Osnovne trigonometrijske jednakosti

$$\sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$$
$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$
$$\sin\Big(x \pm \frac{\pi}{2}\Big) = \pm\cos x$$
$$\cos\Big(x \pm \frac{\pi}{2}\Big) = \mp\sin x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big)$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$$
$$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$$
$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3x)$$
$$4\cos^3 x = 3\cos x + \cos(3x)$$
$$8\sin^4 x = 3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)$$
$$8\cos^4 x = 3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)$$

$$a\cos x - b\sin x = r\cos(x+\phi)$$
$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\operatorname{tg}\phi = b/a$$
$$a = r\cos\phi$$
$$b = r\sin\phi$$

Tablice suma i integrala

Konačne sume

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$
$$\sum_{i=0}^{n} e^{j(\theta+i\phi)} = \frac{\sin\big((n+1)\phi/2\big)}{\sin(\phi/2)}e^{j(\theta+n\phi/2)}$$
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!} = 2^n$$

Neodređeni integrali

Racionalne funkcije

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}, \quad 0<n$$
$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$$
$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{tg}^{-1}\Big(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\Big), \qquad b^2<4ac$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|, \qquad b^2>4ac$$
$$= \frac{-2}{2ax+b}, \qquad b^2=4ac$$
$$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} =$$
$$= \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$
$$\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{tg}^{-1}\Big(\frac{ax}{b}\Big)$$
$$\int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)$$
$$\int \frac{x^2\,dx}{a^2+x^2} = x - a\operatorname{tg}^{-1}\Big(\frac{x}{a}\Big)$$
$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{tg}^{-1}\Big(\frac{x}{a}\Big)$$
$$\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{-1}{2(a^2+x^2)}$$
$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{-x}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^{-1}\Big(\frac{x}{a}\Big)$$

Trigonometrijske funkcije

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

$$\int x\cos(x)\,dx = \cos(x) + x\sin(x)$$

$$\int x^2\cos(x)\,dx = 2x\cos(x) + (x^2-2)\sin(x)$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

$$\int x\sin(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x)$$

$$\int x^2\sin(x)\,dx = 2x\sin(x) + (2-x^2)\cos(x)$$

Eksponencijalne funkcije

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \Big(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\Big)e^{ax}$$

$$\int x^2e^{ax}\,dx = \Big(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\Big)e^{ax}$$

$$\int x^3e^{ax}\,dx = \Big(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\Big)e^{ax}$$

$$\int \sin(x)e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2+1}\big(a\sin(x) - \cos(x)\big)e^{ax}$$

$$\int \cos(x)e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2+1}\big(a\cos(x) + \sin(x)\big)e^{ax}$$

Određeni integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2+bx}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{\frac{b^2}{4a^2}}, \quad a > 0$$

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Dekompozicija signala konačnog trajanja

Vremenski diskretni signal $x[n]$ konačnog trajanja od N uzoraka možemo prikazati pomoću N baznih funkcija $\phi_k[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} s_k\phi_k[n]$$

Težinski doprinos s_k pojedine bazne funkcije $\phi_k[n]$ zovemo spektar i računamo ga kao:

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{G}^{-1}\Phi^H\mathbf{x}$$

Pri tome je:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \dots & x[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}^T = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}_k^T = \begin{bmatrix} \phi_k[0] & \phi_k[1] & \dots & \phi_k[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_0[n] & \boldsymbol{\phi}_1[n] & \dots & \boldsymbol{\phi}_{N-1}[n] \end{bmatrix}$$

Matrica $\mathbf{G} = \Phi^{\mathbf{T}}\Phi^*$ je Gramova matrica.

Matrica $\mathbf{T} = \mathbf{G}^{-1}\Phi^H$ je matrica transformacije.

Bazne funkcije $\phi_k[n]$ su ortogonalne ako

$$\big\langle \phi_k[n], \phi_l[n] \big\rangle = \boldsymbol{\phi}_k^T\boldsymbol{\phi}_l^* = \begin{cases} \big|\big|\phi_k[n]\big|\big|^2, & k = l \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Diskretna kosinusna transformacija

Diskretna kosinusna transformacija (DCT – *Discrete Cosine Transform*) konačnog niza $x[n]$ duljine N je

$$\mathrm{DCT}_N\big[x[n]\big] = X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\alpha(k)\cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N}$$

za $0 \le k < N$, a inverzna transformacija je

$$\mathrm{IDCT}_N\big[X[k]\big] = x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\alpha(k)\cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N},$$

za $0 \le n < N$. Pri tome je $\alpha(k)$ normalizacijski koeficijent koji poprima vrijednosti

$$\alpha(k) = \sqrt{\frac{2-\delta[k]}{N}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, 1 \le k < N \end{cases}.$$

Diskretna Fourierova transformacija

Diskretna Fourierova transformacija (DFT – *Discrete Fourier Transform*) konačnog niza $x[n]$ duljine N je:

$$\mathrm{DFT}_N\big[x[n]\big] = X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad 0 \le k < N$$

Pri tome je $W_N^{nk} = e^{-2\pi jnk/N}$. Inverzna transformacija je:

$$\mathrm{IDFT}_N\big[X[k]\big] = x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \quad 0 \le n < N$$

Niz $x[n]$ i njegov spektar $X[k]$ čine transformacijski par $x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X[k]$.

Svojstva transformacije

Neka je $x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X[k]$ i neka su α_i, n_0 i k_0 konstante. DFT tada zadovoljava sljedeća svojstva:

Linearnost

$$x[n] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i[k] = X[k]$$

Dualnost

$$X[n] \circ\!\!-\!\!\bullet N x\big[\langle -k \rangle_N\big]$$

Cirkularni pomak u vremenu i frekvenciji

$$x\big[\langle n - n_0 \rangle_N\big] \circ\!\!-\!\!\bullet X[k] W_N^{kn_0}$$

$$x[n] W_N^{-k_0 n} \circ\!\!-\!\!\bullet X\big[\langle k - k_0 \rangle_N\big]$$

Cirkularna konvolucija

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] x_2\big[\langle n - i \rangle_N\big] \circ\!\!-\!\!\bullet X_1[k] X_2[k]$$

$$x_1[n] x_2[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_1[i] X_2\big[\langle k - i \rangle_N\big]$$

Parsevalov teorem

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1^*[n] x_2[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^*[k] X_2[k]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \big|x[n]\big|^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \big|X[k]\big|^2$$

Vremenski kontinuirana Fourierova transformacija

Vremenski kontinuirana Fourierova transformacija (CTFT – *Continuous-Time Fourier Transform*) funkcije $x(t)$ je:

$$\mathrm{CTFT}\big[x(t)\big] = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Inverzna transformacija je:

$$\mathrm{ICTFT}\big[X(\omega)\big] = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

Funkcija $x(t)$ i njezin spektar $X(\omega)$ čine transformacijski par što označavamo $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega)$.

Dovoljni (ali ne i nužni) uvjeti za postojanje transformacije funkcije $x(t)$ su:

1. Funkcija x(t) zadovoljava Dirichletove uvjete (funkcija je ograničena s konačnim brojem maksimuma i minimuma te konačnim brojem diskontinuiteta u bilo kojem konačnom vremenskom intervalu).
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$

Radi isticanja veze s dvostranom Laplaceovom transformacijom spektar se često označava $X(j\omega)$; u ovom pregledu j izostavljamo te pišemo samo $X(\omega)$.

Zamjenom $\omega \mapsto s/j$ u tablicama transformacije se iz većine transformacijskih parova može dobiti transformacijski par dvostrane Laplaceove transformacije s time da područje konvergencije obuhvaća imaginarnu os.

Svojstva transformacije

Neka je $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega)$ i neka su α_i, t_0 i ω_0 konstante. Fourierova transformacija tada zadovoljava sljedeća svojstva:

Linearnost

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(\omega) = X(\omega)$$

Dualnost

$$X(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi x(-\omega)$$

Pomak u vremenu i frekvenciji

$$x(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega - \omega_0)$$

Skaliranje

$$x(\alpha t) \circ\!-\!\bullet \frac{1}{|\alpha|} X\Big(\frac{\omega}{\alpha}\Big)$$

Deriviranje

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \circ\!-\!\bullet (j\omega)^n X(\omega)$$

$$(-jt)^n x(t) \circ\!-\!\bullet \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$$

Integriranje

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \circ\!-\!\bullet \pi X(0)\, \delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

$$\pi x(0)\, \delta(t) - \frac{x(t)}{jt} \circ\!-\!\bullet \int_{-\infty}^{\omega} X(\xi)\, d\xi$$

Konjugacija

$$x^*(t) \circ\!-\!\bullet X^*(-\omega)$$

$$x^*(-t) \circ\!-\!\bullet X^*(\omega)$$

Konvolucija

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\, d\tau \circ\!-\!\bullet X_1(\omega) X_2(\omega)$$

$$x_1(t) x_2(t) \circ\!-\!\bullet \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\xi) X_2(\omega - \xi)\, d\xi$$

Korelacija

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(\tau) x_2(t+\tau)\, d\tau \circ\!-\!\bullet X_1^*(\omega) X_2(\omega)$$

$$x_1^*(t) x_2(t) \circ\!-\!\bullet \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1^*(\xi) X_2(\omega + \xi)\, d\xi$$

Parsevalov teorem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(t) x_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1^*(\omega) X_2(\omega)\, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

Tablica transformacija

Neka je:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, \; x > 0 \\ 0, \; x < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < \; x \; < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < |x| \end{cases}$$

$$\mathrm{tri}(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$\mathrm{comb}_T(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(x - iT)$$

Uz te oznake važnije transformacije su:

$$1 \circ\!-\!\bullet 2\pi\, \delta(\omega)$$

$$\delta(t) \circ\!-\!\bullet 1$$

$$\mu(t) \circ\!-\!\bullet \pi\, \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\frac{1}{2}\, \delta(t) - \frac{1}{2\pi jt} \circ\!-\!\bullet \mu(\omega)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \circ\!-\!\bullet \frac{2}{j\omega}$$

$$\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \circ\!-\!\bullet T\, \mathrm{sinc}\Big(\frac{\omega T}{2\pi}\Big)$$

$$\mathrm{sinc}(at) \circ\!-\!\bullet \frac{1}{a}\, \mathrm{rect}\Big(\frac{\omega}{2\pi a}\Big)$$

$$\mathrm{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big) \circ\!-\!\bullet T\, \mathrm{sinc}^2\Big(\frac{\omega T}{2\pi}\Big)$$

$$\mathrm{sinc}^2(at) \circ\!-\!\bullet \frac{1}{a}\, \mathrm{tri}\Big(\frac{\omega}{2\pi a}\Big)$$

$$e^{j\omega_0 t} \circ\!-\!\bullet 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\delta(t - t_0) \circ\!-\!\bullet e^{-j\omega t_0}$$

$$\mathrm{comb}_{T_0}(t) \circ\!-\!\bullet \frac{2\pi}{T_0}\, \mathrm{comb}_{\frac{2\pi}{T_0}}(\omega)$$

$$\sin(\omega_0 t) \circ\!-\!\bullet -j\pi\big(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\big)$$

$$\cos(\omega_0 t) \circ\!-\!\bullet \pi\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big)$$

$$\sin(\omega_0 t)\, \mu(t) \circ\!-\!\bullet -\frac{j\pi}{2}\big(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\big) + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\cos(\omega_0 t)\, \mu(t) \circ\!-\!\bullet \frac{\pi}{2}\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big) + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$e^{-at} \sin(\omega_0 t)\, \mu(t) \circ\!-\!\bullet \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j\omega)^2}, \quad a > 0$$

$$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,\mu(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{a+j\omega}{\omega_0^2+(a+j\omega)^2}, \quad a>0$$

$$e^{-at}\,\mu(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{a+j\omega}, \quad a>0$$

$$te^{-at}\,\mu(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{(a+j\omega)^2}, \quad a>0$$

$$t^2e^{-at}\,\mu(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{2}{(a+j\omega)^3}, \quad a>0$$

$$t^3e^{-at}\,\mu(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{6}{(a+j\omega)^4}, \quad a>0$$

$$e^{-a|t|} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad a>0$$

$$e^{at}\,\mu(-t)-e^{-at}\,\mu(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{2j\omega}{a^2+\omega^2}, \quad a>0$$

$$e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; a\sqrt{2\pi}e^{-a^2\omega^2/2}, \quad a>0$$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (DTFT – *Discrete-Time Fourier Transform*) niza $x[n]$ je:

$$\mathrm{DTFT}\big[x[n]\big] = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Inverzna transformacija je:

$$\mathrm{IDTFT}\big[X(\omega)\big] = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$$

Niz $x[n]$ i njegov spektar $X(\omega)$ čine transformacijski par što označavamo $x[n] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega)$.

Dovoljan (ali ne i nužni) uvjet za postojanje transformacije niza $x[n]$ je apsolutna sumabilnost:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big|x[n]\big| < \infty$$

Radi isticanja veze s dvostranom $\mathcal{Z}$-transformacijom spektar se često označava $X(e^{j\omega})$; u ovom pregledu e^j izostavljamo te pišemo samo $X(\omega)$.

Zamjenom $e^{j\omega} \mapsto z$ u tablicama transformacije se iz većine transformacijskih parova može dobiti transformacijski par dvostrane $\mathcal{Z}$-transformacije s time da područje konvergencije obuhvaća jediničnu kružnicu.

Svojstva transformacije

Neka je $x[n] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega)$ i neka su α_i, n_0 i ω_0 konstante. Vremenski diskretna Fourierova transformacija tada zadovoljava sljedeća svojstva:

Linearnost

$$x[n] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i[n] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(\omega) = X(\omega)$$

Pomak u vremenu i frekvenciji

$$x[n-n_0] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega)e^{-j\omega n_0}$$

$$x[n]e^{j\omega_0 n} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega-\omega_0)$$

Deriviranje i diferenciranje

$$\Delta x[n] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; (e^{j\omega}-1)X(\omega)$$

$$n^i x[n] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; j^i\frac{d^iX(\omega)}{d\omega^i}$$

Sumiranje

$$\sum_{i=-\infty}^{n} x[i] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(\omega)$$

Konjugacija

$$x^*[n] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X^*(-\omega)$$

$$x^*[-n] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X^*(\omega)$$

Konvolucija

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]x_2[n-i] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X_1(\omega)X_2(\omega)$$

$$x_1[n]x_2[n] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X_1(\xi)X_2(\omega-\xi)\,d\xi$$

Parsevalov teorem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1^*[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X_1^*(\omega)X_2(\omega)\,d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big|x[n]\big|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \big|X(\omega)\big|^2\,d\omega$$

Relacije simetričnosti

Neka je $x[n]$ čisto realan niz i neka je $x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega)$. Tada je:

$$\frac{1}{2}\big(x[n] + x[-n]\big) \circ\!\!-\!\!\bullet \operatorname{Re}\big[X(\omega)\big]$$

$$\frac{1}{2}\big(x[n] - x[-n]\big) \circ\!\!-\!\!\bullet j\operatorname{Im}\big[X(\omega)\big]$$

Također vrijedi:

$$X(\omega) = X^*(-\omega)$$

$$\operatorname{Re}\big[X(\omega)\big] = \operatorname{Re}\big[X(-\omega)\big]$$

$$\operatorname{Im}\big[X(-\omega)\big] = -\operatorname{Im}\big[X(\omega)\big]$$

Tablica transformacija

Neka je:

$$\mu[n] = \begin{cases} 1,\ n \geq 0 \\ 0,\ n < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{rect}_N[n] = \mu[n+N] - \mu[n-N-1] = \begin{cases} 1,\ |n| \leq N \\ 0,\ |n| > N \end{cases}$$

$$\operatorname{tri}_N[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{N}, & |n| < N \\ 0\ \ , & |n| \geq N \end{cases}$$

$$\operatorname{comb}_N[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta[n - iN]$$

Uz te oznake važnije transformacije su:

$$\delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet 1$$

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \operatorname{comb}_{2\pi}(\omega)$$

$$\operatorname{comb}_N[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2\pi}{N}\operatorname{comb}_{\frac{2\pi}{N}}(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 n} \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi i)$$

$$\mu[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi i)$$

$$\operatorname{rect}_N[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\sin\big((N + \frac{1}{2})x\big)}{\sin(\frac{1}{2}x)}, \quad N \geq 1$$

$$\operatorname{tri}_N[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}\right)^2, \quad N > 1$$

$$a^n\,\mu[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad |a| < 1$$

$$na^n\,\mu[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{ae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^2}, \quad |a| < 1$$

$$a^{|n|} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a\cos(\omega)}, \quad |a| < 1$$

$$\frac{a}{\pi}\operatorname{sinc}\Big(\frac{an}{\pi}\Big) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\Big(\frac{\omega + 2\pi i}{2a}\Big), \quad 0 < |a| < \pi$$

$$\frac{a}{2\pi}\operatorname{sinc}^2\Big(\frac{an}{2\pi}\Big) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \operatorname{tri}\Big(\frac{\omega + 2\pi i}{a}\Big), \quad 0 < |a| < \pi$$

$$\sin(\omega_0 n) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{i=-\infty}^{+\infty} j\pi\big(\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi i) - \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi i)\big)$$

$$\cos(\omega_0 n) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \pi\big(\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi i) + \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi i)\big)$$

$$a^n\sin(\omega_0 n)\,\mu[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{ae^{j\omega}\sin(\omega_0)}{e^{2j\omega} - 2ae^{j\omega}\cos(\omega_0) + a^2}, \quad |a| < 1$$

$$a^n\cos(\omega_0 n)\,\mu[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{e^{j\omega}\big(e^{j\omega} - a\cos(\omega_0)\big)}{e^{2j\omega} - 2ae^{j\omega}\cos(\omega_0) + a^2}, \quad |a| < 1$$

Jednostrana Laplaceova transformacija

Jednostrana Laplaceova transformacija funkcije $f(t)$ je:

$$\mathcal{L}\big[f(t)\big] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Funkcija $f(t)$ i njezin spektar $F(s)$ čine transformacijski par što označavamo $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$.

Područje konvergnecije jednostrane $\mathcal{F}$-transformacije jest $\operatorname{Re}s > \operatorname{Re}s_0$, gdje je s_0 najdesniji pol. Ako je $\operatorname{Re}s_0 < 0$ tada se zamjenom $s \mapsto j\omega$ u tablicama transformacije iz većine transformacijskih parova može dobiti vremenski kontinuirana Fourierova transformacija kauzalne funkcije $f(t)$.

Svojstva transformacije

Neka je $\mathcal{L}\big[f(t)\big] = F(s)$ i neka je $\mathcal{L}\big[g(t)\big] = G(s)$. Tada vrijedi:

Linearnost

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(s) = F(s)$$

Pomak u vremenu i frekvenciji

$$f(t-a)\,\mu(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-as}F(s)$$

$$e^{at}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s-a)$$

Deriviranje

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0^-)$$

$$f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^-)$$

Integriranje

$$\int_{0^-}^{t} f(\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}F(s)$$

$$\frac{1}{t}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{s}^{+\infty} F(\sigma)d\sigma$$

Konvolucija

$$\int_{0^-}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)G(s)$$

$$f(t)g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma_0-i\omega}^{\sigma_0+i\omega} F(\sigma)G(s-\sigma)\,d\sigma$$

Tablica transformacija

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 1$$

$$\delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-st_0}, \quad t_0 > 0$$

$$\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$$

$$t\,\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$$

$$e^{-at}\,\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$$

$$te^{-at}\,\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\cos(\omega_0 t)\,\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\sin(\omega_0 t)\,\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})\,\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+a)(s+b)}$$

$$\frac{1}{a-b}(ae^{-at} - be^{-bt})\,\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{(s+a)(s+b)}$$

$$\frac{1}{a}e^{-bt}\sin(at)\,\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+b)^2+a^2}$$

$$e^{-bt}\big(\cos(at) - \frac{b}{a}\sin(at)\big)\,\mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{(s+b)^2+a^2}$$

Jednostrana $\mathcal{Z}$-transformacija

Jednostrana $\mathcal{Z}$-transformacija niza $f[n]$ je:

$$\mathcal{Z}\big(f[n]\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n]z^{-n} = F(z)$$

Niz $f[n]$ i funkcija kompleksne varijable $F(z)$ čine transformacijski par što označavamo $f[n] \circ\!\!-\!\!\bullet F(z)$.

Područje konvergnecije jednostrane $\mathcal{Z}$-transformacije jest $|z| > |z_0|$, gdje je z_0 pol najdalji od ishodišta. Ako je $|z_0| < 1$ tada se zamjenom $z \mapsto e^{j\omega}$ u tablicama transformacije iz većine transformacijskih parova može dobiti vremenski diskretna Fourierova transformacija kauzalnog niza $f[n]$.

Svojstva transformacije

Neka je $\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = F(z)$ i $\mathcal{Z}\big[g[n]\big] = G(z)$. Tada vrijedi:

Linearnost

$$f[n] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(z) = F(z)$$

Pomak

$$f[n+1] \circ\!\!-\!\!\bullet zF(z) - zf[0]$$

$$f[n+m] \circ\!\!-\!\!\bullet z^mF(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f[i]z^{m-i}$$

$$f[n-1] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{z}F(z) + f[-1]$$

$$f[n-m] \circ\!\!-\!\!\bullet z^{-m}F(z) + \sum_{i=0}^{m-1} f[i-m]z^{-i}$$

Skaliranje

$$a^nf[n] \circ\!\!-\!\!\bullet F(\frac{z}{a})$$

Diferenciranje i deriviranje

$$\Delta f[n] \circ\!\!-\!\!\bullet (z-1)F(z)$$

$$nf[n] \circ\!\!-\!\!\bullet -z\frac{dF(z)}{dz}$$

Konvolucija

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f[i]g[n-i] \circ\!\!-\!\!\bullet F(z)G(z)$$

Tablica transformacija

$$\delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet 1$$

$$\delta[n-m] \circ\!\!-\!\!\bullet z^{-m}, \quad m > 0$$

$$n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$n^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$n^3 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4} = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$$

$$1^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$a^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$(n+1)a^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^2}{(z-a)^2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^3}{(z-a)^3}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{(m-1)!}a^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^m}{(z-a)^m}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}a^{n-m} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{(z-a)^{m+1}}$$

$$a^n - \delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{z-a}$$

$$\sin(an) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z\sin(a)}{z^2-2z\cos(a)+1}$$

$$\cos(an) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^2-z\cos(a)}{z^2-2z\cos(a)+1}$$

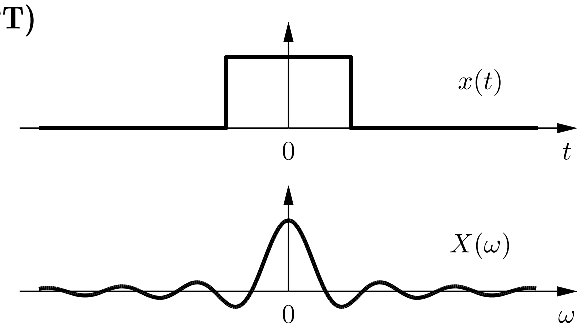
Pregled Fourierovih transformacija

Vremenski kontinuirana Fourierova transformacija (CTFT)

Transformacija se uobičajeno koristi za prikaz kontinuiranih signala konačne energije.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

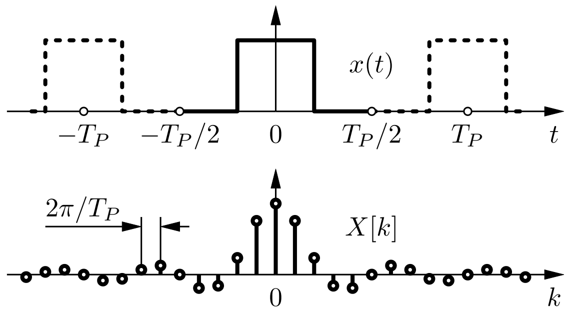


Vremenski kontinuiran Fourierov red (CTFS)

Transformacija se uobičajeno koristi samo za prikaz periodičkih kontinuiranih signala konačne snage.

$$X[k] = \frac{1}{T_P}\int_{T_P} x(t)e^{-j\omega_P kt}\,dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]e^{j\omega_P kt}$$

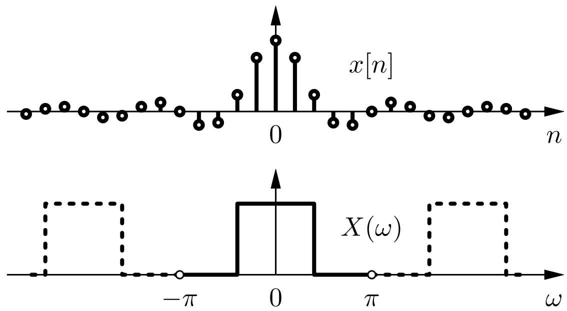


Vremenski diskretna Fourierova transformacija (DTFT)

Transformacija se uobičajeno koristi za prikaz nizova konačne energije.

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$$

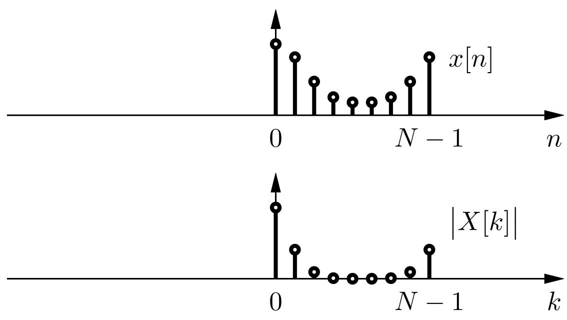


Diskretna Fourierova transformacija (DFT)

Transformacija se uobičajeno koristi za prikaz konačnog niza duljine N.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \le k < N$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, \quad 0 \le n < N$$



Diskretna Fourierova transformacija je usko povezana s vremenski diskretnim Fourierovim redom (DTFS – *Discrete-Time Fourier Series*) koji se uobičajeno koristi za prikaz periodičkog niza. Izrazi su gotovo jednaki:

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi jkn/N}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{2\pi jkn/N}$$