Lógica Lineal Intuicionista y Sistemas Duales

Teoría de la Prueba

Ciro García

Junio 2021

Lógica Lineal Intuicionista

Motivación

La lógica lineal encuentra su motivación en el siguiente problema:

Problema

¿Qué sucede con un recurso A una vez es utilizado en una regla?

En particular, considere la regla de Modus Ponens:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}\ (\text{mp})$$

Y concretamente:

- Dado un natural par n entonces se puede obtener la mitad del número.
- Tomando $n = 8$ aplicamos M.P. y obtenemos 4.
- Pero... ¿qué pasa con el 8?

Definición Informal

Jean Girard introduce en su trabajo [Gir87] la lógica lineal como la lógica que es consciente de los recursos, un sistema en donde para obtener un recurso se debe contar con lo justo y necesario para su construcción.

En particular implica la eliminación de las reglas de debilitamiento y contracción:

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (\text{deb}) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (\text{cnt})$$

Para recuperar expresividad se introduce el operador ! (recursos ilimitados). Una consecuencia de la conciencia de recursos es la división de los operadores en aditivos y multiplicativos.

El lenguaje

El sistema de lógica lineal intuicionista parte de considerar un número infinito de variables proposicionales $p_1, p_2, p_3, \ldots$ y una constante 0. Las fórmulas de la lógica lineal son generadas por la gramática:

$$A, B := p \mid 0 \mid A \otimes B \mid A \& B \mid A \oplus B \mid !A$$

Secuentes Pt. 1

Se escribirán con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ las formulas, con letras griegas mayúsculas Γ, Δ multiconjuntos de fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ y los secuentes $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ significaran que A es consecuencia de $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$.

- Identidad:

$$\frac{}{A \vdash A}$$

- Cero:

$$\frac{}{\Gamma, 0 \vdash A}\ (0)$$

- Implicación:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}\ (L \multimap) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\ (R \multimap)$$

- Conjunción multiplicativa:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}\ (L\otimes) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\ (R\otimes)$$

Secuentes Pt. 2

- Disyunción aditiva:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \oplus B \vdash C}\ (L\oplus) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B}\ (R\oplus_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\ (R\oplus_2)$$

- Conjunción aditiva:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A\&B \vdash C}\ (L\&_1) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A\&B \vdash C}\ (L\&_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}\ (R\&_1)$$

- Replicación:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\ (L!) \qquad \frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}\ (R!)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\ (\mathrm{deb}) \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma !A \vdash B}\ (\mathrm{cnt})$$

Reglas estructurales

El sistema cuenta con las siguientes reglas estructurales:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ (\text{cut}) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\ (\text{exc})$$

Teorema
Las siguientes son validas en la lógica lineal intuicionista:

- *La lógica lineal intuicionista admite la eliminación de la regla de corte.*
- *Si* $\Gamma, A \otimes B \vdash C$ *entonces* $\Gamma, A, B \vdash C$.
- *Si* $\Gamma, A \oplus B \vdash C$ *entonces* $\Gamma, A \vdash C$ *y* $\Gamma, B \vdash C$.
- *Si* $\Gamma \vdash A \& B$ *entonces* $\Gamma \vdash A$ *y* $\Gamma \vdash B$.
- *Si* $\Gamma \vdash A \multimap B$ *entonces* $\Gamma, A \vdash B$.

Derivaciones

$\vdash A \multimap ((A \multimap 0) \multimap 0)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad 0 \vdash 0}{A, A \multimap 0 \vdash 0}\,(L \multimap)}{A \vdash (A \multimap 0) \multimap 0}\,(R \multimap)}{\vdash A \multimap ((A \multimap 0) \multimap 0)}\,(R \multimap)$$

Log. LI vs Log. Intuicionista

Teorema

$\Gamma \vdash A$ *si y solo si* $!\Gamma^\circ \vdash A^\circ$.

$$
\begin{aligned}
p^\circ &= p \\
\bot^\circ &= 0 \\
(A \wedge B)^\circ &= A^\circ \& B^\circ \\
(A \vee B)^\circ &= !(A^\circ) \oplus !(B^\circ) \\
(A \to B)^\circ &= !(A^\circ) \multimap (B^\circ) \\
(\neg A)^\circ &= !(A^\circ) \multimap 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|0| &= \bot \\
|p| &= p \\
|!A| &= |A| \\
|A \otimes B| &= |A| \wedge |B| \\
|A \& B| &= |A| \wedge |B| \\
|A \oplus B| &= |A| \vee |B| \\
|A \multimap B| &= |A| \to |B|
\end{aligned}
$$

Sistemas Duales

Motivación

No tratar los diferentes sistemas (clásico, lineal e intuicionista) como “islotes” y la necesidad de “unificar” los sistemas.

Girard [Gir93] concibió el cálculo unificado como un sistema que concilia las lógica clásica y lineal, proponiendo un marco de trabajo en es posible trabajar con lógicas diferentes de manera uniforme, en dicho sistema aparecerán dichos sistemas como fragmentos. Los secuentes son de la forma: $\Gamma; \Gamma' \vdash \Delta'; \Delta$.

El sistema de secuentes se inspira en el trabajo de [Bar96]; los secuentes son de la forma $\Gamma; \Delta \vdash A$.

El lenguaje y los secuentes Pt. 1

Las fórmulas para este sistema son tomadas del lenguaje:

$$A = p \mid 0 \mid A \otimes B \mid A \multimap B \mid !A$$

Las reglas son:

- Identidad:

$$\frac{}{\Gamma, A; \_ \vdash A} \qquad\qquad \frac{}{\Gamma; A \vdash A}$$

- Cero:

$$\frac{}{\Gamma; \Delta, 0 \vdash A}$$

- Conjunción multiplicativa:

$$\frac{\Gamma; \Delta_1 \vdash A \qquad \Gamma; \Delta_2 \vdash B}{\Gamma; \Delta_1, \Delta_2 \vdash A \otimes B} \qquad\qquad \frac{\Gamma; \Delta_1 \vdash A \otimes B \qquad \Gamma; \Delta_2, A, B \vdash C}{\Gamma; \Delta_1, \Delta_2 \vdash C}$$

- Implicación:

$$\frac{\Gamma; \Delta, A \vdash B}{\Gamma; \Delta \vdash A \multimap B} \qquad \frac{\Gamma; \Delta_1 \vdash A \multimap B \qquad \Gamma; \Delta_2 \vdash A}{\Gamma; \Delta_1, \Delta_2 \vdash B}$$

- Replicación:

$$\frac{\Gamma; \_ \vdash A}{\Gamma; \_ \vdash !A} \qquad \frac{\Gamma; \Delta_1 \vdash !A \qquad \Gamma, A; \Delta_2 \vdash B}{\Gamma; \Delta_1, \Delta_2 \vdash B}$$

Diferencias

Proposición
Las siguientes reglas son derivables en el sistema dual:

$$\frac{\Gamma; \Delta \vdash B}{\Gamma; \Delta, !A \vdash B} \qquad \frac{\Gamma; \Delta, !A, !A \vdash B}{\Gamma; \Delta, !A \vdash B}$$

$$\frac{\dfrac{\Gamma; !A, \Delta \vdash B}{\Gamma; \Delta \vdash !A \multimap B} \qquad \dfrac{\Gamma, A; \_ \vdash A}{\Gamma, A; \_ \vdash !A}}{\Gamma, A; \Delta \vdash B}$$

Reglas de Corte

En el sistema dual hay dos reglas de corte, lineal e intuicionista:

$$\frac{\Gamma, A; \Delta \vdash B \qquad \Gamma; \_ \vdash A}{\Gamma; \Delta \vdash B} \qquad\qquad \frac{\Gamma; \Delta_1, A \vdash B \qquad \Gamma; \Delta_2 \vdash A}{\Gamma; \Delta_1, \Delta_2 \vdash B}$$

Teorema
Las siguientes afirmaciones son válidas en el sistema dual:

- *Si* $\Gamma, A; \Delta \vdash B$ *y* $\Gamma; \_ \vdash A$ *entonces existe una prueba de* $\Gamma; \Delta \vdash B$ *sin cortes.*
- *Si* $\Gamma; \Delta_1, A \vdash B$ *y* $\Gamma; \Delta_2 \vdash A$ *entonces existe una prueba de* $\Gamma; \Delta_1, \Delta_2 \vdash B$ *sin cortes.*

Bibliografía

Andrew G. Barber.
Dual intuitionistic linear logic.
1996.

Jean-Yves Girard.
Linear logic.
Theor. Comput. Sci., 50(1):1–102, January 1987.

Jean-Yves Girard.
On the unity of logic.
Annals of Pure and Applied Logic, 59(3):201–217, 1993.