Osnove obradbe signala: Transformacije signala

Tomislav Petković

Sveučilište u Zagrebu

listopad 2022.

Rastav signala

Često je potrebno rastaviti signal u njegove gradivne komponente, odnosno signal želimo prikazati kao kombinaciju drugih signala.

Jedan mogući rastav jest aditivna dekompozicija:

$$x(t) = \sum_k s_k \phi_k(t) \tag{1}$$

Drugi mogući rastavi su multiplikativne dekompozicije:

$$x(t) = \prod_k \phi_k(t) \quad \text{ili} \quad x(t) = \prod_k \big(\phi_k(t)\big)^{s_k} \tag{2}$$

Na ovom predmetu se fokusiramo na aditivnu dekompoziciju.

Primjer rastava signala

Razmotrimo signal $x(t)$ koji sadrži četiri aditivne komponente,

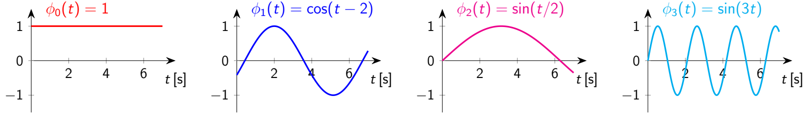
$$x(t) = 3 + 2\cos(t-2) + \sin(t/2) + \sin(3t). \tag{3}$$

Jedan mogući očigledan aditivni rastav jest:

$$k = 0: \qquad s_0 = 3 \qquad \phi_0(t) = 1 \tag{4}$$
$$k = 1: \qquad s_1 = 2 \qquad \phi_1(t) = \cos(t-2) \tag{5}$$
$$k = 2: \qquad s_2 = 1 \qquad \phi_2(t) = \sin(t/2) \tag{6}$$
$$k = 3: \qquad s_3 = 1 \qquad \phi_3(t) = \sin(3t) \tag{7}$$

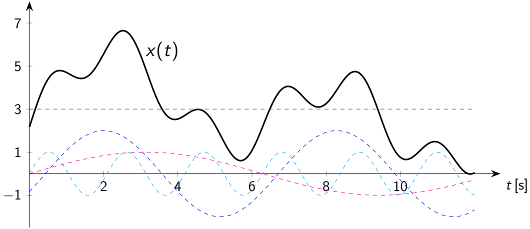
Primjer rastava signala

Bazne funkcije rastava $\phi_k(t)$ su:



Težinska linearna kombinacija baznih funkcija daje polazni signal:

$$x(t) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot \cos(t-2) + 1 \cdot \sin(t/2) + 1 \cdot \sin(3t). \quad (8)$$



Rastav signala

I vremenski kontinuirani i vremenski diskretni signali se mogu aditivno rastaviti:

$$x(t) = \sum_k s_k \cdot \phi_k(t) \tag{9}$$

$$x[n] = \sum_k s_k \cdot \phi_k[n] \tag{10}$$

Brojeve s_k nazivamo **spektar**.
Oni mjere doprinos svake komponente rastava ϕ_k.

Funkcije ϕ_k su **bazne funkcije** ili funkcije rastava.

Rastav može sadržavati prebrojivo mnogo baznih funkcija i u tom slučaju ga prikazujemo kao sumu preko svih njih. Rastav može sadržavati i neprebrojivo mnogo baznih funkcija, a u tom slučaju sumu zamjenjujemo integralom.

Problem rastava signala na komponente

Dva glavna podproblema kod rastava signala $x[n]$ na svoje komponente su:

1. Kako odabrati dobre komponente (bazne funkcije) $\phi_k[n]$?
2. Kada znamo komponente $\phi_k[n]$ kako izračunati spektar s_k?

Problem odabira komponenti ćemo razmotriti kasnije na primjeru diskretne konsinusne transformacije koja je dobra transformacija za kompresiju signala.

U ovom predavanju se fokusiramo na problem računanja spektra s_k u slučaju poznatih baznih funkcija $\phi_k[n]$.

Postupak računanja spektra s_k iz signala $x[n]$ zovemo **transformacija signala**, a temeljna operacija potrebna za računje jest **skalarni umnožak**.

Skalarni umnožak

Neka je V vektorski prostor signala (funkcija) nad realnim ili nad kompleksnim brojevima (općenito nad poljem $\mathbb{F}$), odnosno V je skup koji sadrži sve signale od interesa zajedno s dvije operacije:

1. zbrajanje signala
2. skaliranje amplitude

Skalarni (ili unutarnji) umnožak jest preslikavanje koje svakom paru signala iz V pridružuje broj iz $\mathbb{F}$:

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F} \qquad (11)}$$

Skalarni umnožak

Neka su $x[n]$, $y[n]$ i $z[n]$ vremenski diskretni signali, $x, y, z : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, i neka su a i b kompleksni brojevi.
Skalarni umnožak $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zadovoljava sljedeća svojstva:

1. linearnost u prvom argumentu

$$\big\langle ax[n] + by[n], z[n] \big\rangle = a\big\langle x[n], z[n] \big\rangle + b\big\langle y[n], z[n] \big\rangle \tag{12}$$

2. konjugirana simetrija

$$\big\langle x[n], y[n] \big\rangle = \big\langle y[n], x[n] \big\rangle^{*} \tag{13}$$

3. pozitivna definitnost

$$\text{ako} \quad x[n] \neq 0 \quad \text{onda} \quad \big\langle x[n], x[n] \big\rangle > 0 \tag{14}$$

Svojstva su jednaka i za vremenski kontinuirane signale $x(t)$ i $y(t)$.

Vremenski diskretni signali konačne duljine

Neka je $x[n]$ vremenski diskretni signal od N uzoraka. Za takve signale kažemo da imaju konačnu duljinu, konačno trajanje, ili konačni nosač odnosno potporu.

U obradbi signala uobičajeno ograničavamo indeks n tako da započinje u nuli i završava u $N-1$:

$$x[n] = \{\underline{x_0}, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\} \tag{15}$$

Skalarni umnožak za takve signale jest zbroj svih umnožaka članova s istim indeksima:

$$\boxed{\langle x[n], y[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot y^*[n] \tag{16}}$$

Napomena: Signali $x[n]$ i $y[n]$ su kompleksni.

Rastav signala konačne duljine

Želimo signal $x[n]$ duljine N prikazati korištenjem N baznih funkcija $\phi_k[n]$, odnosno želimo rastaviti signal.
Rastav signala je u potpunosti opisan spektrom s_k.

Poznavanje spektra s_k omogućava rekonstrukciju signala:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \phi_k[n] \tag{17}$$

Spektar računamo tako da primjenimo skalarni umnožak na jednadžbu (17) s bazom funkcijom $\phi_l[n]$ kao drugim argumentom:

$$\left\langle x[n], \phi_l[n] \right\rangle = \left\langle \sum_k s_k \phi_k[n], \phi_l[n] \right\rangle \tag{18}$$

Radi preglednost nećemo isticati ovisnost o koraku n, dakle $x[n]$ postaje samo x itd.

Rastav signala konačne duljine

Razmatramo skup od N jednadžbi u kojima svi n, k, l idu od 0 do $N-1$:

$$\langle x, \phi_l \rangle = \left\langle \sum_k s_k \phi_k, \phi_l \right\rangle = \sum_k s_k \langle \phi_k, \phi_l \rangle \qquad (19)$$

Te jednadžbe možemo zapisati u matričnom obliku,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle x, \phi_0 \rangle \\ \langle x, \phi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, \phi_{N-1} \rangle \end{bmatrix}}_{\mathrm{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_{N-1}, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_{N-1}, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{N-1} \rangle & \cdots & \langle \phi_{N-1}, \phi_{N-1} \rangle \end{bmatrix}}_{\mathrm{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathrm{s}},$$

što nam omogućava da izračunamo s_k inverzijom matrice G, odnosno $\mathrm{s} = \mathrm{G}^{-1}\mathrm{b}$.

Gramova matrica

Matrica svih skalarnih umnožaka između parova N baznih vektora ϕ_k se naziva Gramova matrica:

$$
\mathrm{G} = \begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_{N-1}, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_{N-1}, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{N-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_{N-1} \rangle & \cdots & \langle \phi_{N-1}, \phi_{N-1} \rangle \end{bmatrix} \tag{20}
$$

Ako razmatramo prostor signala konačne duljine od N uzoraka onda je Gramova matrica kvadratna dimenzija $N \times N$.

Gramova matrica mora imati puni rang, $\mathrm{rank}(\mathrm{G}) = N$,
a u protivnom nije moguće izračunati spektar.

Napomena: neke definicije mijenjaju redoslijed indeksa retka i stupca u odnosu na (20).

Računanje spektra

Spektar signala konačne duljine N računamo matričnom inverzijom:

$$\mathrm{s} = \mathrm{G}^{-1}\mathrm{b} = \mathrm{G}^{-1}\left(\mathrm{x}^T \boldsymbol{\Phi}^*\right)^T = \mathrm{G}^{-1}\boldsymbol{\Phi}^H \mathrm{x}, \tag{21}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mathrm{x}^T &= \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \cdots & x[N-1] \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\phi}_k{}^T &= \begin{bmatrix} \phi_k[0] & \phi_k[1] & \cdots & \phi_k[N-1] \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Phi} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_0 & \boldsymbol{\phi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_{N-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pri tome je x vektor-stupac koji sadrži sve uzorke signala, svaki $\boldsymbol{\phi}_k$ je vektor-stupac koji sadrži sve uzorke k-te bazne funkcije, a $\boldsymbol{\Phi}$ je matrica koja sadrži sve $\phi_k[n]$ u svojim stupcima.

Operacija ^{H} daje hermitski transponiranu (ili konjugirano-transponiranu) matricu, a operacija * konjugira sve elemente matrice.

Računanje spektra

Prema tome, ako skup od N baznih funkcija $\phi_k[n]$, $k = 0, \ldots, N-1$, razapinje cijeli prostor signala konačne duljine N onda spektar s_k možemo izračunati korištenjem samo jednog matričnog množenja sukladno izrazu (21).

Transformacijska matrica $\mathrm{T} = \mathrm{G}^{-1}\mathbf{\Phi}^H$ koja množi signal x može biti izračunata unaprijed.

Također primijetite da vrijedi $\mathrm{G} = \mathbf{\Phi}^H\mathbf{\Phi}$, dakle matricu transformacije možemo iskazati izravno preko baznih funkcija kao

$$\mathrm{T} = (\mathbf{\Phi}^H\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^H. \tag{22}$$

Naposlijetku, neki autori definiraju skalarni umnožak s kompleksnim konjugiranjem u prvom umjesto u drugom argumentu. Ta promjena utječe na izvod, no konačni numerički rezultat za T ostaje isti.

Računanje spektra transformacijom signala

Time smo riješili drugi od dva podproblema rastava signala na komponente.

Ako je poznat skup od M baznih funkcija $\phi_k[n]$, $k = 0, \ldots, M - 1$, onda spektar s_k signala $x[n]$ konačnog trajanja od N uzoraka možemo izračunati kao:

$$\boxed{\mathrm{s} = \mathrm{T}\mathrm{x} = (\boldsymbol{\Phi}^H \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^H \mathrm{x}. \qquad (23)}$$

Dakle, za računanje spektra je dovoljno poznavati jednu matricu T dimenzija $M \times N$ koju nazivamo **transformacijskom matricom**.

Različiti broj baznih funkcija M od broja uzoraka signala N

Ako odaberemo $M > N$ baznih funkcija onda će Gramova matrica G postati singularna te jednoznačan rastav signala nije moguć.

S druge strane, ako odaberemo $M < N$ baznih funkcija koje su linearno nezavisne onda je rastav signala preko izraza (21) ili (23) dobro definiran, no izvorni signal $x[n]$ ne možemo u potpunosti točno rekonstruirati iz njegovog spektra.

Prema tome ako koristimo premalo baznih funkcija rekonstruirani signal sadrži grešku.

Kompresija signala

Želimo li kompresirati signal namjerno odabiremo skup od $M < N$ baznih funkcija koji ne razapinje u potpunosti prostor svih signala konačne duljine N.

Spektar opet računamo korištenjem izraza (21) ili (23), no rekonstruirani signal prema izrazu (17) sada sadrži grešku:

$$x[n] = e[n] + \sum_{k=0}^{M-1} s_k \phi_k[n], \tag{24}$$

Postupak nazivamo **kompresija s gubitkom**.

Cilj kompresije s gubitkom jest određivanje skupa M baznih funkcija koji ima svojstvo da je rekonstrukcijska greška $e[n]$ minimalna.

Primjer konstrukcije jedne takve baze ćemo pokazati kasnije.

Jednostavan primjer

Prikažite signal duljine $N = 3$ uzorka

$$x[n] = \{\underline{-1}, 2, -3\}$$

kao aditivnu kombinaciju tri bazne funkcije:

$$\begin{aligned}
\phi_0[n] &= \{\underline{1}, 0, 0\} = \delta[n] \\
\phi_1[n] &= \{\underline{0}, 1, 0\} = \delta[n-1] \\
\phi_2[n] &= \{\underline{0}, 0, 1\} = \delta[n-2]
\end{aligned}$$

Napomena: Ovaj jednostavni primjer je čisti vremenski rastav signala u njegove pojedinačne uzorke.

Dva primjera baznih funkcija

Vremenska baza:

$$\phi_k[n] = \delta[n-k] \tag{25}$$

Baza dana jednadžbom (25) rastavlja signal na njegove pojedinačne uzorke.

Fourierova baza (DFT_N):

$$\phi_k[n] = \exp\left(2\pi j \frac{nk}{N}\right) \tag{26}$$

Baza dana jednadžbom (26) rastavlja signal u kombinaciju kompleksnih eksponencijalnih funkcija; ova baza je ortogonalna.

Ortogonalna baza

Inverzija Gramove matrice može biti računski skupa u potrebnom broju operacija.

Od posebnog su interesa stoga bazne funkcije za koje većina skalarnih produkata iščezava, odnosno postaje jednaka nuli:

$$\langle \phi_k, \phi_l \rangle = \begin{cases} 0, & \text{for } k \neq l \\ ||\phi_k||^2, & \text{for } k = l \end{cases} \tag{27}$$

Skup baznih funkcija koji zadovoljava navedeno svojstvo nazivamo ortogonalna baza.

Dodatno, ako je $||\phi_k||^2 = 1$ onda je baza ortonormirana.

Za ortogonalnu bazu Gramova matrica postaje dijagonalna, a za ortonormalnu bazu Gramova matrica postaje jedinična matrica.

Ortogonalna baza

Ako je baza ortogonalna onda svaki član spektra računamo kao:

$$s_k = \frac{\langle x[n], \phi_k[n] \rangle}{\langle \phi_k[n], \phi_k[n] \rangle} \tag{28}$$

Na primjer, za DFT_N bazu vrijedi $\phi_k[n] = \exp\left(2\pi j \frac{nk}{N}\right)$ pa dobivamo:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \phi_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{2\pi j \frac{nk}{N}} \tag{29}$$

$$s_k = \frac{\sum_{n=0}^{N} x[n] \cdot \phi_k{}^*[n]}{\sum_{n=0}^{N} \phi_k[n] \cdot \phi_k{}^*[n]} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi j \frac{nk}{N}} \tag{30}$$

Konvencije u obradbi signala

U obradbi signala faktor skaliranja $\langle \phi_k[n], \phi_k[n] \rangle$ se obično premješta iz izraza za računanje spektra (28) u izraz za rekonstrukciju signala (17), ili iz (30) u (29):

$$x[n] = \frac{1}{\langle \phi_k[n], \phi_k[n] \rangle} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \phi_k[n] \tag{31}$$

$$X[k] = \langle x[n], \phi_k[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] {\phi_k}^*[n] \tag{32}$$

Za signale se uobičajeno koristi malo slovo.
Skalirani spektar se uobičajeno označava istim velikim slovom.
Kažemo da signal $x[n]$ ima spektar $X[k]$.

Za ortogonalnu bazu računanje spektra se u obradbi signala prema tome svodi na računanje skalarnog umnoška.

Diskretna Fourierova transformacija

Bazne funkcije za DFT_N su $\phi_k[n] = \exp\left(2\pi j \frac{nk}{N}\right)$, $k = 0, \ldots, N-1$.

Signal $x[n]$ konačne duljine N predstavljamo kao aditivnu kombinaciju kompleksnih eksponencijala $\phi_k[n]$:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(2\pi j \frac{nk}{N}\right) \tag{33}$$

Spektar $X[k]$ računamo kao:

$$X[k] = \left\langle x[n], \phi_k[n] \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-2\pi j \frac{nk}{N}\right) \tag{34}$$

Proširenje trajanja signala

Naučili smo kako rastaviti signal konačnog trajanja (duljine, nosača, potpore).

Proširimo sada trajanje signala unedogled, odnosno neka je $x[n]$ vremenski diskretan signal iznad cijelih brojeva, dakle $n \in \mathbb{Z}$.

Raspravu što se događa kod proširenja ćemo provesti samo za diskretnu Fourierovu transformaciju, odnosno nećemo razmatrati općenito proširenje za proizvoljnu bazu.

Očiti problem jest da sume imaju beskonačno članova, a možda se pretvaraju i u integrale.

Također nije jasno treba li skup baznih funkcija za signal $x[n]$ beskonačne duljine biti prebrojiv ili neprebrojiv.

Proširenje DFT_N u DTFT

Skalarni umnožak dva vremenski diskretna signala beskonačnog trajanja jest:

$$\big\langle x[n], y[n] \big\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot y^*[n] \tag{35}$$

Želimo da suma u jednadžbi (35) uvijek konvergira što znači da moramo ograničiti naše razmatranje na neki podskup vremenski diskretnih signala.

Uobičajeno ograničenje jest na signale koji su apsolutno zbrojivi (ili kvadratno zbrojivi).

Zbrojivost i ℓ^p prostori

Apsolutno zbrojivi signali:

$$x[n] \in \ell^1 : \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big|x[n]\big| < \infty \tag{36}$$

Kvadratno zbrojivi signali:

$$x[n] \in \ell^2 : \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big|x[n]\big|^2 = \big\langle x[n], x[n] \big\rangle < \infty \tag{37}$$

Proširenje DFT_N u DTFT

Razmatranje ograničavamo na apsolutno zbrojive signale.

Što se događa s baznim funkcijama?

Neka je $\omega_0 = 2\pi\frac{k}{N}$ pa je $\phi_k[n] = \exp\left(2\pi j\frac{nk}{N}\right) = e^{j\omega_0 n}$. Onda:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\phi_k[n]\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|e^{j\omega_0 n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \to \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\phi_k[n]\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega_0 n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \to \infty$$

Kompleksne eksponencijale nisu niti apsolutno niti kvadratno zbrojive.

No ako je $x[n] \in \ell^1$ onda $\left\langle x[n], \phi_k[n]\right\rangle = \sum_n x[n]\phi_k^*[n]$ jest apsolutno zbrojiv pa možemo izračunati skalarni umnožak između signala i kompleksne eksponencijale!

Proširenje DFT_N u DTFT

Prisjetite se izraza (33) koji nam govori kako rekonsturiramo signal za DFT_N:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\frac{X[k]}{\langle \phi_k[n], \phi_k[n] \rangle}}_{w_k} \phi_k[n] \tag{38}$$

Nazivnik $\langle \phi_k[n], \phi_k[n] \rangle$ teži prema beskonačnosti i čini doprinos w_k svakog $\phi_k[n]$ proizvoljno malim.

To svojstvo indicira da prebrojivo mnogo funkcija $\phi_k[n]$ možda neće biti dovoljno.

Trebamo proširiti skup baznih funkcija tako da se indeks k pretvori u realni broj kojeg zovemo frekvencija ω. Ova promjena čini skup baznih funkcija neprebrojivim i pretvara sumu u integral.

Proširenje DFT$_N$ u DTFT

Prema tome, kada proširujemo DFT$_N$ u DTFT bazne funkcije za DFT$_N$,

$$\phi_k[n] = \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}n\right) \tag{39}$$

se pretvaraju u

$$\phi_\omega[n] = \exp\left(j\omega n\right), \tag{40}$$

gdje je $2\pi\frac{k}{N} \to \omega$ i $-\pi \leq \omega < \pi$ (više o ograničenju frekvencije ω kasnije).

U izrazu za rekonstrukciju signala zbroj preko svih k-ova se transformira u integral preko svih ω.

Ova promjena dodatno uvodi faktor $\frac{1}{2\pi}$ kojeg izdvajamo iz w_k.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (DTFT)

Bazne funkcije za DTFT su $\phi_\omega[n] = e^{j\omega n}$, $-\pi \leq \omega < \pi$.

Vremenski diskretni signal $x[n]$ predstavljamo kao aditivnu kombinaciju neprebrojivo mnogo kompleksnih eksponencijala:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} \, d\omega \tag{41}$$

Spektar $X(\omega)$ računamo kao skalarni umnožak:

$$X(\omega) = \langle x[n], \phi_\omega[n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \tag{42}$$

Jedna eksponencijala

DTFT rastavlja vremenski diskretan signal $x[n]$ u neprebrojivo mnogo kompleksnih eksponencijala.

Kako su bazne funkcije kompleksne eksponencijale očekujemo da jednu kompleksnu eksponencijalu možemo predstaviti korištenjem DTFT. Kako izgleda spektar jedne eksponencijale?

Zadan je signal $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, odnosno samo jedna eksponencijala frekvencije ω_0.

Spektar $X(\omega)$ mora biti takav da vrijedi

$$e^{j\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} \, d\omega, \tag{43}$$

odnosno iz svih mogućih eksponencijala oblika $e^{j\omega n}$ spektar $X(\omega)$ mora odabrati upravo onu frekvencije ω_o.

Jedna eksponencijala

Takav spektar ne može biti neprekinuta funkcija u ω.

Traženi spektar je Diracova δ distribucija centirana u odabranu frekvenciju:

$$X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0). \tag{44}$$

Signal $x[n]$ je sada:

$$\begin{aligned} x[n] &= \mathrm{IDTFT}\left[2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n}\,d\omega \\ &= e^{j\omega_0 n}. \end{aligned}$$

Vremenski kontinuirana Fourierova transformacija (CTFT)

Proširili smo DFT_N u DTFT kroz proširenje potpore/trajanja vremenski diskretnog signala iz konačne duljine N u beskonačnu duljinu.

Na sličan način možemo proširiti DTFT korištenjem inverznog očitavanja kako bi dobili CTFT.

Ukrako, moramo uvesti kontinurano vrijeme t koje je povezano s diskretnim korakom n kao $t = nT_s$, gdje je T_s period očitavanja. Razmatranjem limesa kada T_s teži u 0 dobivamo traženu transformaciju. U opisanom postupku također uvodimo novu frekvenciju Ω za CTFT koja je povezana s frekvencijom ω za DTFT preko izraza $\Omega T_s = \omega$.

Izvod preskačemo jer ćemo kasnije detaljnije razmatrati obrnuti postupak, odnosno kako iz CTFT dobivamo DTFT.

Vremenski kontinuirana Fourierova transformacija (CTFT)

Bazne funkcije za CTFT su $\phi_\Omega(t) = e^{j\Omega t}$, $\Omega \in \mathbb{R}$.

Vremenski kontinuirani signal $x(t)$ predstavljamo kao aditivnu kombinaciju neprebrojivo mnogo kompleksnih eksponencijala:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} \, d\Omega \tag{45}$$

Spektar $X(\Omega)$ računamo kao skalarni umnožak:

$$X(\Omega) = \langle x(t), \phi_\Omega(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} \, dt \tag{46}$$

Fourierove transformacije od interesa

Tri Fourierove transformacije koje smo uveli i koje su od posebnog interesa u obradbi signala su dakle:

1. DFT_N ili diskretna Fourierova transformacija u N točaka,
2. DTFT ili vremenski diskretna Fourierova transformacija, i
3. CTFT ili vremenski kontinuirana Fourierova transformacija.

Od navedene tri transformacije samo DFT_N je konačna pa je stoga ta transformacija ona koja se koristi na **računalu** za obradbu signala.

DTFT i CTFT možemo samo numerički aproksimirati, a čak u tom slučaju se aproksimacija gotovo uvijek svodi na računanje DFT_N.

U teoretskim razmatranjima se koriste isključivo DTFT i CTFT. Osim toga dosta svojstava DFT_N-a koja su potrebna za teorijsku analizu se ne mogu kompaktno iskazati.

Svojstva Fourierovih transformacija

Nakon uvođenja svake Fourierove transformacije obično se prvo iskazuju pa zatim dokazuju odabrana svojstva tih transformacija.

Iako je takav pristup temeljit, iskazivanje pa dokazivanje svojstava prije nego ih možemo negdje konkretno primijeniti je čisto tehničko izlaganje.

Stoga ćemo ovdje samo nabrojati neka odabrana svojstva bez ulaženja u dubinu.

Ona svojstva koja ćemo stvarno koristiti ćemo iskazati i po potrebi dokazati u trenutku kada nam pojedino svojstvo bude potrebno.

Svojstva Fourierovih transformacija

Neka važna svojstva Fourierovih transformacija:

1. linearnost,
2. dualnost,
3. pomak u vremenu ili u frekvenciji (cirkularni pomak za DFT i linearni pomak za CTFT i DTFT),
4. teoremi o konvoluciji (cirkularna konvolucija za DFT i linearna konvolucija za CTFT i DTFT), i
5. Parsevalov teorem (ili zakon očuvanja energije).

Iako ćemo sva svojstava koja trebate znati uvesti onda kada nam budu trebala svakako vam preporučamo da navedena svojstva samostalno proučite.

Preporučeno čitanje

- P. Prandoni, M. Vetterli, "Signal Processing for Communications" (`https://sp4comm.org/`), poglavlje 3., poglavlje 4. dijelovi 4.2. i 4.4.
- M. P. Deisenroth, A. A. Faisal, C. S. Ong, "Mathematics for Machine Learning" (`https://mml-book.github.io/`), dio I poglavlje 2., posebno dijelovi 2.4., 2.5., 2.6. i 2.7., te poglavlje 3., posebno dijelovi 3.2., 3.3., 3.4. i 3.5.
- B. Jeren, "Signali i sustavi", Školska knjiga, 2021., dio 2.5, posbeno 2.5.4., te dijelovi 4.8., 4.3. i 4.4
- M. Vetterli, J. Kovačević, V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing" (`https://fourierandwavelets.org/`), dijelovi 2.4., 2.5. i 3.6.