Osnove obradbe signala: Sustavi

Tomislav Petković

Sveučilište u Zagrebu

prosinac 2021.

Sustavi

Što je sustav?

> Sustav je cjelina sastavljena od međusobno vezanih objekata gdje svojstva objekata i njihova interakcija određuju vladanje i svojstva cjeline.

Ova definicija je previše apstraktna za naša razmatranja.

Realne sustave želimo opisati prikladnim matematičkim modelima koji dovoljno dobro opisuju vladanje sustava.

U tom smislu trebamo precizno definirati one veličine koje opažamo i koje su relevantne za vladanje sustava.

Ulazno-izlazni model sustava

Ulazne veličine su one koje utječu na vladanje sustava.

Izlazne veličine su one kojima sustav utječe na vanjski svijet.

Sustav prema tome možemo opisati tako da modeliramo kako *ulazne* veličine utječu na *izlazne* veličine.

$$x \longrightarrow \boxed{\text{sustav}} \longrightarrow y = \mathcal{S}[x]$$

U ulazno-izlaznom modelu sustav $\mathcal{S}$ karakteriziramo relacijom koja povezuje ulaz x s izlazom y. Pišemo:

$$y = \mathcal{S}[x] \tag{1}$$

Sustavi u kontekstu obradbe signala

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big]$$

U kontekstu obradbe signala sustav $\mathcal{S}$ opisujemo ulazno-izlaznim modelom koji povezuje ulazni signal $x[n]$ s izlaznim signalom $y[n]$ preko relacije $\mathcal{S}$.

Ulazni i izlazni signali su vremenske funkcije koje ovise o nezavisnoj varijabli koja mjeri vrijeme.

Za vremenski diskretne sustave to je uobičajeno korak n, a za vremenski kontinuirane vrijeme t.

Sustavi u kontekstu obradbe signala

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big]$$

Ulazni signal $x[n]$ zovemo **pobudom** sustava.

Izlazni signal $y[n]$ zovemo **odzivom** sustava.

Kažemo da je $y[n]$ odziv sustava $\mathcal{S}$ na pobudu $x[n]$.

Izraz $y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big]$ podrazumijeva da je $\mathcal{S}$ preslikavanje koje uzima sveukupnu pobudu $x[n]$ kao ulaz, dakle vrijednosti za sve n-ove, a ne samo jednu vrijednost $x[n]$ u koraku n.

Primjer: Vremenski diskretni sustav definiramo kao preslikavanje koje pobudi $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ pridružuje odziv $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Diskretni, kontinuirani i miješani sustavi

Ovisno o vrsti ulaznih i izlaznih signala sustave možemo podijeliti na diskretne, kontinuirane i miješane.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big]$$

Diskretni sustav: Ulaz i izlaz su vremenski diskretni signali.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y(t) = \mathcal{S}\big[x(t)\big]$$

Kontinuirani sustav: Ulaz i izlaz su vremenski kontinuirani signali.

Diskretni, kontinuirani i miješani sustavi

Kod **miješanih** sustava vrsta ulaznih i izlaznih signala je različita.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y[n] = \mathcal{S}\big[x(t)\big]$$

Ulaz je vremenski kontinuiran, a izlaz vremenski diskretan.

- Ovakvim sustavima modeliramo proces očitavanja i analogno-digitalne (A/D) pretvornike.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y(t) = \mathcal{S}\big[x[n]\big]$$

Ulaz je vremenski diskretan, a izlazi vremenski kontinuiran.

- Ovakvim sustavima modeliramo proces interpolacije i digitalno-analogne (D/A) pretvornike.

Primjeri ulazno/izlaznih modela sustava

Razmotrimo nekoliko različitih sustava opisanih sljedećim jednadžbama:

1. $y[n] = S_1\big[x[n]\big] = x[n]$
2. $y[n] = S_2\big[x[n]\big] = 2x^2[n]$
3. $y[n] = S_3\big[x[n]\big] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$
4. $y[n] = S_6\big[x[n]\big] = n \cdot x[n+3]$
5. $y[n] = S_4\big[x[n]\big] = y[n-1] + x[n]$
6. $y(t) = S_5\big[x[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc}(t-n)$

Jesu li sve jednadžbe strogo ulazno/izlazne?

Što možete reći o složenosti ulazno/izlaznih jednadžbi?

Možete li za svaki od zadanih sustava napisati računalni program koji izvodi zadane operacije u stvarnom vremenu?

Općenito o svojstvima sustava

Za sustave uobičajeno definiramo razna svojstava od interesa.

- Svako svojsto koje mora biti zadovoljeno sužava skup sustava koje promatramo te time značajno olakšava formalnu analizu.
- Ako ne postavimo neke uvjete na sustave koje promatramo onda pak formalna analiza postaje (skoro pa) nemoguća.
- Želimo li realizirati neki sustav onda ulazno-izlazna jednadžba tog sustava mora zadovoljiti neki skup svojstava koja zajedno definiraju realizabilnost.
- Želimo li da realizacija sustava bude numerički stabilna onda izvedbene jednadžbe sustava moraju zadovoljiti neki skup svojstava koja zajedno definiraju numeričku stabilnost.

Svojstva ćemo najčešće definirati preko izraza koje ulazno-izlazna relacija mora zadovoljiti.

Svojstva sustava

U obradbi signala važna svojstva sustava koja ćemo razmatrati su:

- vremenska nepromjenjivost (engl. *time invariance*)
- linearnost (engl. *linearity*)
- posjedovanje memorije (engl. *systems with memory*)
- kauzalnost (engl. *causality*)
- stabilnost (engl. *stability*)
- realizabilnost (engl. *realizability*)

U ovom predavanju nećemo razmatrati zadnja dva svojstva, njih ostavljamo za kasnije.

Vremenska nepromjenjivost

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big]$$

Sustav je vremenski nepromjenjiv (ili vremenski stalan) ako:

$$\forall\big(x[n], y[n]\big),\ \forall m \in \mathbb{Z} : \mathcal{S}\big[x(n-m)\big] = y(n-m) \tag{2}$$

Riječima: Sustav je vremenski nepromjenjiv ako za svaki ulazno-izlazni par signala $x[n]$ i $y[n]$ te za svaki vremenski pomak m vrijedi da je odziv sustava na zakašnjelu (pomaknutu) pobudu $x[n-m]$ jednak zakašnjelom (pomaknutom) odzivu $y[n-m]$.

Napomena: Jedan od smjerova pomaka nije moguć u praksi zbog kauzalnosti. Koji? Osim toga, ako je nezavisna varijabla prostor onda govorimo o posmičnoj nepromjenjivosti (engl. *shift invariance*).

Linearnost i superpozicija

Svojstvo linearnosti uobičajeno razdvajamo na dva podsvojstva:

1. svojstvo aditivnosti, i
2. svojstvo homogenosti.

Za sustave koji su linearno često kažemo da zadovoljavaju princip **superpozicije** (engl. *superposition principle*).

Svojstvo linearnosti zajedno sa svojstvom vremenske nepromjenjivosti je izuzetno važno jer oba svojstva uzeta zajedno definiraju klasu **linearnih vremenski nepromjenjivih** ili LTI sustava (prema engl. *linear time invariant*) koju ćemo detaljno proučavati u okviru ovog predmeta.

Aditivnost

$$x_1[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y_1[n] = \mathcal{S}\big[x_1[n]\big]$$

$$x_2[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y_2[n] = \mathcal{S}\big[x_2[n]\big]$$

Sustav je aditivan ako:

$$\begin{aligned} &\forall\big(x_1[n], y_1[n]\big), \forall\big(x_2[n], y_2[n]\big) : \\ &\qquad \mathcal{S}\big[x_1[n] + x_2[n]\big] = y_1[n] + y_2[n] \end{aligned} \tag{3}$$

Riječima: Sustav je aditivan ako za svaka dva ulazno-izlazna para signala $x_1[n]$ i $y_1[n]$ te $x_2[n]$ i $y_2[n]$ vrijedi da je odziv sustava na zbroj ulaza $x_1[n] + x_2[n]$ jednak zbroju odziva $y_1[n] + y_2[n]$.

Homogenost

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big]$$

Sustav je homogen ako:

$$\begin{aligned} &\forall\big(x[n], y[n]\big), \forall a \in \mathbb{C} : \\ &\qquad\qquad \mathcal{S}\big[a \cdot x[n]\big] = a \cdot y[n] \end{aligned} \tag{4}$$

Riječima: Sustav je homogen ako za svaki ulazno-izlazni par signala $x[n]$ i $y[n]$ i za svako pojačanje a vrijedi da je odziv sustava na pojačani signal $a \cdot x[n]$ upravo pojačani odziv $a \cdot y[n]$.

Napomena: Pojam pojačanje koristimo i za slučaj $|a| < 1$ iako se striktno gledano u tom slučaju ne radi o pojačanju već o prigušenju.

Linearnost

Sustav je linearan ako je i aditivan i homogen.

U jednoj relaciji to možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} &\forall\big(x_1[n], y_1[n]\big), \forall\big(x_2[n], y_2[n]\big),\ \forall a, b \in \mathbb{C} : \\ &\qquad \mathcal{S}\big[a x_1[n] + b x_2[n]\big] = a y_1[n] + b y_2[n] \end{aligned} \tag{5}$$

Riječima: Sustav je linearan ako za svaka dva ulazno-izlazna para signala $x_1[n]$ i $y_1[n]$ te $x_2[n]$ i $y_2[n]$ vrijedi da je odziv sustava na linearnu kombinaciju ulaza $a x_1[n] + b x_2[n]$ jednak linearnoj kombinaciji odziva $a y_1[n] + b y_2[n]$.

Linearni sustav i linearna kombinacija ulaza

> Linearni sustavi linearnu kombinaciju ulaza preslikavaju u linearnu kombinaciju izlaza.

Neka je ulazni signal $x[n]$ linearna kombinacija nekih baznih funkcija $\phi_k[n]$, odnosno

$$x[n] = \sum_k w_k \phi_k[n]. \tag{6}$$

Izlaz linearnog sustava je onda

$$y[n] = \mathcal{S}\left[x[n]\right] = \mathcal{S}\left[\sum_k w_k \phi_k[n]\right] = \sum_k w_k \mathcal{S}\left[\phi_k[n]\right]. \tag{7}$$

Navedeno svojstvo je izuzetno važno u obradbi signala!

Reprezentacija ulazno-izlaznog preslikavanja

U ulazno-izlaznom opisu sustava odziv $y[n]$ je funkcija pobude $x[n]$ i jednostavno pišemo

$$y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big]. \tag{8}$$

U tom izrazu implicitno podrazumijevamo sveukupnost pobude.

Ako želimo sustav $\mathcal{S}$ predstaviti nekom konkretnom funkcijom f koja definira kako se računa jedan izlazni uzorak $y[n]$ u koraku n (to nije cijeli signal $y[n]$) onda to u općem slučaju mora biti funkcija oblika $f_n : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$, odnosno imamo

$$y[n] = f_n\big(x[-\infty], \ldots, x[n-1], x[n], x[n+1], \ldots, x[+\infty]\big). \tag{9}$$

Prema tome opća funkcija f_n koja opisuje sustav $\mathcal{S}$ u koraku n zahtijeva da znamo sve vrijednosti pobude $x[n]$ da bi izračunali samo jednu vrijednost odziva u nekom koraku.

Reprezentacija ulazno-izlaznog preslikavanja

Reprezentacija ulazno-izlaznog preslikavanja preko funkcija oblika $f_n : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ za računanje jednog uzorka ili pak preko $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ za računanje svih uzoraka je nepraktična.

Želimo ograničiti broj uzoraka koji nam je potreban za računanje odziva na neku konačnu vrijednost, pogotovo ako sustav želimo realizirati na računalu.

Dva svojstva koja ograničavaju broj uzoraka koje je potrebno znati su svojstvo **(ne)posjedovanja memorije** i svojstvo **kauzalnosti**.

Obzirom na posjedovanje memorije sustave dijelimo
na bezmemorijske i na memorijske sustave.

Obzirom na kauzalnost sustave dijelimo
na kauzalne i na nekauzalne sustave.

Bezmemorijski sustav

Ako za računanje odziva sustava moramo znati samo jedan uzorak ulaza, i to upravo onaj u koraku n, onda kažemo da je sustav **bezmemorijski**.

Prema tome u zapisu sustava $\mathcal{S}$ preko funkcije f vrijedi

$$y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big] = f\big(x[n]\big), \tag{10}$$

odnosno dovoljno je poznavati samo jednu jednostavnu funkciju oblika $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ koja trenutnom ulaznom uzorku pridružuje izlazni uzorak.

Primjer: Sustav opisan izrazom $y[n] = x^2[n]$ je bezmemorijski sustav koji kao odziv vraća kvadrat pobude u trenutnom koraku.

Napomena: Zbog svoje jednostavnosti bezmemorijski sustavi nisu naročito interesantni.

Memorijski sustav

Ako za računanje odziva moramo znati barem jedan uzorak pobude u koraku m različitom od n onda kažemo da je sustav **memorijski**.

Prema tome u zapisu sustava $\mathcal{S}$ preko funkcije f uz $n \neq m$ vrijedi

$$y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big] = f\big(\ldots, x[m], \ldots\big). \tag{11}$$

Zanimljive klase memorijskih sustava su one u kojima je broj tih koraka m u kojima moramo znati ulaz ograničen na neki konačan N, odnosno gdje je f oblika

$$f : \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{=\mathbb{C}^N} \to \mathbb{C}. \tag{12}$$

Pri tome je broj uzoraka koje trebamo znati povezan sa složenošću sustava i kasnije će nam poslužiti za definiciju *reda* sustava.

Memorijski sustav

Primjer: Sustav opisan izrazom $y[n] = x^2[n] + x^2[n-1]$ je memorijski sustav.

Taj sustav kao odziv vraća zbroj kvadrata trenutne i prethodne vrijednosti pobude.

Kako osim trenutne vrijednosti pobude trebamo pohraniti (zapamtiti, memorirati) samo tu jednu prethodnu vrijednost pobude možemo reći da je taj sustav prvog reda.

Preciznu definiciju reda sustava ćemo dati kasnije.

Kauzalnost

Kauzalnost u općem smislu jest veza koja opisuje kako neki događaj kojeg zovemo **uzrok** utječe na neki drugi događaj kojeg zovemo **posljedica**.

U kontekstu obradbe signala obično govorimo o *uzročno-posljedičnoj* vezi pobude i odziva nekog sustava na način da pobuda uzrokuje odziv.

U slučaju kada razmatramo sustave koji djeluju na vremenske signale od posebne važnosti jest pojam **vremena** i njemu pridruženi pojam smjera vremena (engl. *arrow of time*): vrijeme ima samo jedan smjer te ne možemo znati budućnost.

Kauzalnost

U obradbi signala kauzalnost sustava znači da odziv sustava ne smije ovisiti o pobudi sustava koja se još nije dogodila.

Formalno, izraz koji računa vrijednost odziva $y[n]$ u koraku n ne smije tražiti poznavanje vrijednosti pobude $x[m]$ za korake $m > n$.

Prema tome, u zapisu sustava $\mathcal{S}$ preko funkcije f_n možemo pisati

$$y[n] = f_n\big(x[-\infty], \ldots, x[n-2], x[n-1], x[n]\big), \tag{13}$$

a jedna moguća formalna definicija je

$$\forall n \, \forall y(n) \, \nexists m > n : y[n] = f\left(\ldots, x[m], \ldots\right) \tag{14}$$

Riječima: Sustav je kauzalan ako ne postoji budući korak $m > n$ takav da je izlaz sustava $y[n]$ ovisan o budućoj ulaznoj vrijednosti $x[m]$ u tom budućem koraku m.

Kauzalnost i nekauzalnost

Očito, sustav koji nije kauzalan zovemo nekauzalnim sustavom.

Nekauzalan sustav za obradbu vremenskih signala nije realizabilan, odnosno pojam kauzalnosti je za takve sustave jedna od komponenti svojstva realizabilnosti.

Primijetite da kauzalnost nije ograničavajuće svojstvo ako nezavisna varijabla nije vrijeme.

Na primjer, ako je nezavisna varijabla prostor onda možemo dohvatiti vrijednosti lijevo, desno, gore i dolje od trenutnog položaja, pa su prema tome sustavi koji obrađuju sliku gotovo uvijek nekauzalni sustavi u smislu definicije kauzalnosti u obradbi signala.

Ovime završavamo diskusiju svojstava sustava.

Svojstvena funkcija sustava

Za svaki sustav od posebne važnosti su pobude $x[n]$ koje sustav ostavlja neizmijenjenima do na amplitudno skaliranje, ako takve postoje.

Neka je $y[n]$ odziv sustava $\mathcal{S}$ na pobudu $x[n] \neq 0$ i neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ako vrijedi

$$y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big] = \lambda x[n], \tag{15}$$

onda $x[n]$ zovemo **svojstvenom funkcijom** sustava s pridruženom **svojstvenom vrijednošću** λ.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big] = \lambda x[n]$$

Svojstvene funkcije i odziv sustava

Svojstvene funkcije (engl. *eigenfunctions*) i svojstvene vrijednosti (engl. *eigenvalues*) sustava su od ključnog značaja za analizu linearnih sustava.

Prepostavimo da je $\mathcal{S}$ linearan sustav čije sve svojstvene funkcije su $\phi_k[n]$ sa svojstvenim vrijednostima λ_k, odnosno da vrijedi

$$\mathcal{S}\left[\phi_k[n]\right] = \lambda_k \phi_k[n]. \tag{16}$$

Neka je pobudni signal $x[n]$ takav da ga možemo prikazati kao linearnu kombinaciju svojstvenih funkcija sustava $\phi_k[n]$, odnosno vrijedi

$$x[n] = \sum\nolimits_k w_k \phi_k[n]. \tag{17}$$

Svojstvene funkcije i odziv sustava

Tada za odziv linearnog sustava $\mathcal{S}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} y[n] = \mathcal{S}\left[x[n]\right] &= \mathcal{S}\Big[\sum\nolimits_k w_k \phi_k[n]\Big] \\ &= \sum\nolimits_k w_k \mathcal{S}\Big[\phi_k[n]\Big] \\ &= \sum\nolimits_k w_k \lambda_k \phi_k[n] \end{aligned} \tag{18}$$

Prema tome ako pobudu $x[n]$ možemo reprezentirati u prostoru razapetom svojstvenim funkcijama $\phi_k[n]$ nekog linearnog sustava $\mathcal{S}$ onda reprezentaciju odziva $y[n]$ dobivamo jednostavnim množenjem težina w_k (odnosno spektra pobude) i svojstvenih vrijednosti λ_k (za LTI sustave ćemo pokazati da su λ_k upravo spektar sustava).

Impulsni odziv sustava

Nerealno je očekivati da svaku pobudu $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ uvijek možemo reprezentirati samo preko svojstvenih funkcija sustava.

No svojstvo linearnosti nam omogućava da na sličan način iskažemo kako sustav djeluje na bilo koju pobudu.

Prisjetimo se da u vremenskoj bazi možemo prikazati svaki vremenski diskretni signal kao

$$x[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\delta[n-k] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k \phi_k[n], \tag{19}$$

gdje su $\phi_k[n] = \delta[n-k]$ bazne funkcije i gdje su $w_k = x[k]$ težine pojedinih baznih funkcija.

Impulsni odziv sustava

Razmotrimo sada kako linearni sustav $\mathcal{S}$ djeluje na pobudu reprezentiranu u vremenskoj bazi:

$$\begin{aligned} y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big] &= \mathcal{S}\Big[\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\delta[n-k]\Big] \\ &= \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} x[k] \underbrace{\mathcal{S}\Big[\delta[n-k]\Big]}_{=h_k[n]} = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} x[k]h_k[n] \end{aligned} \tag{20}$$

Dobiveni izraz možemo interpretirati kao reprezentaciju odziva sustava $y[n]$ u novoj bazi koja je određena funkcijama $h_k[n]$, a koje su funkcije upravo odzivi sustava na bazne funkcije polazne vremenske baze $\delta[n-k]$.

Impulsni odziv sustava

Obzirom da linearni sustav samo mijenja bazne funkcije vremenske baze $\delta[n-k]$ koji su pomaknuti jedinični impulsi,
te nove transformirane bazne funkcije $h_k[n]$ ćemo zvati *impulsni odziv sustava*.

> Neka je $\mathcal{S}$ linearni sustav.
> Odzive sustava $\mathcal{S}$ na pomaknute jedinične impulse $\delta[n-k]$ označavamo s $h_k[n] = \mathcal{S}\big[\delta[n-k]\big]$. Skup svih tih odziva nazivamo impulsnim odzivom linearnog sustava.

Poznavanje svih $h_k[n]$ u potpunosti određuje linearni sustav $\mathcal{S}$, što znači da osim opisa preko ulazno-izlaznog modela sustav možemo jednoznačno opisati njegovim impulsnim odzivom.

Konvolucija i odziv sustava

Razmotrimo nadalje što se događa s reprezentacijom odziva kada uz svojstvo linearnosti dodamo i svojstvo vremenske nepromjenjivosti.

Za linearni sustav vrijedi:

$$y[n] = \mathcal{S}\big[x[n]\big] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\mathcal{S}\Big[\delta[n-k]\Big] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]h_k[n]. \tag{21}$$

Odziv na $\delta[n]$ (za $k = 0$ bez pomaka) je upravo $\mathcal{S}\big[\delta[n]\big] = h_0[k]$. Onda zbog vremenske nepromjenjivosti sustava imamo

$$\mathcal{S}\Big[\delta[n-k]\Big] = h_k[n] = h_0[n-k] \tag{22}$$

Kako su zbog vremenske nepromjenjivosti svi $h_k[n]$ samo pomaknuti $h_0[n]$ indeks nula podrazumijevamo pa ga ispuštamo.

Konvolucija i odziv sustava

Sada za linearni vremenski nepromjenjivi sustav dobivamo

$$y[n] = \mathcal{S}\left[x[n]\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]h[n-k]. \tag{23}$$

Dobivenu operaciju nazivamo **konvolucijom** i kraće je zapisujemo kao binarnu operaciju između dva signala korištenjem oznake $*$.

Konvolucija dva signala $x[n]$ i $h[n]$ jest

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]. \tag{24}$$

To je operacija između signala koja prirodno proizlazi samo iz svojstava linearnosti i vremenske nepromjenjivosti.

Pomoću konvolucije možemo opisati ponašanje svakog linearnog vremenski nepromjenjivog sustava.

Linearni vremenski nepromjenjivi sustavi

Teorija linearnih vremenski nepromjenjivih sustava je okosnica klasične obradbe signala i onoga što proučavamo unutar ovog predmeta.

Temljeni rezultati su vezani uz reprezentaciju sustava, a na njih se onda nadovezuju postupci analize i sinteze sustava.

Linearne vremenske nepromjenjive sustave skraćeno zovemo **LTI** sustavima, od engl. *linear time invariant*.

Proučavanje **nelinearnih sustava** je značajno teže jer ne postoji unificirana teorija kao za LTI sustave.

- Uglavnom svaki nelinearni sustav analiziramo zasebno.
- Ponašanje nelinearnih sustava je značajno bogatije (višestruke ravnotežne točke, atraktori, granični ciklusi, kaotično ponašanje).
- Neke nelinearne sustave ipak možemo **linearizirati**.

Reprezentacija linearnih vremenski nepromjenjivih sustava

Sve do sada izloženo možemo sažeti u sljedeći važan rezultat:

Svaki linearan vremenski nepromjenjiv sustav je u potpunosti opisan svojim impulsnim odzivom $h[n]$ definiranim kao

$$h[n] = \mathcal{S}\big[\delta[n]\big]. \tag{25}$$

Odziv $y[n]$ linearnog vremenski nepromjenjivog sustava opisanog impulsnim odzivom $h[n]$ na pobudu $x[n]$ jest konvolucija

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \tag{26}$$

Kauzalni linearni vremenski nepromjenjivi sustavi

Razmotrimo još kako impulsni odziv izgleda za kauzalne sustave.

Kauzalnost zahtjeva da u konvolucijskoj sumaciji buduće vrijednosti pobude $x[k]$, a to su one za $k > n$, ne utječu na odziv $y[n]$.

To znači da za buduće $x[k]$ pripadni $h[n-k]$ mora biti jednak nuli.

Prema tome mora vrijediti

$$h[n-k] = 0 \quad \text{za} \quad k > n, \tag{27}$$

što uz zamjenu $m = n - k$ postaje

$$h[m] = 0 \quad \text{za} \quad 0 > m. \tag{28}$$

Kauzalni linearni vremenski nepromjenjivi sustavi

Linearan vremenski nepromjenjiv sustav $\mathcal{S}$ opisan svojim impulsnim odzivom $h[n]$ je kauzalan ako je $h[n] = 0$ za sve negativne korake n.

Sukladno ovom rezultatu pojam kauzalnosti sa sustava proširujemo i na signale na način da ćemo sve signale čije vrijednosti su jednake nuli za negativne vrijednosti koraka n zvati **kauzalnim signalima**.

Konvolucija za kauzalne signale za koje vrijedi $x[n] = h[n] = 0$ za $n < 0$ se reducira u konačnu sumu

$$x[n] * h[n] = \sum\nolimits_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]. \tag{29}$$

Kratko o kontinuiranim sustavima

Na ovom predmetu razmatramo prvenstveno **diskretne sustave**.

No primijetite da cjelokupno izlaganje do sada vrijedi i za **kontinuirane sustave** uz standardne zamjene: sume mijenjamo integralom, a jedinični impuls mijenjamo Diracovom funkcijom.

Prema tome kontinuirani linearni vremenski nepromjenjivi sustavi su jednoznačno opisani svojim impulsnim odzivom $h(t)$.

Odziv $y(t)$ kontinuiranog LTI sustava na pobudu $x(t)$ računamo konvolucijskim integralom

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau. \tag{30}$$

Dodatno, ako je $h(t) = 0$ za $t < 0$ sustav je kauzalan.

Diferencijske jednadžbe

Opis linearnih vremenski nepromjenjivih sustava preko konvolucije je potpuno općenit, no nije uvijek prikladan za računalo.

Zato se vraćamo nazad na ulazno-izlazni model i jednadžbe koje definiraju vezu pobude i odziva unutar kojeg ćemo defnirati novu podklasu sustava koju možemo opisati preko
linearnih diferencijskih jednadžbi sa stalnim koeficijentima
(engl. *linear difference equations with constant coefficients*)

Tipična diferencijska jednadžba u obradbi signala jest

$$\begin{aligned} a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_N y[n-N] = \\ = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M]. \end{aligned} \tag{31}$$

Primijetite da su svi pomaci negativni zbog zahtjeva **kauzalnosti**.

Rješavanje diferencijske jednadžbe

Ponovimo prvo klasični postupak rješavanja linearne difrencijske jednadžbe sa stalnim koeficijentima ili
postupak rješavanja **u vremenskoj domeni**.

Neka je zadana jednadžba

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]. \tag{32}$$

Klasični postupak rješavanja jednadžbe (32) je po koracima:

1. određivanje općeg homogenog rješenja $y_h[n]$,
2. određivanje bilo kojeg partikularnog rješenja $y_p[n]$, i
3. određivanje konačnog rješenja kao $y_p[n] + y_h[n]$.

Homogena jednadžba

Za diferencijsku jednadžbu (32) kažemo da je homogena ako je ulaz jednak nuli, dakle

$$x[n] = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{33}$$

Homogeno rješenje je oblika diskretne eksponencijale, odnosno

$$y_h[n] = C \cdot z^n, \quad C, z \in \mathbb{C}. \tag{34}$$

Uvrštavanjem (34) u jednadžbu (32) dobivamo

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \left(C \cdot z^{n-i} \right) = C \cdot z^{n-N} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{N} a_i z^{N-i} \right)}_{=A(z)} = 0 \tag{35}$$

Netrivijalna rješenja karakteristične jednadžbe (35) su korijeni karakterističnog polinoma $A(z)$.

Karakteristični polinom i homogeno rješenje

Korijene p_k, $k = 1, \ldots, N$, karakterističnog polinoma

$$A(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i z^{N-i} = a_0 \sum_{k=1}^{N} (z - p_k) \tag{36}$$

nazivamo polovima.

Pretpostavimo da su svi polovi **jednostruki**
(slučaj **višestrukih** polova ostavljamo za samostalni rad).

Onda je homogeno rješenje $y_h[n]$ oblika

$$y_h[n] = \sum_{k=1}^{N} C_k \cdot {p_k}^n, \tag{37}$$

gdje su $C_k \in \mathbb{C}$ konstante koje možemo slobodno birati.

Sve moguće signale definirane izrazom (37) zajedno nazivamo **jezgrom** diferencijske jednadžbe.

Partikularno rješenje

Partikularno rješenje je bilo koje rješenje jednadžbe (32) za neki zadani $x[n]$, dakle vrijedi

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y_p[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]. \tag{38}$$

Partikularna rješenja za poznate pobude su uobičajeno tabelirana, a ako nisu onda koristimo metodu varijacije konstanti.

Najvažnije partikularno rješenje jest za diskretnu eksponencijalu koja je svojstvena funkcija jednadžbe (32), odnosno za

$$x[n] = c \cdot z^n, \quad c, z \in \mathbb{C} \tag{39}$$

partikularno rješenje jest

$$y_p[n] = C \cdot z^n, \quad C, z \in \mathbb{C}. \tag{40}$$

Konačno rješenje

Kada znamo $y_p[n]$ i $y_h[n]$ konačno rješenje određujemo kao

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n] = y_p[n] + \sum_{k=1}^{N} C_k \cdot {p_k}^n. \tag{41}$$

U rješenju (41) postoji N neodređenih konstanti C_k u homogenom dijelu rješenja $y_h[n]$.

Da bi odredili te nepoznate konstante uobičajeno zadajemo N dodantih početnih uvjeta u koracima n_k, $k = 1, \ldots, N$, kao poznate vrijednosti rješenja, dakle da odredimo konačno rješenje moramo znati

$$y[n_1],\ y[n_2],\ \ldots,\ y[n_N]. \tag{42}$$

Ovime je ponavljanje postupka rješavanja diferencijske jednadžbe u **vremenskoj domeni** završeno.

Primjer diferencijske jednadžbe

Zadana je diferencijska jednadžba

$$2y[n] - y[n-1] = 2x[n]. \tag{43}$$

Odredi odziv $y[n]$ na pobudu $x[n] = 3^{-n}$ uz početni uvjet $y[0] = 2$.

Homogeno rješenje je $y_h[n] = C \cdot 2^{-n}$.

Partikularno rješenje je $y_p[n] = -2 \cdot 3^{-n}$.

Konačno rješenje je $y[n] = -2 \cdot 3^{-n} + 4 \cdot 2^{-n}$.

Operator pomaka

Primjer tipične diferencijske jednadžbe je bio

$$\begin{aligned} a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_N y[n-N] = \\ = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M]. \end{aligned} \tag{44}$$

Često se uvodi operator pomaka koji pomiče korak signala za jedan unaprijed, odnosno

$$E x[n] = x[n+1]. \tag{45}$$

Uzastopnom primjenom E pomičemo signal unaprijed, a ako definiramo E^{-1} kao inverzni operator koji signal pomiče unatrag onda možemo pisati

$$E^m x[n] = x[n+m] \quad \text{i} \quad E^{-m} x[n] = x[n-m]. \tag{46}$$

Operatorski zapis diferencijske jednadžbe

Korištenjem operatora pomaka E možemo diferencijsku jednadžbu (44) zapisati u operatorskom obliku

$$\begin{aligned}\Big(\overbrace{a_0 + a_1 E^{-1} + a_2 E^{-2} + \cdots + a_N E^{-N}}^{A(E)}\Big) y[n] &= \\ = \Big(\underbrace{b_0 + b_1 E^{-1} + b_2 E^{-2} + \cdots + b_M E^{-M}}_{B(E)}\Big) x[n]\end{aligned} \tag{47}$$

gdje su $A(E)$ i $B(E)$ formalni polinomi operatora E koji definiraju operaciju nad izlaznim i ulaznim signalom.

Nazivanje homogenog rješenja (37) **jezgrom** je sada opravdano operatorskim zapisom jer sva homogena rješenja razapinju podprostor signala kojeg operator $A(E)$ preslikava u nulu.

Operatori diferencije

Pokažimo sada otkuda je došao naziv **diferencijska jednadžba**.

Uvodimo operatore uzlazne i silazne diferencije.

Operator uzlazne ili unaprijedne diferencije Δ definiramo kao

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]. \tag{48}$$

Operator silazne ili unazadne diferencije ∇ definiramo kao

$$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]. \tag{49}$$

Veza tih operatora s operatorom pomaka jest

$$\Delta = E - 1 \quad \text{i} \quad \nabla = 1 - E^{-1}. \tag{50}$$

Naziv diferencijska jednadžba

Svaku diferencijsku jednadžbu zapisanu pomoću operatora pomaka E možemo zapisati pomoću operatora uzlazne diferencije Δ ili operatora silazne diferencije ∇.

Prelazak je najjednostavnije napraviti formalnom zamjenom varijabli u operatorskim polinomima $A(E)$ i $B(E)$:

- ako želimo iskazati jednadžbu preko uzlaznih diferencija Δ onda ćemo polinome $A(E)$ i $B(E)$ iskazati preko pozitivnih potencija od E, i
- ako želimo iskazati jednadžbu preko silaznih diferencija ∇ onda ćemo polinome $A(E)$ i $B(E)$ iskazati preko negativnih potencija od E.

To se najjednostavnije postiže odgovarajućim pomakom vremenskog koraka n.

Primjer

Zapiši jednadžbu $y[n] + 2y[n+1] = x[n] - x[n-1]$ u operatorskim oblicima pomoću operatora E, Δ i ∇.

Zapis preko operatora pomaka E je

$$\big(1 + 2E\big)y[n] = \big(1 - E^{-1}\big)x[n]. \tag{51}$$

Želimo li zapis preko operatora Δ prvo mijenjamo $n \mapsto n' + 1$ pa zatim mijenjamo $E \mapsto \Delta + 1$ što daje

$$\big(2\Delta^2 + 5\Delta + 3\big)y[n'] = \Delta x[n']. \tag{52}$$

Slično tome, želimo li zapis preko operatora ∇ prvo mijenjamo $n \mapsto n' - 1$ pa zatim mijenjamo $E^{-1} \mapsto 1 - \nabla$ što daje

$$\big(3 - \nabla\big)y[n'] = \big(\nabla - \nabla^2\big)x[n']. \tag{53}$$

Opisuje li diferencijska jednadžba linearni sustav?

Važna posljedica svojstva linearnosti jest da svaki linearni sustav $\mathcal{S}$ ulaznu nulu $0[n]$ mora preslikati u izlaznu nulu $0[n]$, dakle

$$\mathcal{S}\big[0[n]\big] = 0[n]. \tag{54}$$

Operatorski zapis diferencijske jednadžbe ukazuje na to da (54) ne mora biti zadovoljeno jer operator $A(E)$ uglavnom ima nepraznu **jezgru** koju čini podprostor signala kojeg preslikava u nulu.

Prema tome za ulaznu nulu $0[n]$ može biti $y_h[n] \neq 0[n]$ pa zato linearna diferencijska jednadžba sa stalnim koeficijentima u općem slučaju ne opisuje linearni sustav.

Odziv nepobuđenog sustava

Želimo li diferencijskom jednadžbom sa stalnim koeficijentima $\mathcal{D}$ opisati linearni sustav $\mathcal{S}$ onda moramo osigurati da za ulaznu nulu $0[n]$ vrijedi

$$\mathcal{D}\big[0[n]\big] = y_p[n] + y_h[n] = 0[n]. \tag{55}$$

Partikularni dio je očito nula, dakle $y_p[n] = 0[n]$.

Prema tome ako želimo da diferencijska jednadžba $\mathcal{D}$ opisuje linearni sustav $\mathcal{S}$ onda početni uvjeti koji određuju $y_h[n]$ moraju biti takvi da vrijedi $\mathcal{D}\big[0[n]\big] = 0[n]$.

Ako to ne vrijedi onda postoji odziv nepobuđenog sustava na ulaznu nulu

$$\mathcal{D}\big[0[n]\big] = y_{\text{nepobuđeni}}[n] \tag{56}$$

Inkrementalno linearni sustavi

Ako znamo odziv $y_{\text{nepobuđeni}}[n]$ nepobuđene diferencijske jednadžbe onda taj odziv možemo ukloniti oduzimanjem iz općeg odziva i tako dobiti linearni sustav.

Stoga općenito kažemo da linearna diferencijska jednadžba sa stalnim koefijentima opisuje **inkrementalno linearni sustav** ili **afin sustav** jer uklanjanjem dijela odziva na ulaznu nulu iz općeg odziva dobivamo linearni sustav.

Za sustav $\mathcal{S}$ kažemo da je inkrementalno linearan ili afin ako je linearan u razlici pobuda, odnosno:

$$\forall(x_1, y_1),\ \forall(x_2, y_2),\ \forall a, b \in \mathbb{C},\ \exists(x_3, y_3) : \\ \mathcal{S}\left[a(x_1 - x_3) + b(x_1 - x_3)\right] = a(y_1 - y_3) + b(y_2 - y_3) \tag{57}$$

Inkrementalno linearni sustavi i radna točka

Kažemo da odziv nepobuđenog sustava

$$\mathcal{D}\big[0[n]\big] = y_{\text{nepobuđeni}}[n] \tag{58}$$

definira **radnu točku** sustava oko koje vršimo **linearizaciju**.

U postupku linearizacije oko radne točke ulazno-izlazni par signala $\big(0[n], y_{\text{nepobuđeni}}[n]\big)$ odgovara ulazno-izlaznom paru $\big(x_3, y_3\big)$ iz definicije inkrementalno linearnog sustava.

Prema tome svakom inkrementalno linearnom sustavu $\mathcal{D}$ možemo pridružiti linearan sustav $\mathcal{D}'$ definiran kao

$$y[n] = \mathcal{D}'\big[x[n]\big] = \mathcal{D}\big[x[n] - 0[n]\big] - y_{\text{nepobuđeni}}[n] \tag{59}$$

koji je dobiven linearizacijom oko radne točke.

Vizualna reprezentacija sustava

Složenije sustave je ponekad naporno analizirati samo preko jednadžbi pa se zato često koriste vizualne reprezentacije.

Već smo vidjeli da u ulazno-izlaznom modelu sustav možemo prikazati pravokutnikom unutar kojeg se nalazi oznaka sustava, a signale možemo prikazati strelicama čiji smjer pokazuje tok signala.

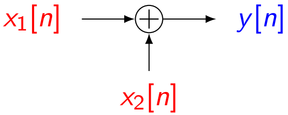
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow y[n] = \mathcal{S}[x]$$

Složeni sustav možemo prikazati kao kombinaciju jednostavnijih sustava koji su na neki način spojeni, bilo jednadžbom koja formalno opisuje sustav bilo dijagramom koji vizualizira pripadnu jednadžbu.

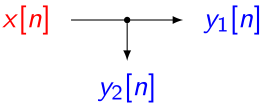
Takav način vizualizacije nazivamo **blokovski dijagram**.

Blokovski dijagram

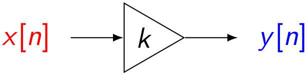
Osim pravokutnog bloka koji je osnovni element blokovskog dijagrama uvodimo još četiri često korištena elementa:



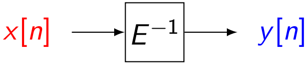
zbrajalo
$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$



račvanje
$y_1[n] = y_2[n] = x[n]$



pojačanje ili
množenje s konstantom
$y[n] = kx[n]$



jedinično kašnjenje
$y[n] = x[n-1]$

Primjer blokovskog dijagrama

Nacrtaj blokovski dijagram sustava

$$y[n] = S\big[x[n]\big] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \tag{60}$$

Sustav je zadan ulazno-izlaznom jednadžbom pa ga standardno možemo prikazati pomoću jednog bloka za sumiranje:

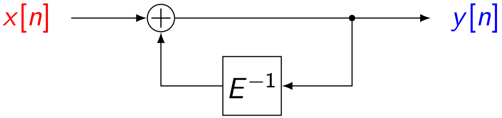
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\sum} \longrightarrow y[n]$$

Primjer blokovskog dijagrama

No također primijetite da vrijedi

$$y[n] = S\left[x[n]\right] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$
$$= x[n] + \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m]}_{=y[n-1]} = x[n] + y[n-1], \qquad (61)$$

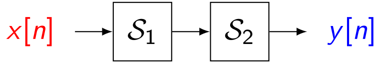
pa zato sustav možemo prikazati i blokovskim dijagramom:



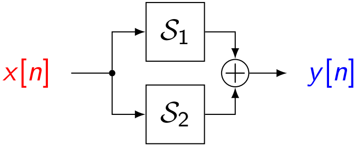
Primijetite povratnu vezu u dobivenom blokovskim dijagramu.
Povratna veza se pojavljuje kada u ulazno-izlaznoj jednadžbi postoji rekurzija, odnosno kada izlaz $y[n]$ zavisi o sebi.

Temeljni spojevi sustava

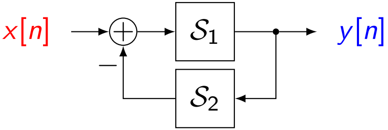
Sustave $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ tipično spajamo u tri temeljena spoja, serijski i paralelni spoj te povratnu vezu.



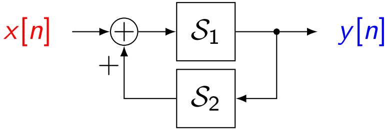
serijski spoj sustava
(kaskada ili kompozicija)
$y[n] = \mathcal{S}_2\big[\mathcal{S}_1\big[x[n]\big]\big]$



paralelni spoj sustava
$y[n] = \mathcal{S}_1\big[x[n]\big] + \mathcal{S}_2\big[x[n]\big]$



negativna povratna veza
$y[n] = \mathcal{S}_1\big[x[n] - \mathcal{S}_2\big[y[n]\big]\big]$



pozitivna povratna veza
$y[n] = \mathcal{S}_1\big[x[n] + \mathcal{S}_2\big[y[n]\big]\big]$

Diferencijalne jednadžbe

Slično kao što smo za **vremenski diskretne** sustave uveli diferencijske jednadžbe kao jedan mogući ulazni-izlazni model, za **vremenski kontinuirane** sustave uvodimo diferencijalne jednadžbe.

Važnu klasa vremenski kontinuiranih sustava opisujemo pomoću linearnih diferencijalnih jednadžbi sa stalnim koeficijentima (engl. *linear differential equations with constant coefficients*)

Tipična diferencijalna jednadžba u obradbi signala jest

$$
\begin{aligned}
a_0 y^{(N)}(t) + a_1 y^{(N-1)}(t) + \cdots + a_{N-1} y^{(1)}(t) + a_N y(t) = \\
= b_0 x^{(M)}(t) + b_1 x^{(M-1)}(t) + \cdots + b_{M-1} x^{(1)}(t) + b_M x(t),
\end{aligned}
$$

uz ograničenje $N \geq M$ radi realizabilnosti.

Rješavanje diferencijalne jednadžbe

Ponovimo prvo klasični postupak rješavanja linearne difrencijalne jednadžbe sa stalnim koeficijentima ili postupak rješavanja **u vremenskoj domeni**.

Neka je zadana jednadžba

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y^{(N-i)}(t) = \sum_{j=0}^{M} b_j x^{(M-j)}(t). \tag{62}$$

Klasični postupak rješavanja jednadžbe (62) je po koracima:

1. određivanje općeg homogenog rješenja $y_h(t)$,
2. određivanje bilo kojeg partikularnog rješenja $y_p(t)$, i
3. određivanje konačnog rješenja kao $y_p(t) + y_h(t)$.

Homogena jednadžba

Za diferencijalnu jednadžbu (62) kažemo da je homogena ako je ulaz jednak nuli, dakle

$$x(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{63}$$

Homogeno rješenje je oblika eksponencijale, odnosno

$$y_h(t) = Ce^{st}, \quad C, s \in \mathbb{C}. \tag{64}$$

Uvrštavanjem (64) u jednadžbu (62) dobivamo

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \left(Cs^{N-i} e^{st}\right) = Ce^{st} \Bigg(\underbrace{\sum_{i=0}^{N} a_i s^{N-i}}_{=A(s)}\Bigg) = 0 \tag{65}$$

Netrivijalna rješenja karakteristične jednadžbe (65) su korijeni karakterističnog polinoma $A(s)$.

Karakteristični polinom i homogeno rješenje

Korijene p_k, $k = 1, \dots, N$, karakterističnog polinoma

$$A(s) = \sum_{i=0}^{N} a_i s^{N-i} = a_0 \sum_{k=1}^{N} (s - p_k) \qquad (66)$$

nazivamo polovima.

Pretpostavimo da su svi polovi **jednostruki**
(slučaj **višestrukih** polova ostavljamo za samostalni rad).

Onda je homogeno rješenje $y_h(t)$ oblika

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{p_k t}, \qquad (67)$$

gdje su $C_k \in \mathbb{C}$ konstante koje možemo slobodno birati.

Sve moguće signale definirane izrazom (67) zajedno nazivamo **jezgrom** diferencijalne jednadžbe.

Partikularno rješenje

Partikularno rješenje je bilo koje rješenje jednadžbe (62) za neki zadani $x(t)$, dakle vrijedi

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y_p^{(N-i)}(t) = \sum_{j=0}^{M} b_j x^{(M-j)}(t). \tag{68}$$

Partikularna rješenja za poznate pobude su uobičajeno tabelirana, a ako nisu onda koristimo metodu varijacije konstanti.

Najvažnije partikularno rješenje jest za kontinuiranu eksponencijalu koja je svojstvena funkcija jednadžbe (62), odnosno za

$$x(t) = ce^{st}, \quad c, s \in \mathbb{C} \tag{69}$$

partikularno rješenje jest

$$y_p(t) = Ce^{st}, \quad C, s \in \mathbb{C}. \tag{70}$$

Konačno rješenje

Kada znamo $y_p(t)$ i $y_h(t)$ konačno rješenje određujemo kao

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + \sum_{k=1}^{N} C_k e^{p_k t}. \tag{71}$$

U rješenju (41) postoji N neodređenih konstanti C_k u homogenom dijelu rješenja $y_h(t)$.

Da bi odredili te nepoznate konstante uobičajeno zadajemo N dodantih početnih uvjeta, najčešće kao poznatu vrijednost izlaza i njegovih derivacija u nekom trenutku t_0. Prema tome da odredimo konačno rješenje moramo znati

$$y(t_0),\ y^{(1)}(t_0),\ y^{(2)}(t_0),\ \ldots,\ y^{(N-1)}(t_0). \tag{72}$$

Ovime je ponavljanje postupka rješavanja diferencijalne jednadžbe u **vremenskoj domeni** završeno.

Primjer diferencijalne jednadžbe

Zadana je diferencijalna jednadžba

$$y^{(1)}(t) - 2y(t) = 6x(t). \tag{73}$$

Odredi odziv $y(t)$ na pobudu $x(t) = e^{-t}$ uz početni uvjet $y(0) = 2$.

Homogeno rješenje je $y_h(t) = Ce^{-2t}$.

Partikularno rješenje je $y_p(t) = -2e^{-t}$.

Konačno rješenje je $y[n] = -2e^{-t} + 4e^{-2t}$.

Operator derivacije

Primjer tipične diferencijalne jednadžbe je bio

$$\begin{aligned} a_0 y^{(N)}(t) + a_1 y^{(N-1)}(t) + \cdots + a_N y^{(0)}(t) = \\ = b_0 x^{(M)}(t) + b_1 x^{(M-1)}(t) + \cdots + b_M x^{(0)}(t). \end{aligned} \tag{74}$$

Često se uvodi operator derivacije koji derivira signal u vremenu, odnosno

$$Dx(t) = \frac{d}{dt}x(t). \tag{75}$$

Uzastopnom primjenom D više puta deriviramo signal.

Za vremenski kontinuirane kauzalne sustave također definiramo D^{-1} kao inverzni operator, odnosno

$$D^{-1}x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau. \tag{76}$$

Operatorski zapis diferencijalne jednadžbe

Korištenjem operatora derivacije D možemo diferencijalnu jednadžbu (74) zapisati u operatorskom obliku

$$\begin{aligned}\Big(\overbrace{a_0 D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots + a_{N-1} D + a_N}^{A(D)}\Big) y(t) = \\ = \Big(\underbrace{b_0 D^M + b_1 D^{M-1} + \cdots + b_{M-1} D + b_M}_{B(D)}\Big) x(t)\end{aligned} \tag{77}$$

gdje su $A(D)$ i $B(D)$ formalni polinomi operatora D koji definiraju operaciju nad izlaznim i ulaznim signalom.

Nazivanje homogenog rješenja (67) **jezgrom** je sada opravdano operatorskim zapisom jer sva homogena rješenja razapinju podprostor signala kojeg operator $A(D)$ preslikava u nulu.

Diferencijalne i integralne jednadžbe

Korištenjem operatorskog zapisa svaku linearnu diferencijalnu jednadžbu sa stalnim koeficijentima relativno jednostavno možemo pretvoriti u integralnu, i obrnuto.

Postupak se svodi na formalno množenje jednadžbe s D^k, $k \in \mathbb{Z}$.

Na primjer množenjem s D^{-N} uz $N \geq M$ diferencijalnu jednadžbu (77) pretvara u integralnu jednadžbu

$$\begin{aligned}\left(a_0 + a_1 D^{-1} + \cdots + a_{N-1} D^{-N+1} + a_N D^{-N}\right) y(t) = \qquad (78)\\ = \left(b_0 D^{M-N} + b_1 D^{M-1-N} + \cdots + b_{M-1} D^{1-N} + b_M D^{-N}\right) x(t)\end{aligned}$$

koju možemo riješiti računalnim postupcima numeričke integracije.

Opisuje li diferencijalna jednadžba linearni sustav?

Isto kao i kod diferencijskih jednadžbi operatorski zapis linearne diferencijalne jednadžbe sa stalnim koeficijentima ukazuje na postojanje odziva različitog od nule za pobudu jednaku nuli jer operator $A(D)$ uglavnom ima nepraznu **jezgru** koju čini podprostor signala kojeg preslikava u nulu.

Prema tome za ulaznu nulu $0(t)$ može biti $y_h(t) \neq 0(t)$ pa zato linearna diferencijalna jednadžba sa stalnim koeficijentima u općem slučaju ne opisuje linearni sustav.

Odziv nepobuđenog sustava

Želimo li diferencijalnom jednadžbom sa stalnim koeficijentima $\mathcal{D}$ opisati linearni sustav $\mathcal{S}$ onda moramo osigurati da za ulaznu nulu $0(t)$ vrijedi

$$\mathcal{D}\big[0(t)\big] = y_p(t) + y_h(t) = 0(t). \tag{79}$$

Partikularni dio je očito nula, dakle $y_p(t) = 0(t)$.

Prema tome ako želimo da diferencijska jednadžba $\mathcal{D}$ opisuje linearni sustav $\mathcal{S}$ onda početni uvjeti koji određuju $y_h(t)$ moraju biti takvi da vrijedi $\mathcal{D}\big[0(t)\big] = 0(t)$.

Ako to ne vrijedi onda postoji odziv nepobuđenog sustava na ulaznu nulu

$$\mathcal{D}\big[0(t)\big] = y_{\text{nepobuđeni}}(t) \tag{80}$$

Inkrementalno linearni sustav

Kažemo da odziv nepobuđenog sustava

$$\mathcal{D}\big[0(t)\big] = y_{\text{nepobuđeni}}(t) \tag{81}$$

definira **radnu točku** sustava oko koje vršimo **linearizaciju**.

Vremenski kontinuiranom inkrementalno linearnom sustavu $\mathcal{D}$ možemo pridružiti vremenski kontinuirani linearan sustav $\mathcal{D}'$ definiran kao

$$y(t) = \mathcal{D}'\big[x(t)\big] = \mathcal{D}\big[x(t) - 0(t)\big] - y_{\text{nepobuđeni}}(t) \tag{82}$$

za kojeg kažemo da je dobiven linearizacijom oko radne točke.

Preporučeno čitanje

- P. Prandoni, M. Vetterli, "Signal Processing for Communications" (`https://sp4comm.org/`), poglavlje 5., dijelovi 5.1. i 5.2.
- B. Jeren, "Signali i sustavi", Školska knjiga, 2021., dijelovi 3.3., 3.4. i 3.5., i to samo materijal koji se odnosi na vremenski diskretne sustave
- H. Babić, "Signali i sustavi" (`http://sis.zesoi.fer.hr/predavanja/pdf/sis_2001_skripta.pdf`), dio 3.3. i poglavlje 11.
- M. Vetterli, J. Kovačević, V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing" (`https://fourierandwavelets.org/`), poglavlje 3. dio 3.3.