Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Osnove obradbe signala – Treća domaća zadaća

Akademska školska godina 2021./2022.

Tomislav Petković

1. Neka je $w_L[n]$ vremenski diskretni signal jedinične amplitude i duljine točno L uzoraka, odnosno

$$w_L[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < L \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Primijetite da je $w_L[n]$ pravokutni kauzalni vremenski otvor kojeg koristimo za modeliranje uzimanja prvih L uzoraka nekog signala $x[n]$ kroz promatranje umnoška $x[n]w_L[n]$.

a) Izračunajte DTFT zadanog signala $w_L[n]$.

b) Skicirajte amplitudni spektar. Označite centralnu laticu i prve bočne latice.

c) Izrazite širinu centralne latice preko L.
Uputa: Odredite razmak između dva prolaska kroz nulu koji određuju centralnu laticu.

d) Ako je vrh centralne latice na 0 dB, na kojoj vrijednosti u dB su vrhovi prvih bočnih latica?

Uputa: Amplitudni dio spektra $W_L(\omega)$ možemo prikazati u logaritamskoj skali amplitude koju mjerimo u decibelima. Ako je $A(\omega) = \left|W_L(\omega)\right|$ amplitudni dio spektra onda je $A_{\text{dB}}(\omega) = 20\log_{10} A(\omega)$ amplitudni spektar izražen u decibelima.

2. Neka je $w_L[n]$ centrirani trokutni vremenski otvor duljine $2L+1$, odnosno

$$w_L[n] = \begin{cases} 1 - \left|\frac{n}{L}\right|, & |n| < L \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

a) Izračunajte DTFT otvora $w_L[n]$.

b) Skicirajte amplitudni spektar. Označite centralnu laticu i prve bočne latice.

c) Izrazite širinu centralne latice preko L.
Uputa: Odredite razmak između dva prolaska kroz nulu koji određuju centralnu laticu.

d) Ako je vrh centralne latice na 0 dB na kojoj vrijednosti u dB su vrhovi prvih bočnih latica?

3. Razmatramo vremenski diskretni signal sastavljen od dvije sinusoide čije frekvencije su ω_1 i ω_2,

$$x[n] = \sin(\omega_1 n) + \sin(\omega_2 n),$$

takve da je $0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$. Signal $x[n]$ će biti ograničen na N uzoraka od $n = 0$ do $n = N-1$ što modeliramo kao množenje signala s vremenskim otvorom,

$$x_N[n] = x[n]\,\mathrm{rect}_N[n],$$

gdje je $\mathrm{rect}_N[n]$ kauzalni pravokutni vremenski otvor. Želimo procijeniti potreban najmanji potreban broj uzoraka N za koji će postojati jasno razdvajanje između dvije spektralne komponente na frekvencijama ω_1 i ω_2 u DTFT spektru.

a) Izrazite DTFT signala $x_N[n]$ preko transformacija $x[n]$ i $\mathrm{rect}_N[n]$. Uputa: Koristite teorem o konvoluciji.

b) Skicirajte amplitudni spektar signala $x[n]$.

c) Skicirajte amplitudni spektar signala $x_N[n]$. Jasno označite širine centralnih latica oko dvije sinusoidne komponente.

d) Koji je potreban broj uzoraka N ako želimo izbjeći bilo kakvo preklpanje centralnih latica? Uputa: izrazite broj uzoraka N preko $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

e) Koji je potreban broj uzoraka ako zamijenimo pravokutni otvor s trokutnim?

4.* U ovom zadatku razmatramo vezu između Fourierove i kosinusne transformacije.

Neka je $x[n]$ vremenski diskretni signal konačnog trajanja od N uzoraka. Prvo proširujemo signal $x[n]$ kako bi dobili signal $x_e[n]$ dvostruke duljine, odnosno

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n < N \\ x[2N-1-n], & N \le n < 2N \end{cases}.$$

Signal $x_e[n]$ ima $2N$ uzoraka s centrom simetrije na pola uzorka između koraka $n = N-1$ i $n = N$. Zatim periodički proširujemo $x_e[n]$ na $\tilde{x}_e[n]$ koji ima period $2N$ i koji je definiran za sve $n \in \mathbb{Z}$. Signalu $\tilde{x}_e[n]$ može biti pridružen vremenski kontinuirani signal

$$\tilde{x}_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_e[n]\delta(t-n),$$

kojeg naposlijetu pomičemo za pola uzorka na desno kako bi dobili $\tilde{x}_E(t)$, odnosno

$$\tilde{x}_E(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_e[n]\delta(t-n-\frac{1}{2}).$$

Signal $\tilde{x}_E(t)$ je sada parna funkcija koja je također periodična s periodom $2N$, pa prema tome može biti predstavljena preko vremenski kontinuiranog Fourierovog reda. Želimo pokazati da se dobiveni vremensko kontinuirani Fourierov red signala $\tilde{x}_E(t)$ može reducirati u diskretnu kosinusnu transformaciju.

a) Koristeći definiciju CTFS-a napišite formulu za računanje spektra $X_E[k] = \mathrm{CTFS}\big[\tilde{x}_E(t)\big]$.

b) Zatim zamijenite redoslijed sumacije i integracije kako bi pokazali da se Fourierov integral reducira na konačnu sumu od točno $2N$ članova.

c) Zatim razdvojite eksponencijalnu fukciju na sinusne i kosinusne članove te korištenjem svojstva parnih i neparnih nizova pokažite da samo kosinusni članovi ostaju.

d) Naposlijetu izrazite $X_e[k]$ preko točno N uzoraka polaznog niza konačnog trajanja $x[n]$.

e) Rješavanjem prethodna četiri podzadatka trebali ste doći do izraza za DCT do na faktor skaliranja. Usporedite vaš rezultat s izrazom za DCT u pregledu formula. Koje su razlike, ako ih ima? Objasnite!

5.* DCT-II transformacija je bliska Karhunenovoj i Loèveovoj transformaciji Markovljevog procesa prvog reda s korelacijskom matricom $\mathbf{R}$. Neka je $x[n]$ slučajni signal konačnog trajanja od N uzoraka u kojem su susjedne vrijednosti korelirane s koeficijentom korelacije $0 < \rho < 1$, odnosno korelacijska matrica od $x[n]$ je Toeplitzova matrica oblika

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{N-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{N-1} & \rho^{N-1} & \rho^{N-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Napišite računalni program koji računa svojstvene vektore matrice **R** za zadane duljinu signala N i koeficijent ρ.

b) Koristeći program iz podzadatka a) nacrtajte svojstvene vektore za $\rho = 0{,}9$ i $N = 8$.

c) Napišite računalni program koji računa bazne funkcije DCT-II transformacije za zadanu duljinu signala N.

d) Koristeći program iz podzadatka c) nacrtajte bazne funkcije od DCT-II za $N = 8$.

e) Jesu li grafovi dobiveni u podzadacima b) i d) slični? Objasnite!

f) Pokažite da kako se ρ približava 1 tako se svojstveni vektori od **R** približavaju baznim funkcijama od DCT-II.