Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Osnove obradbe signala – Prva domaća zadaća

Akademska školska godina 2021./2022.

Tomislav Petković

1. Neka su z_1 i z_2 proizvoljni kompleksni brojevi. Koji od sljedećih izraza su točni, a koji nisu? Objasnite kako ste ispitali točnost izraza!

a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

b) $\angle(z_1 + z_2) = \angle z_1 + \angle z_2$

c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

d) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

f) $\angle(z_1 \cdot z_2) = \angle z_1 + \angle z_2$

g) $|z_1 / z_2| = |z_1| - |z_2|$

h) $\angle(z_1 / z_2) = \angle z_2 - \angle z_1$

2. Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{i} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{i.}$$

Za svaki od sljedećih izraza prvo odredi je dobro definiran ili nije, a zatim ga izračunaj ako jest dobro definiran.

a) $\mathbf{AB}$

b) $\mathbf{AC}$

c) $\mathbf{xy}$

d) $\mathbf{yx}$

e) $\mathbf{xx}^T$

f) $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$

g) $\mathbf{xA}$

h) $\mathbf{Ax}$

i) $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$

j) $\mathbf{A}^{-1}$

k) $\mathbf{B}^{-1}$

l) $\mathbf{C}^{-1}$

3.* Svaki skalarni umnožak $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mora zadovoljiti sljedeće uvjete: (i) linearnost u prvom argumentu; (ii) konjugirana simetrija; i (iii) pozitivna definitnost. Dokažite da su ta tri uvjeta zadovoljena za sljedeće primjere skalarnih umnožaka na pripadnim vektorskim prostorima:

a) Vektorski prostor vremenski diskretnih signala konačnog trajanja od N uzoraka sa skalarnim umnoškom

$$\langle x[n], y[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y^*[n].$$

b) Vektorski prostor kvadratno zbrojivih vremenski diskretnih signala sa skalarnim umnoškom

$$\langle x[n], y[n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] y^*[n].$$

c) Vektorski prostor kvadratno integrabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ sa skalarnim umnoškom

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t) y^*(t)\, dt.$$

4.* Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ je skup V s dvije operacije, zbrajanjem vektora i množenjem vektora skalarom, koje zadovoljavaju osam aksioma vektorskog prostora. Pokažite da su zadani prostori vektorski prostori!

a) Prostor diskretnih signala konačnog trajanja, $x[n] : \{0, 1, \dots N-1\} \to \mathbb{R}$, uz normalne definicije zbrajanja signala i množenja signala skalarom.

b) Prostor kontinuiranih signala oblika $y(t) = a + bt$ za proizvoljne realne a i b, uz normalne definicije zbrajanja signala i množenja signala skalarom.

5. Želimo odrediti izraze za rastav ili dekompoziciju signala konačnog trajanja od četiri uzorka. Traženi rastav signala mora koristiti sljedeće bazne funkcije:

$$\begin{aligned}
\phi_0[n] &= \{\underline{1}, 1, 0, 0\} \\
\phi_1[n] &= \{\underline{0}, 1, 0, 1\} \\
\phi_2[n] &= \{\underline{1}, 0, 1, 0\} \\
\phi_3[n] &= \{\underline{0}, 0, 0, 1\}
\end{aligned}$$

a) Odredite matricu $\mathbf{\Phi}$.

b) Odredite Gramovu matricu $\mathbf{G}$ i pokažite da je invertibilna.

c) Odredite matricu transformacije $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{\Phi}^H$ koja se može koristiti za rastav bilo kojeg signala $x[n]$ trajanja od četiri uzorka.

d) Ako promatramo bazne funkcije $\phi_k[n]$ kao signale koje rastavljamo kako onda izgledaju njihovi spektri? Objasnite!

6.* Ponovite prethodni zadatak za sljedeće skupove imenovanih baznih funkcija:

a) Hadamardova baza:

$$\begin{aligned}\phi_0[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{1}, 1, 1, 1\}\\ \phi_1[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{1}, -1, 1, -1\}\\ \phi_2[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{1}, 1, -1, -1\}\\ \phi_3[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{1}, -1, -1, 1\}\end{aligned}$$

b) Haarova baza:

$$\begin{aligned}\phi_0[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{1}, 1, 1, 1\}\\ \phi_1[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{1}, 1, -1, -1\}\\ \phi_2[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, 0, 0\}\\ \phi_3[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{0}, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}\end{aligned}$$

c) Baza diskretne kosinusne transfromacije (DCT $-II$):

$$\begin{aligned}\phi_0[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{1}, 1, 1, 1\}\\ \phi_1[n] &= \tfrac{1}{2}\left\{\underline{\sqrt{1+1/\sqrt{2}}}, \sqrt{1-1/\sqrt{2}}, -\sqrt{1-1/\sqrt{2}}, -\sqrt{1+1/\sqrt{2}}\right\}\\ \phi_2[n] &= \tfrac{1}{2}\{\underline{1}, -1, -1, 1\}\\ \phi_3[n] &= \tfrac{1}{2}\left\{\underline{\sqrt{1-1/\sqrt{2}}}, -\sqrt{1+1/\sqrt{2}}, \sqrt{1+1/\sqrt{2}}, -\sqrt{1-1/\sqrt{2}}\right\}\end{aligned}$$

7. Zadana je ne-normalizirana Haarova baza nad signalima duljine 8 uzoraka:

$$\begin{aligned}\phi_0[n] &= \{\underline{1}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}\\ \phi_1[n] &= \{\underline{1}, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1\}\\ \phi_2[n] &= \{\underline{1}, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0\}\\ \phi_3[n] &= \{\underline{0}, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -1\}\\ \phi_4[n] &= \{\underline{1}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}\\ \phi_5[n] &= \{\underline{0}, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\}\\ \phi_6[n] &= \{\underline{0}, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\}\\ \phi_7[n] &= \{\underline{0}, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\end{aligned}$$

Uočite pravilan uzorak koji se ponavlja.

a) Pokažite da zadani vektori čine bazu.

b) Odredite transformaciju konstantnog signala $x[n] = 1$.

c) Odredite transformaciju alternirajućeg signala $x[n] = (-1)^n$.

8. Razmatramo rastav signala konačnog trajanja od četiri uzorka. Za takav rastav želimo koristiti transformaciju čije bazne funkcije su kompleksne eksponencijale $\phi_k[n] = e^{j\pi nk/2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

a) Izračnajte sve uzorke svake od četiri bazne funkcije $\phi_k[n]$ te zatim odredite matricu $\mathbf{\Phi}$.

b) Odredite Gramovu matricu $\mathbf{G}$ i pokažite da je invertibilna.

c) Odredite matricu transformacije $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{\Phi}^H$ koja se može koristiti za rastav bilo kojeg signala od četiri uzorka.

d) Ako promatramo bazne funkcije $\phi_k[n]$ kao signale koje rastavljamo kakvi su njihovi spektri? Objasnite!

e) Pronađite u literaturi točne vrijednosti elemenata standardne transformacijske matrice koja odgovara DFT_4 transformaciji, npr. koristite `fft(eye(4))` u MATLAB-u, te zatim usporedite elemente te matrice sa elementima matrice određene u podzadatku c). Koje su razlike, ako ih uopće ima? Objasnite!

9.* Neka je $x[n]$ čisto realni vremenski diskretan signal. Pokažite da vremenski diskretna Fourierova transformacija takvog signala definirana kao

$$X(\omega) = \mathrm{DTFT}\big[x[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

zadovoljava sljedeća svojstva:

a) $\mathrm{Re}\big[X(\omega)\big]$ je parna funkcija u ω.

b) $\mathrm{Im}\big[X(\omega)\big]$ je neparna funkcija u ω.

c) $\big|X(\omega)\big|$ je parna funkcija u ω.

d) $\arg\big[X(\omega)\big]$ je neparna funkcija u ω.

Izvor zadatka 9.: Zadatak 1. iz Zadataka za vježbu 1. (2003./2004.).

10.* Za vremenski diskretan signal $x[n] = -\delta[n+2] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$ izračnajte vrijednosti sljedećih zadanih izraza bez da računate spektar $X(\omega)$ pomoću vremenski diskretne Fourierove transformacije:

a) $X(0)$

b) $\arg\big[X(\omega)\big]$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\,d\omega$

d) $X(\pi)$

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big|X(\omega)\big|^2\,d\omega.$

Izvor zadatka 10.: Zadatak 4. iz Zadataka za vježbu 1. (2003./2004.).