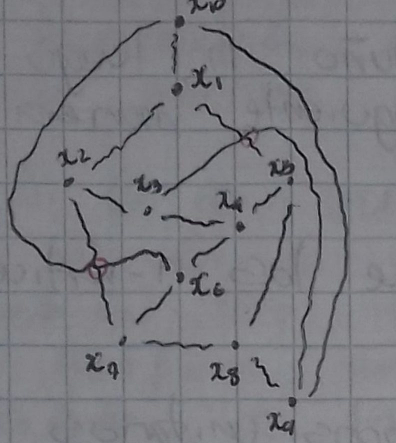
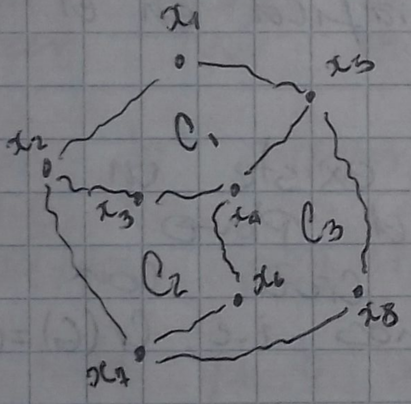
TEMA FECHA

ⓒ Considere el encaje mostrado, se tiene entonces que $cr(P_{10}) \leq 2$. Considere ahora un encaje $\tilde{P}_{10}$ cualquiera, observe que se formen los siguientes ciclos:



$$C_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$C_2 = (x_2, x_3, x_4, x_6, x_7)$$
$$C_3 = (x_7, x_6, x_4, x_5, x_8)$$

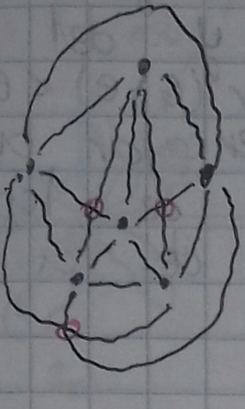
Pero entonces x_{10} deberá estar al interior de alguno de estos o por fuera de los ciclos. Pero entonces en caso que x_{10} este por fuera de los ciclos deberá crutar una vez para conectar con x_6, igualmente en caso de estar al interior de C_1. En caso de estar en C_2 o C_3 crotará una vez para llegar a x_1. Luego x_{10} induce en cualquier caso un cruce.



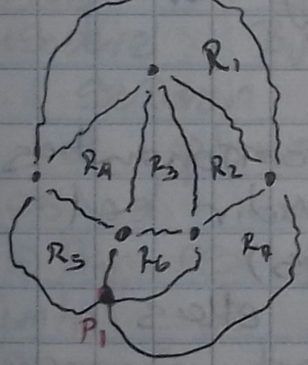
De manera análoga, en cualquier caso x_9 induce un cruce para conectar con x_3 o x_6. Luego $2 \leq cr(P_{10})$ y por lo tanto $cr(P_{10}) = 2$.

ⓓ Por el encaje mostrado se tiene que $cr(K_6) \leq 3$. Por otro lado, como K_5 es subgráfica de K_6 entonces $1 = cr(K_5) \leq cr(K_6)$, de la mismo observación de que K_5

es subgráfica de K_6 se puede afirmar que a partir de un encaje de K_5 se obtiene uno para K_6.



Pero entonces, en el encaje de K_5 hay 8 regiones y la sexta vértice x_6 deberá estar en alguna de estas. Pero en las regiones de la 1 a la 7 siempre hay dos vértices de K_6 que están por fuera de las regiones, lo cual genera dos cruces adicionales. En el caso que x_6 este en la región 8, P_1 permite delimitar una región en la cual hay dos vértices interos y por lo tanto se tiene que



en cualquier caso se generan al menos dos cruces y por lo tanto es posible concluir que $cr(K_6) = 3$.

10.1.10 Sea G una gráfica que es transitiva por aristas y tiene al menos un cruce, $cr(G) > 0$. Sea e_0 una de las aristas que da origen al cruce en el encaje $\tilde{G}$.

Luego se tiene que al considerar $\tilde{G} \setminus \tilde{e}_0$ esta gráfica cumple que $cr(\tilde{G} \setminus \tilde{e}_0) = cr(\tilde{G}) - 1$. Luego por lo tanto $cr(G \setminus e_0) < cr(G)$. Ahora, teniendo en cuenta que

TEMA FECHA

Para cualquier otra arista $e \in E(G)$ existe un isomorfismo, H, tal que $H(e) = e_0$. y componiendo los isomorfismos H y del encaje se puede concluir que $cr(G \setminus e) < cr(G)$ ya que esta composición permite encajar a e en el plano y que sea una de las aristas involucradas en el cruce de la gráfica.

Sección 2.

6.2.1. $\Rightarrow$) Suponga que G es planar y sea B un bloque de G. Luego es posible del encaje $\tilde{G}$ de G obtener un encaje $\tilde{B}$ que corresponde a B, esto del hecho que B es subgráfica de G y $\tilde{G}$ es isomorfo a G.

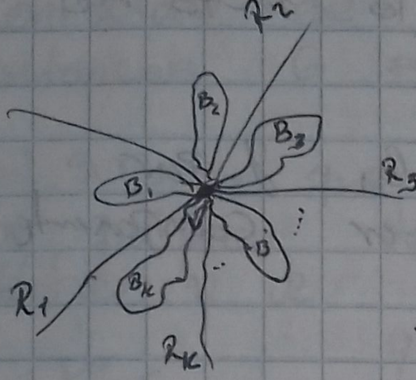
$\Leftarrow$) Suponga que la gráfica tiene P componentes conexas, luego es posible dividir el plano en P regiones (franjas) horizontales y en cada una de ellas encajar cada componente. Luego es necesario considerar el encaje para cada componente conexa.

Para validar la afirmación para una componente conexa se procede por inducción, sobre el número de vertices de separación.

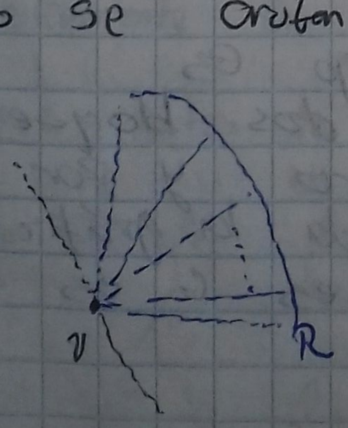
Sea G_0 una componente que solo tiene un vértice de separación y que está

TEMA FECHA

separado en k bloques, luego es posible dividir el plano en k regiones a partir de un punto, en cada una de estas regiones se ubica un bloque. Note que entre regiones no hay cruces dado que los bloques se cruzan únicamente en el vértice de separación.



Suponga entonces que es posible encajar gráficas en el plano con q vértices de separación y sea G_1 una gráfica con $q+1$ vértices de separación. Tome una vértice v que es de separación y considere $\mathcal{B}_v$ el conjunto de bloques que se separan en v. Luego es posible encajar en el plano a $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_v \cup \{B_0\}$ en donde $\mathcal{B}$ es el conjunto de bloques de G_1 y $B_0 \in \mathcal{B}_v$; es posible hacer esto ya que el conjunto de bloques $\tilde{\mathcal{B}}$ tiene q vértices de separación, teniendo en cuenta que dos bloques solo se cruzan en una vértice.



observe que la vértice v quedo encajada en el plano y por lo tanto existe una porción del plano alrededor de v que no tiene encajado vértices o aristas de $\tilde{\mathcal{B}}$. Dicha porción la puedo dividir a su

Vet en $|B_v|-1$ regiones y en cada una de estas encajar las bloques de B_v, observe que B_0 ya estaba encajado y por lo tanto no es necesario volver a encajarla.

Luego se tiene un encaje para G_1 y por inducción es posible encajar cualquier componente con q vértices de separación

Concluyendo así la afirmación.

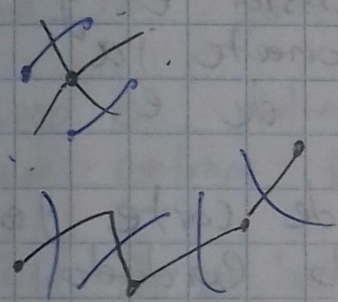
b) Por definición si G es una gráfica minimal no planar se tiene que para cada $e \in E(G)$ $G \setminus e$ es planar. Luego si G tiene bucles o multiaristas es posible retirarlas y obtener una gráfica con menos aristas, por lo tanto planar, y de esta encajar las multiaristas trazando desplazamientos del encaje L para la arista que no fue retirada y para los bucles tomando una región alrededor del vértice en la cual no haya nada del encaje. Por lo tanto G es simple.

Suponga que G es separable, luego es posible separar la gráfica en dos bloques y encajar cada uno en el plano y por el punto anterior encajar toda la gráfica. Lo cual es contradictorio, entonces G es no separable.

10.2.4. $\Rightarrow$ Sea G una grafica planar luego

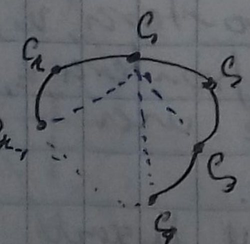
Se tiene que G^* es plana y por lo tanto G^{**} es conexa, como $G^{**} \cong G$ y la conexidad se respeta por isomorfismos entonces G es conexa.

$\Leftarrow$) Suponga que G es conexa luego al considerar su gráfica dual G^* se tiene que cada vértice v de G queda dentro de la región que determinan las aristas que parten de v, por ser G conexa se puede garantizar que al menos tiene una arista. Por otro lado, para cualesquiera vértices v_1, v_2 de G existe una trayectoria entre ellos y esto permite afirmar que en las caras de G^* queda únicamente un vértice de G.

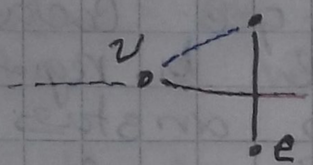


Luego se tiene que las caras de G^* están dadas por los vértices de G. y por otro lado las aristas de G cruzan las aristas de G^* y conectan las caras, así que G^{**} es basicamente G.

10.2.5. Antes de comenzar, observe que si C es un ciclo de longitud mayor a 3 $C = (c_1, c_2, \dots, c_k)$, es posible triangular el ciclo de la siguiente manera, trace aristas desde c_1 hasta $c_3, \dots, c_{k-1}$, de aquí obtiene una triangulación para un ciclo.



Luego considere $\tilde{G}$ un encaje de la gráfica en el plano. observe que para cualquier vértice de $\tilde{G}$ es posible agregar al menos una arista sin generar cruces, Por el hecho que $n \geq 3$, la gráfica es conexa y si supone que para cualquier arista que agrege debe generar un cruce, entonces debe pasar por encima de una arista e y entonces simplemente conecte la vértice a un extremo de e.



Luego para comentar, tome cada arista de corte y conecte uno de sus extremos a una tercera vértice teniendo cuidado de no agregar multi-aristas ni generar cruces. Repita este procedimiento hasta no tener aristas de corte.

Luego procedi a triangular los ciclos que tenga el gráfico. En este punto el interior de la gráfica esta totalmente triangulado y resta triangular el borde más exterior, para esto repita el siguiente procedimiento en caso que la cara tenga más de 3 aristas en el borde.

- Seleccione un vértice cualquiera de la frontera, v_0, y busque el tercer vértice sobre la frontera, v_2, en el sentido de las manecillas, trace una arista entre los dos vértices $v_0 v_2$.

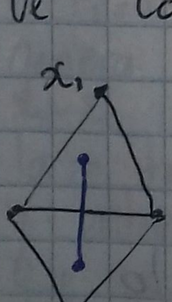
Repita el proceso comenzando en V_2 y buscando la tercera vértice en el sentido de las manecillas, V_3

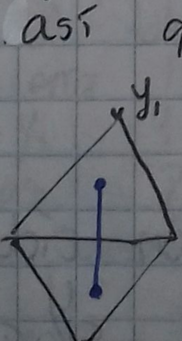
y trace V_2, V_3. Siga así hasta que no pueda encontrar una tercera vértice, en este caso ya recorrió la frontera y regreso a V_0. Repita el proceso pero sobre la nueva frontera que generó.

observe que este proceso no genera cruces ya que las aristas que se agregan se añaden en lo exterior de la gráfica y allí hay suficiente espacio para no generar cruces.

Luego se obtiene una triangulación de la cual se puede extraer la gráfica original por expansión.

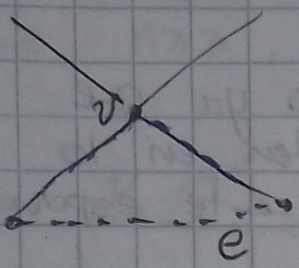
p.2.6 Por el hecho que G es triangulación y el teorema 10.11 entonces G^* es cúbico y plano. También como G es simple, entonces no tiene multi-aristas y por lo tanto G^* tampoco, ahora como cada cara de G tiene grado 3 esto implica que G no tiene aristas de corte ya que la cara sobre la cual incida la arista de corte necesitaría de un bucle en G para lograr el grado exacto de 3. Como G es simple, no hay bucles y por lo tanto no hay aristas de corte; así que G^* es simple.

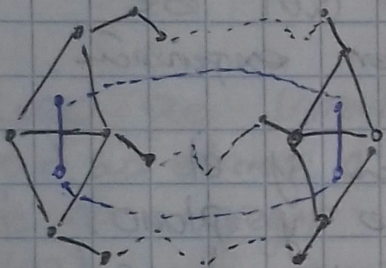




Sean e_0^* y e_1^* dos aristas de la gráfica dual, luego los vértices de e_0^* están dentro de un triángulo, diga x_1, x_2 y y_1, y_2. Suponga que todos son distintos.

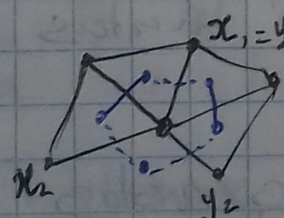
Como G es conexo existe una trayectoria $P_1 = (x_1, \dots, y_1)$ y una $P_2 = (x_2, \dots, y_2)$ que conectan los vértices, luego se puede suponer que las trayectorias son disyuntas, ya que en caso que crucen por un vértice en común v entonces existe una arista que hace parte de la triangulación, diga e, tal que permite hacer disyuntas las trayectorias.

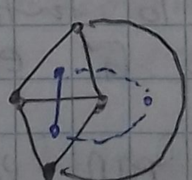




Luego usamos los triángulos de la parte encerrada por las trayectorias y teniendo en cuenta que $z_1 = z_2$ o existe una trayectoria que une a z_1 y z_2 entonces es posible construir un ciclo que contenga las aristas e_0^* y e_1^*.

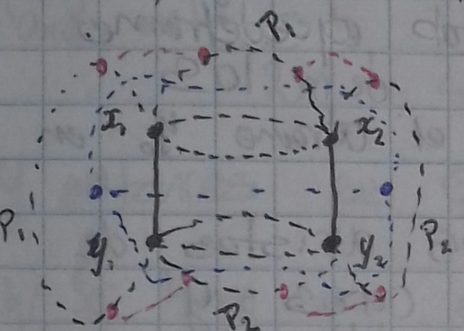
Ahora, si una x es igual a y, entonces se tiene una situación como la abajo mostrada, e igual para cuando dos de los cuatro triángulos coinciden.





En cualquier caso se obtiene un ciclo que contiene a las dos aristas y por lo tanto la gráfica es no separable

10.2.7. Como la gráfica G es 3-conexa se tiene que no hay aristas de corte y por lo tanto cualquier encaje $\widehat{G}$ no tiene en G^* bucles. Por otro lado como G es simple no tiene multiaristas y en G^* tampoco las hay.

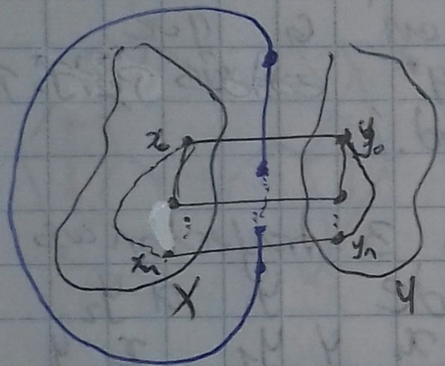


Sean entonces G^* y f^*, g^* vértices en ella, luego se puede garantizar que existen dos aristas en G que dan a f^* y g^*, además diferentes por la 3-conexidad.

Luego por la 3-conexidad existen 3 trayectorias disyuntas de x_1 a x_2 y 3 de y_1 a y_2. y 2 trayectorias disyuntas entre x_1 y y_1, x_2 y y_2. Adicional, como las aristas separan las caras f^* y g^* entonces al menos una trayectoria entre x_1 y y_1 encierra la vértice f^* y análogo una encierra a g^* diga, $P_1=(x_1,\dots,y_1)$ $P_2=(x_2,\dots,y_2)$.

También observe que existen trayectorias $\mathcal{P}_1=(x_1,\dots,x_2)$ y $\mathcal{P}_2=(y_1,\dots,y_2)$ tales que el ciclo que se genera encierra las demás trayectorias entre x_1-x_2 y y_1-y_2 y entonces es posible conectar las trayectorias $P_1-\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_1-P_2$, $P_2-\mathcal{P}_2$, $P_1-\mathcal{P}_2$. y entonces construir 3 trayectorias disyuntas que unan f^* y g^* usando las regiones que se forman.

10.2.9. Sea B una unión de G. Si $|B|=1$ entonces se tiene una arista de corte y por lo tanto B genera un bucle.
Suponga entonces que $|B|>1$, luego. Por la caracterización de las uniones se tiene que X e Y son conexos y entonces fijando $b \in B$ es posible conectar el extremo x_0 en X a los demás extremos de las aristas de B, análogo para el extremo y_0 en Y de b.



luego entre las aristas de B se generan caras y teniendo en cuenta la cara que contiene la unión B entonces se genera un ciclo.

Sección 3.

10.3.1. Suponga que $cr(G)=0$ entonces la gráfica es planar y cumple que $m \leq 3n-6$ luego $m-3n+6 \leq cr(G)$.

Suponga que para cada gráfica con q cruces, G_0, se cumple que $m-3n+6 \leq cr(G_0)$.

Considere G una gráfica que tiene $q+1$ cruces y sea $\tilde{e}_0$ una de las aristas, en un encaje $\tilde{G}$ con $cr(\tilde{G}) = q+1$, luego se tiene que $\tilde{G} \setminus \tilde{e}_0$ tiene q cruces y entonces cumple que $m_0 - 3n_0 + 6 \leq cr(\tilde{G} \setminus \tilde{e}_0)$ pero como $m_0 = m-1$ y $n_0 = n$ entonces

TEMA | FECHA

$m-1-3n+6 \leq q$ y entonces $m+6-3n \leq q+1 = cr(\overline{G})$
Luego se tiene la afirmación.

10.3.2. Se tiene que la gráfica tiene $3 \leq n$. Luego como el menor de los ciclos tiene longitud k entonces $d(f) \geq k$ para cada cara, entonces

$$2m = \sum_{f \in F(\overline{G})} d(f) \geq k f(\overline{G}) = k(m-n+2)$$

y entonces se sigue que $k(n-2) \geq m(k-2)$.

b) Se tiene que en Petersen el ciclo menor tiene longitud $5=k$, pero $(k-2)(m) = 3(15) \nleq 5(8)$ entonces no puede ser planar.

10.3.4 Sea G y $\overline{G}$ una gráfica y su complemento, luego si m_1 y m_2 son los tamaños, entonces $m_1 + m_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ con n el orden de G y $\overline{G}$.

Luego al suponer que G y $\overline{G}$ son planares entonces se deberá cumplir que $m_1 + m_2 \leq 2(3n-6)$ entonces $n(n-1) \leq 4(3n-6)$; $n^2 - n \leq 12n - 24$ por lo tanto el orden de la gráfica deberá cumplir la desigualdad. Por lo tanto si se supone que $n = 11+k$ entonces se deberá cumplir que $k^2 + 9k + 2 \leq 0$.

Entonces para $k \geq 0$ no es posible cumplir la última desigualdad. Concluyendo que para $-8 \leq k \leq -1$ se cumple la desigualdad, es decir para gráficas de orden $3, 4, \ldots, 10$ y para gráficas de orden

menor a 3 siempre son planas. Entonces se tiene la afirmación. Si el orden de G es mayor a 11 y G es plana entonces su complemento no es plana.
b)

Secci— 1.

10.1.1. Suponga que G_1 y G_2 son planas tales que su intersecci— es K_2. Considere un 2-libro, sobre la espina pinte la intersecci— de G_1 y G_2. Y sobre cada hoja pinte cada gráfica. Luego el 2-libro es posible encajarlo en el plano y así se tiene que $G_1 \cup G_2$ es planar.

Observe que es necesario tomar encajes $\tilde{G}_1$ y $\tilde{G}_2$ tales que la intersecci— esté en la cara más exterior.

Sección 5.

10.5.1. Muestre que una gráfica simple tiene un K_3-menor sii contiene un ciclo.

$\Rightarrow$) Si la gráfica tiene un K_3-menor entonces considere que $OP_1, OP_2, \ldots, OP_n$ es la sucesión de operaciones que se le hacen a G para obtener el menor y proceda de la siguiente manera, arranque de la copia isomorfa a K_3 y se probara por inducción que realizar las operaciones inversas conserva el ciclo. Si no hay operaciones, entonces $G \cong K_3$ y tiene un ciclo. Si solo hay una operación esta puede ser agregar una vértice o descontraer una arista. en cualquier caso se conserva el ciclo de longitud 3/4 y entonces G tiene un ciclo.

Suponga que al invertir las operaciones $OP_n^{-1}, OP_{n-1}^{-1}, \ldots OP_{i+1}^{-1}$ se tiene un ciclo. Considere OP_i^{-1}, luego:

- Si OP_i^{-1} es agregar una arista, por inducción se tenia que había un ciclo y entonces no se des el ciclo con agregar una arista.

- Si OP_i^{-1} es agregar un vértice tamposco se elimina el ciclo.

- Si OP_i^{-1} es descontraer una arista, si la arista que se descontrae es ajena al ciclo, aún se puede afirmar que hay un ciclo. En el caso que se descontraiga una arista sobre una vértice del ciclo, entonces al invertir la operación se obtiene un ciclo de longitud uno más.

En cualquier caso se obtiene un ciclo al invertir las operaciones y por inducción, entonces en G hay un ciclo.

(⇐) Suponga que G tiene un ciclo entonces elimine todas las aristas y vértices que no tienen que ver con el ciclo y luego contraiga aristas del ciclo hasta obtener una copia isomorfa de K_3. Observe que al ser G simple la longitud del ciclo en G es mayor o igual a 3.

10.5.2. Se muestra paso a paso con las operaciones