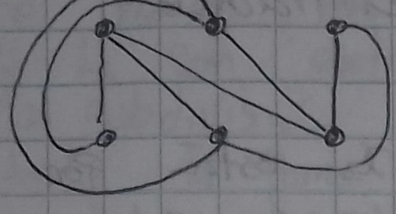
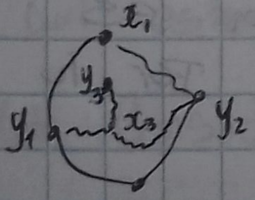
Capítulo 10

10.1.1. Considere la siguiente subgráfica de $K_{3,3}$.



observe que es una subgráfica por la eliminación de una arista. y cualquier otra subgráfica de $K_{3,3}$ por la eliminación de una arista es isomorfa a esta. De esta observación es posible indicar que cualquier subgráfica de $K_{3,3}$ es planar ya que se obtiene como subgráfica de la ya mostrada o es la gráfica.

(b) Sea $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ la bipartición de $K_{3,3}$. Luego, se tiene que x_i conecta con cada y_j para $1 \le i, j \le 3$. Por lo tanto y sin perdida de generalidad puedo suponer que x_1, y_1, x_2, y_2 forman un ciclo C, y por lo tanto si $K_{3,3}$ fuera plana y G es un encaje en el plano, se tienen las siguientes situaciones,



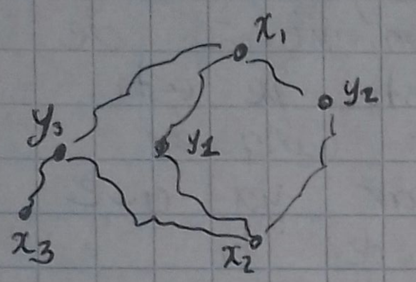
C divide el plano en dos regiones y por lo tanto x_3 y y_3 están en algunas de las regiones pero no es posible que esten en regiones distintas, ya que la arista x_3y_3 cruzaría a C contradiciendo la planaridad de G.

Caso 1: en este caso tanto x_3 como y_3 están en el interior de C. Luego el ciclo C_1, x_1, y_1, x_3, y_2, x_1 divide el interior de C

TEMA FECHA

en dos y por lo tanto o x_1 arista x_1y_3 o x_2y_3 cruzan a C_1 y esto contradice la planaridad de G.

Caso 2: se tiene que y_3 como x_3 están por fuera de C y entonces sin pérdida de generalidad se puede suponer que y_1 queda al interior del ciclo $y_3x_1y_2x_2 = C_2$. En caso que x_3 esté en el exterior de C_2, luego x_3y_1 cruza a C_2 y esto contradice la planaridad de G. En el caso que x_3 este en el interior de C_2 esto implica que x_3y_2 cruza el ciclo interior $x_1y_3x_2y_1$.



En cualquier caso se contradice que G es planar, por lo tanto $K_{3,3}$ no puede ser planar.

10.1.2. Suponga que el grafo G tiene al menos una arista. En caso contrario, la gráfica es planar y no tiene subdivisiones por lo cual cumple el teorema.

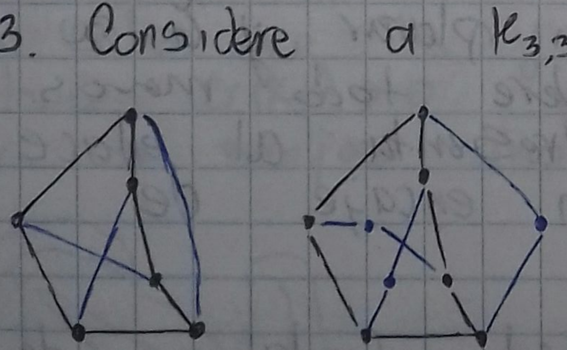
$\Rightarrow$) Sea G' el encaje de la gráfica en el plano y sea G_0 una gráfica obtenida de G por medio de subdividir la arista $\tilde{e} = xy$, luego en el encaje existe una curva L tal que tiene por extremos a x e y y representa la arista $\tilde{e}$, seleccione un punto no extremo sobre L

TEMA FECHA

y marque un vértice x_0 en este punto. Luego se tienen dos curvas L_1 con extremos x, x_0 y L_2 con extremos x_0, y tales que encajan la subdivisión de $\tilde{e}$ en el plano, observe que tanto L_1 como L_2 no cortan las demás aristas encajadas de G', ya que entonces contradice que G' era un encaje de G. Luego se tiene un encaje de G_0. Y repitiendo la idea un numero finito de veces se puede obtener un encaje para cualquier subdivisión de G.

$\Leftarrow$) Suponga que G_0 es una subdivisión de la gráfica en la arista $\tilde{e} = xy$. Por hipótesis existe un encaje G_0' y entonces existen unas curvas L_1 y L_2 con extremos x, x_0 y x_0, y respectivamente. y son tales que no cortan ninguna otra arista o vértice de G_0. Por lo tanto se puede considerar la curva $L_1 \cup L_2 = L$ que tiene por extremos a x, y; básicamente remplazar la vértice x_0 por un punto. Con lo cual este será un encaje para G.

10.1.3. Considere a $K_{3,3}$ de la siguiente manera:

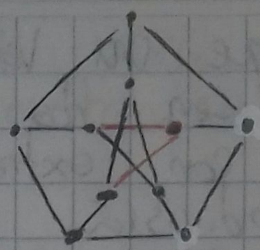


$K_{3,3}$ Subd $(K_{3,3})$

Luego sobre las aristas azules realice la subdivisión de las aristas para obtener la gráfica de la derecha.

TEMA FECHA

Esta es una gráfica que resulta ser subgráfica de Petersen por la eliminación de las aristas y la vértice marcados en rojo.



(b) Si G es una gráfica y G_0 es subgráfica de G. Si G es planar entonces G_0 también es planar. Sea $\tilde{G}$ un encaje de la gráfica en el plano, luego es posible de ester encaje considerar únicamente aquellos curvas y vértices que están en G_0. Así es posible obtener un encaje de G_0 en el plano, y decir que es planar.

Por lo anterior Petersen tiene una subgráfica que no es planar, Por lo tanto la gráfica completa tampoco es planar.

El hecho que la subgráfica de Petersen no es planar se sigue del punto 2.

10.1.4. Sea G una gráfica planar y $\tilde{G}$ su encaje, de $\tilde{G}$ considere todo menos la curva L que representa al enlace e, luego $\tilde{G} \setminus L$ es un encaje de $G \setminus e$.

b) Considere e una arista cualquiera de $K_{3,3}$. Luego $K_{3,3} \setminus e$ es planar según lo observado en el punto 1. Pero