Osnove obradbe signala: Z transformacija i Laplaceova transformacija

Tomislav Petković

Sveučilište u Zagrebu

prosinac 2021.

Z i Laplaceova transformacija

Z transformacija i Laplaceova transformacija se u inženjerskoj struci najčešće koriste za rješavanje linearnih diferencijskih i diferencijalnih jednadžbi sa stalnim koeficijentima.

Na ovom predmetu se fokusiramo na Z transformaciju.

Laplaceovu transformaciju uvodimo prvenstveno radi razmatranja veze između kontinuiranih i diskretnih sustava, slično kao što smo CTFT uveli radi razmatranja veze između kontinuiranih i diskretnih signala.

Definicija Z transformacije

Z transformacija vremenski diskretnom signalu $x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ pridružuje funkciju kompleksne varijable $X(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takvu da vrijedi

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}\big[x[n]\big] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] z^{-n}. \qquad (1)}$$

Ponekad kažemo da nizu brojeva $x[n]$ pridružujemo formalni red.

Red nazivamo formalnim jer u nekim primjenama možemo potpuno zanemariti problem konvergnecije.

No u obradbi signala red potencija $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] z^{-n}$
mora konvergirati u nekom smislu.

Konvergencija Z transformacije

Obično zahtjevamo **apsolutnu konvergenciju**.

Svaki kompleksni broj z možemo prikazati preko njegovog modula $r = |z|$ i faze $\phi = \angle z$, odnosno $z = r \cdot e^{j\phi}$.

Želimo apsolutnu zbrojivost:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| x[n] z^{-n} \right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| x[n] r^{-n} e^{-j\phi n} \right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| x[n] \right| r^{-n} < \infty. \quad (2)$$

Prema dobivenom apsolutna zbrojivost ovisi samo o modulu r, dakle ako suma konvergira za neki $z_0 = r_0 e^{j\phi_0}$ onda konvergira i za sve $|z| = r_0$ koji zajedno leže na kružnici.

Područje konvergencije, skraćeno RoC od engl. *region of convergence*, se prema tome sastoji od kružnica koje zajedno tvore **kružni vijenac**.

Primjer Z transformacije

Odredite Z transformaciju signala $x[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^{-|n|}$.

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-|n|} z^{-n} \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^{-|n|} z^{-n} \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-|n|} z^{-n} \right) - \underbrace{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-|0|} z^{-0} \right)}_{\text{preklapanje za } n=0} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3z}\right)^{n} - 1 \qquad (3)
\end{aligned}$$

U dobivenom rezultatu prepoznajemo dva geometrijska reda, prvog čiji kvocijent je $\frac{2z}{3}$ i drugog čiji kvocijent je $\frac{2}{3z}$.

Geometrijski niz i geometrijski red

Geometrijski niz x_n, $n \in \mathbb{N}_0$, je niz brojeva u kojem je kvocijent x_{n+1}/x_n svaka dva susjedna člana stalan, dakle

$$q = x_{n+1}/x_n. \tag{4}$$

Prema tome opći član geometrijskog niza je oblika $x_n = a \cdot q^n$, gdje su $a, q \in \mathbb{C}$.

Geometrijski red je zbroj članova geometrijskog niza:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} x_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \cdots + a \cdot q^n + \cdots \tag{5}$$

Ne smanjujući općenitost neka je $a = 1$ tako da je član niza $x_n = q^n$ i tako da je red zbroj potencija $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n$.

Konačan geometrijski red

Konačna suma S_N prvih N članova geometrijskog reda je

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}. \tag{6}$$

Izdvajanje prvog člana iz sume S_N daje

$$S_N = 1 + \sum_{n=1}^{N} q^n = 1 + q \sum_{n=0}^{N-1} q^n = 1 + qS_{N-1}. \tag{7}$$

Izdvajanje zadnjeg člana iz sume S_N daje

$$S_N = q^N + \sum_{n=0}^{N-1} q^n = q^N + S_{N-1}. \tag{8}$$

Eliminacija S_{N-1} naposlijetku daje gorenavedeni izraz za S_N.

Suma geometrijskog reda

Ako je $|q| < 1$ onda je geometrijskih red konvergentan i vrijedi

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{9}$$

Do navedenog izraza se uobičajeno dolazi razmatranjem što se događa sa S_N kada $N \to +\infty$.

Također primijetite da uz pretpostavku konvergencije vrijedi:

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots = 1 + q \cdot \big(\underbrace{1 + q + q^2 + \cdots}_{=S}\big) = 1 + q \cdot S. \tag{10}$$

Poznavanje navedenih izraza za sumu geometrijskog reda čini osnovu za primjenu Z transformacije.

Primjer Z transformacije

Primjenom geometrijskog reda na razmatrani primjer dobivamo:

$$X(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^n}_{\text{prvi red}, \, q_1 = \frac{2z}{3}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3z}\right)^n}_{\text{drugi red}, \, q_2 = \frac{2}{3z}} - 1$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{2z}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{2}{3z}} - 1 = \frac{5z}{-6z^2 + 13z - 6} \tag{11}$$

No prema uvjetima konvergencije reda prvi red konvergira ako

$$\left| q_1 \right| = \left| \frac{2z}{3} \right| < 1, \tag{12}$$

a drugi ako

$$\left| q_2 \right| = \left| \frac{2}{3z} \right| < 1. \tag{13}$$

Oba uvjeta zajedno definiraju područje konvergencije

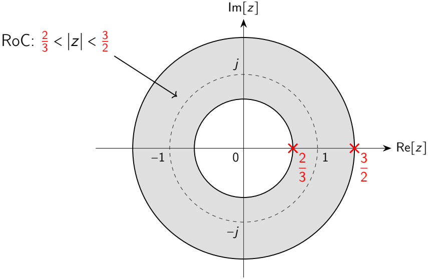
$$\frac{2}{3} < |z| < \frac{3}{2}. \tag{14}$$

Primjer Z transformacije

Kažemo da je Z transformacija signala $x[n]$ funkcija $X(z)$ na određenom područje konvergencije što zapisujemo kao

$$\mathcal{Z}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-|n|}\right] = \frac{5z}{-6z^2 + 13z - 6}, \quad \frac{2}{3} < |z| < \frac{3}{2}. \tag{15}$$

Područje konvergencije ili RoC je kružni vijenac (engl. *annulus*) u kompleksnoj ravnini z:



Z transformacija i razvoj funkcije u red

Z transformacija koju smo definirali kao

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] z^{-n} \tag{16}$$

je usko povezana s problemom razvoja analitičke funkcije kompleskne varijable $f(z)$ u red potencija.

Prisjetite se da analitičku funkciju možemo između ostalog razviti u sljedeće redove:

- Taylorov red,
- Maclaurinov red (poseban slučaj Taylorovog reda), i
- Laurentov red (poopćenje Taylorovog reda).

Svaki od tih redova ima svoje pripadno područje konvergencije na kojem je prikaz funkcije preko reda valjan.

Taylorov i Maclaurinov red

Kompleksnu analitičku funkciju $f(z)$ možemo razviti u Taylorov red oko neke točke $z_0 \in \mathbb{C}$ pri čemu dobiveni red konvergira na nekom **disku** oko z_0.

Taylorov razvoj koristi samo **nenegativne potencije** kompleksne varijable z, odnosno funkciju razvijamo u red oblika

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{17}$$

Prema tome razvojem funkcije $f(z)$ u Taylorov red možemo definirati vrijednosti nekog niza brojeva a_n samo za $0 \leq n$, dok za $n < 0$ vrijednosti od a_n nisu definirane.

Macluarinov red je poseban slučaj razvoja oko ishodišta ($z_0 = 0$).

Laurentov red

Osim u Taylorov red kompleksnu analitičku funkciju $f(z)$ možemo razviti i u Laurentov red oko neke točke $z_0 \in \mathbb{C}$ pri čemu dobiveni red konvergira na nekom **kružnom vijencu** oko z_0.

Laurentov razvoj u red koristi sve potencije kompleksne varijable z, odnosno funkciju razvijamo u red oblika

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{18}$$

gdje je

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \tag{19}$$

U kontekstu reprezentacije niza kompleksnom funkcijom razvoj u Laurentov red određuje sve vrijednosti niza a_n.

Laurentov red i Z transformacija

Usporedimo li Laurentov red i Z transformaciju odmah uočavamo:

- Laurentov red koristi pozitivne potencije z^n, a
  Z transformacija koristi negativne potencije z^{-n}.
- Nije jasno oko koje točke z_0 razvijamo red u Z transformaciji.

Želimo li uspostaviti vezu između Laurentovog reda i Z transformacije onda u (18) odaberemo prvo $z_0 = 0$ pa zatim zamjenimo z s $\frac{1}{z}$.

Prema tome je $f(1/z) = X(z)$.

Zamjena $z \mapsto \frac{1}{z}$ mijenja mjesta 0 i ∞ tako da ako Laurenov red za $f(z)$ razvijamo oko nule onda Z transformaciju $X(z)$ razvijamo oko beskonačnosti, i obrnuto.

Slično vrijedi i za Taylorov red.

Inverzna Z transformacija

Inverzna Z transformacija je slična izrazu za računanje koeficijenata Laurentovog reda koji se pak temelji na Cauchyjevoj integralnoj formuli.

Izraz za inverznu Z transformaciju ovdje navodimo bez dokaza:

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\big[X(z)\big] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma} X(z) z^{n-1}\, dz \tag{20}$$

U integralu (20) krivulja γ se mora nalaziti unutar područja konvergencije.

Integral (20) se rijetko koristi u inženjerskoj praksi.

Veza Z transformacije i DTFT-a

Ako se jedinična kružnica $z = e^{j\omega}$ u kompleksnoj ravnini z nalazi unutar područja konvergnecije onda zamjenom

$$z \mapsto e^{j\omega} \tag{21}$$

iz Z transformacije $X(z)$ signala $x[n]$ dobivamo DTFT transformaciju tog signala.

Istom zamjenom (21) krivuljni integral (20) postaje izraz za predstavljanje signala kod DTFT-a, odnosno

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, d\omega. \tag{22}$$

Primijetite da ovdje spektar signala zapisujemo kao $X(e^{j\omega})$ iako spektar ovisi samo o frekvenciji ω.

Bilješka o notaciji

Kod DTFT smo spektar signala $x[n]$ označavali velikim slovom X, a kako spektar X ovisi samo o realnoj frekvenciji $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$ jednostavno smo pisali $X(\omega)$.

Z transformaciju signala $x[n]$ slično opet označavamo velikim slovom X, no sada se radi o funkciji kompleksne varijable z.

Stoga ako koristimo obje transformacije onda veliko slovo X označava isključivo Z transformaciju $X(z)$ signala $x[n]$, i to je razlog zašto se u udžbenicima spektar označava s $X(e^{j\omega})$.

Ako želimo biti potpuno precizni možemo dodati indekse pa pisati

$$X_{\mathcal{Z}}(e^{j\omega}) = X_{\mathrm{DTFT}}(\omega), \tag{23}$$

pri čemu je $X_{\mathcal{Z}} : \mathrm{RoC} \to \mathbb{C}$ Z transformacija signala i
pri čemu je $X_{\mathrm{DTFT}} : \langle -\pi, \pi \rangle \to \mathbb{C}$ Fourierov spektar signala.

Područje konvergencije desnih signala

Kažemo da je signal $x[n]$ desni ili desnostrani ako postoji konačan korak n_0 takav da je $x[n] = 0$ za sve $n < n_0$.

Poseban slučaj desnog signala za $n_0 = 0$ je kauzalni signal.

Ako je $x[n]$ desni signal sa Z transformacijom $X(z)$ i ako je krug $|z| = r_0$ unutar područja konvergencije od $X(z)$ onda područje konvergencije sadrži i sve krugove određene s

$$r_0 < |z| < +\infty. \tag{24}$$

Tvrdnja slijedi izravo iz (2) jer povećavanje modula r u sumaciji koja počinje od nekog n_0 i ide do $+\infty$ samo dodatno prigušuje signal i smanjuje vrijednost apsolutne sume.

Područje konvergencije kauzalnih signala

Navedeno svojstvo konvergencije desnih signala je izuzetno važno u obradbi stvarnih kauzalnih signala.

> Odabir dovoljno velikog r osigurava konvergenciju i omogućava postojanje Z transformacije kauzalnih signala eksponencijalnog rasta koji NISU apsolutno zbrojivi.

Za signal $x[n]$ kažemo da ne raste brže od eksponencijale ako postoje pozitivni brojevi $k, r \in \mathbb{R}^+$ takvi da je

$$\big|x[n]\big| \leq k \cdot r^n \tag{25}$$

To je značajno poboljšanje u odnosu na Fourierovu transformaciju, a i glavni je razlog zašto koristimo nepozitivne potencije z^{-n}.

Područje konvergencije lijevih signala

Kažemo da je signal $x[n]$ lijevi ili lijevostrani ako postoji konačan korak n_0 takav da je $x[n] = 0$ za sve $n > n_0$.

Poseban slučaj lijevog signala za $n_0 = 0$ je antikauzalni signal.

Ako je $x[n]$ lijevi signal sa Z transformacijom $X(z)$ i
ako je krug $|z| = r_0$ unutar područja konvergencije od $X(z)$
onda područje konvergencije sadrži i sve krugove određene s

$$0 < |z| < r_0. \tag{26}$$

Tvrdnja opet slijedi izravo iz (2) jer smanjenje modula r u sumaciji koja ide od $-\infty$ od nekog n_0 samo dodatno prigušuje signal i smanjuje vrijednost apsolutne sume.

Primjer za četiri različita signala

Odredite Z transformacije i pripadna područja konvergnecije sljedećih vremenski diskrentih signala:

1. $x_1[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu[n]$ (apsolutno zbrojivi desni signal)
2. $x_2[n] = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu[-n-1]$ (apsolutno NEzbrojivi lijevi signal)
3. $x_3[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n \mu[n]$ (apsolutno NEzbrojivi desni signal)
4. $x_4[n] = -\left(\frac{3}{2}\right)^n \mu[-n-1]$ (apsolutno zbrojivi lijevi signal)

Uzimanjem u obzir da jedinična stepenica $\mu[\cdot]$ ograničava sumu izravnim računanjem po definiciji jednostavno dobivamo tražena rješenja kao sume geometrijskih redova.

Transformacije nisu različite

Z transformacije četiri zadana signala su redom:

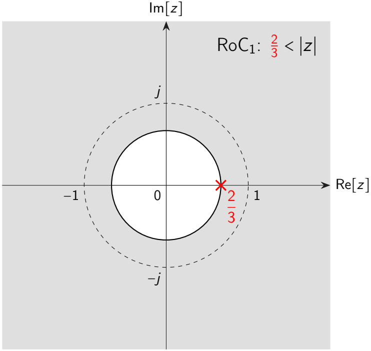
1. $X_1(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{2}{3z}} = \dfrac{3z}{3z - 2}, \quad \frac{2}{3} < |z|$
2. $X_2(z) = 1 - \dfrac{1}{1 - \frac{3z}{2}} = \dfrac{3z}{3z - 2}, \quad |z| < \frac{2}{3}$
3. $X_3(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{3}{2z}} = \dfrac{2z}{2z - 3}, \quad \frac{3}{2} < |z|$
4. $X_4(z) = 1 - \dfrac{1}{1 - \frac{2z}{3}} = \dfrac{2z}{2z - 3}, \quad |z| < \frac{3}{2}$

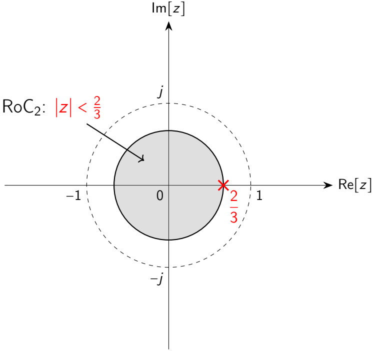
Vidimo da su dobivene kompleksne funkcije $X_1(z)$ i $X_2(z)$ te $X_3(z)$ i $X_4(z)$ identične.

No **područja konvergencije** su različita.

Područja konvergencije za prva dva signala

Dva područja konvergencije funkcije $X_1(z) = X_2(z) = \dfrac{3z}{3z-2}$ su:

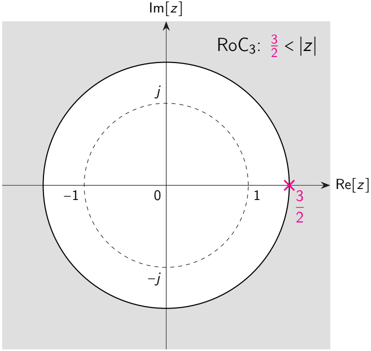


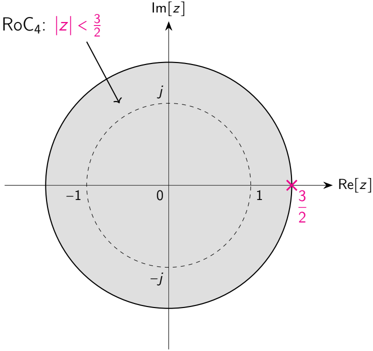


$x_1[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu[n]$ $\qquad$ $x_2[n] = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu[-n-1]$

Područja konvergencije za druga dva signala

Dva područja konvergencije funkcije $X_3(z) = X_4(z) = \dfrac{2z}{2z - 3}$ su:





$x_3[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n \mu[n]$

$x_4[n] = -\left(\frac{3}{2}\right)^n \mu[-n-1]$

Svojstva Z transformacije

Neka svojstva Z transformacije su
(od najvažnijeg prema manje važnima):

1. linearnost transformacije,
2. pomak u vremenskoj domeni,
3. teorem o konvoluciji,
4. prigušenje u vremenskoj domeni,
5. diferenciranje u vremenskoj domeni,
6. sumiranje u vremenskoj domeni,
7. deriviranje u domeni transformacije,
8. nadočitavanje i podočitavanje signala, itd.

Iskazivanje i izvod su čisto tehnički pa ih ostavljamo za samostalni rad, a osim toga bitna svojstva su navedena i u pregledu formula.

Linearnost, pomak i teorem o konvoluciji

Najvažnija svojstva su linearnost, pomak u vremenskoj domeni, i teorem o konvoluciji.

Svojstva linearnosti i pomaka u vremenskoj domeni nam omogućavaju da Z transformaciju primjenimo na linearnu diferencijsku jednadžbu.

Prema tome osim signala moći ćemo transformirati i jednadžbe, i to ćemo pokazati u sljedećoj cjelini.

Teorem o konvoluciji je vezan uz odabir diskretne eksponecijale kao jezgre Z transformacije i pomoću njega možemo pokazati da Z transformacija **lineanu diferencijsku jednadžbu sa stalnim koeficijentima** uvijek pretvara u **algebarsku jednadžbu** koju je jednostavnije riješiti.

Jednostrane Z transformacije

Početna definicija Z transformacije (1) sadrži sumu koja ide od $-\infty$ do $+\infty$, odnosno

$$X(z) = \mathcal{Z}\big[x[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \tag{27}$$

Takvu transformaciju nazivamo **dvostranom** ili **bilateralnom** Z transformacijom.

Kako su kauzalni i antikauzalni signali od posebnog interesa često definiramo i **jednostrane** ili **unilaterlane** Z transformacije kao

$$X_c(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\mu[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n} \tag{28}$$

ili kao

$$X_a(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\mu[-n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} x[n] z^{-n} \tag{29}$$

Jednostrana Z transformacije

Kada se u kontekstu obradbe **vremenskih** signala govori o Z transformaciji bez posebnog isticanja o kojoj transformaciji se radi onda se najčećše podrazumijeva jednostrana Z transformacija kauzalnih signala:

$$X(z) = \mathcal{Z}\big[x[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}. \tag{30}$$

Izraz za inverznu jednostranu Z transformaciju je isti kao i za dvostranu transformaciju, dakle

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\big[X(z)\big] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1}\, dz. \tag{31}$$

Područje konvergnecije jednostrane Z transformacije

Kod jednostrane Z transformacije pretpostavljamo kauzalni signal koji je poseban slučaj desnog signala.

Prema tome područje konvergencije jednostrane Z transformacije je određeno svojstvom da obuhvaća beskonačnost (vidi svojstvo područja konvergencije desnih signala).

To nam omogućuje ispustimo informaciju o području konvergencije jer znamo da je područje konvergnecije uvijek oblika

$$r < |z|, \tag{32}$$

pa zato pripadni r možemo uvijek odrediti iz zadanog $X(z)$, npr. kroz određivanje svih singulariteta kompleksne funkcije $X(z)$.

Inverzna jednostrana Z transformacija

U obradbi signala najčešće se susrećemo sa Z transformacijama koje su racionalne funkcije odnosno koje su kvocijent dvaju polinoma, dakle

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \tag{33}$$

Polinom $B(z)$ je brojnik racionalne funkcije.

Polinom $A(z)$ je nazivnik racionalne funkcije.

Tada umjesto krivuljnog integrala (20) signal $x[n]$ iz transformacije $X(z)$ određujemo jednostavnijim postupcima:

1. izravnim očitavanjem,
2. dijeljenjem polinoma, i
3. rastavom na parcijalne razlomke.

Izravno očitavanje

Izravno očitavanje je ograničeno na poseban slučaj racionalne funkcije u kojoj je nazivnik $A(z)$ trivijalan:

1. $A(z)$ je konstanta,
2. $A(z)$ ima jedan ili više korijena samo u $z = 0$, i
3. $A(z)$ ima jedan ili više korijena samo u $z = \infty$.

U sva tri slučaja racionalna funkcija se svodi na oblik

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = a \cdot z^k \cdot B(z), \tag{34}$$

gdje su $a \in \mathbb{C}$ i $k \in \mathbb{Z}$ konstante.

$X(z)$ u tom slučaju možemo odmah prikazati kao polinom po z^{-n} pa sukladno definiciji Z transformacije odmah znamo da koeficijent uz z^{-n_0} odgovara vrijednosti signala $x[n]$ u koraku $n = n_0$.

Primjer izravnog očitavanja

Odredite inverznu Z transformaciju od $X(z) = \dfrac{z^3 + 4z + 5}{z^3}$.

Vrijedi

$$X(z) = \frac{z^3 + 4z + 5}{z^3} = 1 + 4z^{-2} + 5z^{-3}, \tag{35}$$

pa odmah vidimo da signal $x[n]$ ima samo tri uzorka različita od nule, i to u koracima 0, 2 i 3.

Prema tome traženi signal je

$$x[n] = \delta[n] + 4\delta[n-2] + 5\delta[n-3] = \{\underline{1}, 0, 4, 5\}. \tag{36}$$

Izravno očitavanje i područje konvergencije

Primijetite da u prethodnom primjeru područje konvergencije nije bilo zadano!

Naime, kada racionalnu funkciju $X(z)$ možemo svesti na oblik

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = a \cdot z^k \cdot B(z), \tag{37}$$

onda je očito da je područje konvergencije cijela kompleksna ravnina, a ovisno o odnosu potencije k i reda polinoma $B(z)$ možda bez nule ili beskonačnosti.

Takvo područje konvergencije imaju samo signali **konačnog trajanja** za koje postoje konačni koraci n_1 i n_2, $n_1 < n_2$, takvi da je $x[n] = 0$ za $n < n_1$ i za $n > n_2$.

Dijeljenje polinoma

Ako nazivnik $A(z)$ nije trivijalan onda ne možemo izravno očitati vrijednosti signala.

No možemo podijeliti brojnik $B(z)$ s nazivnikom $A(z)$ kako bi numerički odredili vrijednosti signala $x[n]$.

Za dijeljenje koristimo klasični postupak dijeljenja cijelih (ili decimalnih) brojeva tako da koeficijente uz različite potencije od z interpretiramo kao znamenke na odgovarajućem decimalnom mjestu u klasičnom postupku dijeljenja.

Pri tome postoje dva moguća izbora redoslijeda koeficijenata polinoma.

Izbor redoslijeda koeficijenata

Kada koeficijente polinoma uz potencije od z interpretiramo kao znamenke imamo dva moguća izbora redoslijeda.

Možemo ih poredati silazno ili uzlazno po potencijama od z.

Ako koeficijente poredamo silazno po potencijama (prvo dolazi najviša potencija) onda pretpostavljamo desni signal.

Ako koeficijente poredamo uzlazno po potencijama (prvo dolazi najniža potencija) onda pretpostavljamo lijevi signal.

Prema tome inverzija dijeljenjem je primjenjiva samo ako područje konvergnecije sadrži ili nulu ili beskonačnost.

Inverz dijeljenjem polinoma

Odredite desni i lijevi signal pridružen transformaciji

$$X(z) = \frac{3z}{3z-2}. \tag{38}$$

Za desni signal potencije i u brojniku i u nazivniku sortiramo silazno pa dijelimo polinome:

$$3z : (3z-2) \tag{39}$$

Za lijevi signal potencije i u brojniku i u nazivniku sortiramo uzlazno pa dijelimo polinome:

$$3z : (-2+3z) \tag{40}$$

Očekujemo rezultat u skaldu s primjerom 2. gdje smo iz dva različita signala dobili ovdje zadanu prijenosnu funkciju.

Desni signal

Dijelimo polinom $3z$ s polinomom $3z-2$:

$$
\begin{array}{llllll}
3z : (3z-2) = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{4}{9}z^{-2} + \frac{8}{27}z^{-3} + \frac{16}{81}z^{-4} + \frac{32}{243}z^{-5} + \cdots \\
\underset{-}{}3z \quad \underset{+}{-2} \\
\hline
\quad \underset{-}{2} \quad \underset{+}{-}\frac{4}{3}z^{-1} \\
\hline
\quad\quad \underset{-}{\frac{4}{3}z^{-1}} \quad \underset{+}{-}\frac{8}{9}z^{-2} \\
\hline
\quad\quad\quad \underset{-}{\frac{8}{9}z^{-2}} \quad \underset{+}{-}\frac{16}{27}z^{-3} \\
\hline
\quad\quad\quad\quad \underset{-}{\frac{16}{27}z^{-3}} \quad \underset{+}{-}\frac{32}{81}z^{-4} \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad \frac{32}{81}z^{-4} \quad -\frac{48}{243}z^{-5}
\end{array}
$$

Usporedite dobiveni rezultat sa signalom $x_1[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu[n]$.

Lijevi signal

Dijelimo polinom $3z$ s polinomom $-2+3z$:

$$
\begin{array}{llllllll}
3z & : & (-2+3z) = -\frac{3}{2}z - \frac{9}{4}z^2 - \frac{27}{8}z^3 - \frac{81}{16}z^4 - \frac{243}{32}z^5 - \frac{729}{64}z^6 - \cdots \\
\underset{-}{3z} & \underset{+}{-}\frac{9}{2}z^2 \\
\hline
 & \underset{-}{\frac{9}{2}z^2} & \underset{+}{-}\frac{27}{4}z^3 \\
\hline
 & & \underset{-}{\frac{27}{4}z^3} & \underset{+}{-}\frac{81}{8}z^4 \\
\hline
 & & & \underset{-}{\frac{81}{8}z^4} & \underset{+}{-}\frac{243}{16}z^5 \\
\hline
 & & & & \underset{-}{\frac{243}{16}z^5} & \underset{+}{-}\frac{729}{32}z^6 \\
\hline
 & & & & & \frac{729}{32}z^6 & -\frac{2187}{64}z^7
\end{array}
$$

Usporedite dobiveni rezultat sa signalom $x_2[n] = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu[-n-1]$.

Rastav na parcijalne razlomke

Rastav na parcijalne razlomke omogućuje jednostavno računanje inverzne Z transformacije svake racionalne funkcije.

Kod klasičnog rastava na parcijalne razlomke tražimo rastav oblika

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = R(z) + \sum_k \frac{P_k(z)}{Q_k(z)}, \tag{41}$$

gdje je $R(z)$ običan polinom,
gdje su svi $Q_k(z)$ ireducibilni polinomi, i
gdje su svi $P_k(z)$ polinomi reda manjeg od pripadnog $Q_k(z)$.

U rastavu (41) svaki od članova prepoznajemo kao neki od osnovnih signala, tipično $R(z)$ izravno očitavamo dok svaki parcijalni razlomak $P_k(z)/Q_k(z)$ prepoznajemo kao sumu geometrijskog reda nekog desnog signala.

Rastav je po z^{-1} umjesto po z

Normalan oblik racionalne funkcije $X(z)$ koji se javlja kod jednostrane Z transformacije jest

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}. \tag{42}$$

Dodatno, jednostrana transformacija signala $x[n] = {q_k}^n \mu[n]$ koja bi trebala odgovarati jednom parcijalnom razlomku $P_k(z)/Q_k(z)$ je

$$\mathcal{Z}\big[{q_k}^n \mu[n]\big] = \frac{1}{1 - q_k z^{-1}} \stackrel{?}{=} \frac{P_k(z)}{Q_k(z)}. \tag{43}$$

Zbog navedenog kod jednostrane Z transformacije rastav na parcijalne razlomke vršimo po z^{-1} umjesto po z.

Slučaj jednostrukih korijena nazivnika

Neka su svi korijeni nazivnika $A(z)$ jednostruki.

Onda je rastav na parcijalne razlomke po z^{-1} oblika

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = R(z) + \sum_k \frac{p_k}{1 - q_k z^{-k}}, \tag{44}$$

gdje su p_k i q_k konstante i gdje je $R(z)$ polinom po z^{-1} reda $M - N$ koji postoji samo ako je $M \geq N$.

Savjet: O rastavu po z^{-1} je najjednostavnije razmišljati preko supstitucije $z^{-1} \mapsto x$ nakon koje se dobije racionalna funkcija po x koja se rastavlja prema standardnom rastavu na parcijalne razlomke.

Napomena: Slučaj višestrukih korijena samostalano proučite.

Inverz rastavom na parcijalne razlomke

Zadana je transformacija $X(z) = \dfrac{144 - 110z^{-1} + 20z^{-2}}{(2 - z^{-1})(3 - z^{-1})(4 - z^{-1})}$.

Rastavite $X(z)$ na parcijalne razlomke i zatim odredite $x[n]$.

Nazivnik zadane $X(z)$ ima točno tri korijena:
$z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{3}$ i $z_3 = \frac{1}{4}$.

Područje konvergnecije za jednostranu transformaciju određeno je najvećim modulom korijena pa je zato RoC: $\frac{1}{2} < |z|$.

Rastav kojeg tražimo je oblika

$$\frac{144 - 110z^{-1} + 20z^{-2}}{(2 - z^{-1})(3 - z^{-1})(4 - z^{-1})} = \frac{A}{2 - z^{-1}} + \frac{B}{3 - z^{-1}} + \frac{C}{4 - z^{-1}} \qquad (45)$$

Inverz rastavom na parcijalne razlomke

Vrijednosti za A, B i C možemo odrediti metodom neodređenih koeficijenta, no brži postupak jest množenje rastava s pojedinim nazivnikom te uzimanje limesa kada z^{-1} teži u pripadni pol.

Tada imamo:

$$A = \lim_{z \to \frac{1}{2}} (2 - z^{-1}) X(z) = \frac{144 - 110 \cdot 2 + 20 \cdot 2^2}{(3-2)(4-2)} = 2 \tag{46}$$

$$B = \lim_{z \to \frac{1}{3}} (3 - z^{-1}) X(z) = \frac{144 - 110 \cdot 3 + 20 \cdot 3^2}{(2-3)(4-3)} = 6 \tag{47}$$

$$C = \lim_{z \to \frac{1}{4}} (4 - z^{-1}) X(z) = \frac{144 - 110 \cdot 4 + 20 \cdot 4^2}{(2-4)(3-4)} = 12 \tag{48}$$

Napomena: Ovaj postupak je valjan samo za jednostruke korijene.

Inverz rastavom na parcijalne razlomke

Dobiveni rastav jest

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{144 - 110z^{-1} + 20z^{-2}}{(2 - z^{-1})(3 - z^{-1})(4 - z^{-1})} \\ &= \frac{2}{2 - z^{-1}} + \frac{6}{3 - z^{-1}} + \frac{12}{4 - z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}. \end{aligned} \tag{49}$$

Traženi signal je prema tome

$$x[n] = \left(2^{-n} + 2 \cdot 3^{-n} + 3 \cdot 4^{-n}\right) \mu[n]. \tag{50}$$

Svojstva jednostrane Z transformacije

Svojstva jednostrane Z transformacije su u osnovi ista kao i svojstva dvostrane Z transformacije.

Jednostranu Z transformaciju uobičajeno interpretiramo kao transformaciju koja uzima u obzir samo vrijednosti signala za nenegativne korake n, odnosno

$$X(z) = \mathcal{Z}\big[x[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}. \tag{51}$$

U toj interpretaciji pomak signala ili uklanja ili dodaje uzorke koji ulaze u sumu jednostrane Z transformacije pa se samim time sva svojstva na koja to utječe mijenjaju.

O tome detaljnije u sljedećoj cjelini.

Definicija Laplaceove transformacije

Dvostrana Laplaceova transformacija vremenski kontinuiranom signalu $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pridružuje funkciju kompleksne varijable $X(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takvu da vrijedi

$$X(s) = \mathcal{L}\big[x(t)\big] = \int_{t \in \mathbb{R}} x(t) e^{-st} \, dt. \tag{52}$$

Pri tome integral (52) mora konvergirati u nekom smislu.

Slično kao kod Z transformacije obično zahtjevamo **apsolutnu konvergenciju**.

Područje konvergencije

Svaki kompleksni broj s možemo prikazati preko njegovog realnog $\sigma = \mathrm{Re}[s]$ i imaginarnog dijela $\Omega = \mathrm{Im}[s]$, odnosno $s = \sigma + j\Omega$.

Želimo apsolutnu integrabilnost:

$$\begin{aligned} \int_{t\in\mathbb{R}} \left| x(t) e^{-st} \right| dt &= \int_{t\in\mathbb{R}} \left| x(t) e^{-(\sigma + j\Omega)t} \right| dt \\ &= \int_{t\in\mathbb{R}} \left| x(t) \right| e^{-\sigma t} \, dt < \infty. \end{aligned} \tag{53}$$

Prema dobivenom apsolutna integrabilnost ovisi samo o realnom dijelu σ, dakle ako suma konvergira za neki $s_0 = \sigma_0 + j\Omega_0$ onda konvergira i za sve $\mathrm{Re}[s] = \sigma_0$ koji zajedno leže na vertikalnom pravcu.

Područje konvergencije ili RoC se prema tome sastoji od vertikalnih pravaca koji zajedno tvore **pruge**.

Primjer dvostrane Laplaceove transformacije

Odredite dvostranu Laplaceovu transformaciju signala $x(t) = e^{-3|t|}$.

Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} e^{-st}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{3t} e^{-st}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-3t} e^{-st}\, dt \\
&= \underbrace{\frac{1}{3-s} e^{(3-s)t}\Bigg|_{-\infty}^{0}}_{X_a(s)} + \underbrace{\frac{1}{-3-s} e^{(-3-s)t}\Bigg|_{0}^{+\infty}}_{X_c(s)} \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Razmotrimo konvergenciju dobivenih članova $X_a(s)$ i $X_c(s)$.

Primjer dvostrane Laplaceove transformacije

Član $X_a(s)$ konvergira u

$$\frac{1}{3-s} \tag{55}$$

za

$$\mathrm{Re}[3-s] > 0 \quad \text{ili} \quad \mathrm{Re}[s] = \sigma < 3. \tag{56}$$

Član $X_c(s)$ konvergira u

$$\frac{1}{3+s} \tag{57}$$

za

$$\mathrm{Re}[-3-s] < 0 \quad \text{ili} \quad -3 < \mathrm{Re}[s] = \sigma. \tag{58}$$

Oba uvjeta zajedno definiraju područje konvergencije

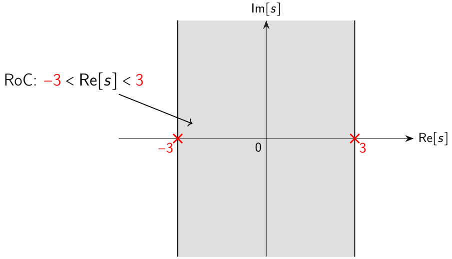
$$-3 < \mathrm{Re}[s] < 3. \tag{59}$$

Primjer dvostrane Laplaceove transformacije

Kažemo da je dvostrana L transformacija signala $x(t)$ funkcija $X(s)$ na određenom područje konvergencije što zapisujemo kao

$$\mathcal{L}\left[e^{-3|t|}\right] = \frac{1}{3-s} + \frac{1}{3+s} = \frac{6}{9-s^2}, \quad -3 < \mathrm{Re}[s] < 3. \tag{60}$$

Područje konvergencije ili RoC je pruga (engl. *stripe*) u kompleksnoj ravnini s:



Inverzna Laplaceova transformacija

Inverzna Laplaceova transformacija je definirana krivuljnim integralom po nekoj vertikalnoj liniji unutar područja konvergencije Laplaceove transformacije (Bromwichev integral).

Izraz za inverznu Laplaceovu transformaciju navodimo bez dokaza:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds \tag{61}$$

U integralu (61) konstanta σ je takva da se vertikalni pravac integracije nalazi unutar područja konvergencije.

Slično kao i za Z transformaciju integral (61) uvijek izbjegavamo ako radimo s Laplaceovim transformacijama koje su racionalne funkcije po s.

Veza Laplaceove transformacije i CTFT-a

Ako se imaginarna os $s = j\Omega$ u kompleksnoj ravnini s nalazi unutar područja konvergencije onda zamjenom

$$s \mapsto j\Omega \tag{62}$$

iz Laplaceove transformacije $X(s)$ signala $x(t)$ dobivamo CTFT transformaciju tog signala.

Istom zamjenom (62) krivuljni integral (61) postaje izraz za predstavljanje signala kod CTFT-a, odnosno

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} \, d\Omega. \tag{63}$$

Primijetite da ovdje spektar signala zapisujemo kao $X(j\Omega)$ iako spektar ovisi samo o frekvenciji Ω.

Bilješka o notaciji

Kod CTFT smo spektar signala $x(t)$ označavali velikim slovom X, a kako spektar X ovisi samo o realnoj frekvenciji $\Omega \in \mathbb{R}$ jednostavno smo pisali $X(\Omega)$.

Laplaceovu transformaciju signala $x(t)$ slično opet označavamo velikim slovom X, no sada se radi o funkciji kompleksne varijable s.

Stoga ako koristimo obje transformacije onda veliko slovo X označava isključivo Laplaceovu transformaciju $X(s)$ signala $x(t)$, i to je razlog zašto se u udžbenicima spektar označava s $X(j\Omega)$.

Ako želimo biti potpuno precizni možemo dodati indekse pa pisati

$$X_{\mathcal{L}}(j\Omega) = X_{\mathrm{CTFT}}(\Omega), \tag{64}$$

pri čemu je $X_{\mathcal{L}} : \mathrm{RoC} \to \mathbb{C}$ Laplaceova transformacija signala i pri čemu je $X_{\mathrm{CTFT}} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourierov spektar signala.

Područje konvergencije desnih signala

Kažemo da je signal $x(t)$ desni signal ako postoji konačan trenutak t_0 takav da je $x(t) = 0$ za sve $t < t_0$.

Poseban slučaj desnog signala za $t_0 = 0$ je kauzalni signal.

Ako je $x(t)$ desni signal s Laplaceovom transformacijom $X(s)$ i ako je pravac $\mathrm{Re}[s] = \sigma_0$ unutar područja konvergencije onda područje konvergencije sadrži i pravce

$$\sigma_0 < \mathrm{Re}[s] < +\infty. \tag{65}$$

Tvrdnja slijedi izravo iz (53) jer povećavanje realnog dijela σ u integralu koji počinje od nekog t_0 i ide do $+\infty$ samo dodatno prigušuje signal i smanjuje vrijednost integrala.

Područje konvergencije kauzalnih signala

Navedeno svojstvo konvergencije desnih signala je izuzetno važno u obradbi stvarnih kauzalnih signala.

Odabir dovoljno velikog σ osigurava konvergenciju i omogućava postojanje Laplaceove transformacije kauzalnih signala eksponencijalnog rasta koji NISU apsolutno integrabilni.

Za signal $x(t)$ kažemo da ne raste brže od eksponencijale ako postoje pozitivni brojevi $k, \sigma \in \mathbb{R}^+$ takvi da je

$$\left|x(t)\right| \leq ke^{\sigma t}. \tag{66}$$

To je značajno poboljšanje u odnosu na CTFT.

Područje konvergencije lijevih signala

Kažemo da je signal $x(t)$ lijevi signal ako postoji konačan trenutak t_0 takav da je $x(t) = 0$ za sve $t > t_0$.

Poseban slučaj lijevog signala za $t_0 = 0$ je antikauzalni signal.

Ako je $x(t)$ lijevi signal s Laplaceovom transformacijom $X(s)$ i ako je pravac $\mathrm{Re}[s] = \sigma_0$ unutar područja konvergencije onda područje konvergencije sadrži pravce

$$\infty < \mathrm{Re}[s] < \sigma_0. \tag{67}$$

Tvrdnja opet slijedi izravo iz (53) jer smanjenje realnog dijela σ u integralu koji ide od $-\infty$ od nekog t_0 samo dodatno prigušuje signal i smanjuje vrijednost integrala.

Primjer za četiri različita signala

Odredite dvostrane Laplaceove transformacije i pripadna područja konvergencije sljedećih vremenski kontinuiranih signala:

1. $x_1(t) = e^{-t}\,\mu(t)$ (apsolutno integrabilni desni signal)
2. $x_2(t) = -e^{-t}\,\mu(-t)$ (apsolutno NEintegrabilni lijevi signal)
3. $x_3(t) = e^{t}\,\mu(t)$ (apsolutno NEintegrabilni desni signal)
4. $x_4(t) = -e^{t}\,\mu(-t)$ (apsolutno integrabilni lijevi signal)

Uzimanjem u obzir da jedinična stepenica $\mu(\pm t)$ ograničava integral izravnim računanjem integrala jednostavno dobivamo tražena rješenja.

Transformacije nisu različite

Dvostrane Laplaceove transformacije četiri zadana signala su redom:

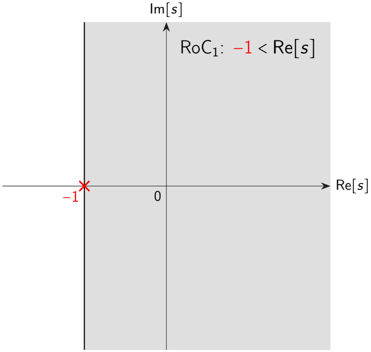
1. $X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}, \quad -1 < \mathrm{Re}[s]$
2. $X_2(s) = \dfrac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}[s] < -1$
3. $X_3(s) = \dfrac{1}{s-1}, \quad 1 < \mathrm{Re}[s]$
4. $X_4(s) = \dfrac{1}{s-1}, \quad \mathrm{Re}[s] < 1$

Vidimo da su dobivene kompleksne funkcije $X_1(s)$ i $X_2(s)$ te $X_3(s)$ i $X_4(s)$ identične.

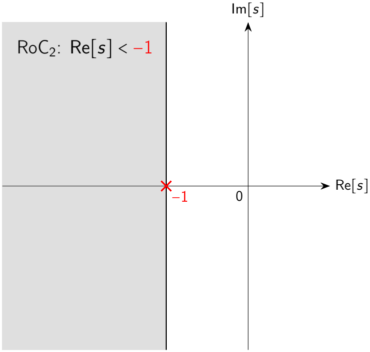
No **područja konvergencije** su različita.

Područja konvergencije za prva dva signala

Dva područja konvergencije funkcije $X_1(s) = X_2(s) = \dfrac{1}{s+1}$ su:



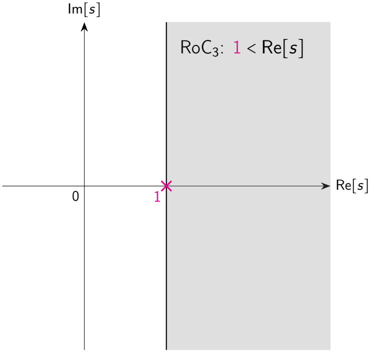
$x_1(t) = e^{-t}\,\mu(t)$



$x_2(t) = -e^{-t}\,\mu(-t)$

Područja konvergencije za druga dva signala

Dva područja konvergencije funkcije $X_3(s) = X_4(s) = \dfrac{1}{s-1}$ su:



$x_3(t) = e^t \mu(t)$ $\qquad$ $x_4(t) = -e^t \mu(-t)$

Svojstva Laplaceove transformacije

Neka svojstva Laplaceove transformacije su
(od najvažnijeg prema manje važnima):

1. linearnost transformacije,
2. deriviranje i integriranje u vremenskoj domeni,
3. teorem o konvoluciji,
4. pomak u vremenu i prigušenje u frekvenciji,
5. prigušenje u vremenu i pomak u frekvenciji,
6. deriviranje i integrirajne u domeni transformacije, itd.

Iskazivanje i izvod su čisto tehnički pa ih ostavljamo za samostalni rad, a osim toga bitna svojstva su navedena i u pregledu formula.

Linearnost, deriviranje i teorem o konvoluciji

Najvažnija svojstva su linearnost, deriviranje u vremenskoj domeni, i teorem o konvoluciji.

Svojstva linearnosti i deriviranja u vremenskoj domeni nam omogućavaju da Laplaceovu transformaciju primjenimo na linearnu diferencijalnu jednadžbu.

Prema tome osim signala moći ćemo transformirati i jednadžbe, i to ćemo pokazati u sljedećoj cjelini.

Teorem o konvoluciji je vezan uz odabir eksponecijalne funkcije kao jezgre Laplaceove transformacije i pomoću njega možemo pokazati da Laplaceova transformacija **lineanu diferencijalnu jednadžbu sa stalnim koeficijentima** uvijek pretvara u **algebarsku jednadžbu** koju je jednostavnije riješiti.

Jednostrane Laplaceove transformacije

Početna definicija Laplaceove transformacije (52) sadrži integral koji ide od $-\infty$ do $+\infty$, odnosno

$$X(s) = \mathcal{L}\big[x(t)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt \tag{68}$$

Takvu transformaciju nazivamo **dvostranom** ili **bilateralnom** Laplaceovom transformacijom.

Kako su kauzalni i antikauzalni signali od posebnog interesa često definiramo i **jednostrane** ili **unilaterlane** transformacije kao

$$X_c(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mu(t)e^{-st}\,dt = \int_{0}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt \tag{69}$$

ili kao

$$X_a(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mu(-t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0} x(t)e^{-st}\,dt \tag{70}$$

Jednostrana Laplaceova transformacija

Kada se u kontekstu obradbe **vremenskih** signala govori o Laplaceovoj transformaciji bez posebnog isticanja o kojoj transformaciji se radi onda se gotovo UVIJEK podrazumijeva jednostrana Laplaceova transformacija kauzalnih signala:

$$X(s) = \mathcal{L}\big[x(t)\big] = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt. \tag{71}$$

U (71) donja granica 0^- znači da integral obuhvaća točku $t = 0$ što je potrebno naglasiti jer jasno definira vrijednost integrala za slučaj kada u $t = 0$ postoji Diracova funkcija.

Izraz za inverznu jednostranu Laplaceovu transformaciju je u osnovi isti kao i za dvostranu transformaciju, dakle

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[X(s)\big] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st}\, ds. \tag{72}$$

Inverzna jednostrana Laplaceova transformacija

U obradbi signala se najćešće susrećemo s Laplaceovim transformacijama koje su racionalne funkcije (ili kvocijent dvaju polinoma), odnosno

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}. \tag{73}$$

Tada umjesto krivuljnog integrala (61) signal $x(t)$ iz $X(s)$ gotovo uvijek određujemo rastavom na **parcijalne razlomke**.

Kod Laplaceove transformacije rastav vršimo po varijabli s što odgovara normalnom rastavu na parcijalne razlomke (za razliku od Z transformacije gdje je rastav po varijabli z^{-1}).

Rastav na parcijalne razlomke ovdje preskačemo i ostavljamo ga za samostalni rad.

Svojstva jednostrane Laplaceove transformacije

Svojstva jednostrane Laplaceove transformacije su u osnovi ista kao i svojstva dvostrane Laplaceove transformacije.

Jednostranu transformaciju uobičajeno interpretiramo kao transformaciju koja uzima u obzir samo vrijednosti signala za $t \geq 0$, odnosno

$$X(s) = \mathcal{L}\big[x(t)\big] = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt. \tag{74}$$

Kod rješavanja diferencijalnih jednadžbi koristimo svojstvo derivacije, no prva i više derivacije u rubnoj točci $t = 0^-$ ovise o vrijednostima signala za $t < 0$ što uvodi slobodne parametre kojih nema kod dvostrane transformacije.

O tome detaljnije u sljedećoj cjelini.

Preporučeno čitanje

- P. Prandoni, M. Vetterli, "Signal Processing for Communications" (`https://sp4comm.org/`), poglavlje 6., dio 6.1.
- B. Jeren, "Signali i sustavi", Školska knjiga, 2021., dijelovi 4.9., 4.10., 4.11, i 4.12.
- H. Babić, "Signali i sustavi" (`http://sis.zesoi.fer.hr/predavanja/pdf/sis_2001_skripta.pdf`), dio 6.7. i poglavlje 12.
- M. Vetterli, J. Kovačević, V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing" (`https://fourierandwavelets.org/`), poglavlje 3. dio 3.5. i poglavlje 4. dio 4.4.6.
- N. Elezović, "Diskontna matematika 1" (`https://www.fer.unizg.hr/predmet/dismat1/materijali`), poglavlje 4.