



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

## Osnove obradbe signala – Četvrta domaća zadaća

Akadska školska godina 2021./2022.

Tomislav Petković

1. Razmatramo sustav  $S$  koji transformira ulazni signal  $x$  u izlazni signal  $y$ , odnosno

$$S[x] = y.$$

Od posebnog interesa su ulazni signali  $x$  za koje vrijedi

$$S[x] = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Takve posebne ulazne signale nazivamo svojstvenim funkcijama sustava  $S$ , a pridružene brojeve  $\lambda$  nazivamo svojstvenim vrijednostima.

- a) Ako je  $S[x[n]] = y[n]$  vremenski diskretan sustav opisan linearnom diferencijskom jednadžbom sa stalnim koeficijentima onda pokažite da je  $x[n] = z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , njegova svojstvena funkcija.
- b) Ako je  $S[x(t)] = y(t)$  vremenski kontinuiran sustav opisan linearnom diferencijalnom jednadžbom sa stalnim koeficijentima onda pokažite da je  $x(t) = e^{st}$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , njegova svojstvena funkcija.
- c) Ako promatramo vremenski kontinuiranu Fourierovu transformaciju kao sustav koji djeluje na vremenski kontinuirane kompleksne signale, odnosno ako

$$S[x(t)] = y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-jt\tau} d\tau,$$

onda pronađite barem jednu funkciju  $x(t)$  koja je svojstvena funkcija tog sustava.

2. Koji od zadanih sustava su linearni, koji su vremenski nepromjenjivi, a koji su kauzalni? Objasnite kako ste to odredili!

- a)  $S[x[n]] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$
- b)  $S[x[n]] = \sum_{m=n}^{+\infty} x[m]$
- c)  $S[x[n]] = 2x[n] + 5x[n-2]$
- d)  $S[x[n]] = x[n] \cdot x[n+2]$
- e)  $S[x[n]] = \sum_{m=0}^n x[m] 2^{n-m}$

3. Promatramo vremenski diskretan sustav opisan linearnom diferencijskom jednadžbom sa stalnim koeficijentima,

$$y[n] - y[n-1] - y[n-2] = x[n],$$

gdje je  $x[n]$  ulazni signal i gdje je  $y[n]$  izlazni signal.

- a) Iskažite zadanu jednadžbu preko operatora unaprijedne diferencije  $\Delta$ .

- b) Iskažite zadanu jednadžbu preko operatora unazadne diferencije  $\nabla$ .
- c) Skicirajte blokovski dijagram zadanog sustava.
- d) Nađite sva rješenja  $y_H[n]$  pripadne homogene diferencijske jednadžbe za koju je  $x[n] = 0$ , odnosno odredite jezgru pridruženog linearnog diferencijskog operatora.
- e) Odredite impulsni odziv zadane linearne diferencijske jednadžbe sa stalnim koeficijentima, odnosno riješite jednadžbu za ulaz  $x[n] = \delta[n]$  uz nulte početne uvjete.
- f) Ako je ulaz  $x[n] = 0$  i ako su početni uvjeti  $y[-1] = y[-2] = 1$  riješite zadanu jednadžbu za  $n \geq 0$ .

4. Zadane su sljedeće linearne diferencijske jednadžbe sa stalnim koeficijentima:

1.  $6y[n] + 5y[n-1] + y[n-2] = x[n]$
2.  $4y[n] + 4y[n-1] + y[n-2] = x[n]$
3.  $y[n] + 4y[n-1] + 4y[n-2] = x[n]$
4.  $2y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = x[n]$
5.  $y[n] - 2y[n-1] + 2y[n-2] = x[n]$

Za svaku od zadanih jednadžbi:

- a) Odredite karakterističnu jednadžbu pripadne diferencijske jednadžbe i nađite njene korijene.
- b) Nađite sva rješenja  $y_H[n]$  pripadne homogene diferencijske jednadžbe za koju je  $x[n] = 0$ , odnosno odredite jezgru pridruženog linearnog diferencijskog operatora.
- c) Odredite impulsni odziv, odnosno riješite jednadžbu za ulaz  $x[n] = \delta[n]$  uz nulte početne uvjete.
- d) Za vremenski diskretni signal  $x[n]$  kažemo da je prigušujući ako

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x[n] = 0$$

i da je raspirujući ako

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x[n] = \pm\infty.$$

Odredite je li impulsni odziv iz prethodnog podzadatka prigušujući ili raspirujući signal. Koji uvjet moraju zadovoljavati svi korijeni karakteristične jednadžbe da bi impulsni odziv bio prigušujući?

5.\* Promatramo vremenski kontinuirani sustav opisan linearnom diferencijalnom jednadžbom sa stalnim koeficijentima,

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t),$$

gdje je  $x(t)$  ulazni signal i gdje je  $y(t)$  izlazni signal.

- a) Skicirajte blokovski dijagram zadanog sustava.
- b) Nađite sva rješenja  $y_H(t)$  pripadne homogene diferencijalne jednadžbe za koju je  $x(t) = 0$ , odnosno odredite jezgru pridruženog linearnog diferencijalnog operatora.
- c) Odredite impulsni odziv zadane linearne diferencijalne jednadžbe sa stalnim koeficijentima, odnosno riješite jednadžbu za ulaz  $x(t) = \delta(t)$  uz nulte početne uvjete.
- d) Ako je ulaz  $x(t) = 0$  i ako su početni uvjeti  $y'(0) = y(0) = 1$  riješite zadanu jednadžbu za  $t \geq 0$ .

6.\* Zadane su sljedeće linearne diferencijalne jednačbe sa stalnim koeficijentima:

1.  $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$

2.  $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = x(t)$

3.  $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = x(t)$

4.  $y''(t) - 4y'(t) + 8y(t) = x(t)$

5.  $y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = x(t)$

Za svaku od zadanih jednačbi:

- Odredite karakterističnu jednačbu pripadne diferencijalne jednačbe i nađite njene korijene.
- Nađite sva rješenja  $y_H(t)$  pripadne homogene diferencijalne jednačbe za koju je  $x(t) = 0$ , odnosno odredite jezgru pridruženog linearnog diferencijalnog operatora.
- Odredite impulsni odziv, odnosno riješite jednačbu za ulaz  $x(t) = \delta(t)$  uz nulte početne uvjete.
- Za vremenski kontinuirani signal  $x(t)$  kažemo da je prigušujući ako

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

i da je raspirujući ako

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \pm\infty.$$

Odredite je li impulsni odziv iz prethodnog podzadatka prigušujući ili raspirujući signal. Koji uvjet moraju zadovoljavati svi korijeni karakteristične jednačbe da bi impulsni odziv bio prigušujući?