

Osnove obradbe signala: Spektar

Tomislav Petković

Sveučilište u Zagrebu

listopad 2022.



Rastav signala i spektar

U prošloj cjelini smo razmatrali kako signale $x(t)$ i $x[n]$ možemo predstaviti preko **baznih funkcija** kao prebrojive linearne kombinacije

$$x(t) = \sum_k s_k \cdot \phi_k(t) \quad \text{i} \quad x[n] = \sum_k s_k \cdot \phi_k[n], \quad (1)$$

ili kao neprebrojive kombinacije

$$x(t) = \int_{\kappa} s(\kappa) \cdot \phi(t, \kappa) d\kappa \quad \text{i} \quad x[n] = \int_{\kappa} s(\kappa) \cdot \phi(n, \kappa) d\kappa. \quad (2)$$

Niz brojeva s_k ili funkciju $s(\kappa)$ koji mjere doprinos baznih funkcija smo zvali **spektar**.

U ovoj cjelini ćemo razmotriti kako možemo **interpretirati** spektar.

Interpretacija spektra

Želimo li interpretirati spektar moramo ustanoviti značenje parametara k ili κ .

To značenje parametara k i κ je neraskidivo vezano s odabranim baznim funkcijama.

Drugim riječima rečeno, dok su bazne funkcije $\phi_k(\cdot)$ ili $\phi(\cdot, \kappa)$ neodređene ne možemo interpretirati spektar.

Kako moramo odabrati bazne funkcije fokusirati ćemo se na interpretaciju **Fourierovog spektra** u kojem su bazne funkcije eksponencijale, a nakon toga ćemo kratko razmotriti interpretaciju spektra u valićnim transformacijama.

Parametrizacija eksponencijalne funkcije u Fourierovoj analizi

Eksponencijalne funkcije čisto imaginarnog eksponenta koje se koriste u Fourierovoj analizi uobičajeno parametriziramo na dva povezana načina.

Neka su a i b realni brojevi takvi da vrijedi $a = 1/b$.

Onda vremenski kontinuirane i diskretne eksponencijale možemo parametrizirati kao

$$\phi_a(t) = \phi(t, a) = e^{jat} \quad \text{i} \quad \phi_a[n] = \phi(n, a) = e^{jan} \quad (3)$$

ili kao

$$\phi_b(t) = \phi(t, b) = e^{jt/b} \quad \text{i} \quad \phi_b[n] = \phi(n, b) = e^{jn/b} \quad (4)$$

Parametrizacija eksponencijalne funkcije u Fourierovoj analizi

Dakle, eksponencijalna funkcija čisto imaginarnog eksponenta ima eksponent koji je sastavljen od produkta nezavisne varijable, tipično vrijeme t ili korak n , i parametra $a = 1/b$.

Kod parametrizacija oblika

$$\phi_a(t) = \phi(t, a) = e^{jat} \quad \text{i} \quad \phi_a[n] = \phi(n, a) = e^{jan} \quad (5)$$

sve parametre proporcionalne s a nazivamo **frekvencijama**.

Slično tome, kod parametrizacija oblika

$$\phi_b(t) = \phi(t, b) = e^{jt/b} \quad \text{i} \quad \phi_b[n] = \phi(n, b) = e^{jn/b} \quad (6)$$

sve parametre proporcionalne s b nazivamo **periodima** ako je nezavisna varijabla **vrijeme**, te **valnim duljinama** ako je nezavisna varijabla **prostor**.

Fourierove transformacije u obradbi signala

U obradbi signala koristimo više Fourierovih transformacija:

1. vremenski kontinuirana Fourierova transformacija ili CTFT,
2. vremenski diskretna Fourierova transformacija ili DTFT,
3. vremenski kontinuirani Fourierov red ili CTFT,
4. vremenski diskretni Fourierov red ili DTFT, i
5. diskretna Fourierova transformacija u N točaka ili DFT_N .

Interpretacija spektra za sve nabrojane transformacije je gotovo pa ista pa ćemo najdetaljnije razmotriti samo CTFT, a zatim ćemo komentirati glavne razlike za DTFT i DFT_N .

Vremenski kontinuirana Fourierova transformacija

Vremenski kontinuiranom Fourierovom transformacijom (CTFT) vremenski signal $x(t)$ predstavljamo preko neprebrojivo mnogo eksponencijalnih funkcija oblika

$$\phi(t, \Omega) = e^{j\Omega t} \quad (7)$$

kao

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\Omega) \cdot \phi(t, \Omega), d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (8)$$

Parametar Ω je kružna **frekvencija** koju mjerimo u [rad/s].

Alternativne parametrizacije su obična **frekvencija** $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ koju mjerimo u [Hz], ili pak period $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ kojeg mjerimo u [s].

Parametrizacija i vizualizacija spektra

Spektar $X(\cdot)$ vremenskog signala $x(t)$ prema tome možemo prikazati kao funkcije bilo kojeg od ta tri parametra:

- ▶ kružne frekvencije Ω kao $X_1(\Omega)$,
- ▶ obične frekvencije f kao $X_2(f)$, ili
- ▶ perioda T kao $X_3(T)$.

No želimo li vizualizirati spektar $X(\cdot)$ onda moramo uočiti da spektar poprima kompleksne vrijednosti, odnosno

$$X(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (9)$$

pa prema tome vizualizacija mora biti prikazana kao graf **kompleksne funkcije realne varijable**.

Kompleksna funkcija realne varijable

Kompleksnu funkciju realne varijable $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ možemo prikazati preko njenog **realnog** i **imaginarnog** dijela kao

$$f(t) = \text{Re}[f(t)] + j\text{Im}[f(t)] \quad (10)$$

ili preko njene **apsolutne vrijednosti** i **kuta** kao

$$f(t) = |f(t)|e^{j\angle f(t)}, \quad (11)$$

gdje su sve četiri komponente funkcije realne varijable, odnosno

$$\text{Re}[f(t)], \text{Im}[f(t)], |f(t)|, \angle f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (12)$$

Prema tome kada vizualiziramo Fourierov spektar moramo nacrtati dva grafa realnih funkcija, bilo apsolutnu vrijednost i kut bilo realni i imaginarni dio.

Kompleksna funkcija realne varijable

Apsolutnu vrijednost i kut iz realnog i imaginarnog dijela računamo kao:

$$|f(t)| = (\operatorname{Re}[f(t)])^2 + (\operatorname{Im}[f(t)])^2 \quad (13)$$

i

$$\angle f(t) = \operatorname{atan2}(\operatorname{Im}[f(t)], \operatorname{Re}[f(t)]). \quad (14)$$

Realni i imaginarni dio iz apsolutne vrijednosti i kuta računamo kao:

$$\operatorname{Re}[f(t)] = |f(t)| \cos(\angle f(t)) \quad (15)$$

i

$$\operatorname{Im}[f(t)] = |f(t)| \sin(\angle f(t)). \quad (16)$$

Vizualizacija ili crtanje spektra

Kada crtamo spektar $X(\Omega)$ u obradbi signala uobičajeno crtamo

- ▶ apsolutnu vrijednost spektra $|X(\Omega)|$ ili **amplitudni spektar** i
- ▶ kut spektra $\angle X(\Omega)$ ili **fazni spektar**,

no ako želimo možemo crtati i

- ▶ realni dio spektra $\text{Re}[X(\omega)]$ i
- ▶ imaginarni dio spektra $\text{Im}[X(\Omega)]$.

Spektar vremenski kontinuiranog signala

Neka je zadan vremenski signal $x(t) = e^{-t} \mu(t)$.

Prema tablicama CTFT-a njegov spektar je $X(\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega}$.

Računanjem dobivamo:

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad (17)$$

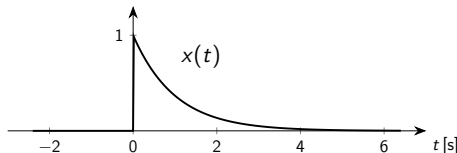
$$\angle X(\Omega) = \operatorname{atan2}\left(\frac{-\Omega}{1 + \Omega^2}, \frac{1}{1 + \Omega^2}\right) = -\operatorname{arctg}(\Omega) \quad (18)$$

$$\operatorname{Re}[X(\Omega)] = \frac{1}{1 + \Omega^2} \quad (19)$$

$$\operatorname{Im}[X(\Omega)] = \frac{-\Omega}{1 + \Omega^2} \quad (20)$$

Spektar vremenski kontinuiranog signala

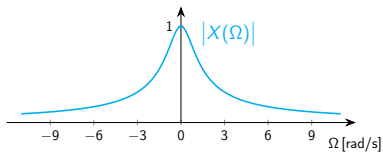
Graf signala $x(t) = e^{-t} \mu(t)$ je:



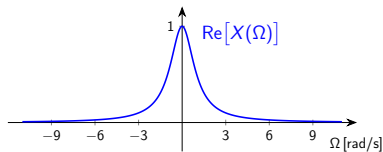
Vidimo da se signal osim oko skoka u $t = 0$ sporo mijenja pa stoga očekujemo da u spektru dominiraju niske frekvencije koje odgovaraju sporijim eksponencijalama.

No kako signal sadrži skok u $t = 0$ očekujemo da spektar sadrži sve frekvencije (kasnije ćemo dati opravdanje), odnosno nema područja frekvencija na kojima je spektar jednak nuli.

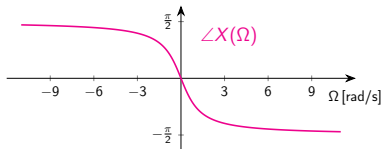
Spektar vremenski kontinuiranog signala



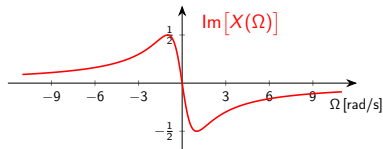
amplitudni spektar $|X(\Omega)|$



realni dio spektra $\text{Re}[X(\Omega)]$



fazni spektar $\angle X(\Omega)$



imaginarni dio spektra $\text{Im}[X(\Omega)]$

Logaritamski prikaz

Spektar se može prikazati u **logaritamskoj skali** bilo po zavisnoj (npr. amplituda, y os je logaritamska) bilo po nezavisnoj varijabli (frekvencija, x os je logaritamska).

Osim takvog logaritamskog prikaza osi u praksi se često amplitudni spektar iskazuje u **decibelima**, oznaka **[dB]**, gdje umjesto logaritamskog prikaza amplitudne osi računamo $A_{\text{dB}}(\Omega)$ kao

$$A_{\text{dB}}(\Omega) = 20 \log_{10} |X(\Omega)|, \quad (21)$$

kojeg onda prikazujemo na standardnoj osi.

Logaritamski prikaz se koristi kada frekvencije i amplitude pokrivaju nekoliko različitih redova veličine.

Primjer tri parametrizacije spektra

Neka je opet zadan vremenski signal $x(t) = e^{-t} \mu(t)$.

Znamo da je njegov amplitudni spektar $|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$.

Osim preko kružne frekvencije Ω taj amplitudni spektar možemo prikazati preko **frekvencije** f i preko **perioda** T . Vrijedi:

$$X_1(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad (22)$$

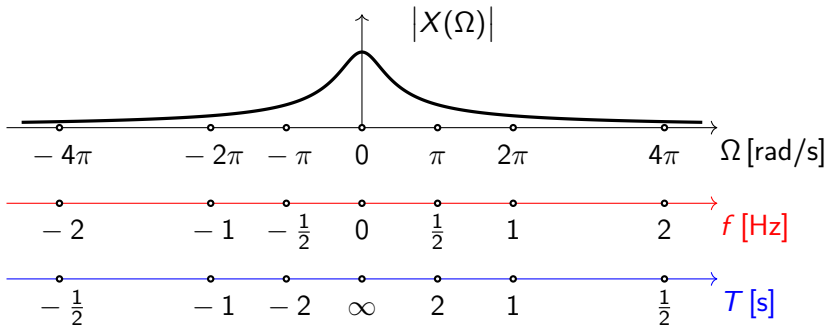
$$X_2(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2}} \quad (23)$$

$$X_3(T) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 T^{-2}}} \quad (24)$$

Odnos osi spektralne nezavisne varijable

Vrijedi $\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ i $X(\Omega) = X_1(\Omega) = X_2(\frac{\Omega}{2\pi}) = X_3(\frac{2\pi}{\Omega})$.

Sada možemo skicirati kako se tri osi Ω , f i T međusobno odnose:



Što je negativna frekvencija? Negativni period? Beskonačni period?

Čisto realni signali

U praksi se uvijek analiziraju isključivo spektri realnih signala, dakle $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Spektri realnih signala su dodatno ograničeni jer kombinacija eksponencijalnih funkcija čisto imaginarnog eksponenta mora biti takva da se poništi imaginarni dio.

Pokazati ćemo da su za realne signale vrijednosti spektra za negativne frekvencije (ili za negativne periode) u potpunosti određene vrijednostima spektra za pozitivne frekvencije (ili za pozitivne periode).

Zato se često crta spektar samo za pozitivne frekvencije.

Da bi to što jednostavnije pokazali uvodimo **parne** i **neparne** signale.

Parne i neparne funkcije

Funkcija $f(t)$ je **parna** ako vrijedi $f(t) = f(-t)$.

Funkcija $f(t)$ je **neparna** ako vrijedi $f(t) = -f(-t)$.

Svaku funkciju $f(t)$ možemo prikazati kao zbroj njene parne komponente $f_p(t)$ i njene neparne komponente $f_n(t)$, dakle

$$f(t) = f_p(t) + f_n(t), \quad (25)$$

gdje je

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad \text{i} \quad f_n(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad (26)$$

Rastav spektra realnog signala

Za spektar realnog signala $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sada vrijedi:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \text{CTFT}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_p(t) + x_n(t)) (\cos(\Omega t) - j \sin(\Omega t)) dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) \cos(\Omega t) dt}_{=\text{Re}[X(\Omega)]} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) \sin(\Omega t) dt}_{=-\text{Im}[X(\Omega)]} \end{aligned}$$

(Integral neparne funkcije preko cijele domene iščezava.)

Svojstva spektra realnog signala

Analizom parnosti i neparnosti dobivenog izraza sada jednostavno dokazujemo sljedeće:

- ▶ Realni dio spektra $\text{Re}[X(\Omega)]$ je parna funkcija.
- ▶ Imaginarni dio spektra $\text{Im}[X(\Omega)]$ je neparna funkcija.
- ▶ Spektar realnog parnog signala je čisto realni.
- ▶ Spektar realnog neparnog signala je čisto imaginarni.
- ▶ Amplitudni spektar $|X(\Omega)|$ je parna funkcija.
- ▶ Fazni spektar $\angle X(\Omega)$ je neparna funkcija.

Navedene tvrdnje vrijede za četiri klasične Fourierove transformacije (CTFT, DTFT, CTFS i DTFS).

Tvrdnje vrijede i za DFT_N uz definiranje parnosti i neparnosti na periodčkom proširenju signala konačnog trajanja (samostalni rad).

Spektar čiste (ko)sinusoide

Razmotrimo spektar signala $x(t) = A \cos(\Omega_0 t - \varphi)$.

Prema tablicama transformacije dobivamo:

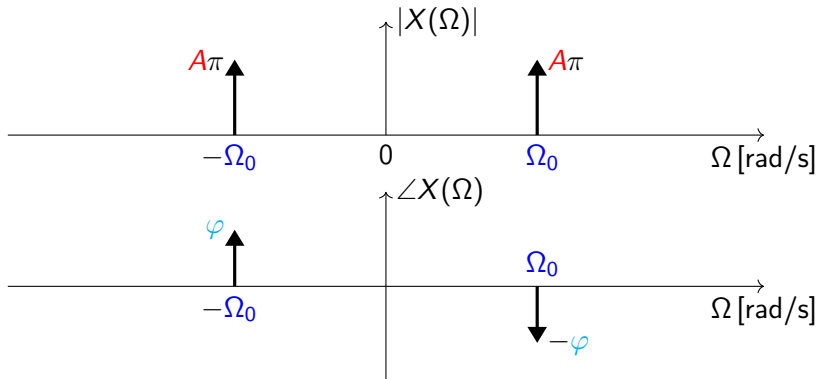
$$\begin{aligned} X(\Omega) &= A \cdot \text{CTFT} \left[\cos(\Omega_0(t - \varphi/\Omega_0)) \right] \\ &= A\pi (\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)) e^{-j\varphi\Omega/\Omega_0} \\ &= A\pi e^{j\varphi} \delta(\Omega + \Omega_0) + A\pi e^{-j\varphi} \delta(\Omega - \Omega_0) \end{aligned}$$

Ovdje napominjemo da npr. kvadrat Diracove funkcije ili umnožak dvije Diracove funkcije **nisu dobro definirane operacije**.

Prema tome kada skiciramo amplitudni ili fazni spektar za $K \delta(\Omega)$ dogovorno u amplitudni spektar upisujemo apsolutnu vrijednost $|K|$, a u fazni spektar upisujemo kut $\angle K$ konstante ispred Diracove funkcije.

Vizualizacija spektra čiste (ko)sinusoide

Za spektar signala $x(t) = A \cos(\Omega_0 t - \varphi)$ ponekad kažemo da je linijski jer sadrži neke vrijednosti samo na dvije diskretne frekvencije:



Dodatna važna svojstva Fourierovih reprezentacija signala

Osim navedenih svojstava spektra realnog signala od posebnog interesa su još dva važna svojstva Fourierovih transformacija koja imaju posljedice i na spektar i na signal:

- ▶ **Gibbsova pojava** (engl. *Gibbs phenomenon*)
- ▶ **princip neodređenosti** (engl. *uncertainty principle*)

Gibbsova pojava je povezana s greškom reprezentacije signala koji sadrže prekide (skokove u amplitudi).

Princip neodređenosti je povezan s ograničenjima lokalizacije energije i/ili snage u obje domene, vremenskoj i spektralnoj.

Gibbsova pojava

Gibbsova pojava opisuje što se događa s Fourierovom reprezentacijom signala oko mjesta prekida (skoka u amplitudi).

Ograničimo li reprezentaciju signala s prekidom tako da ne uzimamo u obzir apsolutno sve eksponencijale, onda se oko mjesta prekida pojavljuju značajne oscilacije čija amplituda se **NE SMANJUJE** s povećanjem broja/količine eksponencijala koje koristimo.

Kažemo da Fourierova reprezentacija signala oko skoka u amplitudi pokazuje **nadvišenje** i **propad**.

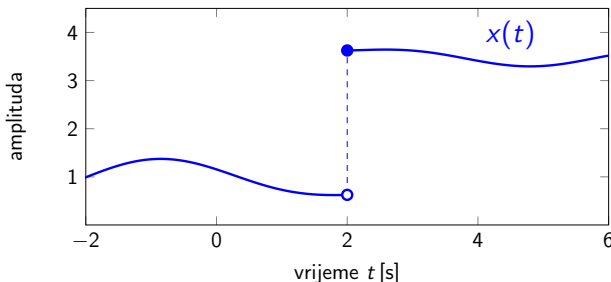
Ako je skok u amplitudi iznosa A onda je očekivana vrijednost **nadvišenja** i **propada** približno $A \cdot 0.089489872236 \dots$ (oko 9% skoka).

Ilustrirajmo to na primjeru.

Primjer Gibbsove pojave

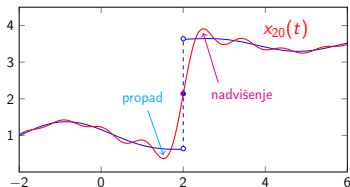
Neka je $x(t)$ sporo promjenjivi signal koji ima prekid u trenutku $t = 2$, i neka je taj prekid skok amplitude iznosa 3, odnosno signal možemo prikazati kao:

$$x(t) = x_{\text{neprekinuti}}(t) + \underbrace{3\mu(t-2)}_{\text{Heavisideova funkcija}}. \quad (27)$$

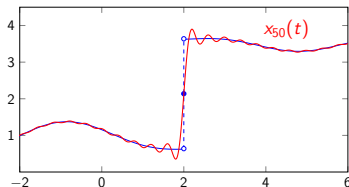


Primjer Gibbsove pojave

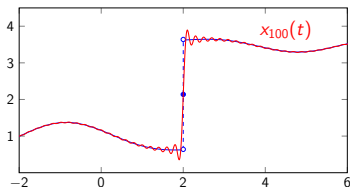
Svaka aproksimacija signala $x(t)$ sadrži **nadvišenje** i **propad** iznosa približno $3 \cdot 9\% \approx 0.27$:



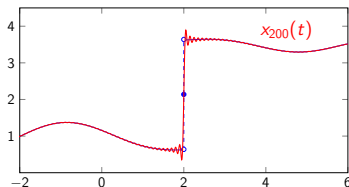
spektar ograničen na $|\Omega| < 40\pi$ (na 20 članova reda)



spektar ograničen na $|\Omega| < 100\pi$



spektar ograničen na $|\Omega| < 200\pi$



spektar ograničen na $|\Omega| < 400\pi$

Posljedice Gibbsove pojave

Računala će zahtijevati da signale reprezentiramo koristeći ograničeni podskup svih mogućih eksponencijala pa prema tome ne možemo izbjeći **nadvišenja** i **propade**.

No zato ih ipak možemo ublažiti, a o tome ćemo više prilikom razmatranja problema filtracije.

Svaki prekid oblika konačnog skoka amplitude možemo modelirati Heavisideovom funkcijom čiji spektar nije ograničen (nema konačni nosač ili potporu), pa sukladno tome svi signali s prekidom neće imati ograničen spektar.

U sljedećoj cjelini ćemo razmatrati postupak očitavanja gdje će glavni uvjet za jednoznačnost biti ograničenost spektra, pa prema tome vremenski kontinuiran signal s prekidom ne možemo dobro predstaviti njegovim uzorcima.

Princip neodređenosti

Princip neodređenosti u Fourierovoj analizi postavlja temeljna ograničenja na istodobnu **lokalizaciju** signala u obje domene, **vremenskoj** i **frekvenckijskoj**.

Razmotrimo što to znači na primjeru jedne (ko)sinusoide poznate frekvencije:

- ▶ Spektar čiste (ko)sinusoide je potpuno koncentriran u samo dvije točke, pozitivnoj i negativnoj frekvenciji te kosinusoide, a izvan tih točaka je nula. Takav spektar je vrlo usko lokaliziran.
- ▶ No zato je u vremenskoj domeni (ko)sinusoida definirana za sve vremenske trenutke, odnosno ne postoji interval izvan kojeg te (ko)sinusoide nema. Takav signal uopće nije lokaliziran.

Da bi iskazali princip neodređenosti prvo definirajmo kako mjerimo lokalizaciju u **vremenu** i u **frekvenciji**.

Lokalizacija u vremenu

Neka je $x(t)$ kvadratno integrabilni signal i neka je

$$\mu_t = \frac{1}{\|x\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |x(t)|^2 dt \quad (28)$$

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{\|x\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu_t)^2 |x(t)|^2 dt \quad (29)$$

μ_t je vremenski centar signala.

Δ_t je vremensko rasipanje signala.

Navedeni izrazi odgovaraju standardnim momentima neke funkcije pa ih možemo interpretirati kao traženje Gausovog zvona devijacije Δ_t centriranog u μ_t koje najbolje opisuje promatrani signal.

Što je Δ_t manji to je signal lokaliziraniji u vremenu.

Lokalizacija u frekvenciji

Neka je $X(\Omega)$ spektar kvadratno integrabilnog signala $x(t)$ i neka je

$$\mu_{\Omega} = \frac{1}{2\pi \|x\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (30)$$

$$\Delta_{\Omega}^2 = \frac{1}{2\pi \|x\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega - \mu_{\Omega})^2 |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (31)$$

μ_{Ω} je **frekvencijski centar** spektra.

Δ_{Ω} je **frekvencijsko rasipanje** spektra.

Navedeni izrazi opet odgovaraju momentima FGV-a pa ih možemo interpretirati kao traženje Gausovog zvona devijacije Δ_{Ω} centriranog u μ_{Ω} koje dobro opisuje promatrani spektar.

Što je Δ_{Ω} manji to je spektar lokaliziraniji u frekvenciji.

Princip neodređenosti

Sada možemo bez dokaza izreći princip nedoređenosti CTFT-a:

Neka je $x(t)$ kvadratno integrabilni signal čije vremensko rasipanje je Δ_t te neka je $X(\Omega)$ njegov spektar s frekvencijskim rasipanjem Δ_Ω . Onda vrijedi

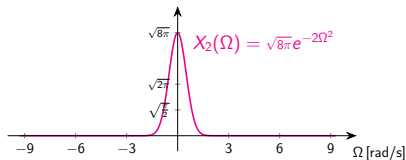
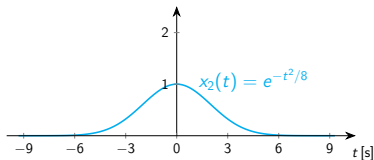
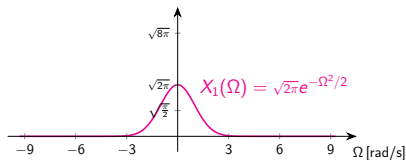
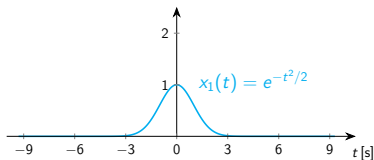
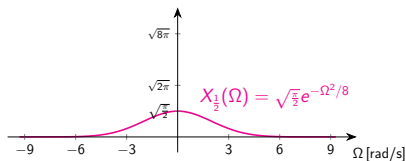
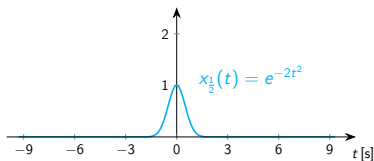
$$\Delta_t \cdot \Delta_\Omega \geq \frac{1}{2}. \quad (32)$$

Ako je $x(t)$ Gausovo zvono onda umnožak rasipanja doseže donju ogradu.

Sličan rezultat dobivamo za DTFT i DFT.

Možemo kazati da što sigurnije znamo frekvencije signala to nesigurnije znamo gdje se u vremenu signal tih frekvencija nalazi. Pokažimo to na primjeru Gausovog zvona.

Primjer za Gausovo zvono



Vremenski diskretna Fourierova transformacija

Vremenski diskretnom Fourierovom transformacijom (DTFT) vremenski signal $x[n]$ predstavljamo preko neprebrojivo mnogo eksponencijalnih funkcija oblika

$$\phi(n, \omega) = e^{j\omega n} \quad (33)$$

kao

$$x[n] = \int_{-\pi}^{+\pi} s(\omega) \cdot \phi(n, \omega), d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (34)$$

Parametar ω je kružna **frekvencija** koju mjerimo u [rad/uzorku].

Alternativne parametrizacije su obična **frekvencija** $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ koju mjerimo u inverznim koracima [1/uzorak] ili pak period $N = \frac{2\pi}{\omega}$ kojeg mjerimo brojem koraka.

Razlike DTFT-a prema CTFT-u

Sve prije navedeno o spektru CTFT-a u osnovi vrijedi i za spektar DTFT-a uz najznačanije razlike:

- ▶ Spektar je periodičan pa raspon kružnih frekvencija kod DTFT-a ograničavamo na interval od $-\pi$ do π i često crtamo samo temeljni period $\langle -\pi, \pi \rangle$.
- ▶ Vrijeme se mjeri u cjelobrojnim koracima uzoraka umjesto u sekundama, pa se i kružna frekvencija mjeri u radijanima po uzorku.

Kako mjerenje vremena u uzorcima zanemaruje stvarni interval između uzoraka kažemo da su vrijeme i frekvencija kod DTFT-a **normalizirani**.

Spektar vremenski diskretnog signala

Neka je zadan vremenski signal $x[n] = 3^{-n} \mu[n]$.

Prema tablicama DTFT-a njegov spektar je $X(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{j\omega}}$.

Računanjem dobivamo:

$$|X(\omega)| = \frac{3}{\sqrt{10 - 6 \cos(\omega)}} \quad (35)$$

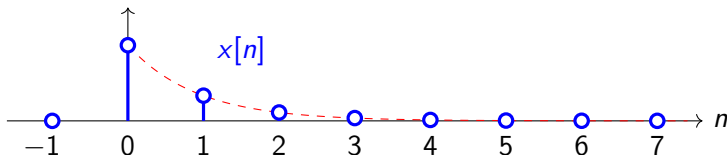
$$\angle X(\omega) = \operatorname{atan2}\left(\frac{-3 \sin(\omega)}{10 - 6 \cos(\omega)}, \frac{9 - 3 \cos(\omega)}{10 - 6 \cos(\omega)}\right) \quad (36)$$

$$\operatorname{Re}[X(\omega)] = \frac{9 - 3 \cos(\omega)}{10 - 6 \cos(\omega)} \quad (37)$$

$$\operatorname{Im}[X(\omega)] = \frac{-3 \sin(\omega)}{10 - 6 \cos(\omega)} \quad (38)$$

Spektar vremenski diskretnog signala

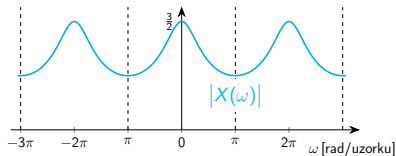
Graf signala $x[n] = 3^{-n} \mu[n]$ je:



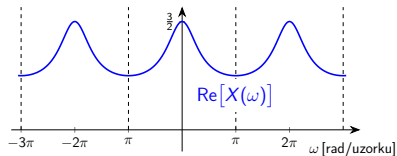
Vidimo da se signal sporo mijenja pa stoga očekujemo da u spektru dominiraju niske frekvencije koje odgovaraju sporijim eksponencijalama.

Kako signal sadrži “skok” u $n = 0$ očekujemo da nema područja na kojem je spektar jednak nuli. (Što je uopće “skok” kod diskretnog signala?)

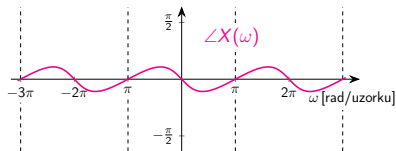
Spektar vremenski diskretnog signala



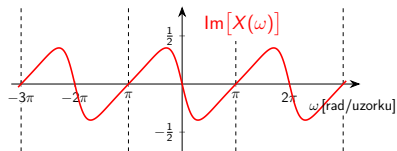
amplitudni spektar $|X(\omega)|$



realni dio spektra $\text{Re}[X(\omega)]$



fazni spektar $\angle X(\omega)$



imaginarni dio spektra $\text{Im}[X(\omega)]$

Diskretna Fourierova transformacija

Diskretnom Fourierovom transformacijom u N točaka (DFT_N) vremenski diskretni signal $x[n]$ konačnog broja uzoraka N predstavljamo preko točno N eksponencijalnih funkcija oblika

$$\phi(n, k) = e^{2\pi jnk/N} = W_N^{nk} \quad (39)$$

kao

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \cdot \phi(n, k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi nk/N}. \quad (40)$$

Spektar $X[k]$ ovisi o indeksu k koji broji uzorke spektra slično kako indeks n broji vremenske uzorke. Kako ih moramo razlikovati n iskazujemo u vremenskim uzorcima [v.uz.], a k u spektralnim uzorcima [s.uz.].

Iz parametra k određujemo diskretiziranu kružnu frekvenciju $\omega_k = 2\pi k/N$ koju mjerimo u [rad/v.uz.]. krivo

Spektar signala duljine 32 uzorka

Neka je zadan signal $x[n] = \cos(\frac{\pi}{5}n)$ za $n = 0, 1, \dots, 31$.

Broj uzoraka je $N = 32$ što znači da koristimo DFT_{32} pa je

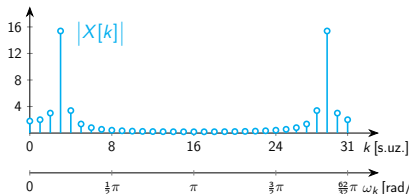
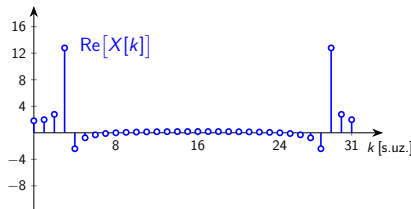
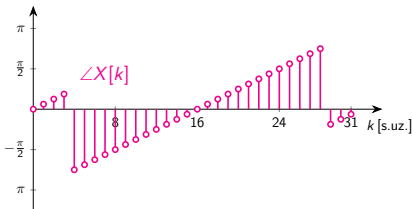
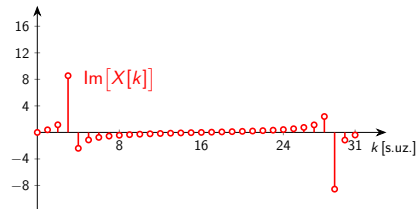
$$X[k] = \text{DFT}_{32}[x[n]] = \sum_{n=0}^{31} x[n] e^{-2\pi jnk/32}. \quad (41)$$

DFT se uvijek računa **numerički** pa spektar određujemo računalom, i to uobičajeno brzom Fourierovom transformacijom ili FFT-om (od engl. *fast Fourier transform*).

FFT je algoritam za efikasno računanje DFT-a koji koristi princip podijeli-pa-vladaj da složenost smanji s $O(N^2)$ na $O(N \log N)$.

Primijetite da spektar možemo prikazati kao niz koji ovisi o k ili koji ovisi o $\omega_k = 2\pi k/32$.

Spektar signala duljine 32 uzorka


amplitudni spektar $|X[k]|$

realni dio spektra $\text{Re}[X[k]]$

fazni spektar $\angle X[k]$

imaginarni dio spektra $\text{Im}[X[k]]$

Valična transformacija

Za kraj ćemo spomenuti valičnu transformaciju (engl. *wavelet transform*) kao primjer koji zahtijeva složeniju interpretaciju i vizualizaciju spektra.

Kod Fourierove transformacije skup baznih funkcija rastava ima samo jedan parametar i to je tipično **frekvencija**, odnosno $\phi_{\Omega}(t) = e^{j\Omega t}$, iako možemo koristiti i period $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

Valična transformacija koristi drukčiji skup baznih funkcija koji ovisi o dva parametra, nazovimo ih β i τ , odnosno

$$\phi_{\beta,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \psi\left(\frac{t - \tau}{\beta}\right). \quad (42)$$

Pri tome je $\psi(\cdot)$ funkcija koja zadovoljava određena svojstva i koju zovemo *majčinskim valićem* (engl. *mother wavelet*).

Parametri valične transformacije

Ako je $\psi(\cdot)$ takva da je dobro lokalizirana u vremenskoj domeni onda je interpretacija parametara β i τ :

- ▶ parametar β određuje **skalu** analize i povezan je s periodom ili valnom duljinom koje smo već upoznali kod CTFT-a, i
- ▶ parametar τ određuje **vremenski pomak** (ili prostorni položaj), i to je novi parametar kojeg Fourierova transformacija nema.

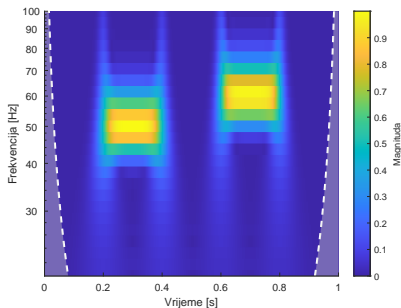
Spektar $X(\beta, \tau)$ nekog signala $x(t)$ dobiven valičnom transformacijom uz odabrani majčinski valić $\psi(\cdot)$ prema tome zahtijeva složeniju vizualizaciju jer koristi dodatni parametar.

Vizualizacija valične transformacije

Obično vizualiziramo samo amplitudni spektar kojeg prikazujemo kao sliku nad osima β (ili $1/\beta$) i τ koju zovemo **skalogram**.

Primjer skalograma za prvu sekundu trajanja signala

$$x(t) = \sin(100\pi t) \operatorname{rect}(5t - \tfrac{3}{2}) + \sin(120\pi t) \operatorname{rect}(5t - \tfrac{7}{2}). \quad (43)$$



Preporučeno čitanje

- ▶ P. Prandoni, M. Vetterli, “Signal Processing for Communications” (<https://sp4comm.org/>), cijelo poglavlje 4., posebno dio 4.7.
- ▶ B. Jeren, “Signali i sustavi”, , Školska knjiga, 2021., poglavlje 4. dijelovi 4.1., 4.2., 4.3., i 4.4.