Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Osnove obradbe signala – Druga domaća zadaća

Akademska školska godina 2021./2022.

Tomislav Petković

1. Za svaki od zadanih signala odredite za koje frekvencije očitavanja dolazi do preklapanja spektra te za koje frekvencije očitavanja ne dolazi do preklapanja spektra. Obrazložite vaše odgovore!

a) $x(t) = \cos(242\pi t)$

b) $x(t) = \cos(244\pi t) + \cos(200\pi t)$

c) $x(t) = \sin(5400\pi t) + \sin(3200\pi t) + \sin(8400\pi t)$

d) $x(t) = \mathrm{sinc}(t)$

e) $x(t) = \mathrm{rect}(t)$

2. Vremenski kontinuirani signal $x(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$ je očitan s periodom očitavanja T_s. Skicirajte i amplitudni i fazni spektar očitanog signala $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$ za sljedeće vrijednosti perioda očitavanja T_s:

a) $T_s = \frac{1}{4}$

b) $T_s = \frac{1}{2}$

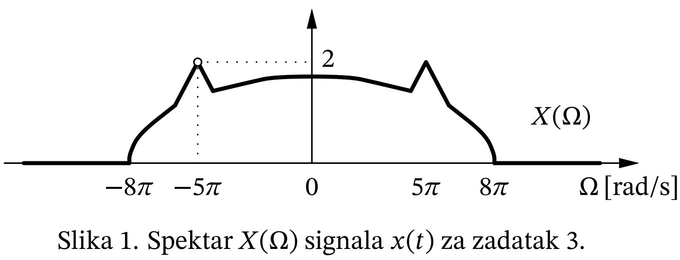
c) $T_s = 1$

3. Vremenski kontinuirani signal $x(t)$ nepoznatog valnog oblika ima čisto realni spektar $X(\Omega)$ koji je prikazan na slici 1.

a) Odredite interval valjanih perioda očitavanja T_s takav da signal $x(t)$ može biti rekonstruiran iz svojih uzoraka $x[n] = x(nT_s)$.

b) Odredite najmanju frekvencija očitavanja za koju nema preklpanja spektra.

c) Razmatramo signal $y(t) = x(2t + 2) + \cos(10\pi t + \pi/4)$. Izrazite spektar signala $y(t)$ pomoću poznatog $X(\Omega)$. Skicirajte dobiveni spektar i na njemu jasno označite gdje su se premjestile točke $(\pm 5\pi, 2)$ (vrhovi “ušiju”) polaznog spektra $X(\Omega)$. Koja je najmanja frekvencija očitavanja za signal $y(t)$?



Slika 1. Spektar $X(\Omega)$ signala $x(t)$ za zadatak 3.

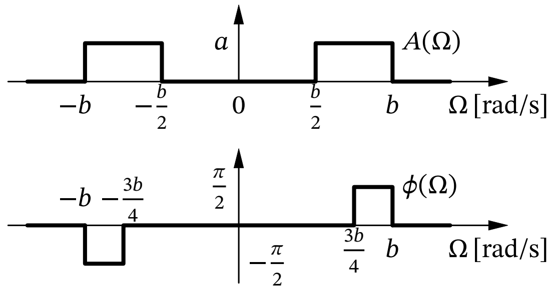
Izvor zadatka 3.: Zadatak 1. iz ponovljenog prvog međuispita održanog 25. siječnja 2011.
Također pogledajte zadatak 2. iz 1. kontrolne zadaće održane 17. studenoga 2006.

4.* Vremenski kontinuirani signal $x(t)$ nepoznatog valnog oblika ima CTFT spektar koji je prikazan na slici 2. Neka su a i b pozitivne realne konstante i neka je $y(t) = 6x\left(-\frac{t}{3}\right)$.

a) Odredite frekvencije očitavanja za očitavanje signala $x(t)$ uz koje ne dolazi do preklapanja spektra.

b) Iskažite spektar signala $y(t)$ pomoću poznatog spektra signala $x(t)$. Skcirajte spektar od $y(t)$.

c) Skicirajte amplitudni i fazni spektar (DTFT) signala $z[n] = x(\frac{8\pi}{7b}n)$.



Slika 2. Amplitudni i fazni spektri vremenski kontinuiranog signala $x(t)$ iz zadatka 4.

Izvor zadatka 4.: Zadatak 1. iz ljetnog ispitnog roka održanog 5. srpnja 2013.

5. Želimo rekonstruirati vremenski kontinuirani signal $x(t)$ koristeći tri različite metode interpolacije njegovih uzoraka. Vrijednosti $x[n] = \{\underline{1}, 2, 0, -1\}$ su rezultat očitavanja signala korištenjem perioda očitavanja $T_s = 1\,\mathrm{s}$; sve vrijednosti koje nisu zadane su jednake nuli. Također nas posebno zanima vrijednost rekonstruiranog signala u trenutku $t_1 = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

a) Korištenjem idealne interpolacije iskažite vremenski kontinuirani signal kao red uzoraka $x[n]$ te zatim izračunajte vrijednost $x_{\mathrm{II}}(t_1)$.

b) Korištenjem interpolacije nultog reda iskažite vremenski kontinuirani signal kao red uzoraka $x[n]$ te zatim izračunajte vrijednost $x_{\mathrm{ZOH}}(t_1)$.

c) Korištenjem interpolacije prvog reda iskažite vremenski kontinuirani signal kao red uzoraka $x[n]$ te zatim izračunajte vrijednost $x_{\mathrm{FOH}}(t_1)$.

d) Jesu li vrijednosti dobivene interpolacijom u t_1 iste? Postoji li neko ograničenje na razlike dobivenih vrijednosti? Objasnite!

e) Ako želimo izračunati $x(t_1)$ u stvarnom vremenu koja su minimalna vremena kašnjenja potrebna svakoj od tri metode interpolacije za računanje tražene interpolirane vrijednosti?

Uputa: Funkcije interpolacije (ili impulsni odzivi) za idealnu interpolaciju, interpolaciju nultog reda (kratica ZOH od eng. *zero-order hold*) te interpolaciju prvog reda (kratica FOF od eng. *first-order hold*) su redom $h_{\mathrm{II}}(t) = \mathrm{sinc}(\frac{t}{T_s})$, $h_{\mathrm{ZOH}}(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{T_s})$, i $h_{\mathrm{FOH}}(t) = \mathrm{tri}(\frac{t}{T_s})$.

6.* Neka je $X[k] = \{\underline{2}, 1, 0, 1\}$ spektar signala $x[n]$ konačnog trajanja od 4 uzorka. Ivica želi interpolirati signal $x[n]$ tako da dobije novi signal $y[n]$ konačnog trajanja od 8 uzoraka. Osim toga Ivica želi postupak provesti u domeni DFT_N transformacije, odnosno želi nekako proširiti spektar $X[k]$ te dobiti spektar $Y[k]$ iz kojeg se zatim računa $y[n]$. Ivica je zamislio tri moguća postupka:

1. Spektar $Y[k]$ se određuje iz spektra $X[k]$ tako da se $X[k]$ proširi dodavanjem četiri nule na kraju, dakle za zadani $X[k]$ dobivamo $Y_1[k] = \{\underline{2}, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}$.
2. Spektar $Y[k]$ se određuje iz spektra $X[k]$ tako da se u $X[k]$ dodaju nule između uzoraka, dakle za zadani $X[k]$ dobivamo $Y_2[k] = \{\underline{2}, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0\}$.
3. Spektar $Y[k]$ se određuje iz spektra $X[k]$ tako da se između svaka dva susjedna uzorka ubaci linearno interpolirana vrijednost, dakle za zadani $X[k]$ dobivamo $Y_3[k] = \{\underline{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$.

Pomognite Ivici da odredi koja od tri opisane metode interpolacije je ispravna.

a) Koliko različitih spektralnih komponenti sadrže spektri $Y_1[k]$, $Y_2[k]$ i $Y_3[k]$?

b) Ako vrijeme očitavanja signala $x[n]$ iznosi $T_x = 2$ ms te ako vrijeme očitavanja signala $y[n]$ iznosi $T_y = 1$ ms odredite točne frekvencije spektralnih komponenti u spektrima $Y_1[k]$, $Y_2[k]$ i $Y_3[k]$.

c) Koja od zadanih metoda interpolacije ne dodaje nove spektralne komponente u interpolirani signal $y[n]$? Objasnite!

d) Za metodu interpolacije iz podzadatka c) odredite koeficijent skaliranja a tako da periodička proširenja signala $\tilde{x}[n] = \text{IDTFS}\big[X[k]\big]$ i $\tilde{y}[n] = \text{IDTFS}\big[aY[k]\big]$ imaju jednaku snagu.

Izvor zadatka 6.: Zadatak 5. iz ljetnog ispitnog roka održanog 5. srpnja 2013.

7.* Razmotrite prostor S funkcija čiji je spektar ograničen na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.

a) Pokažite da je skup $\{\text{sinc}(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormalan skup, odnosno da vrijedi

$$\big\langle \text{sinc}(t-n), \text{sinc}(t-m) \big\rangle = \delta(n-m).$$

b) Pokažite da se bilo koja funkcija $f \in S$ može zapisati u obliku reda

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \, \text{sinc}(t-n),$$

pri čemu je $\alpha_n = \big\langle \text{sinc}(t-n), f(t) \big\rangle$.

c) Pokažite da je za funkciju $f(t)$ koja nije spektralno ograničena

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big\langle \text{sinc}(t-n), f(t) \big\rangle \, \text{sinc}(t-n)$$

ortogonalna projekcija $f(t)$ na S.

Izvor zadatka 7.: Zadatak 19. iz Zadataka za vježbu 1. (2003./2004.).