Osnove obradbe signala

Završni ispit – 27. siječnja 2021.

1. **(6 bodova)** Promatramo vremenski-kontinuirani LTI sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t).$$

Tražimo ekvivalentni vremenski-diskretni LTI sustav korištenjem unazadne Eulerove metode uz period očitavanja $T = \frac{1}{10}$.

a) **(1 bod)** Odredite prijenosnu funkciju $H(s)$ vremenski-kontinuiranog LTI sustava.

b) **(2 boda)** Odredite prijenosnu funkciju $H(z)$ vremenski diskretnog LTI sustava unazadnom Eulerovom metodom.

c) **(1 bod)** Odredite jednadžu diferencija koja opisuje ekvivalentni vremenski diskretni LTI sustav.

d) **(2 boda)** Odredite polove i vremenski kontinuiranog i vremenski diskretnog LTI sustava. Jesu li oba sustava stabilna? Objasnite!

Uputa: Unazadna Eulerova metoda aproksimira derivaciju korištenjem unazadne diferencije pa vrijedi

$$x'(t) \approx \frac{x(nT) - x\big((n-1)T\big)}{T}.$$

2. **(6 bodova)** Promatramo digitalni filtar koji je zadan diferencijskom jednadžbom

$$y[n] = \frac{1}{9}\big(5u[n] - u[n-1] - 3y[n-1]\big).$$

Pri tome je $u[n]$ ulazni signal, a $y[n]$ izlazni signal.

a) **(2 boda)** Odredite prijenosnu funkciju filtra te nađite njene polove i nule.

b) **(1 bod)** Odredite impulsni odziv filtra. Je li filtar FIR ili IIR?

c) **(2 boda)** Odredite i skicirajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku filtra.

d) **(1 bod)** Koji od četiri tipa amplitudno selektivnih filtara (NP, VP, PP ili PB) najbolje opisuje promatrani filtar?

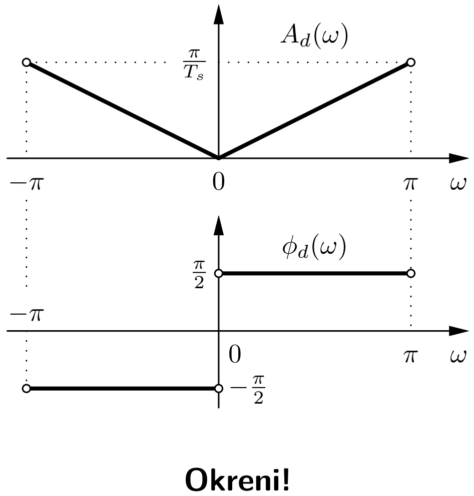
3. **(6 bodova)** Za svaku raspravu o filtriranju poželjno je poznavati kako izgledaju impulsni odzivi idealnih filtara. U ovom zadatku želimo odrediti impulsni odziv vremenski diskretnog sustava koji je idealna realizacija derivacije. Amplitudna karakteristika $A_d(\omega)$ i fazna karakteristika $\phi_d(\omega)$ idealne realizacije derivacije su prikazane na slici ispod. Neka je period očitavanja $T_s = 1$.

a) **(2 boda)** Iskažite $H_d(e^{j\omega}) = A_d(\omega)e^{j\phi_d(\omega)}$ formulom (npr. kao razlomljenu linearnu funkciju).

b) **(3 boda)** Koristeći IDTFT odredite impulsni odziv $h_d[n]$ koji pripada $H_d(e^{j\omega})$.

c) **(1 bod)** Kako se $h_d[n]$ ponaša kada $n \to \pm\infty$. Trne li prema 0 ili ne?

Uputa: Izračunajte integral za IDTFT; pazite što se događa za $n = 0$.



Okreni!

4. (6 bodova) Promatramo vremenski diskretan signal oblika $x[n] = x_0[n] + A\cos(\omega_0 n) + B\sin(\omega_0 n)$, gdje je $x_0[n]$ korisna komponenta i gdje je $A\cos(\omega_0 n) + B\sin(\omega_0 n)$, $A, B \in \mathbb{R}$, neželjena komponenta koja predstavlja brujanje na nekoj poznatoj frekvenciji $\omega_0 \in [0, \pi]$. Želimo dizajnirati zaporni FIR filtar koji će ukloniti neželjeno brujanje.

a) **(2 boda)** Neka je frekvencija očitavanja $f_s = 200\,\mathrm{Hz}$. Odredite frekvenciju ω_0 ako je poznato da je neželjeno brujanje posljedica gradske mreže, odnosno ako je frekvencija brujanja $f_B = 50\,\mathrm{Hz}$.

b) **(2 boda)** Odredite impulsni odziv i prijenosnu funkciju kauzalnog zapornog FIR filtra drugog reda koji u potpunosti potiskuje neželjeno brujanje gradske mreže i čiji amplitudno-frekvencijska karakteristika je jednaka 1 na $\omega = 0$.

c) **(2 boda)** Izračunajte i skicirajte frekvencijsku karakteristiku dizajniranog FIR filtra.

5. (6 bodova) Zadana su dva niza konačne duljine, $x[n] = \{\underline{2}, 1, 0, 3\}$ i $y[n] = \{\underline{-1}, 0, 2, -1\}$.

a) **(2 boda)** Izračunajte njihovu linearnu konvoluciju $x[n] * y[n]$.

b) **(2 boda)** Izračunajte njihovu cirkularnu konvoluciju $x[n] \circledast_4 y[n]$.

c) **(2 boda)** Označimo linearnu konvoluciju s $a[n] = x[n] * y[n]$ i cirkularnu konvoluciju duljine N s $b[n] = x[n] \circledast_N y[n]$, gdje je N pozitivni cijeli broj. Uz pretpostavku da su svi nedefinirani uzorci signala $x[n]$ i $y[n]$ jednaki nuli za koje N vrijedi jednakost $a[n] = b[n]$?

(1)

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t)$$

a) $H(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 5}$, RoC: $-1 < \mathrm{Re}\, s$

b) UNAZADNI EULER: $s \mapsto \frac{1}{T}(1 - z^{-1})$

$T = \frac{1}{10}$

$$H(z) = \frac{1}{\frac{1}{10^2}(1-z^{-1})^2 + \frac{2}{10}(1-z^{-1}) + 5} = \frac{100}{1 - 2z^{-1} + z^{-2} + 20(1-z^{-1}) + 500} =$$

$$= \frac{100}{521 - 22z^{-1} + z^{-2}}$$

c) $521\, y[n] - 22y[n-1] + y[n-2] = 100\, x[n]$

d) $s_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 5}}{2} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2j$

$z_{1,2} = \dfrac{22 \pm \sqrt{484 - 4\cdot 521}}{2\cdot 521} = \dfrac{22 \pm \sqrt{-1600}}{1042} = \dfrac{11}{521} \pm \dfrac{20}{521} j$

Kontinuirani sustav je stabilan jer je $Re(s) < 0$ za oba pola.

Diskretni sustav je stabilan jer je $|z| < 1$ za oba pola.

(2)

$$y[n] = \frac{1}{9}\left(5u[n] - u[n-1] - 3y[n-1]\right)$$

a) $$H(z) = \frac{5 - z^{-1}}{9 + 3z^{-1}}, \quad RoC: \left|\frac{1}{3}\right| < z$$

NULE: $5 - z^{-1} = 0 \Rightarrow z = 1/5$

POLOVI: $9 + 3z^{-1} = 0 \Rightarrow z = 1/3$

b) $$(-z^{-1} + 5) : (3z^{-1} + 9) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{9 + 3z^{-1}}$$

$$\frac{\mp z^{-1} \mp 3}{8}$$

$$H(z) = -\frac{1}{3} + \frac{8/9}{1 + 1/3 z^{-1}}$$

$$h[n] = -\frac{1}{3}\delta[n] + \frac{8}{9}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n \mu[n]$$

Filtar je IIR jer h[n] ima beskonačno trajanje

c) $$H(e^{j\omega}) = \frac{5 - e^{-j\omega}}{9 + 3e^{-j\omega}} = \frac{5 - \cos(\omega) + j\sin(\omega)}{9 + 3\cos(\omega) - 3\sin(\omega)}$$

$$A^2(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 = \frac{(5 - \cos(\omega))^2 + \sin^2(\omega)}{(9 + 3\cos(\omega))^2 + 9\sin^2(\omega)} =$$

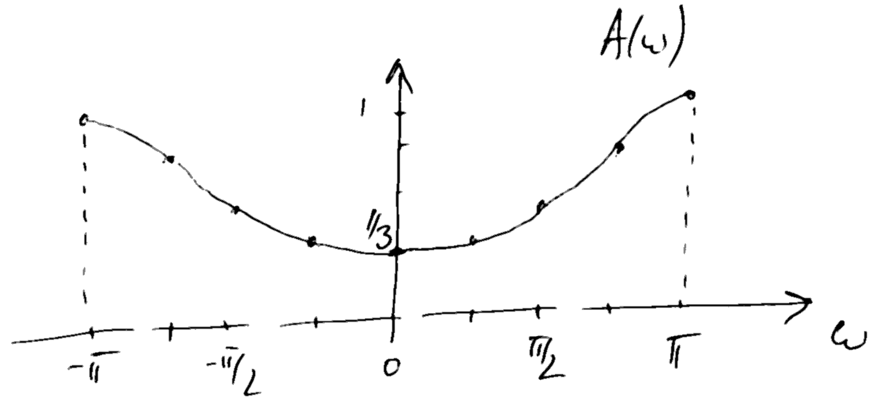
$$= \frac{25 - 10\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)}{81 + 54\cos(\omega) + 9\cos^2(\omega) + 9\sin^2(\omega)} = \frac{26 - 10\cos(\omega)}{90 + 54\cos(\omega)}$$

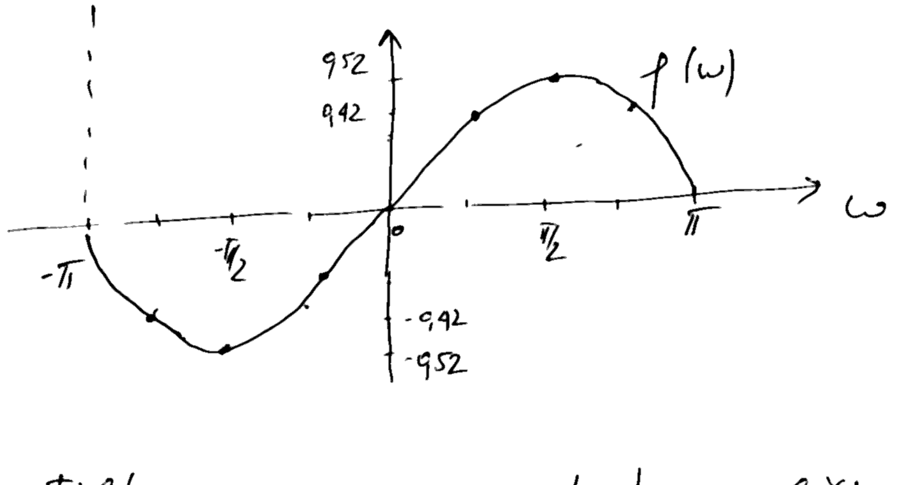
$$A(\omega) = \sqrt{\frac{13 - 5\cos(\omega)}{45 + 27\cos(\omega)}}$$

(2)

$$\varphi(\omega) = \measuredangle H(e^{j\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{\sin(\omega)}{5-\cos(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{-3\sin(\omega)}{9+3\cos(\omega)}$$

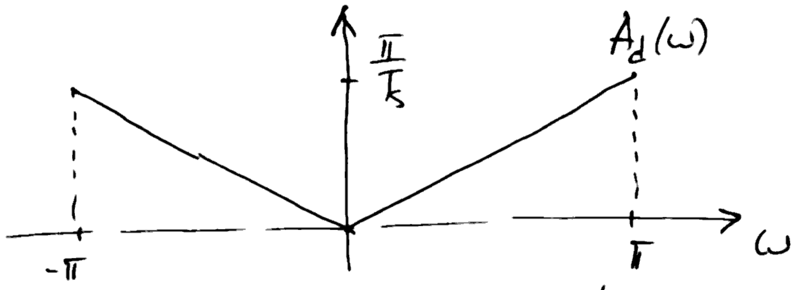
	ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
$(z=1)$	0	$1/3$	0
	$\pi/4$	0.3843	0,3517
	$\pi/2$	0.5375	0,5191
	$3\pi/4$	0.7989	0,4229
$(z=-1)$	π	1	0

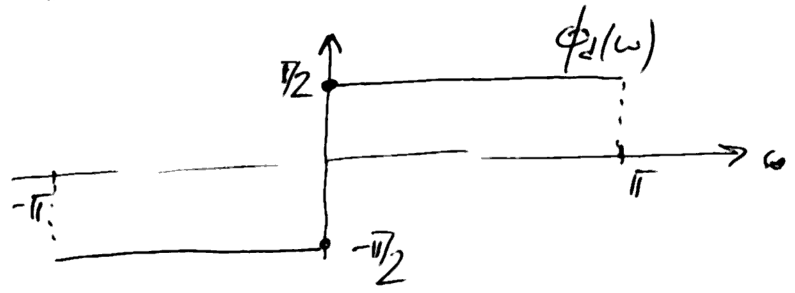




d) Filtar možemo opisati kao loši VP filtar jer najviše frekvencije propušta, no najniže frekvencije ne guši dovoljno.

③





a) $H_d(e^{j\omega}) = A_d(\omega)\cdot e^{j\phi_d(\omega)} = \frac{1}{T_s}\cdot j\omega$

b) $h_d[n] = \text{IDTFT}\left[H_d(e^{j\omega})\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{T_s} j\omega\, e^{j\omega n}\, d\omega$

$n=0$: $h_d[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{T_s} j\omega\, d\omega = \emptyset$ (INTEGRAL NEPARNE FUNKCIJE)

$n\neq 0$: $h_d[n] = \frac{j}{2\pi T_s}\int_{-\pi}^{+\pi}\omega\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{j}{2\pi T_s}\left(\frac{\omega}{jn} + \frac{1}{n^2}\right)e^{j\omega n}\Big|_{-\pi}^{+\pi} =$

$= \frac{j}{2\pi T_s}\left(\frac{\pi}{jn} + \frac{1}{n^2}\right)e^{j\pi n} - \frac{j}{2\pi T_s}\left(\frac{-\pi}{jn} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-j\pi n} =$

$= \frac{j}{2T_s}\cdot\frac{1}{jn}\underbrace{\left(e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}\right)}_{2\cdot(-1)^n} + \frac{j}{2\pi T_s}\frac{1}{n^2}\underbrace{\left(e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}\right)}_{\neq 0} =$

$= \frac{1}{T_s}\cdot\frac{(-1)^n}{n}$

$$h_d[n] = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \frac{1}{T_s}\frac{(-1)^n}{n}, & n\neq 0 \end{cases}$$

c) Kada $n\to\pm\infty$ $h_d[n]$ trne prema nuli, no jako sporo obzirom da ima ovojnicu $1/n$.

(4) $x[n] = x_0[n] + \underbrace{A\cos(\omega_0 n) + B\sin(\omega_0 n)}_{\text{NEŽELJENA KOMPONENTA}}, \quad A, B, \omega_0 \in R$

a) $f_s = 200\,Hz, \quad f_B = 50\,Hz$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \frac{f_B}{f_s} = 2\pi \cdot \frac{50\,Hz}{200\,Hz} = \pi/2$$

b)
$$H(z) = K \cdot (1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}) =$$
$$= K\,(1 - e^{j\omega_0} z^{-1} - e^{-j\omega_0} z^{-1} + z^{-2}) =$$
$$= K\,(1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2})$$

$$\omega_0 = \pi/2 \Rightarrow \cos(\omega_0) = \cos(\pi/2) = 0$$

$$H(z) = K \cdot (1 + z^{-2})$$

Dobivena $H(z)$ ima nule točno na $e^{\pm j\omega_0}$ te zato u potpunosti potiskuje neželjenu komponentu na ω_0.
Iz uvjeta $A(0) = 1$ određujemo K:

$$|H(e^{j0})| = |H(1)| = |K\,(1+1)| = 1 \Rightarrow K = \pm\frac{1}{2}$$

Moguća su dva rješenja:

$$H_1(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-2})$$
$$H_2(z) = -\frac{1}{2}(1 + z^{-2})$$

Kako $H_1(z)$ ne obrće fazu odabiremo ga kao bolje rješenje.

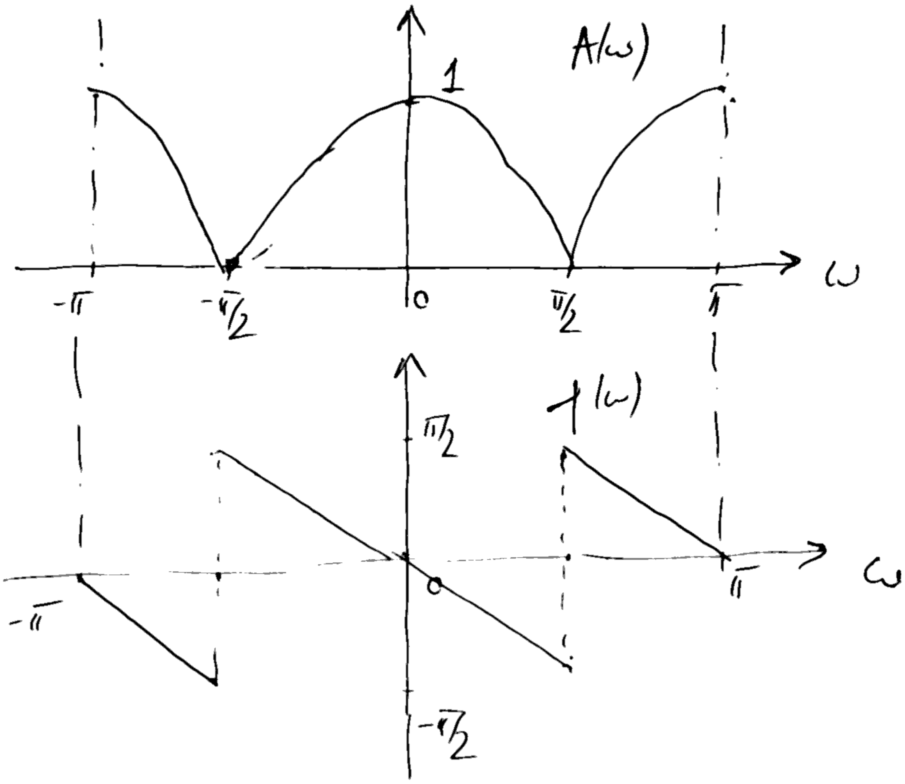
c) $H(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-2})$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1+e^{-2j\omega}) = \frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega}(e^{+j\omega}+e^{-j\omega}) =$$

$$= e^{-j\omega}\cdot\cos(\omega)$$

$$A(\omega) = |\cos(\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = -\omega + \sphericalangle\cos(\omega)$$



⑤

$x[n] = \{\underline{2}, 1, 0, 3\}$

$y(n) = \{\underline{-1}, 0, 2, -1\}$

	$\underline{2}$	1	0	3
$\underline{-1}$	$\underline{-2}$	-1	0	-3
0	0	0	0	0
2	4	2	0	6
-1	-2	-1	0	-3

a) $x * y = \{\underline{-2}, -1, 4, -3, -1, 6, -3\}$

b)

PREKLAPAMO LIN. KONVOLUCIJU

-2	-1	4	-3
-1	6	-3	
-3	5	1	-3

$x \, (4) \, y = \{\underline{-3}, 5, 1, -3\}$

c)

$x \, (N) \, y = x * y$ ZA $N \geq 4 + 4 - 1 = 7$