\,1)$$

- $\vee I$, hay dos opciones para la aplicación de la regla $\Gamma, A \vdash_I A \vee B$ o $\Gamma, B \vdash_I A \vee B$:

$$\dfrac{\Gamma \qquad A}{A \vee B}\;(\perp E)$$

  En cualquiera de los dos casos se tiene $\Gamma \vdash_I A$ o $\Gamma \vdash_I B$.

- $\perp E$, en este caso la derivación tiene la forma:

$$\dfrac{\Gamma \qquad \perp}{A \vee B}\;(\perp E)$$

  Pero como $\perp$ es una fórmula de Harrop por hipótesis de inducción se sigue que $\Gamma \vdash_I A$ o $\Gamma \vdash_I B$:

$$\dfrac{\Gamma \qquad \perp}{A}\;(\perp E)$$

- $\vee E$, la derivación sería de la siguiente forma:

$$\dfrac{\Gamma \qquad C \vee D \qquad \begin{matrix}[C]^1\\ \vdots \\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[D]^1\\ \vdots \\ A \vee B\end{matrix}}{A \vee B}\;(\vee E;\,1)$$

  Lo cual no es valido pues se contradice que se están tomando fórmulas de Harrop, $C \vee D$ no es una fórmula de Harrop. Observe que aquí es necesaria la normalidad de la derivación para garantizar que $C \vee D \in \Gamma$.

- $\to I$, $\wedge I$, no es posible que sea la última regla pues la conclusión $A \vee B$ no coincide con la regla.

Por lo que para una derivación de altura n se puede concluir la afirmación y por lo tanto usando inducción se puede concluir para toda n.

4. En primer lugar se probará que si C es una fórmula que no tiene al conector $\vee$ entonces dicha fórmula es de Harrop. La prueba se realiza por inducción en la estructura de C. Si C es una variable proposicional o $\perp$ se concluye la afirmación por la definición de fórmula de Harrop. Sean A, B dos fórmulas que no tienen al conector $\vee$, el paso inductivo consta de los siguientes casos:

   - $C = A \wedge B$, por la hipótesis de inducción tanto A como B son de Harrop y por lo tanto se sigue que C es de Harrop.
   - $C = A \to B$, la hipótesis de inducción indica que B es de Harrop y de esta manera C lo es.

   Se cumple el paso inductivo y por lo tanto el resultado es cierto para toda fórmula C que se encuentre libre del conector $\vee$.

   Sean p, q dos variables distintas y suponga que existe C una fórmula libre del conector $\vee$ para la cual $\vdash_I C \leftrightarrow (p \vee q)$, de esta manera se da (1) $C \vdash_I p \vee q$ y (2) $p \vee q \vdash_I C$. Como en particular se cumple que $C \vdash_I p \vee q$, de la PDH $C \vdash_I p$ o $C \vdash_I q$. En el primer caso se seguiría que:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[q]^1}{p \vee q}\,(\vee I)}{C}\,(2)}{p}\,(Hip)}{q \to p}\,(\to I;\, 1)$$

Lo que se traduce en $\vdash_I q \to p$, esto es un absurdo pues ninguna regla de derivación permite esta conclusión. De manera análoga, si $C \vdash_I q$ entonces $\vdash_I p \to q$ lo que también es imposible. Por consiguiente C no existe y no hay forma de escribir $p \vee q$ usando los demás conectores, en otras palabras $\vee$ es independiente.

5. Primero se probará que $\Gamma \vdash_C A$ si y solo si $\Gamma \vdash_C \neg\neg A$:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \qquad A \qquad [\neg A]^1}{\bot}\,(\to E)}{\neg\neg A}\,(\to I;\, 1)$$

$$\cfrac{\Gamma \qquad \cfrac{\cfrac{\neg\neg A \qquad [\neg A]^1}{\bot}\,(\to E)}{A}\,(\bot\, E) \qquad [A]^1 \qquad A \vee \neg A}{A}\,(\vee E;\, 1)$$

Para la segunda parte se probará, $\Gamma \vdash_C A$ si y solo si $\Gamma \vdash_I \neg\neg A$. Para la dirección de vuelta observe que si $\Gamma \vdash_I \neg\neg A$ en particular se tiene una derivación en el sistema clásico, dado que el sistema clásico usa las reglas del sistema intuicionista. De esta manera $\Gamma \vdash_C \neg\neg A$ y aplicando la equivalencia anterior se concluye $\Gamma \vdash_C A$.

Para la otra dirección se hace inducción sobre la altura de la derivación en $\Gamma \vdash_C A$ analizando la última regla aplicada. El caso base es cuando la derivación tiene altura uno y se pueden dar los siguientes escenarios:

- $A \in \Gamma$ y por lo tanto $\Gamma \vdash_I \neg\neg A$, ya que $\vdash_I A \to \neg\neg A$ es un teorema.
- En el segundo caso la última regla aplicada es $\bot\, E$ y por lo tanto $\bot \in \Gamma$ y se puede derivar $\neg\neg A$, por lo que $\Gamma \vdash_I \neg\neg A$.

Ahora suponga que la derivación tiene altura n y que la afirmación se cumple para derivaciones de menor altura, según la última regla aplicada se sigue:

- $\wedge E$, $\Gamma \vdash_C A$ tiene la forma:

$$\cfrac{\Gamma \qquad B \wedge C \qquad \begin{array}{c}[B]^1,\, [C]^1\\ \vdots\\ A\end{array}}{A}\,(\wedge E;\, 1)$$

  Y las hipótesis de inducción son: $\Gamma \vdash_I \neg\neg(B \wedge C)$, $\Gamma, B \vdash_I \neg\neg A$ o $\Gamma, C \vdash_I \neg\neg A$. Aplicando los lemas auxiliares 6 y 8 se obtiene que $\Gamma \vdash_I \neg\neg B \wedge \neg\neg C$, $\Gamma \vdash_I \neg\neg B \to \neg\neg A$ y $\Gamma \vdash_I \neg\neg C \to \neg\neg A$, por lo que entonces:

$$\cfrac{\Gamma \qquad \neg\neg B \wedge \neg\neg C \qquad \begin{array}{c}[\neg\neg B]^1,\, [\neg\neg C]^1\\ \vdots\\ \neg\neg A\end{array}}{\neg\neg A}\,(\wedge E;\, 1)$$

- $\to E$, la derivación $\Gamma \vdash_C A$ tiene la forma:

$$\cfrac{\Gamma \qquad B \to C \qquad B \qquad \begin{array}{c}[C]^1\\ \vdots\\ A\end{array}}{A}\,(\to E;\, 1)$$

La hipótesis de inducción es: $\Gamma \vdash_I \neg\neg(B \to C)$, $\Gamma \vdash_I \neg\neg B$ y $\Gamma, C \vdash_I \neg\neg A$, nuevamente aplicando el Lema Auxiliar 6 se tiene que $\Gamma \vdash_I \neg\neg C \to \neg\neg A$ y observando que $\neg\neg(B \to C), \neg\neg B \vdash_I \neg\neg C$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg B \qquad [\neg C]^1}{\neg\neg B \wedge \neg C}\,{\scriptstyle (\wedge I)}}{\neg(\neg B \vee C)}\,{\scriptstyle (la4)}}{\neg(B \to C)}\,{\scriptstyle (la9)} \qquad \neg\neg(B \to C)}{\bot}\,{\scriptstyle (\to E)}}{\neg\neg C}\,{\scriptstyle (\to I;\,1)}$$

Por lo que se puede concluir $\Gamma \vdash_I \neg\neg A$.

- $\vee E$, la derivación $\Gamma \vdash_C A$ tiene la forma:

$$\dfrac{\Gamma \qquad B \vee C \qquad \begin{matrix}[B]^1 \\ \vdots \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[C]^1 \\ \vdots \\ A\end{matrix}}{A}\,{\scriptstyle (\vee E;\,1)}$$

Las hipótesis de inducción son $\Gamma \vdash_I \neg\neg(B \vee C)$, $\Gamma, B \vdash_I \neg\neg A$ y $\Gamma, C \vdash_I \neg\neg A$. Aplicando los lemas 6 y 11 se obtiene que $\Gamma \vdash_I \neg(\neg B \wedge \neg C)$, $\Gamma \vdash_I \neg\neg B \to \neg\neg A$, $\Gamma \vdash_I \neg\neg C \to \neg\neg A$ y:

$$\dfrac{\Gamma \qquad \neg(\neg B \wedge \neg C) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg B \to \neg\neg A \qquad \neg\neg C \to \neg\neg A}{\neg\neg B \vee \neg\neg C \to \neg\neg A}\,{\scriptstyle (la12)}}{\neg(\neg B \wedge \neg C) \to \neg\neg A}\,{\scriptstyle (la13)}}{\neg\neg A}\,{\scriptstyle (\to E)}$$

- $\vee I$, en este caso $A = B \vee C$ y la derivación $\Gamma \vdash_I A$ tiene la forma:

$$\dfrac{\Gamma \qquad B}{B \vee C}\,{\scriptstyle (\vee I_1)}$$

Aplicando la hipótesis de inducción: $\Gamma \vdash_I \neg\neg B$ y por lo tanto:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad \neg\neg B \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(B \vee C)]^1}{\neg B \wedge \neg C}\,{\scriptstyle (la3)}}{\neg B}\,{\scriptstyle (\wedge E)}}{\bot}\,{\scriptstyle (\to E)}}{\neg\neg(B \vee C)}\,{\scriptstyle (\to I;\,1)}$$

La prueba de la introducción por la izquierda es análoga a este caso.

- $\wedge I$, en este caso $A = B \wedge C$ y la derivación $\Gamma \vdash_C A$ tiene la forma:

$$\dfrac{\Gamma \qquad B \qquad C}{B \wedge C}\,{\scriptstyle (\wedge I)}$$

Las hipótesis de inducción son: $\Gamma \vdash_I \neg\neg B$ y $\Gamma \vdash_I \neg\neg C$. Aplicando la regla $\wedge I$ se tendría que $\Gamma \vdash_I \neg\neg B \wedge \neg\neg C$ y aplicando el lema auxiliar 14 se obtiene que $\Gamma \vdash_I \neg\neg(B \wedge C)$.

- $\to I$, en este caso $A = B \to C$ y la derivación $\Gamma \vdash_C A$ tiene la forma:

$$\dfrac{\Gamma \qquad \begin{matrix}[B]^1 \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{B \to C}\,{\scriptstyle (\to I;\,1)}$$

Aplicando la hipótesis de inducción: $\Gamma, B \vdash_I \neg\neg C$ y aplicando el lema auxiliar 6 se obtiene $\Gamma \vdash_I \neg\neg B \to \neg\neg C$. Además:

$$\dfrac{\Gamma \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(B\to C)]^1}{\neg\neg B \wedge \neg C}\,(la10)}{\neg C}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{\neg\neg B \to \neg\neg C \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(B\to C)]^1}{\neg\neg B \wedge \neg C}\,(la10)}{\neg\neg B}\,(\wedge E)}{\neg\neg C}\,(\to E)}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(B\to C)}\,(\to I;\,1)}\,(\to E)$$

Por lo que entonces $\Gamma \vdash_I \neg\neg(B\to C)$

- $\bot\ E$, la derivación es:

$$\dfrac{\Gamma \qquad \bot}{A}\,(\bot\ E)$$

Y por la hipótesis de inducción se obtiene que $\Gamma \vdash_I \neg\neg\bot$ y aplicando que $\vdash_I \bot\to\bot$ se puede obtener $\Gamma \vdash_I \bot$ y por lo tanto $\Gamma \vdash_I \neg\neg A$.

- TE, la derivación tiene la forma:

$$\dfrac{\Gamma}{A \vee \neg A}\,(TE)$$

En este caso no hay hipótesis inductiva y la derivación es:

$$\dfrac{\Gamma \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(A\vee\neg A)]^1}{\neg A \wedge \neg\neg A}\,(la3)}{\neg A}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(A\vee\neg A)]^1}{\neg A \wedge \neg\neg A}\,(la3)}{\neg\neg A}\,(\wedge E)}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(A\vee\neg A)}\,(\to I;\,1)}\,(\to E)$$

En todos los casos fue posible derivar la conclusión, por lo que aplicando inducción sobre la estructura de la derivación $\Gamma \vdash_I \neg\neg A$.

A continuación se muestran las pruebas de los lemas auxiliares.

la0. hace referencia una afirmación demostrada en libro guía $\vdash_I (A \vee B \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \wedge (B \to C))$.

la1. $\vdash_I \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$, observe que una dirección es consecuencia de $B \vdash_I \neg\neg B$ y la otra:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg A \qquad \dfrac{[A]^1}{\neg\neg A}}{\bot}\;{\scriptstyle(\to E)}}{\neg A}\;{\scriptstyle(\to I;\,1)}$$

la2. $A \to B \vdash_I \neg B \to \neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to B \qquad [A]^2}{B}\;{\scriptstyle(\to E)} \qquad [\neg B]^1}{\bot}\;{\scriptstyle(\to E)}}{\neg A}\;{\scriptstyle(\to I;\,2)}}{\neg B \to \neg A}\;{\scriptstyle(\to I;\,1)}$$

la3. $\neg(A \vee B) \vdash_I \neg A \wedge \neg B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee B}\;{\scriptstyle(\vee I)} \qquad \neg(A \vee B)}{\bot}\;{\scriptstyle(\to E)}}{\neg A}\;{\scriptstyle(\to I;\,1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^2}{A \vee B}\;{\scriptstyle(\vee I)} \qquad \neg(A \vee B)}{\bot}\;{\scriptstyle(\to E)}}{\neg B}\;{\scriptstyle(\to I;\,1)}}{\neg A \wedge \neg B}\;{\scriptstyle(\wedge I)}$$

la4. $\neg A \wedge \neg C \vdash_I \neg(B \vee C)$

$$\dfrac{\dfrac{[A \vee B]^2 \qquad \dfrac{[A]^1 \qquad \dfrac{\neg A \wedge \neg B}{\neg A}\;{\scriptstyle(\wedge E)}}{\bot}\;{\scriptstyle(\to E)} \qquad \dfrac{[B]^1 \qquad \dfrac{\neg A \wedge \neg B}{\neg B}\;{\scriptstyle(\wedge E)}}{\bot}\;{\scriptstyle(\to E)}}{\bot}\;{\scriptstyle(\vee E;\,1)}}{\neg(A \vee B)}\;{\scriptstyle(\to I;\,2)}$$

la5. $\neg B \vee C \vdash_I B \to C$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg B \vee C \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg B]^2 \qquad [B]^1}{\bot}\;{\scriptstyle(\to E)}}{C}\;{\scriptstyle(\bot E)} \qquad [C]^2}{C}\;{\scriptstyle(\vee E;\,2)}}{B \to C}\;{\scriptstyle(\to I;\,1)}$$

la6. $B \to \neg\neg A \vdash_I \neg\neg B \to \neg\neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to \neg\neg A}{\neg\neg\neg A \to \neg B}\;{\scriptstyle(la2)}}{\neg A \to \neg B}\;{\scriptstyle(la1 + trs)} \qquad [\neg A]^1}{\neg B}\;{\scriptstyle(\to E)} \qquad [\neg\neg B]}{\bot}\;{\scriptstyle(\to E)}}{\neg\neg A}\;{\scriptstyle(\to I;\,1)}}{\neg\neg B \to \neg\neg A}\;{\scriptstyle(\to E;\,2)}$$

la7. $\neg B \vee \neg C \vdash_I \neg(B \wedge C)$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg B \vee \neg C \qquad \dfrac{[\neg B]^2 \quad \dfrac{[B \wedge C]^1}{B}\,(\wedge E)}{\bot}\,(\to E) \qquad \dfrac{[\neg C]^2 \quad \dfrac{[B \wedge C]^1}{C}\,(\wedge E)}{\bot}\,(\to E)}{\bot}\,(\vee E;\ 2)}{\neg(B \wedge C)}\,(\to I;\ 1)$$

la8. $\neg\neg(B \wedge C) \vdash_I \neg\neg B \wedge \neg\neg C$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B]^1}{\neg B \vee \neg C}\,(\vee I)}{\neg(B \wedge C)}\,(la7) \qquad \neg\neg(B \wedge C)}{\bot}\,(\to E)}{\neg\neg B}\,(\to I;\ 2) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg(B \wedge C) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg C]^2}{\neg B \vee \neg C}\,(\vee I)}{\neg(B \wedge C)}\,(la7)}{\bot}\,(\to E)}{\neg\neg C}\,(\to I;\ 2)}{\neg\neg B \wedge \neg\neg C}\,(\wedge I)$$

la9. $\neg(\neg B \vee C) \vdash_I \neg(B \to C)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg B \vee C)}{\neg\neg B \wedge \neg C}\,(la3)}{\neg C}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{[B \to C]^1}{\neg C \to \neg B}\,(la2)}{\neg B}\,(\to E) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\neg B \vee C)}{\neg\neg B \wedge C}\,(la3)}{\neg\neg B}\,(\wedge E)}{\bot}\,(\to E)}{\neg(B \to C)}\,(\to I;\ 1)$$

la10. $\neg(B \to C) \vdash_I \neg\neg B \wedge \neg C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B]^1}{\neg B \vee C}\,(\vee I)}{B \to C}\,(la5) \qquad \neg(B \to C)}{\bot}\,(\to E)}{\neg\neg B}\,(\to I;\ 1) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(B \to C) \qquad \dfrac{\dfrac{[C]^2}{\neg B \vee C}\,(\vee I)}{B \to C}\,(la5)}{\bot}\,(\to E)}{\neg C}\,(\to I;\ 2)}{\neg\neg B \wedge \neg C}\,(\wedge I)$$

la11. $\neg\neg(B \vee C) \vdash_I \neg(\neg B \wedge \neg C)$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg(B \vee C) \qquad \dfrac{[\neg B \wedge \neg C]^1}{\neg(B \vee C)}\,(la4)}{\bot}\,(\to E)}{\neg(\neg B \wedge \neg C)}\,(\to I;\ 1)$$

la12. $\neg\neg B \to \neg\neg A, \neg\neg C \to \neg\neg A \vdash_I (\neg\neg B \vee \neg\neg C) \to \neg\neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\neg B \vee \neg\neg C]^1 \qquad \dfrac{[\neg\neg B]^2 \qquad \neg\neg B \to \neg\neg A}{\neg\neg A}\,(\to E) \qquad \dfrac{[\neg\neg C]^2 \qquad \neg\neg C \to \neg\neg A}{\neg\neg A}\,(\to E)}{\neg\neg A}\,(\vee E;\ 2)}{(\neg\neg B \vee \neg\neg C) \to \neg\neg A}\,(\to I;\ 1)$$

la13. $(\neg\neg B \vee \neg\neg C) \to \neg\neg A \vdash_I \neg(\neg B \wedge \neg C) \to \neg\neg A$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\neg\neg B \vee \neg\neg C) \to \neg\neg A$}
\RightLabel{\scriptsize $(la2)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\neg A \to \neg(\neg\neg B \vee \neg\neg C)$}
\AxiomC{$[\neg A]^1$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\neg A$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$\neg(\neg\neg B \vee \neg\neg C)$}
\RightLabel{\scriptsize $(la3)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\neg B \wedge \neg\neg\neg C$}
\RightLabel{\scriptsize $(la1)$}
\UnaryInfC{$\neg B \wedge \neg C$}
\AxiomC{$[\neg(\neg B \wedge \neg C)]^2$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\ 1)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg A$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\ 2)$}
\UnaryInfC{$\neg(\neg B \wedge \neg C) \to \neg\neg A$}
\end{prooftree}
$$

la14. $\neg\neg A \wedge \neg\neg B \vdash_I \neg\neg(A \wedge B)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\neg A \wedge \neg\neg B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\wedge E)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg B$}
\AxiomC{$[\neg(A \wedge B)]^1$}
\AxiomC{$[A]^2$}
\AxiomC{$[B]^3$}
\RightLabel{\scriptsize $(\wedge I)$}
\BinaryInfC{$A \wedge B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\ 2)$}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\AxiomC{$\neg\neg A \wedge \neg\neg B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\wedge E)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg A$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\ 3)$}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to I;\ 1)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(A \wedge B)$}
\end{prooftree}
$$

1a. $\nvdash \neg(A \wedge \neg B) \to A \to B$: al principio la única regla que se puede aplicar es $R \to$, la búsqueda continua con el secuente $S : \neg(A \wedge \neg B) \vdash A \to B$ y hay dos caminos. En el primer caso se aplica la regla $L \to$ a S y se obtiene:

$$\dfrac{\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \wedge \neg B \qquad \bot \vdash A \to B}{\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \to B}\,(L \to)$$

Ahora, el secuente de la derecha es inicial y ahí se detiene la búsqueda para esa rama, pero para el secuente a izquierda hay dos opciones: en la primera se aplica nuevamente la regla $L \to$ y se obtiene el mismo secuente, por lo que no es una opción que sirva en la búsqueda, la segunda es aplicar la regla $R\wedge$ y buscar la derivación de $\neg(A \wedge \neg B) \vdash A$ y $\neg(A \wedge \neg B) \vdash \neg B$, pero nuevamente la única opción es aplicar $L \to$ y se cicla la búsqueda. Por lo que por esta rama de la búsqueda no es posible obtener una derivación.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \wedge \neg B \qquad \bot \vdash A}{\neg(A \wedge \neg B) \vdash A}\,(L \to) \qquad \neg(A \wedge \neg B) \vdash \neg B}{\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \wedge \neg B}\,(R\wedge) \qquad \bot \vdash A \to B}{\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \to B}\,(L \to)$$

En segundo lugar se aplica la regla $R \to$ a S para obtener el secuente $\neg(A \wedge \neg B), A \vdash B$ y EL análisis es similar al primero, solo que se cicla la búsqueda en el secuente $\neg(A \wedge \neg B), A \vdash \neg B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A \wedge \neg B), A \vdash A \wedge \neg B \qquad \bot, A \vdash \neg B}{\neg(A \wedge \neg B), A \vdash \neg B}\,(L \to) \qquad \neg(A \wedge \neg B), A \vdash A}{\neg(A \wedge \neg B), A \vdash A \wedge \neg B}\,(L\wedge) \qquad \bot, A \vdash B}{\neg(A \wedge \neg B), A \vdash B}\,(L \to)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A \wedge \neg B), A, B \vdash A \wedge \neg B \qquad \bot, A, B \vdash \bot}{\neg(A \wedge \neg B), A, B \vdash \bot}\,(L \to)}{\neg(A \wedge \neg B), A \vdash \neg B}\,(R \to) \qquad \neg(A \wedge \neg B), A \vdash A}{\neg(A \wedge \neg B), A \vdash A \wedge \neg B}\,(L\wedge) \qquad \bot, A \vdash B}{\neg(A \wedge \neg B), A \vdash B}\,(L \to)$$

1b. $\nvdash (\neg\neg A \to A) \to A \vee \neg A$: la búsqueda comienza por aplicar la regla $R \to$ y obtener el secuente $S : \neg\neg A \to A \vdash A \vee \neg A$. Según las opciones para S: en primer lugar se puede aplicar la regla $L \to$ a S para obtener dos nuevos secuentes:

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash \neg A \vee A}\,(L\vee) \qquad \dfrac{\neg\neg A \to A, \neg A \vdash \bot}{\neg\neg A \to A \vdash \neg\neg A}\,(R \to)}{\neg\neg A \to A \vdash \neg A \vee A}\,(L \to)$$

Para el secuente de la derecha la opción razonable es aplicar la regla $R \to$ a $\neg\neg A$ (la otra es aplicar $L \to$ sin embargo conduce a un ciclo) se obtiene el secuente $\neg\neg A \to A, \neg A \vdash \bot$ y hay dos opciones: en la primera se aplica $L \to$ a la hipótesis $\neg\neg A \to A$ y se obtiene un ciclo, en la segunda se aplica la regla $L \to$ a $\neg A$ y se obtiene $\neg\neg A \to A, \neg A \vdash A$ pero no hay otra cosa que aplicar $L \to$ y se cicla.

Ahora para S se aplica la regla $R\vee$ e intentar obtener a la derecha A o $\neg A$, en el primer caso, la única regla que se puede aplicar es $L \to$ y obtener $\neg\neg A \to A \vdash \neg\neg A$ y de esta manera se puede continuar la búsqueda de dos maneras: la primera es aplicar $L \to$ a la derecha, pero esto conduce a un ciclo, entonces la regla razonable es aplicar $R \to$. Nuevamente en la búsqueda hay dos opciones, aplicar $L \to$ a $\neg\neg A \to A$ o aplicar $L \to$ a $\neg A$, no obstante ambas conducen a un ciclo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg A\to A,\neg A\vdash A\qquad \bot\vdash\bot}{\neg\neg A\to A,\neg A\vdash\bot}\,(L\to)}{\neg\neg A\to A,\neg A\vdash\neg\neg A}\,(R\to)\qquad A\vdash A}{\neg\neg A\to A\vdash A}\,(L\to)}{\neg\neg A\to A\vdash A\vee\neg A}\,(R\vee)}{\vdash(\neg\neg A\to A)\vdash A\vee\neg A}\,(R\to)$$

Si se busca $\neg A$ en lugar de A, por un razonamiento análogo se obtienen ciclos. Concluyendo que no es posible derivar la fórmula.

1c. Es cierto que $\vdash A\vee\neg A\to(\neg\neg A\to A)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,\neg\neg A\vdash A\qquad \dfrac{\neg A,\neg\neg A\vdash\neg A\qquad \bot,\neg A\vdash A}{\neg A,\neg\neg A\vdash A}\,(L\to)}{A\vee\neg A,\neg\neg A\vdash A}\,(L\vee)}{A\vee\neg A\vdash\neg\neg A\to A}\,(R\to)}{\vdash A\vee\neg A\to(\neg\neg A\to A)}\,(R\to)$$

1d. También es cierto $\vdash (A\to B)\to(C\to D)\to(A\vee C)\to B\vee C$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to B,C\to D,A\vdash A\qquad B,C\to D,A\vdash B}{A\to B,C\to D,A\vdash B}\,(L\to)}{A\to B,C\to D,A\vdash B\vee D}\,(R\vee)\qquad \dfrac{\dfrac{A\to B,C\to D,C\vdash C\qquad D,A\to B,C\vdash D}{A\to B,C\to D,A\vdash D}\,(L\to)}{A\to B,C\to D,C\vdash B\vee D}\,(R\vee)}{A\to B,C\to D,A\vee C\vdash B\vee D}\,(L\vee)}{A\to B,C\to D\vdash A\vee C\to B\vee D}\,(R\to)}{A\to B\vdash(C\to D)\to(A\vee C)\to B\vee D}\,(R\to)}{\vdash(A\to B)\to(C\to D)\to(A\vee C)\to B\vee C}\,(R\to)$$

1e. Por último $\nvdash (\neg\neg A\vee\neg A)$: en el inicio la única regla disponible para la búsqueda es $R\to$ y se debe continuar con la regla $L\to$ para obtener:

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A\vee\neg A)\vdash A\vee\neg A\qquad \bot\vdash\bot}{\neg(A\vee\neg A)\vdash\bot}\,(L\to)}{\vdash\neg\neg(A\vee\neg A)}\,(R\to)$$

No obstante para el secuente de más a la izquierda hay dos opciones: en la primera se aplica la regla $L\to$ y en la segunda se busca a la derecha del secuente A o $\neg A$, pero ambos casos conducen nuevamente a aplicar la regla $L\to$ para $\neg(A\vee\neg A)$ y este caso conduce al primero, sin embargo aplicar dicha regla lleva a un ciclo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A\vee\neg A)\vdash A\vee\neg A\qquad \bot\vdash A\vee\neg A}{\neg(A\vee\neg A)\vdash A\vee\neg A}\,(L\to)\qquad \bot\vdash\bot}{\neg(A\vee\neg A)\vdash\bot}\,(L\to)}{\vdash\neg\neg(A\vee\neg A)}\,(R\to)$$

2. Se presentan las permutaciones: $\to E$, $\wedge E$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \to B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^1\\ \vdots\\ C \wedge D\end{matrix}}{C \wedge D}\,(\to E, 1) \qquad \begin{matrix}[C]^2, [D]^2\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\,(\wedge E, 2)
$$

$$
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \to B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[B]^1\\ \vdots\\ C \wedge D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[C]^2, [D]^2\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\,(\wedge E, 2)}{E}\,(\to E, 1)
$$

$\vee E$, $\to E$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A]^1\\ \vdots\\ C \to D\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^1\\ \vdots\\ C \to D\end{matrix}}{C \to D}\,(\vee E, 1) \qquad \begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[D]^2\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\,(\to E, 2)
$$

$$
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \vee B\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^1\\ \vdots\\ C \to D\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[D]^2\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\,(\to E, 2) \quad \dfrac{\begin{matrix}[B]^1\\ \vdots\\ C \to D\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[D]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\,(\to E, 3)}{E}\,(\vee E, 1)
$$

$\wedge E$, $\forall E$:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \wedge B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A]^1, [B]^1\\ \vdots\\ \forall x P(x)\end{matrix}}{\forall x P(x)}\,(\wedge E, 1) \qquad \begin{matrix}[P(t)]^2\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,(\forall E, 2)
$$

$$
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \wedge B\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^1, [B]^1\\ \vdots\\ \forall x P(x)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[P(t)]^2\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,(\forall E, 2)}{C}\,(\wedge E, 1)
$$

$\exists E$, $\to E$:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \exists x A\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A[y/x], \Delta]^1\\ \vdots\\ C \to D\end{matrix}}{C \to D}\,(\exists E, 1) \qquad \begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[D]^2\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\,(\to E, 2)
$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \exists x A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A[y/x],\Delta]^1\\ \vdots\\ C\to D\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[D]^2\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\,(\to E,2)}{E}\,(\exists E,1)$$

$\forall E$,$\exists E$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \forall x A(x)\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A(t),\Delta]^1\\ \vdots\\ \exists x B\end{matrix}}{\exists z B}\,(\forall E,1) \quad \begin{matrix}[B[y/z],\theta]^2\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,(\exists E,2)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \forall x A(x)\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A(t),\Delta]^1\\ \vdots\\ \exists z B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B[y/z],\theta]^2\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,(\exists E,2)}{C}\,(\forall E,1)$$

3a. Consequentia Mirabilis:

$$\dfrac{\dfrac{A\lor\neg A \quad [A]^2 \quad \dfrac{[\neg A\to A]^1 \quad [\neg A]^2 \quad [A]^3}{A}\,(E\to,3)}{A}\,(E\lor,2)}{(\neg A\to A)\to A}\,(I\to,1)$$

3b. Prueba por contradicción:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\lor\neg A \quad [A]^3 \quad \dfrac{[\neg A\to\neg B]^2 \quad [\neg A]^3 \quad \dfrac{[B\to\bot]^4 \quad \dfrac{[\neg A\to B]^1 \quad [\neg A]^3 \quad [B]^6}{B}\,(E\to,6) \quad \dfrac{[\bot]^5}{A}\,(E\bot)}{A}\,(E\to,5)}{A}\,(E\to,4)}{A}\,(E\lor,3)}{(\neg A\to\neg B)\to A}\,(I\to,2)}{(\neg A\to B)\to(\neg A\to\neg B)\to A}\,(I\to,1)$$

3c. Prueba por contradicción larga:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\lor\neg B \quad [B]^3 \quad \dfrac{[(A\land\neg B)\to(C\land\neg C)]^1 \quad \dfrac{[A]^2 \quad [\neg B]^3}{A\land\neg B}\,(I\land) \quad \dfrac{[C\land\neg C]^4 \quad \dfrac{[C\to\bot]^5 \quad [C]^5 \quad \dfrac{[\bot]^6}{B}\,(E\bot)}{B}\,(E\to,6)}{B}\,(E\land,5)}{B}\,(E\to,4)}{B}\,(E\lor,3)}{A\to B}\,(I\to,2)}{((A\land\neg B)\to(C\land\neg C))\to(A\to B)}\,(I\to,1)$$

4a. La regla expuesta es derivable: se parte de considerar que $\Gamma, p, p\to C\vdash p$ es un secuente inicial y entonces:

$$\dfrac{\Gamma, p, p \to C \vdash p \qquad \Gamma, p, C \vdash D}{\Gamma, p, p \to C \vdash D}\ (L \to)$$

Pues $\Gamma, p, C \vdash D$ se cumple por hipótesis.

4b. El resultado se obtiene por medio de la regla de debilitamiento aplicada a la hipótesis.

4c. Al aplicar dos veces la regla de inversión a la hipótesis se obtiene que $\Gamma, C \vdash D$ y al suponer que la fórmula $\varphi = A \to B \to C$ se utiliza en la derivación, necesariamente se aplica la regla $L \to$ y de esta manera se obtiene que para cierta fórmula H:

$$\dfrac{\Gamma, A \to B \to C \vdash A \qquad \Gamma, B \to C \to H}{\Gamma, A \to B \to C \vdash H}\ (L \to)$$

Se deberá cumplir que $\Gamma \vdash A$ ya que no se puede utilizar φ en la derivación de A pues se introduce un ciclo. Por otro lado, se deberá usar $B \to C$ en la derivación de H (en caso contrario se tendría $\Gamma \vdash H$ y no era necesario usar φ) por lo que aplicando el mismo razonamiento se obtiene que $\Gamma \vdash B$ y en particular $\Gamma \vdash A \wedge B$. Aplicando la regla de debilitamiento y $L \to$ se obtiene:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma, A \wedge B \to C \vdash A \wedge B}\ (wk) \qquad \Gamma, C \vdash D}{\Gamma, A \wedge B \to C \vdash D}\ (L \to)$$

En caso de no necesitar φ para derivar D, se cumple que $\Gamma \vdash D$ y se sigue el resultado por la regla de debilitamiento.

4d. Análogo en el caso anterior, aplicando dos veces inversión y una contracción se obtiene que $\Gamma, C \vdash D$. Si se supone que la fórmula $A \to C$ se utiliza en la derivación de D, su uso se dio por una aplicación de la regla $L \to$ para derivar alguna fórmula intermedia H:

$$\dfrac{\Gamma, A \to C, B \to C \vdash A \qquad \Gamma, C, B \to C \vdash H}{\Gamma, A \to C, B \to C \vdash H}\ (L \to)$$

Y nuevamente no es posible que en la derivación de A se utilice $A \to C$, entonces hay dos casos: en el primero no se usa $B \to C$ en la derivación de A y por lo tanto $\Gamma \vdash A$, en el segundo se usa y entonces:

$$\dfrac{\Gamma, B \to C \vdash B \qquad \Gamma, C \vdash A}{\Gamma, B \to C \vdash A}\ (L \to)$$

Y nuevamente no es posible que $B \to C$ haga parte de la derivación de B por lo que entonces $\Gamma \vdash B$, en cualquier caso es posible obtener $\Gamma \vdash A \vee B$ y aplicando la regla $L \to$ y una vez debilitamiento:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma, A \vee B \to C \vdash A \vee B}\ (wk) \qquad \Gamma, C \vdash D}{\Gamma, A \vee B \to C \vdash D}\ (L \to)$$

En el caso que $B \to C$ se utiliza para la derivación de H se razona de manera similar. Por último si ni $A \to C$, $B \to C$ hacen parte de la derivación, entonces por debilitamiento se sigue el resultado, pues $\Gamma \vdash D$.

4e. De la hipótesis $\Gamma, A, B \to C \vdash B$ se puede concluir que $\Gamma, A \vdash B$ pues si se usara la fórmula $B \to C$ en la derivación se hace mediante la aplicación de la regla $L \to$ y se obtendría un secuente repetido. Por lo que entonces se sigue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, (A \to B) \to C, A \vdash B}\ (wk)}{\Gamma, (A \to B) \to C \vdash A \to B}\ (R \to) \qquad \Gamma, C \vdash D}{\Gamma, (A \to B) \to C \vdash D}\ (L \to)$$

5a. Para analizar el secuente se divide en la dirección de ida y vuelta. En el primer sentido se puede iniciar con la regla $R \to$ y posteriormente hay dos caminos: en el primero se usa la regla $R\exists$ y posteriormente $L \to$, en el segundo se aplica primero la regla $L \to$, sin embargo ambas opciones conducen a un secuente que no es inicial:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \exists x(A \to B), A \to B[t/x], A \qquad \exists xB \vdash \exists x(A \to B), A \to B[t/x]}{A \to \exists xB \vdash \exists x(A \to B), A \to B[t/x]}\,(L \to)}{A \to \exists xB \vdash \exists x(A \to B)}\,(R\exists)}{\vdash (A \to \exists xB) \to \exists x(A \to B)}\,(R \to)$$

Por lo tanto esta dirección no es posible obtenerla. Ahora, el otro sentido si es derivable:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash \exists xB, A \qquad \dfrac{B[t/x], A \vdash \exists xB, B[t/x]}{B[t/x], A \vdash \exists xB}\,(R\exists)}{A \to B[t/x], A \vdash \exists xB}\,(L \to)}{\exists x(A \to B), A \vdash \exists xB}\,(L\exists^{*})}{\exists x(A \to B) \vdash A \to \exists xB}\,(R \to)}{\vdash \exists x(A \to B) \to A \to \exists xB}\,(R \to)$$

En el paso $*$ es necesaria la hipótesis que $x \notin FV(A)$. De este modo la equivalencia no es derivable, pero una dirección si.

5b. En este caso:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A[t/x], B[t/x] \vdash \exists xA, A[t/x]}{A[t/x] \wedge B[t/x] \vdash \exists xA, A[t/x]}\,(L\wedge)}{A[t/x] \wedge B[t/x] \vdash \exists xA}\,(R\exists) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A[t/x], B[t/x] \vdash \exists xB, B[t/x]}{A[t/x] \wedge B[t/x] \vdash \exists xB, B[t/x]}\,(L\wedge)}{A[t/x] \wedge B[t/x] \vdash \exists xB}\,(R\exists)}{A[t/x] \wedge B[t/x] \vdash \exists yB[y/x]}\,(*)}{A[t/x] \wedge B[t/x] \vdash \exists xA \wedge \exists yB[y/x]}\,(R\wedge)}{\exists x(A \wedge B) \vdash \exists xA \wedge \exists yB[y/x]}\,(L\exists)}{\vdash \exists x(A \wedge B) \to \exists xA \wedge \exists yB[y/x]}\,(R \to)$$

En donde el paso $*$ está justificado por la regla de cambio de variable ligada para el cuantificador existencial Tabla 8.11 del libro, por lo que es derivable este secuente.

5c. Para este secuente se inicia con aplicar la regla $R \to$ y de aquí hay dos camino: aplicar primer la regla $L\wedge$ para obtener los testigos s, t en la parte izquierda y de esta manera seguir con una aplicación de la regla $R\exists$ para obtener:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A[t/x], B[s/x] \vdash \exists y(A \wedge B), A[t/x] \qquad A[t/x], B[s/x] \vdash \exists y(A \wedge B), B[t/x]}{A[t/x], B[s/x] \vdash \exists y(A \wedge B), A[t/x] \wedge B[t/x]}\,(R\wedge)}{A[t/x], B[s/x] \vdash \exists y(A \wedge B)}\,(R\exists)}{A[t/x], \exists yB \vdash \exists y(A \wedge B)}\,(L\exists)}{\exists yA, \exists yB \vdash \exists y(A \wedge B)}\,(L\exists)}{\exists yA \wedge \exists yB \vdash \exists y(A \wedge B)}\,(L\wedge)}{\vdash \exists yA \wedge \exists yB \to \exists y(A \wedge B)}\,(R \to)$$

Pero para no violar el principio de captura de variables en la regla $L\exists$, $s \neq t$ y de esta manera no es posible continuar con la búsqueda. En el segundo camino, se aplica primero la regla $R\exists$ y siguiendo un análisis similar se obtienen secuentes no iniciales. En conclusión el secuente no es derivable, la derivabilidad de este secuente puede ser contrastado con $A(x) := x$ es natural par mayor a 2 y $B(x) := x$ es par.

5d. El secuente no es derivable, la búsqueda comienza con la aplicación de la regla derecha del existencial, sustituyendo t por x y posteriormente la regla $R \rightarrow$. Sin embargo, la única regla que puede aplicar es $R\forall$ y por lo tanto toca introducirla con un término diferente a t y en este punto no es posible continuar con la prueba sin terminar en un ciclo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{D(t) \vdash \exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y)), D(s)}{D(t) \vdash \exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y)), \forall y D(y)}\,(R\forall)}{\vdash \exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y)), D(t) \rightarrow \forall y D(y)}\,(R \rightarrow)}{\vdash \exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y))}\,(R\exists)$$

La derivabilidad se puede contrastar con el hecho que existen naturales pares, pero no todo natural es par.

5e. En este caso la búsqueda deberá comenzar con la regla $R \rightarrow$, de esta manera se pueden aplicar las reglas $R\forall$ y $L\forall$ respectivamente, pero aquí la búsqueda falla pues en general $s \neq t$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x,x), P(t,t) \vdash P(s,t)}{\forall x P(x,x) \vdash P(s,t)}\,(L\forall)}{\forall x P(x,x) \vdash \forall y P(s,y)}\,(R\forall)}{\forall x P(x,x) \vdash \forall x \forall y P(x,y)}\,(R\forall)}{\vdash \forall x P(x,x) \rightarrow \forall x \forall y P(x,y)}\,(R \rightarrow)$$

En este punto se puede contrastar con la diagonal de un conjunto, en este caso se cumple es reflexivo pero no toda pareja está relacionada.