Osnove obradbe signala

Međuispit – 30. studenoga 2021.

1. **(6 bodova)** Želimo odrediti izraz za rastav signala konačnog trajanja od tri uzorka. Traženi rastav signala mora koristiti sljedeće tri bazne funkcije:

$$\phi_0[n] = \{\underline{1}, 1, 1\}, \quad \phi_1[n] = \{\underline{0}, 1, 1\} \quad \text{i} \quad \phi_2[n] = \{\underline{0}, 0, 1\}.$$

a) **(2 boda)** Odredite matrice $\mathbf{\Phi}$ i $\mathbf{G}$.

b) **(3 boda)** Odredite matricu transformacije $\mathbf{T} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{\Phi}^H$.

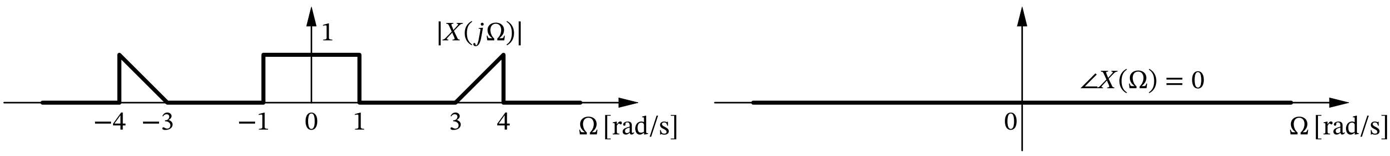
c) **(1 bod)** Odredite rastav signala $x[n] = \{\underline{1}, 2, 3\}$.

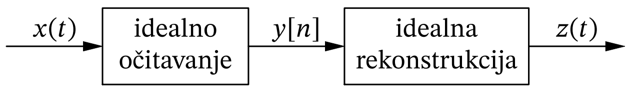
2. **(6 bodova)** Vremenski kontinuirani signal $x(t)$ čiji spektar $X(\Omega)$ je zadan slikom najprije očitavamo s periodom očitavanja od $T_s = \pi/3$, a zatim ga rekonstruiramo iz dobivenih uzoraka koristeći idealnu interpolaciju kako je prikazano blokovskim dijagramom.

a) **(2 boda)** Koji uvjet mora zadovoljiti period očitavanja T_s tako da ne dođe do preklapanja spektra? Zadovoljava li zadani period očitavanja taj uvjet?

b) **(2 boda)** Skicirajte amplitudni i fazni spektar vremenski diskretnog signala $y[n] = x(nT_s)$ dobivenog idealnim očitavanjem signala $x(t)$.

c) **(2 boda)** Skicirajte amplitudni i fazni spektar vremenski kontinuiranog signala $z(t)$ dobivenog idealnom interpolacijom iz $y[n]$.





3. **(6 bodova)** Zadan je vremenski diskretan signal $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]$.

a) **(2 boda)** Izračunajte DTFT transformaciju $X(\omega)$ zadanog signala $x[n]$.

b) **(2 boda)** Iz dobivenog $X(\omega)$ izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar.

c) **(2 boda)** Dobiveni $X(\omega)$ želimo očitati u frekvenciji s korakom $\omega_s = \frac{2\pi}{5}$. Odgovara li to nekoj od DFT$_N$ transformacija? Ako odgovara onda objasnite zašto odgovara te odredite pripadni broj točaka N, a ako ne odgovara onda objasnite zašto ne odgovara!

4. **(6 bodova)** Diskretni linearan vremenski nepromjenjiv sustav je zadan diferencijskom jednadžbom

$$8y[n] - 6y[n-1] + y[n-2] = x[n],$$

gdje je $x[n]$ ulaz i gdje je $y[n]$ izlaz sustava.

a) **(2 boda)** Nađite rješenje pripadne homogene jednadžbe.

b) **(2 boda)** **Postupkom u vremenskoj domeni** odredite impulsni odziv sustava $h[n]$.

c) **(2 boda)** **Postupkom u vremenskoj domeni** odredite odziv sustava na pobudu $x[n] = 3 \cdot 3^{-n}\,\mu[n]$ uz početne uvjete $y[-1] = -9$ i $y[-2] = -27$.

5. **(6 bodova)** Impulsni odziv nekog diskretnog linearnog vremenski nepromjenjivog sustava jest

$$h[n] = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{-n} - \frac{1}{8} \cdot 4^{-n}\right)\mu[n].$$

a) **(2 boda)** Odredite $\mathcal{Z}$ transformaciju zadanog impulsnog odziva $H(Z)$ i njeno pripadno područje konvergencije.

b) **(2 boda)** Iz izračunate prijenosne funkcije $H(z)$ odredite diferencijsku jednadžbu koja opisuje promatrani sustav.

c) **(2 boda)** Postupkom u domeni $\mathcal{Z}$ transformacije odredite odziv sustava na pobudu $x[n] = 3^{-n}\,\mu[n]$ uz sve početne uvjete jednake nuli, dakle $y[-1] = y[-2] = 0$.

① $\phi_0[n] = \{\underline{1}, 1, 1\}$, $\phi_1[n] = \{\underline{0}, 1, 1\}$, $\phi_2[n] = \{\underline{0}, 0, 1\}$

a) $$\underline{\Phi} = [\phi_0 \ \phi_1 \ \phi_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \underline{\Phi}^T \underline{\Phi}^* = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Prvo računamo G^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$T = G^{-1} \underline{\Phi}^H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $x[n] = \{\underline{1}, 2, 3\}$

$$s = T x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x[0] = 1 \cdot \phi_0[n] + 1 \cdot \phi_1[n] + 1 \cdot \phi_2[n]$$

(2)

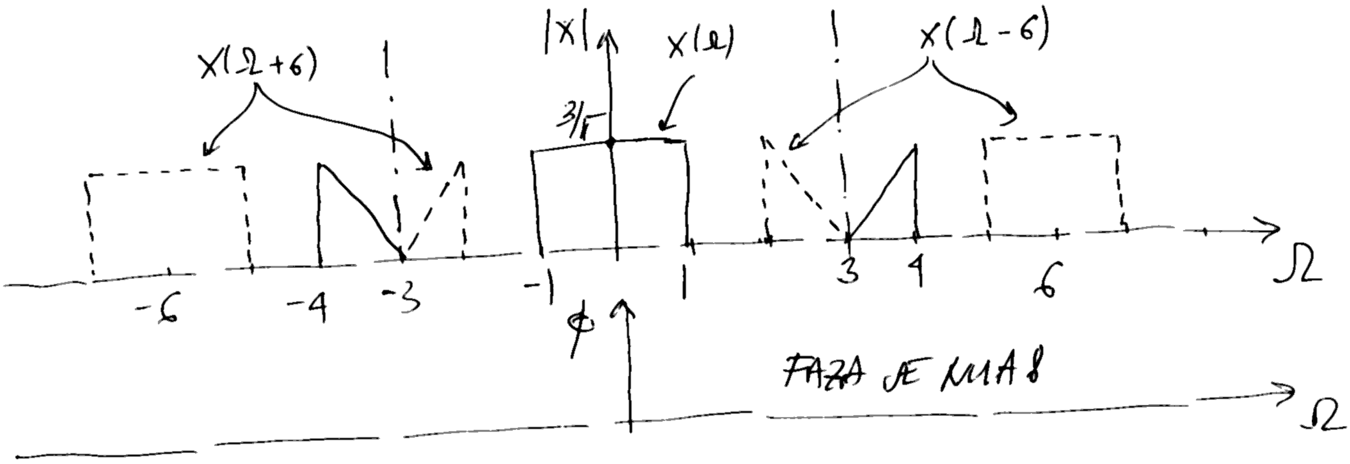
a) Da ne bi došlo do preklapanja spektra mora biti $T_s < \frac{\pi}{\Omega_{MAX}}$,

gdje je Ω_{MAX} najveća frekvencija u signalu.

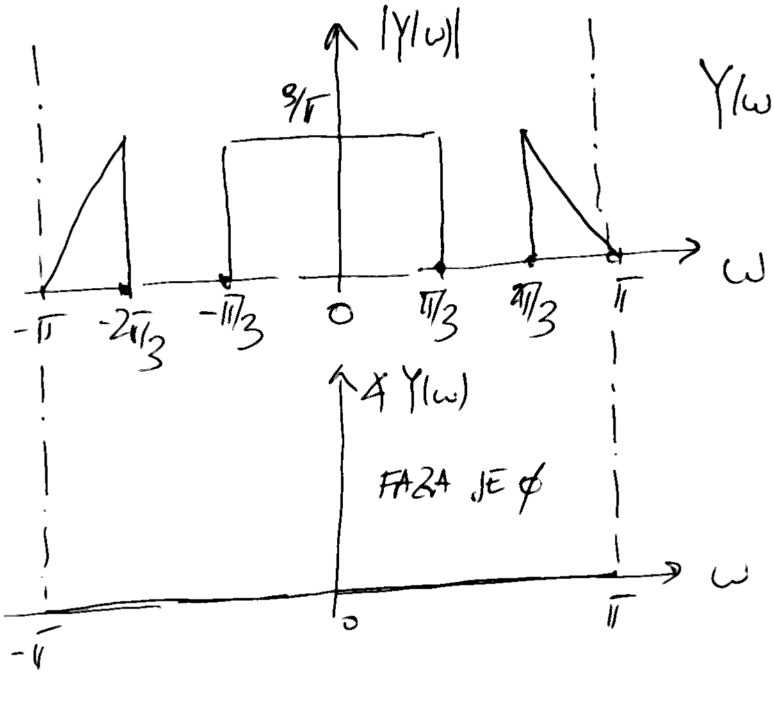
$\Omega_{MAX} = 4$, $T_S = \pi/3$ $\Rightarrow$ $T_s = \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{\Omega_{MAX}} = \frac{\pi}{4}$

Zadani period NE ZADOVOLJAVA Nyquistov uvjet

b) $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$



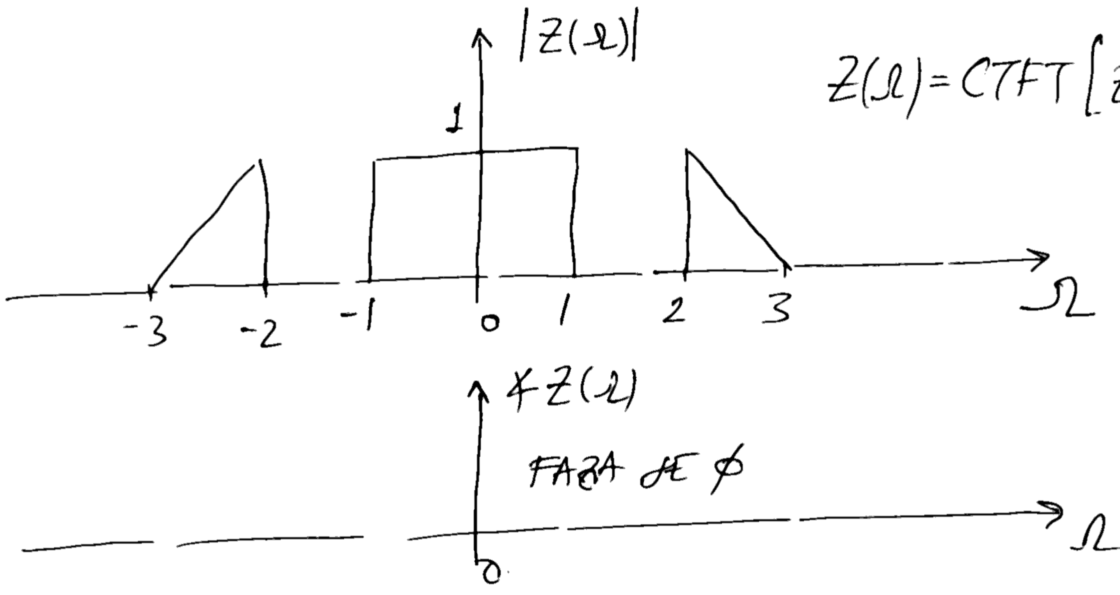
Spektar signala $y[n] = x(nT_s)$ u temeljnom periodu je:



$Y(\omega) = DTFT[y[n]]$

c) Idealna interpolacija ostavlja samo temeljni period:

$Z(\Omega) = CTFT\left[z[n]\right]$



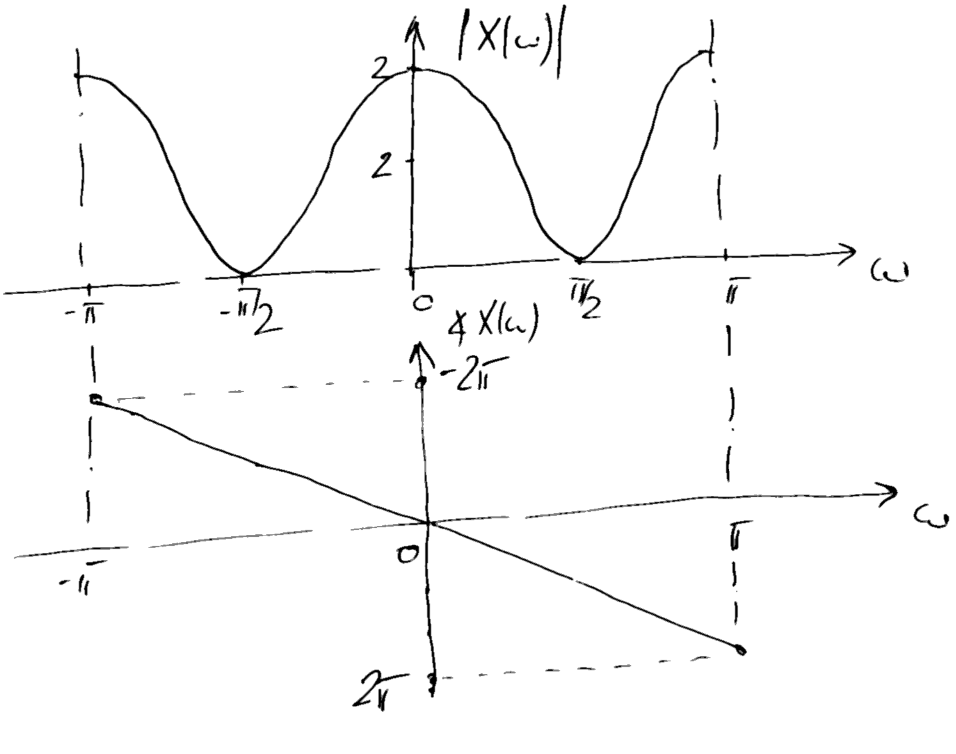
③ $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]$

a) $X(\omega) = DTFT[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = 1 + 2e^{-2j\omega} + e^{-4j\omega} =$

$= e^{-2j\omega}\left(e^{+2j\omega} + 2 + e^{-2j\omega}\right) = e^{-2j\omega}\left(2 + 2\cos(2\omega)\right)$

b) $|X(\omega)| = |2 + 2\cos(2\omega)|$ AMPLITUDNI SPEKTAR

$\measuredangle X(\omega) = -2\omega$ FAZNI SPEKTAR



c) $\omega_s = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \omega_k = \frac{2\pi}{5} \cdot k$

$X(\omega_k) = e^{-2j\frac{2\pi}{5}\cdot k}\left(2 + 2\cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot k\right)\right)$

$\frac{2\pi}{5} \cdot k = 2\pi \Rightarrow k = 5$ NAJVEĆA DOZVOLJENA DULJINA SIGNALA

Očitavanje frekvencija s korakom $\frac{2\pi}{5}$ odgovara DFT_5 transformaciji polaznog signala jer je polazni signal duljine (trajanja) do 5 uzoraka.

(4) $$8y[n]-6y[n-1]+y[n-2]=x[n]$$

a) $$8-6z^{-1}+z^{-2}=0 \Rightarrow 8z^2-6z+1=0$$

$$z_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{16}=\frac{6\pm 2}{16}=\left\{\frac{8}{16},\frac{4}{16}\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$$

$$y_h[n]=K_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+K_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

b) IMPULSNI ODZIV: $x[n]=\delta[n]$, $y[n]=0$ za $n<0$

$n=0$: $8y[0]=1 \Rightarrow y[0]=\frac{1}{8}=K_1\left(\frac{1}{2}\right)^0+K_2\left(\frac{1}{4}\right)^0$

$n=1$: $8y[1]-6y[0]=0 \Rightarrow y[1]=\frac{6}{64}=K_1\left(\frac{1}{2}\right)^1+K_2\left(\frac{1}{4}\right)^1$

$$\begin{cases} 1=8K_1+8K_2 & /\cdot(-2) \\ 6=32K_1+16K_2 \end{cases}$$

$$6-2=(32-16)K_1=16K_1 \Rightarrow K_1=\frac{1}{4}$$

$$8K_2=1-8\cdot\frac{1}{4}=-1 \Rightarrow K_2=-\frac{1}{8}$$

$$h[n]=\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\cdot\mu[n]$$

c) $x[n] = 3 \cdot 3^{-n} \mu[n]$, $y[-1] = -9$, $y[-2] = -27$

TRAŽIMO $y[0]$ i $y[1]$:

$$8y[0] - \underbrace{6 \cdot (-9)}_{=-54} + (-27) = 3 \cdot 3^{-0} \mu[0] = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[0] = \frac{3+27-54}{8} = -\frac{24}{8} = -3$$

$$8y[1] - \underbrace{6 \cdot (-3)}_{=-18} + (-9) = 3 \cdot 3^{-1} \mu[1] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[1] = \frac{1+9-18}{8} = -\frac{8}{8} = -1$$

TRAŽIMO $y_p[n] = K\, 3^{-n}$

$$8 \cdot K \cdot 3^{-n} - 6 \cdot K \cdot 3^{-n+1} + K \cdot 3^{-n+2} = 3 \cdot 3^{-n}$$

$$8K - 3 \cdot 6K + 3^2 \cdot K = 3$$

$$K(8 - 18 + 9) = 3 \rightarrow K = -3$$

TRAŽIMO $y[n] = y_H[n] - 3 \cdot 3^{-n}$ za $n \geq 0$

$$\begin{cases} y[0] = -3 = K_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + K_2 \left(\frac{1}{4}\right)^0 - 3 \cdot 3^{-0} \\ y[1] = -1 = K_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + K_2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 - 3 \cdot 3^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 0 \\ \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{4}K_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow K_1 = K_2 = 0$$

$$y[n] = -3 \cdot 3^{-n}, \quad n \geq 0$$

(5) $$h[n] = \left(\frac{1}{4}\cdot 2^{-n} - \frac{1}{8} 4^{-n}\right)\mu[n]$$

a) $$H(z) = \mathcal{Z}\left[h[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\cdot 2^{-n} - \frac{1}{8}\cdot 4^{-n}\right) z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (2z)^{-n} - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} (4z)^{-n} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{4-2z^{-1}} - \frac{1}{8-2z^{-1}} = \frac{8 - \cancel{2z^{-1}} - 4 + \cancel{2z^{-1}}}{32 - 8z^{-1} - 16z^{-1} + 4z^{-2}} =$$

$$= \frac{4}{32 - 24z^{-1} + 4z^{-2}} = \frac{1}{8 - 6z^{-1} + z^{-2}}, \quad \text{RoC: } \frac{1}{2} < |z|$$

b) $$8y[n] - 6y[n-1] + y[n-2] = x[n]$$

c) $$x[n] = 3^{-n}\mu[n], \quad y[-1] = y[-2] = \emptyset$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\left[3^{-n}\mu[n]\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad \text{RoC: } \frac{1}{3} < |z|$$

$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot\frac{1}{8-6z^{-1}+z^{-2}} =$$

$$= \frac{3}{(3-z^{-1})(2-z^{-1})(4-z^{-1})} = \frac{A}{3-z^{-1}} + \frac{B}{2-z^{-1}} + \frac{C}{4-z^{-1}}$$

$$A = \lim_{z^{-1}\to 3} (3 - z^{-1})\, Y(z) = \frac{3}{(2-3)(4-3)} = \frac{3}{(-1)\cdot 1} = -3$$

$$B = \lim_{z^{-1}\to 2} (2 - z^{-1})\, Y(z) = \frac{3}{(3-2)(4-2)} = \frac{3}{2\cdot 1} = 3/2$$

$$C = \lim_{z^{-1}\to 4} (4 - z^{-1})\, Y(z) = \frac{3}{(3-4)(2-4)} = \frac{3}{(-1)\cdot(-2)} = 3/2$$

$$Y(z) = \frac{-3}{3 - z^{-1}} + \frac{3/2}{2 - z^{-1}} + \frac{3/2}{4 - z^{-1}} =$$

$$= \frac{-1}{1 - 1/3\, z^{-1}} + \frac{3/4}{1 - 1/2\, z^{-1}} + \frac{3/8}{1 - 1/4\, z^{-1}}$$

$$y(n) = \left(-1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) u[n]$$