Osnove obradbe signala: Vremenski otvori

Tomislav Petković

Sveučilište u Zagrebu

prosinac 2021.

Očitavanje i broj uzoraka

U prošloj cjelini smo razmatrali problem jednoznačnosti kod očitavanja te smo iskazali smo teorem očitavanja.

Sukladno teoremu očitavanja pojasno ograničeni signal $x(t)$ maksimalne frekvencije Ω_{MAX} je jednoznačno određen svojim uzorcima $x[n] = x(nT_s)$ ako je $T_s < \pi/\Omega_{\mathsf{MAX}}$.

No ta jednoznačnost vrijedi samo ako znamo sve uzorke, dakle ako znamo $x[n]$ za sve $n \in \mathbb{Z}$, a to je u praksi nemoguće.

U ovoj cjelini razmatramo što se događa kada znamo samo konačan broj uzoraka $x[n]$ nekog pojasno ograničenog signala $x(t)$.

Očitavanje u konačnom broju uzoraka

Neka je $x(t)$ polazni pojasno ograničeni signal maksimalne frekvencije Ω_{MAX}.

Sigal $x(t)$ očitavamo s periodom očitavanja $T_s < \pi/\Omega_{\mathrm{MAX}}$ u konačnom broju uzoraka N čime dobivamo vremenski diskretni signal konačnog trajanja

$$x[n] = x(nT_s), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1}$$

Takvo očitavanje možemo modelirati pomoću funkcije konačnog trajanja (nosača ili potpore) $w_N[n]$ koju zovemo vremenski otvor (engl. *window function*) i kojom množimo $x[n]$, dakle

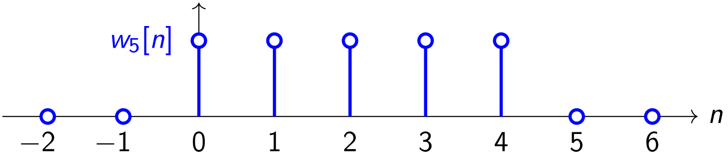
$$x_N[n] = x[n] \cdot w_N[n]. \tag{2}$$

Vremenski otvor

Vremenski otvor ili apodizacijska funkcija (engl. *window function*, *apodization function*, *tapering function*) jest funkcija koja je jednaka nuli svugdje osim unutar odabranog intervala na kojem je simetrična oko centra tog intervala.

Najjednostavniji i najprirodniji vremenski otvor jest pravokutni otvor koji je jednak jedinici unutar odabranog intervala, npr.

$$w_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases} \tag{3}$$



Množenje signala s vremenskim otvorom

Uzimanje konačnog broja uzoraka dakle modeliramo množenjem vremenski diskretnog signala $x[n]$ s vremenskim otvorom $w_N[n]$ duljine N uzoraka,

$$x_N[n] = x[n] \cdot w_N[n]. \tag{4}$$

Očekujemo da sukladno *teoremu o konvoluciji* množenje signala u vremenskoj domeni odgovara konvoluciji spektara u frekvencijskoj domeni.

Prema tome zanima nas:

- Kako izgleda tipičan spektar vremenskog otvora?
- Izvod teorema o konvoluciji u spektralnoj domeni za DTFT.
- Kako otvor mijenja spektar signala $x[n]$?

Pravokutni vremenski otvor

Promatramo kauzalni pravokutni vremenski otvor $w_N[n]$ duljine N uzoraka

$$w_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{5}$$

Promatrani vremenski otvor započinje u $n = 0$,
traje točno N uzoraka od $n = 0$ do $n = N - 1$,
i ima centar simetrije u točci $n = (N - 1)/2$.

Napomena: Primijetite da je promatrani otvor različit od funkcije $\mathrm{rect}_N[n]$ definirane u pregledu formula koja određuje nešto drugačiji nekauzalni pravokutni vremenski otvor trajanja $2N + 1$ uzoraka koji je simetričan oko $n = 0$.

Izračunajmo sada $\mathrm{DTFT}\big[w_N[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_N[n] e^{-j\omega n}$.

Spektar pravokutnog vremenskog otvora

Vrijedi:

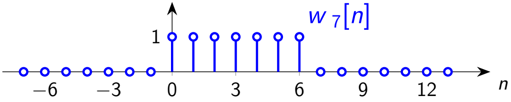
$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \mathrm{DTFT}\big[w_N[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_N[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\
&= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\frac{N}{2}\omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}} \cdot \frac{e^{j\frac{N}{2}\omega} - e^{-j\frac{N}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega}} \\
&= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \cdot \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Odmah prepoznajemo amplitudni i fazni dio spektra:

$$
\left|X(\omega)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}\right| \quad \text{i} \quad \angle X(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \angle\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} \tag{7}
$$

Spektar pravokutnog otvora duljine $N = 7$

Odredi spektar kauzalnog pravokutnog otvora $w_7[n]$ duljine $N = 7$.

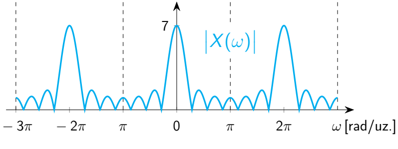


Za zadani $N = 7$ amplitudni i fazni spektar su:

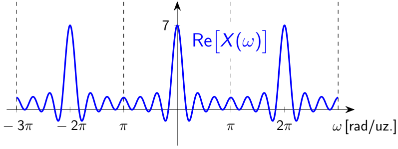
$$\left|X(\omega)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{7}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}\right| \tag{8}$$

$$\angle X(\omega) = -3\omega + \angle\frac{\sin\left(\frac{7}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} \tag{9}$$

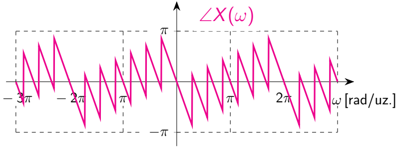
Spektar pravokutnog otvora duljine $N = 7$



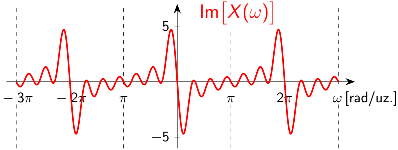
amplitudni spektar $\left|X(\omega)\right|$



realni dio spektra $\mathrm{Re}\left[X(\omega)\right]$



fazni spektar $\angle X(\omega)$



imaginarni dio spektra $\mathrm{Im}\left[X(\omega)\right]$

Periodizirani sinc

Dobiveni amplitudni dio spektra izgledom nalikuje na funkciju sinc($\cdot$) koja je periodizirana.

Stoga definiramo funkciju

$$\operatorname{diric}_N(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{N}{2}x\right)}{N\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}, & x \neq 2\pi k \\ \pm 1, & x = 2\pi k \end{cases}, \tag{10}$$

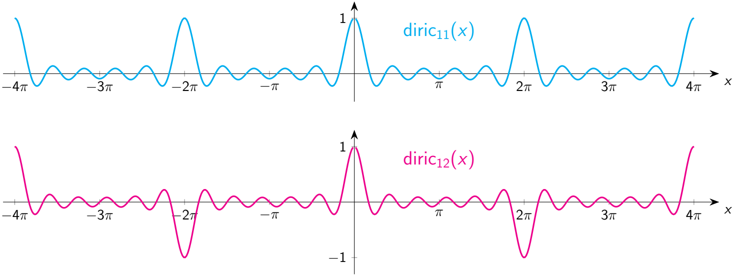
gdje je $k \in \mathbb{Z}$ i gdje predznak od ± 1 u slučaju kada je x višekratnik od 2π ovisi o parnosti N-a i o iznosu k.

Funkciju (10) nazivamo Dirichletovom funkcijom ili periodiziranim sincom.

Period funkcije $\operatorname{diric}_N(x)$ je 4π za parni N i 2π za neparni N.

Periodizirani sinc

Primjer izgleda funkcije $\mathrm{diric}_N(x)$ za neparni i parni N:



Kažemo da se graf funkcije $\mathrm{diric}_N(x)$ sastoji od latica, najveće glavne ili centralne latice i manjih bočnih latica.

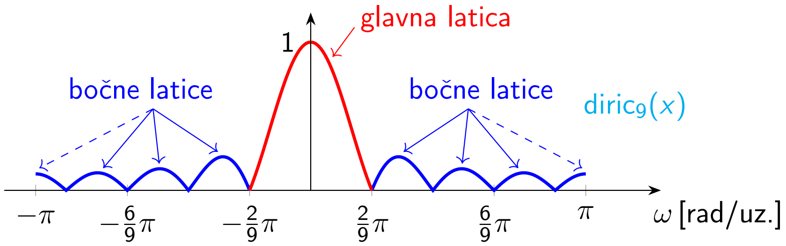
U intervalu duljine 2π funkcija $\mathrm{diric}_N(x)$ prolazi kroz nulu točno $N-1$ puta; ti prolasci kroz nulu razdvajaju pojedine latice.

Glavna i bočne latice

Amplitudni spektar pravokutnog otvora $w_N[n]$ duljine N je

$$A(\omega) = \left|\mathrm{DTFT}\left[w_N[n]\right]\right| = \left|\mathrm{diric}_N(\omega)\right|. \tag{11}$$

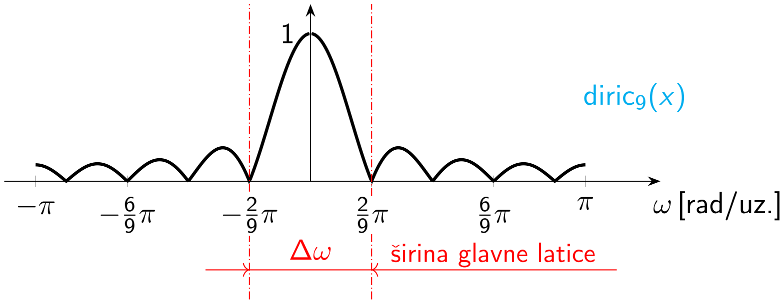
Unutar svakog perioda amplitudni spektra ima jednu **glavnu** spektralnu laticu i točno $N-2$ **bočnih** spektralnih latica.



Širina glavne latice

Glavna latica obuhvaća frekvenciju $\omega = 0$ i omeđena je s dvije nultočke u $\omega = \pm 2\pi/N$ što znači da je njena frekvencijska širina

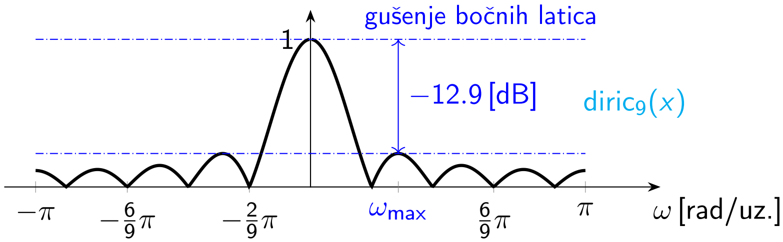
$$\Delta\omega = \left| \tfrac{2\pi}{N} - \left(-\tfrac{2\pi}{N}\right) \right| = \frac{4\pi}{N}. \tag{12}$$



Gušenje bočnih latica

Još jedno važno svojstvo vremenskog otvora jest najlošije gušenje (ili potiskivanje) bočnih latica.

Ono je određeno maksimumom amplitudnog spektra u području bočnih latica i gotovo uvijek ga računamo numerički.



Za pravokutni otvor kada $N \to \infty$ amplituda prve najviše bočne latice teži u 0.2172 što daje gušenje od -13.26 [dB].

Teorem o konvoluciji u spektralnoj domeni za DTFT

Neka su $x[n]$ i $y[n]$ dva vremenski diskretna signala iz ℓ^2 te neka su $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ njihove DTFT transformacije. Onda je

$$\begin{aligned} \mathrm{DTFT}\big[x[n] \cdot y[n]\big] &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \circledast Y(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\xi) Y(\omega - \xi) \, d\xi \end{aligned} \tag{13}$$

U navedenom izrazu koristimo simbol $\circledast$ za označavanje **periodične konvolucije** jer su spektri $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ periodični. Kod periodične konvolucije integracija se provodi po jednom periodu, a rezultat je opet periodična funkcija.

Transformacija umnoška signala

Znamo da je

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega) e^{j\omega n} \, d\omega \quad \text{i} \quad y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} \, d\omega.$$

Za produkt $x[n] \cdot y[n]$ onda vrijedi:

$$\begin{aligned} x[n] \cdot y[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega_1) e^{j\omega_1 n} \, d\omega_1 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(\omega_2) e^{j\omega_2 n} \, d\omega_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega_1) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(\omega_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2) n} \, d\omega_2 \right) d\omega_1 \end{aligned}$$

Sada ćemo u unutrašnjem integralu zamijeniti varijable tako da umjesto ω_2 uvedemo $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Transformacija umnoška signala

Zamjena $\omega_2 = \omega - \omega_1$ sada daje:

$$
\begin{aligned}
x[n] \cdot y[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega_1) \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(\omega - \omega_1) e^{j\omega n} \, d\omega \Big) \, d\omega_1 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega_1) Y(\omega - \omega_1) \, d\omega_1}_{= X(\omega) \circledast Y(\omega)} \Big) e^{j\omega n} \, d\omega
\end{aligned}
$$

Sada unutrašnji integral prepozajemo kao periodičnu konvoluciju dva spektra $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ skaliranu s $\frac{1}{2\pi}$, a vanjski integral prepoznajemo kao inverznu DTFT.

Time smo pokazali da se umnožak signala u vremenskoj domeni transformira u periodičnu konvoluciju spektara u frekvencijskoj domeni.

Konvolucija sa spektrom otvora

Prema teoremu o konvoluciji spektar umnoška signala $x[n]$ i vremenskog otvora $w_N[n]$ jest

$$\mathrm{DTFT}\left[x[n]\cdot w_n[n]\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(\xi)W_N(\omega-\xi)\,d\xi. \tag{14}$$

U idealnom slučaju želimo da spektar signala ostane neizmijenjen, dakle

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(\xi)W_N(\omega-\xi)\,d\xi = X(\omega). \tag{15}$$

Prema tome spektar idealnog vremenskog otvora bi bio

$$W_{\mathrm{idealni}}(\omega) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(\omega-2k\pi) = 2\pi\,\mathrm{comb}_{2\pi}(\omega), \tag{16}$$

odnosno idealni otvor je konstanta beskonačnog trajanja:

$$w_{\mathrm{idealni}}[n] = 1. \tag{17}$$

Utjecaj pravokutnog vremenskog otvora

Spektar idealnog otvora je niz Diracovih funkcija,

$$W_{\mathrm{idealni}}(\omega) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - 2k\pi) = 2\pi \operatorname{comb}_{2\pi}(\omega), \qquad (18)$$

pa možemo reći da idealni otvor sadrži samo jednu beskonačno usku glavnu laticu te da su sve bočne latice potpuno potisnute.

Spektar pravokutnog otvora pak ima glavnu laticu konačne širine $\frac{4\pi}{N}$ i bočne latice nezanemarive visine sigurno lošije od $-13.26\,[\mathrm{dB}]$.

Zbog toga kažemo da svako ograničavanje trajanja signala utječe na spektar tako da se spektar razmazuje (engl. *spectral leakage*).

Spektar (ko)sinusoide konačnog trajanja

Pokažimo razmazivanje na primjeru spektra čiste (ko)sinusoide:

$$x[n] = \cos\left(\tfrac{\pi}{3} n + \tfrac{\pi}{4}\right). \tag{19}$$

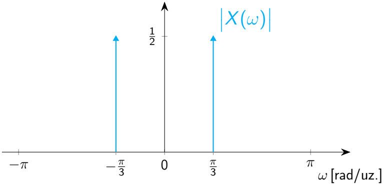
Primjenom pravokutnog vremenskog otvora ograničimo trajanje kosinusoide na $N = 32$ uzorka za $n = 0, 1, \ldots, N-1$,

$$x_N[n] = \cos\left(\tfrac{\pi}{3} n + \tfrac{\pi}{4}\right) w_N[n]. \tag{20}$$

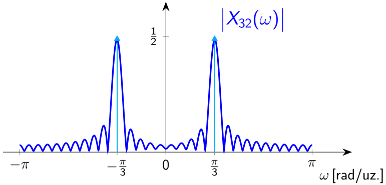
Idealni spektar $X(\omega)$ (ko)sinusoide neke frekvencije sadrži samo dvije komponente, i to na frekvencijama $\pm\frac{\pi}{3}$.

No ograničavanjem signala na $N = 32$ uzorka taj idealni spektar $X(\omega)$ se **razmazuje** sa spektrom pravokutnog vremenskog otvora $w_{32}[n]$ pa dobivamo razmazani spektar $X_{32}(\omega)$.

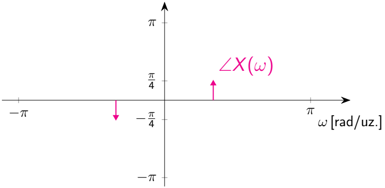
Spektar (ko)sinusoide konačnog trajanja



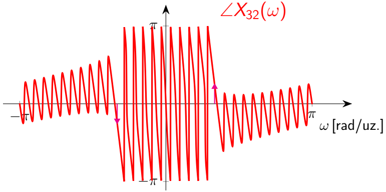
amplitudni spektar $|X(\omega)|$
idealne kosinusoide



amplitudni spektar $|X_{32}(\omega)|$
vremenski ograničene kosinusoide



fazni spektar $\angle X(\omega)$
idealne kosinusoide



fazni spektar $\angle X_{32}(\omega)$
vremenski ograničene kosinusoide

Posljedice razmazivanja spektra

U praksi ne možemo izbjeći vremensko ograničavanje signala što znači da uvijek dolazi do razmazivanja spektra.

Neki mogući neželjeni efekti razmazivanja su:

- Bočne latice otvora možemo krivo interpretirati kao nepostojeće komponente signala.
- Prevelika širina glavne latice može onemogućiti raspoznavanje bliskih (ko)sinusoida.
- Nedovoljno gušenje bočnih latica može sakriti sporedne komponente signala.

Povećavanje broja uzoraka N ublažava dio efekata, no kod pravokutnog otvora ne popravlja loše gušenje bočnih latica.

Prema tome moramo promijeniti oblik vremenskog otvora.

Kako izgleda dobar vremenski otvor?

Pravokutni otvor oštro reže signal na svojim granicama.

Vremenski otvori koji se koriste u praksi u pravilu ublažavaju taj prezalak tako da lagano guše signal od sredine otvora prema lijevoj i desnoj granici. Kažemo da apodiziramo signal.

Takvo gušenje se može izvesti na neizmjerno mnogo načina tako da postoji puno (čak i previše) raznih vremenski otvora.

Odabir konkretnog vremenskog otvora je uglavnom određen primjenom.

Glavno ograničenje koje ne ovisi o primjeni jest da ne možemo istodobno ostvariti usku glavnu laticu i niske bočne latice.

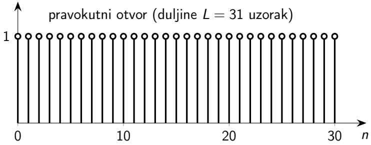
Usporedimo nekoliko vremenski otvora

Pokažimo na primjeru pet vremenski otvora što se događa kada mijenjamo način gušenja signala prema granicama otvora.

Odabrani vremenski otvori duljine $L = 31$ uzorak su:

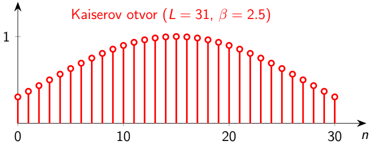
1. pravokutni vremenski otvor,
2. Kaiserov vremenski otvor s parametrom $\beta = 2.5$,
3. Bartlettov vremenski otvor,
4. Blackmanov vremenski otvor, i
5. Čebišovljev vremenski otvor.

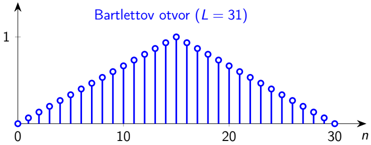
Odabrani otvori u vremenskoj domeni

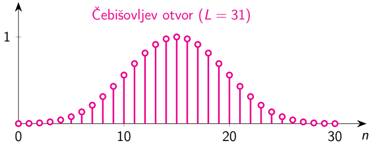


Smanjivanje oštrine/naglosti prijelaza na granicama otvora poboljšava spektralne karakteristike otvora.

Dio dobrih otvora izgleda slično u vremenskoj domeni; razlike se jasnije uočavaju u spektralnoj domeni.





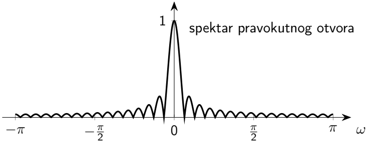


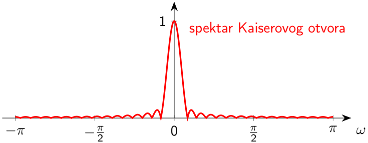
Amplitudni spektri odabranih otvora

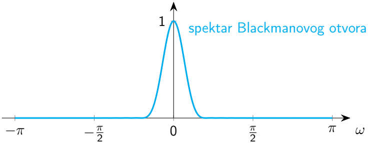
Radi lakše uspredbe svi spektri su normalizirani na $\left|X(0)\right| = 1$.

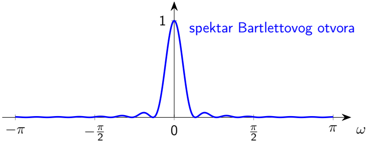
Pravokutni otvor ima najužu glavnu laticu i najviše (prve) bočne latice.

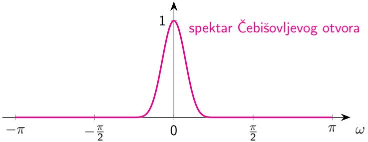
Primijetite da gušenje bočnih latica kod ostalih otvora plaćamo širenjem glavne latice.



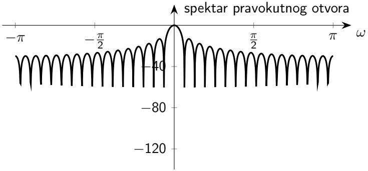








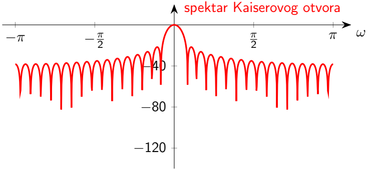
Amplitudni spektri odabranih otvora u [dB]

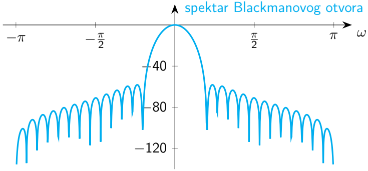


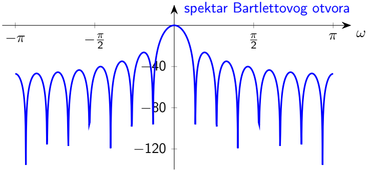
Bočne latice ne možemo izbjeći!

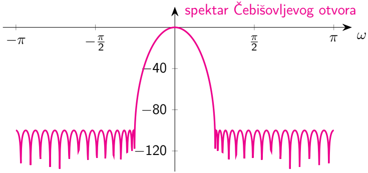
Prikaz spektra u [dB] (logaritamski) to čini jasno uočljivim.

Čebišovljev otvor ima najužu glavnu laticu za odabrano gušenje bočnih latica.









Analiza signala i broj uzoraka

U prošloj cjelini smo pokazali kako biramo period očitavanja T_s tako da ne dođe do preklapanja spektra.

Slično tome, potreban broj uzoraka signala N koje moramo očitati ovisi o tome koju spektralnu rezoluciju želimo postići jer:

- Ne možemo razlikovati spektralne komponente signala koje su bliže od širine glavne latice otvora.
- Ne možemo detektirati spektralne komponente signala koje su slabije od amplituda bočnih latica otvora.

Zahtjevi na spektralnu rezoluciju zajedno uz odabir konkretnog vremenskog otvora sukladno navedenim ograničenjima definiraju minimalan broj uzoraka N koje trebamo prikupiti.

Apodizacija i Gibbsova pojava

Apodizacija ili gušenje signala prema granicama otvora se može iskoristiti za ublažavanje neželjenih nadvišenja i propada (Gibbsova pojava).

Umjesto da spektar oštro ograničimo tako da ga nakon neke frekvencije postavimo u nulu primjenjujemo spektralni otvor koji lagano guši spektar prema točci ograničenja.

Time smanjujemo iznos nadvišenja i propada u vremenskoj domeni, no takva modificirana reprezentacija signala više nije optimalna u smislu najmanjeg kvadratnog odstupanja.

Isti princip se koristi kod dizajna filtara gdje možemo apodizirati impulsni odziv kako bi popravili frekvencijsku karakterisitku filtra; to ćemo detaljnije razmatrati u drugom dijelu semestra.

Preporučeno čitanje

- S. K. Mitra, "Digital Signal Processing: A Computer Based Approach" (drugo izdanje), McGraw-Hill, 1998., dijelovi
  11.2 Spectral analysis using DFT,
  11.3.3 Window Selection i
  7.7.4 Fixed Window Functions
- P. Prandoni, M. Vetterli, "Signal Processing for Communications" (`https://sp4comm.org/`),
  dio 7.2.1.
- Wikipedia,
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function`