Osnove obradbe signala

Završni ispit – 27. siječnja 2021.

1. (6 bodova) Promatramo vremenski-kontinuirani LTI sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t).$$

Tražimo ekvivalentni vremenski-diskretni LTI sustav korištenjem unazadne Eulerove metode uz period očitavanja $T = \frac{1}{10}$.

a) **(1 bod)** Odredite prijenosnu funkciju $H(s)$ vremenski-kontinuiranog LTI sustava.

b) **(2 boda)** Odredite prijenosnu funkciju $H(z)$ vremenski diskretnog LTI sustava unazadnom Eulerovom metodom.

c) **(1 bod)** Odredite jednadžu diferencija koja opisuje ekvivalentni vremenski diskretni LTI sustav.

d) **(2 boda)** Odredite polove i vremenski kontinuiranog i vremenski diskretnog LTI sustava. Jesu li oba sustava stabilna? Objasnite!

Uputa: Unazadna Eulerova metoda aproksimira derivaciju korištenjem unazadne diferencije pa vrijedi

$$x'(t) \approx \frac{x(nT) - x\big((n-1)T\big)}{T}.$$

2. (6 bodova) Promatramo digitalni filtar koji je zadan diferencijskom jednadžbom

$$y[n] = \frac{1}{9}\big(5u[n] - u[n-1] - 3y[n-1]\big).$$

Pri tome je $u[n]$ ulazni signal, a $y[n]$ izlazni signal.

a) **(2 boda)** Odredite prijenosnu funkciju filtra te nađite njene polove i nule.

b) **(1 bod)** Odredite impulsni odziv filtra. Je li filtar FIR ili IIR?

c) **(2 boda)** Odredite i skicirajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku filtra.

d) **(1 bod)** Koji od četiri tipa amplitudno selektivnih filtara (NP, VP, PP ili PB) najbolje opisuje promatrani filtar?

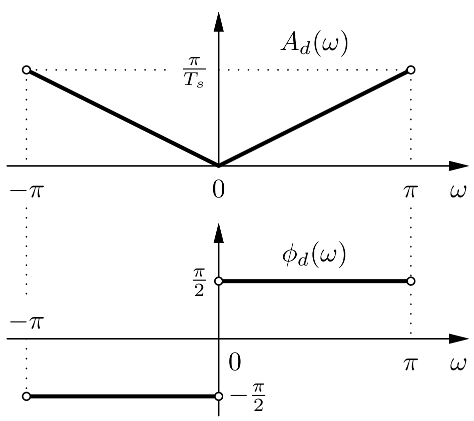
3. (6 bodova) Za svaku raspravu o filtriranju poželjno je poznavati kako izgledaju impulsni odzivi idealnih filtara. U ovom zadatku želimo odrediti impulsni odziv vremenski diskretnog sustava koji je idealna realizacija derivacije. Amplitudna karakteristika $A_d(\omega)$ i fazna karakteristika $\phi_d(\omega)$ idealne realizacije derivacije su prikazane na slici ispod. Neka je period očitavanja $T_s = 1$.

a) **(2 boda)** Iskažite $H_d(e^{j\omega}) = A_d(\omega)e^{j\phi_d(\omega)}$ formulom (npr. kao razlomljenu linearnu funkciju).

b) **(3 boda)** Koristeći IDTFT odredite impulsni odziv $h_d[n]$ koji pripada $H_d(e^{j\omega})$.

c) **(1 bod)** Kako se $h_d[n]$ ponaša kada $n \to \pm\infty$. Trne li prema 0 ili ne?

Uputa: Izračunajte integral za IDTFT; pazite što se događa za $n = 0$.



Okreni!

4. **(6 bodova)** Promatramo vremenski diskretan signal oblika $x[n] = x_0[n] + A\cos(\omega_0 n) + B\sin(\omega_0 n)$, gdje je $x_0[n]$ korisna komponenta i gdje je $A\cos(\omega_0 n) + B\sin(\omega_0 n)$, $A, B \in \mathbb{R}$, neželjena komponenta koja predstavlja brujanje na nekoj poznatoj frekvenciji $\omega_0 \in [0, \pi]$. Želimo dizajnirati zaporni FIR filtar koji će ukloniti neželjeno brujanje.

a) **(2 boda)** Neka je frekvencija očitavanja $f_s = 200\,\mathrm{Hz}$. Odredite frekvenciju ω_0 ako je poznato da je neželjeno brujanje posljedica gradske mreže, odnosno ako je frekvencija brujanja $f_B = 50\,\mathrm{Hz}$.

b) **(2 boda)** Odredite impulsni odziv i prijenosnu funkciju kauzalnog zapornog FIR filtra drugog reda koji u potpunosti potiskuje neželjeno brujanje gradske mreže i čiji amplitudno-frekvencijska karakteristika je jednaka 1 na $\omega = 0$.

c) **(2 boda)** Izračunajte i skicirajte frekvencijsku karakteristiku dizajniranog FIR filtra.

5. **(6 bodova)** Zadana su dva niza konačne duljine, $x[n] = \{\underline{2}, 1, 0, 3\}$ i $y[n] = \{\underline{-1}, 0, 2, -1\}$.

a) **(2 boda)** Izračunajte njihovu linearnu konvoluciju $x[n] * y[n]$.

b) **(2 boda)** Izračunajte njihovu cirkularnu konvoluciju $x[n] \textcircled{4} y[n]$.

c) **(2 boda)** Označimo linearnu konvoluciju s $a[n] = x[n] * y[n]$ i cirkularnu konvoluciju duljine N s $b[n] = x[n] \textcircled{N} y[n]$, gdje je N pozitivni cijeli broj. Uz pretpostavku da su svi nedefinirani uzorci signala $x[n]$ i $y[n]$ jednaki nuli za koje N vrijedi jednakost $a[n] = b[n]$?