Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Osnove obradbe signala – Šesta domaća zadaća

Akademska školska godina 2021./2022.

Tomislav Petković

1. Želimo li odrediti vremenski diskretni LTI sustav koji idealno modelira vremenski kontinuirani LTI sustav tada moramo očitati impulsni odziv vremenski kontinuiranog LTI sustava. No kako prilikom očitavanja impulsnog odziva može doći do preklapanja spektra prije očitavanja moramo pojasno ograničiti impulsni odziv.

Razmatramo sljedeće impulsne odzive $h(t)$ vremenski kontinuiranih LTI sustava:

1. $h(t) = \mathrm{sinc}(t)$,
2. $h(t) = \mathrm{rect}(t)$,
3. $h(t) = \mu(t)$,
4. $h(t) = e^{-t}\,\mu(t)$,
5. $h(t) = \cos(3t)\,\mathrm{sinc}(t)$, i
6. $h(t) = \cos(3t)\,\mathrm{rect}(t)$.

Za svaki od navedenih impulsnih odziva:

a) Odredite je li impulsni odziv pojasno ograničen.

b) Za pojasno ograničene impulsne odzive odredite sve periode očitavanja T_s za koje nema preklapanja spektra.

c) Za pojasno ograničene imuplsne odzive odredite pripadni impulsni odziv vremenski diskretnog LTI sustava.

2. Osim očitavanja impulsnog odziva postoje i drugi načini kako odrediti vremenski diskretni sustav koji aproksimira neki vremenski kontinuirani sustav. Od posebnog interesa su tri postupka: Eulerova metoda, obrnuta Eulerova metoda, i bilinearna transformacija. Eulerova metoda aproksimira vremenski kontinuiranu derivaciju korištenjem unaprijedne diferencije,

$$x'(t) \approx \frac{x\big((n+1)T\big) - x(nT)}{T},$$

što u domeni transformacije postaje zamjena varijabli

$$s \mapsto \frac{z-1}{T}.$$

Obrnuta Eulerova metoda aproksimira vremenski kontinuiranu derivaciju korištenjem unazadne diferencije,

$$x'(t) \approx \frac{x(nT) - x\big((n-1)T\big)}{T},$$

što u domeni transformacije postaje zamjena varijabli

$$s \mapsto \frac{1 - z^{-1}}{T}.$$

Bilinearna transformacija aproksimira vremenski kontinuirani određeni integral korištenjem trapeznog pravila,

$$\int_{(n-1)T}^{nT} x(t)\,dt \approx \frac{T}{2}\big(x(nT) + x\big((n-1)T\big)\big),$$

što u domeni transformacije postaje zamjena varijabli

$$s \mapsto \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Svaka od tri navedene transformacije veže s i z domene te se može interpretirati kao Möbiusova transformacija (konformno preslikavanje) kompleksne ravnine. U ovom zadatku razmatramo svojstva sva tri postupka.

a) Za svako od tri preslikavanja odredite sliku lijeve poluravnine kompleksne ravnine s u kompleksnoj ravnini z. Također odredite original jediničnog kruga kompleksne ravnine z u kompleksnoj ravnini s.

b) Uzimajući u obzir odgovor na prethodno podpitanje analizirajte kako svako od preslikavanja čuva stabilnost. Koje preslikavanje uvijek čuva stabilnost? Koje preslikavanje uvjetno čuva stabilnost?

c) Preslikajte vremenski kontinuirani sustav $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$ u vremenski diskretni korištenjem sva tri preslikavanja. Neka je period očitavana $T = 1$. Je li vremenski kontinuirani sustav stabilan? Jesu li svi dobiveni vremenski diskretni sustavi stabilni?

d) Preslikajte vremenski kontinuirani sustav $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = u(t)$ u vremenski diskretni korištenjem sva tri preslikavanja. Neka je period očitavana $T = 1$. Je li vremenski kontinuirani sustav stabilan? Jesu li svi dobiveni vremenski diskretni sustavi stabilni?

e) Numeričke aproksimacije derivacije i integrala su međusobno povezane, odnosno poznavanjem jedne možemo odrediti drugu. Odredite kako je integral aproksimiran u Eulerovim metodama te kako je derivacija aproksimirana u bilinearnoj transformaciji.

3. Derivaciju signala $x(t)$ je moguće aproksimirati korištenjem konačne diferencije uzoraka tog signala. Neka je $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatki spektralno ograničen signal te neka su $x[n] = x(nT_s)$ uzorci tog signala očitani s dovoljno malim periodom T_s tako da nema preklapanja spektra. Derivacija $x'(t)$ jest

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau},$$

što možemo modelirati kao propuštanje signala $x(t)$ kroz vremenski kontinuirani LTI sustav prijenosne funkcije

$$H_d(j\Omega) = j\Omega.$$

Aproksimacija derivacije silaznom diferencijom $\nabla_{T_s} x(t) = x(t) - x(t - T_s)$ jest

$$x'(nT_s) \approx \frac{\nabla_{T_s} x(nT_s)}{T_s} = \frac{x(nT_s) - x(nT_s - T_s)}{T_s} = \frac{x[n] - x[n-1]}{T_s},$$

što možemo modelirati kao propuštanje uzoraka $x[n]$ kroz vremenski diskretni LTI sustav prijenosne funkcije

$$H_\nabla(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{T_s}.$$

Želimo usporediti prijenosne funkcije H_d i H_∇ te dati ogradu na spektralnu pogrešku aproksimacije derivacije.

a) Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku od $H_d(j\Omega)$.

b) Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku od $H_\nabla(e^{j\omega})$.

c) Ako prepostavimo pojasnu ograničenost, odnosno ako vrijedi $X(j\Omega) = 0$ za $|\Omega| > \frac{\pi}{T_s}$, onda možemo odrediti prijenosne funkcije spektralno ograničenog idealnog derivatora. Neka je $H_1(j\Omega)$ idealni pojasno ograničeni derivator u CTFT domeni i neka je $H_2(e^{j\omega})$ idealni pojasno ograničeni derivator u DTFT domeni. Odredite $H_1(j\Omega)$ i $H_2(e^{j\omega})$.

d) Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku od $H_1(j\Omega)$.

e) Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku od $H_2(e^{j\omega})$.

f) Zanima nas spektralna pogreška aprosimacije, odnosno odstupanje između idealne prijenosne funkcije $H_2(e^{j\omega})$ i ostvarine $H_\nabla(e^{j\omega})$. Na kojoj frekvenciji se dobiva najmanje, a na kojoj najveće odstupanje amplitudne karakteristike? Na kojoj frekvenciji se dobiva najmanje, a na kojoj najveće odstupanje fazne karakteristike? Koliko iznose ta odstupanja?

Izvor zadatka 3.: Zadatak 5. iz međuispita održanog 26. studenoga 2018.
Također pročitajte dio 9.7.1. iz udžbenika "Signal Processing for Communications" autora P. Prandonija i M. Vetterlija.