Osnove obradbe signala: Očitavanje i interpolacija signala

Tomislav Petković

Sveučilište u Zagrebu

listopad 2022.

O uzorkovanju

Za gotovo svaku stvarnu obradbu podataka uvijek radimo s uzorcima.

- Nije ni moguće ni pratkično prikupiti aspolutno sve.
- Računala mogu raditi samo s konačnim skupom podataka.

Osnovni problem kod uzorkovanja jest dizajniranje konkretnog postupka uzorkovanja kojim dobivamo neki diskretni i/ili konačan podskup uzoraka, a koji podskup vjerno odražava odabrane karakteristike cijelokupnog polaznog skupa.

Uzorkovanje u obradbi signala

Uzorkovanje je klasičan problem u statistici gdje se koriste razne metode kako bi se osiguralo da prikupljeni uzorak bude *statistički relevantan.*

U kontekstu obradbe signala općeniti problem uzorkovanja bilo čega se svodi isključivo na uzorkovanje signala.

Temeljni rezultat jest *teorem očitavanja* (engl. *the sampling theorem*) koji definira uvjete koje moraju biti zadovoljeni želimo li neki signal vjerno reprezentirati njegovim uzorcima.

O uzorkovanju signala

Želimo vjerno reprezentirati vremenski kontinurani signal $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pomoću konačnog broja uzoraka (brojeva) koji su odabrani u vremenskim trenutcima t_i, $i = 0, 1, \ldots, N - 1$.

Polazni signal $x(t)$ prema tome predstavljamo konačnim skupom od N uzoraka $\{x(t_i) : i = 0, 1, \ldots, N - 1\}$.

Osim s konačnim skupom uzoraka signal $x(t)$ možemo predstaviti i s prebrojivim skupom uzoraka $\{x(t_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ radi lakše analize.

Očito je da u oba slučaja uzorkovanjem gubimo informaciju jer polazni signal $x(t)$ može poprimiti bilo koje vrijednosti između poznatih uzoraka.

Uzorkovanje ili očitavanje signala

U obradbi signala radi jednostavnosti uzorkovanje najčešće ograničavamo na uzimanje *neprebrojivo* mnogo uzoraka koji su *jednoliko razmaknuti* u vremenu.

Za taj postupak se koristi više različtih naziva:

- uzorkovanje (prema engl. *sampling*)
- otipkavanje (prema njem. *abtastung*)
- očitavanje

Mi ćemo koristiti termin *očitavanje* kako bi jasno naglasili da se radi o uzorkovanju signala uz ograničenje da su uzorci jednoliko razmaknuti u vremenu.

Očitavanje u vremenskoj domeni

Očitavanje vremenski kontinuiranog signala $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jest postupak uzimanja *jednoliko* vremenski razmaknutih uzoraka tog signala. Jednoliki vremenski razmak između uzoraka zovemo *period očitavanja* i označavamo s T_s.

Dakle, signalu $x(t)$ pridružujemo uzorke $y[n]$ za koje vrijedi

$$y[n] = x(nT_s). \tag{1}$$

Kažemo da uzorak $y[n]$ u koraku n sadrži vrijednost signala $x(t)$ u trenutku $t = nT_s$.

Kako oble i uglate zagrade jasno definiraju domenu signala možemo bez zabune pisati $x[n]$ umjesto $y[n]$ (iako se formalno radi o različitim signalima).

Primjer očitavanja

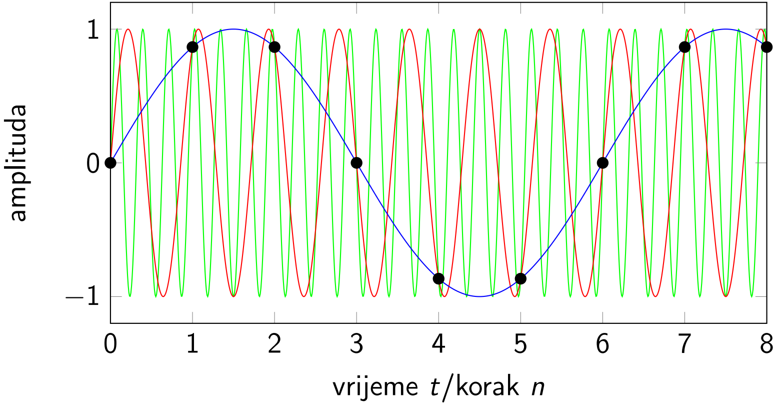
Očitajte zadane signale s periodom očitavanja $T_s = 1$:

1. $x_1(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2. $x_2(t) = \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$
3. $x_2(t) = \sin\left(\frac{19\pi}{3}t\right)$

Jesu li dobiveni vremenski diskretni signali $x_1[n]$, $x_2[n]$ i $x_2[n]$ različiti, odnosno dobivamo li različite nizove brojeva? Objasnite!

Primjer očitavanja

Rezultat očitavanja tri različita signala $x_1(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, $x_2(t) = \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$ i $x_2(t) = \sin\left(\frac{19\pi}{3}t\right)$ je isti niz uzoraka, odnosno vrijedi $x_1[n] = x_2[n] = x_3[n]$.



Višeznačnost diskretne sinusoide

Diskretna sinusoiuda je signal $x[n] = A\sin(\omega_0 n + \phi)$.

Diskretne sinusoide (ili kosinusoide) **nisu** jednoznačno određene svojom frekvencijom.

Za $k, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x[n] &= A\sin(\omega_0 n + \phi) = A\sin(\omega_0 n + \phi + 2kn\pi) \\ &= A\sin\big(\underbrace{(\omega_0 + 2k\pi)}_{\omega_1 = \omega_0 + 2k\pi} n + \phi\big) = A\sin(\omega_1 n + \phi) \end{aligned}$$

Sve diskretne sinusoide (ili kosinusoide) čije frekvencije se razlikuju za bilo koji višekratnik od 2π su identične, odnosno ne možemo ih razlikovati. Ta se pojava na engleskom naziva *aliasing*.

O jednoznačnosti očitavanja

Prema tome, općenito ne znamo kako se signal ponaša između uzoraka.

No jasno je da skraćivanjem perioda očitavanja T_s popravljamo reprezentaciju signala jer su uzorci sve bliže, no ne možemo smanjivati T_s unedogled.

Potrebno je postaviti neke dodatne uvjete na polazni signal koji će ograničiti moguća ponašanje signala između uzoraka.

Teorem očitavanja definira uvjet uz kojeg je veza između uzoraka $x[n] = x(nT_s)$ i polaznog signala $x(t)$ jednoznačna.

Što moramo naučiti?

Ako uz zadovoljen (za sada nedefinirani) uvjet *teorema očitavanja* uzorci signala jednoznačno opisuju signal onda to znači da mora postojati postupak rekonstrukcije signala iz njegovih uzoraka. Taj postupak zovemo *interpolacija*.

Isto tako, do sada smo signale reprezentirali pomoću njihovog spektra, odnosno kao

$$x[n] = \int_{\kappa} s(\kappa)\phi(\kappa, n)\, d\kappa \quad \text{ili} \quad x[n] = \sum_{k} s(k)\phi_k[n], \tag{2}$$

gdje su $s(\cdot)$ spektri i gdje su $\phi_k[n]$ i $\phi(\kappa, n)$ prebrojive i neprebrojive bazne funkcije.

Prema tome želimo znati kako očitavanje i interpolacija signala izgledaju u spektralnoj domeni.

Spektri izvornog i očitanog signala

Transformacije koje ćemo korisiti su CTFT i DTFT, odnosno spektri od interesa su:

$$X_c(\Omega) = \mathrm{CTFT}\big[x(t)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t}\, dt \tag{3}$$

$$X_d(\omega) = \mathrm{DTFT}\big[x(nT_s)\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \tag{4}$$

Iz poznatih spektara polazne signale računamo kao:

$$x(t) = \mathrm{ICTFT}\big[X_c(\Omega)\big] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_c(\Omega) e^{j\Omega t}\, d\Omega \tag{5}$$

$$x[n] = \mathrm{IDTFT}\big[X_d(\omega)\big] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_d(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega \tag{6}$$

Povezanost svih navedenih operacija

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{c} x(t) \\ \text{izvorni signal} \end{array} \arrow[r, bend left, "\text{očitavanje}"] \arrow[d, bend left, "\text{CTFT}"] & \begin{array}{c} x[n] \\ \text{očitani signal} \end{array} \arrow[l, bend left, "\text{interpolacija}"] \arrow[d, bend left, "\text{DTFT}"] \\
\begin{array}{c} X_c(\Omega) \\ \text{CTFT spektar} \end{array} \arrow[u, bend left, "\text{ICTFT}"] \arrow[r, bend left, "?"] & \begin{array}{c} X_d(\omega) \\ \text{DTFT spektar} \end{array} \arrow[u, bend left, "\text{IDTFT}"] \arrow[l, bend left, "?"]
\end{tikzcd}
$$

Povezanost svih navedenih operacija

Prvo ćemo izvesti sve izraze koje opisuju veze od interesa, jer jednom kada znamo sve veze teorem očitavanja postaje jasan.

Problem nam predstavljaju dvije različite transformacije koje koristitimo, CTFT i DTFT.

Stoga moramo uvesti međukorak u razmatranju, točnije modelirat ćemo očitavanje u vremenskoj domeni, a to odgovara uvođenju vremenski kontinuiranog signala $x_s(t)$ koji sadrži apsolutno istu količinu informacije kao i očitani signal $x[n]$.

Razmatranje očitavanja u vremenski kontinuiranoj domeni

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\underset{\text{izvorni signal}}{x(t)} \arrow[r, bend left, "\text{očitavanje}"] \arrow[d, bend left, "\text{CTFT}"] & \underset{\text{kontinuirani model očitanog signala}}{x_s(t)} \arrow[l, bend left, "\text{interpolacija}"] \arrow[r, bend left, "?"] \arrow[d, bend left, "\text{CTFT}"] & \underset{\text{očitani signal}}{x[n]} \arrow[l, bend left, "?"] \arrow[d, bend left, "\text{DTFT}"] \\
\underset{\text{CTFT spektar}}{X_c(\Omega)} \arrow[u, bend left, "\text{ICTFT}"] \arrow[r, bend left, "?"] & \underset{\text{CTFT spektar}}{X_s(\Omega)} \arrow[u, bend left, "\text{ICTFT}"] \arrow[l, bend left, "?"] \arrow[r, bend left, "?"] & \underset{\text{DTFT spektar}}{X_d(\omega)} \arrow[u, bend left, "\text{IDTFT}"] \arrow[l, bend left, "?"]
\end{tikzcd}
$$

Modeliranje očitavanja

Želimo vremenski kontinuirani signal $x(t)$ i njegove uzorke $x[n]$ prikazati u istoj domeni pa umjesto signala $x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ uvodimo novi vremenski kontinuirani signal $x_s(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koji mora sadržavati istu informaciju kao i $x[n]$.

Očito mora biti $x_s(t) = 0$ za $t \neq nT_s$ jer je to informacija koju gubimo.

No ne možemo jednostavno samo postaviti da je $x_s(nT_s) = x[n]$, jer ako se funkcija razlikuje od nule samo u prebrojivo mnogo točaka onda njen integral u pravilu iščezava (postaje nula).

- Računanje CTFT-a bi dalo nulu za spektar signala.
- Razmislite što ova činjenica govori o ograničenjma Fourierove transformacije.

Modeliranje očitavanja

Pomaknute Diracove funkcije čine vremensku bazu pa vrijedi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta_\tau(t-\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

pri čemu je $x(\tau)$ težina pripadne bazne funkcije $\delta_\tau(t-\tau)$.

Zato koristimo Diracovu funkciju te u kontinuiranoj domeni modeliramo očitani signal kao

$$x_s(t) = \begin{cases} x[n]\delta(t-nT_s), & \text{za } t = nT_s, \\ 0, & \text{za } t \neq nT_s, \end{cases} \tag{8}$$

gdje smo svakom uzorku pridjelili pomaknutu Diracovu funkciju koja ne iščezava kod integriranja.

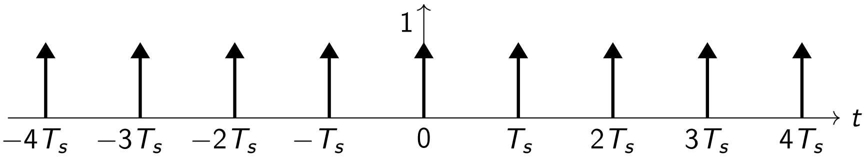
Postupak možemo interpretirati kao decimaciju baznih funkcija vremenske baze, naime od neprobrojivo mnogo funkcija oblika $\delta_\tau(t-\tau)$ ostavili smo samo prebrojivi dio oblika $\delta_n(t-nT_s)$

Diracov češalj

Radi pojednostavljena notacije definiramo funkciju koju zovemo Diracov češalj.

Diracov češalj (engl. *Dirac comb*) je niz Diracovih delta funkcija koje se ponavljaju svakih T_s:

$$\mathrm{comb}_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s). \tag{9}$$



Modeliranje očitavanja

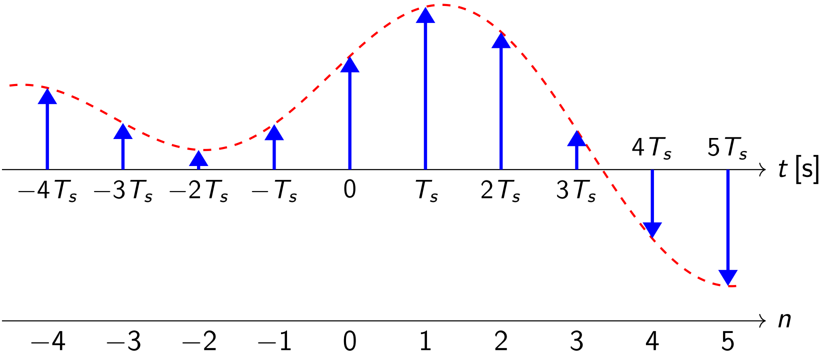
U vremenski kontinuiranoj domeni očitavanje signala $x(t)$ s periodom T_s modeliramo kao množenje signala s Diracovim češljem,

$$x_s(t) = x(t) \operatorname{comb}_{T_s}(t). \tag{10}$$

Očito vrijedi

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t) \operatorname{comb}_{T_s}(t) \\ &= x(t) \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) \Big) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\, \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, \delta(t - kT_s). \end{aligned}$$

Modeliranje očitavanja



Množenje signala $x(t)$ s $\text{comb}_{T_s}(t)$ daje signal $x_s(t)$.

Primijetite vezu između vremena t [s] i koraka n [uzorak].

Veza spektara izvornog i očitanog signala

Izvedimo prvo vezu između spektra očitanog signala $X_s(\Omega)$ i spektra izvornog signala $X(\Omega)$.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} X_s(\Omega) = \mathrm{CTFT}\big[x_s(t)\big] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \mathrm{comb}_{T_s}(t) e^{-j\Omega t}\, dt \end{aligned}$$

Kako želimo $X_s(\Omega)$ iskazati pomoću $X(\Omega)$ moramo se nekako riješiti funkcije $\mathrm{comb}_{T_s}(t)$ koja nam smeta.

To radimo tako da $\mathrm{comb}_{T_s}(t)$ prikažemo pomoću eksponencijalnih funkcija za što koristimo Fourierov red (CTFS).

Fourierova reprezentacija Diracovog češlja

I Diracovu funkciju i Diracov češalj možemo predstaviti kao kombinaciju eksponencijalnih funkcija (raspravu zašto je to uopće moguće i dozvoljeno preskačemo).

Funkcije $\mathrm{comb}_{T_s}(t)$ je periodička s periodom T_s pa za prikazivanje koristimo CTFS. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathrm{CTFS}\big[\mathrm{comb}_{T_s}(t)\big] &= \frac{1}{T_s}\int_{\text{po periodu}} \mathrm{comb}_{T_s}(t)e^{-j\Omega_s kt}\,dt \\ &= \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{+T_s/2} \delta(t)e^{-j\Omega_s kt}\,dt = \frac{1}{T_s}\end{aligned}$$

Prema tome alternativna reprezentacija Diracovog češlja jest:

$$\mathrm{comb}_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} e^{j\Omega_s kt} \tag{11}$$

Veza spektara izvornog i očitanog signala

Sada je

$$X_s(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \mathrm{comb}_{T_s}(t) e^{-j\Omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} e^{j\Omega_s k t} \Big) e^{-j\Omega t}\, dt$$

Zamjenom redoslijeda integracije i sumacije dobivamo:

$$X_s(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jt(\overbrace{\Omega - k\Omega_s}^{=\Omega'})}\, dt}_{=X(\Omega')},$$

što nam daje traženu vezu između spektara.

Veza spektara izvornog i očitanog signala

Spektar $X_s(\Omega)$ očitanog signal $x_s(t)$ iz spektra $X(\Omega)$ izvornog signala $x(t)$ dobivamo kao:

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\Omega - k\Omega_s). \tag{12}$$

Opisani postupak ćemo zvati **periodizacija** spektra, naravno samo u slučaju da pripadna suma konvergira.

Primjer periodizacije kod očitavanja

Očitajte signal $x(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$ s periodom očitavanja $T_s = \frac{1}{4}$.

Spektar izvornog signala jest $X(\Omega) = \mathrm{tri}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$.

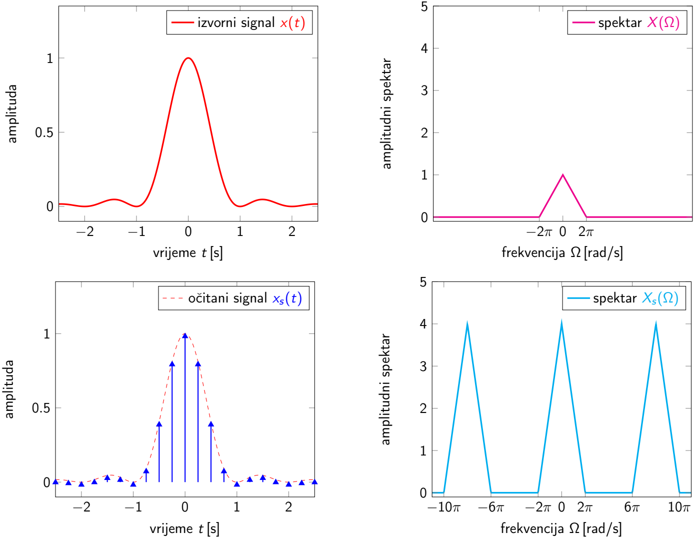
Onda vrijedi:

$$x_s(t) = x(t)\,\mathrm{comb}_{T_s}(t) = \mathrm{sinc}^2(t)\,\mathrm{comb}_{\frac{1}{4}}(t)$$

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\Omega - k\Omega_s) = 4\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\left(\frac{\Omega - 8\pi k}{2\pi}\right)$$

Pokažimo to i slikom.

Primjer periodizacije kod očitavanja



Periodičko proširenje funkcija s konačnim nosačem

Periodičko proširenje funkcije $f(x)$ s periodom T je funkcija $\tilde{f}(x)$ definirana kao

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kT). \tag{13}$$

Nosač ili potpora (engl. *support*) neke funkcije $f(x)$ jest dio domene nad kojom je ta funkcija različita od nule.

U našem slučaju konačni i kompaktni nosač znači da je funkcija $f(x)$ različta od nule na samo jednom konačnom intervalu, npr. $f(x) \neq 0$ za $x \in \langle a, b \rangle$.

Periodičko proširenje funkcija s konačnim nosačem je uvijek dobro definirano, odnosno nemamo problema s konvergencijom sume.

Periodičko proširenje funkcija s konačnim nosačem

Prema tome, kako je spektar očitanog signala u osnovi amplitudno skalirano periodičko proširenje polaznog spektra, od posebnog interesa su signali kod kojih je spektar funkcija koja je različita od nule na samo jednom konačnom intervalu.

Signale za koje njihov spektar zadovoljava to svojstvo ćemo zvati **pojasno ograničenim** signalima.

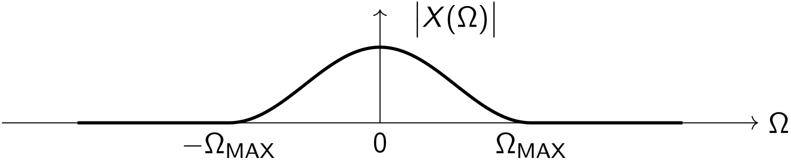
Dodatno, primijetite da za takve pojasno ograničene signale možemo odabrati period očitavanja takav da periodizirani spektar sadrži oblikom do na amplitudno skaliranje neizmijenjen polazni spektar unutar svakog svog perioda, a to sugerira da je rekonstrukcija izvornog signala moguća.

Pojasno ograničeni signal

Za vremenski kontinurani signal $x(t)$ kažemo da je pojasno ograničen (engl. *bandlimited*) s maksimalnom frekvencijom Ω_{MAX} ako za njegov spektar $X(\Omega) = \mathrm{CTFT}\big[x(t)\big]$ vrijedi

$$X(\Omega) = 0 \quad \text{za} \quad |\Omega| > \Omega_{\mathsf{MAX}} \tag{14}$$

Primjer amplitudnog spektra pojasno ograničenog signala:



Primjeri periodizacije spektra

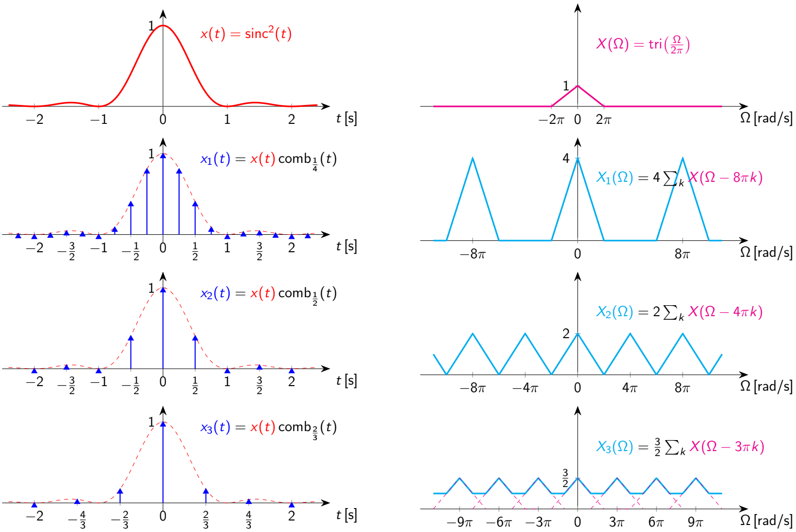
Razmotrimo periodizaciju spektra na primjeru očitavanja vremenski kontinuiranog signala $x(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$ uz tri različita perioda očitavanja $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_2 = \frac{1}{2}$ i $T_3 = \frac{2}{3}$.

Spektar $X(\Omega) = \mathrm{tri}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$ tog signala je različit od nule na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ što znači da će za $\Omega_s > 4\pi$ periodizirani spektar $X_s(\Omega)$ sadržavati do na amplitudno skaliranje neizmijenjenjen spektar izvornog signala.

Kako je $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ vidimo da je odabrani $T_2 = \frac{1}{2}$ kritičan te da za $T_1 = \frac{1}{4} < T_2$ vrijedi $\Omega_1 = 8\pi > 4\pi$ i da za $T_3 = \frac{2}{3} > T_2$ vrijedi $\Omega_3 = 3\pi < 4\pi$.

Za slučaj Ω_3 dolazi do neželjene pojave koju zovemo *preklapanje spektra*.

Primjeri periodizacije spektra



Rekonstrukcija signala u spektralnoj domeni

Sada je jasno da za pojasno ograničene signale maksimalne frekvencije Ω_{MAX} nema preklapanja spektra ako je zadovoljen uvjet:

$$\boxed{\Omega_s > 2\Omega_{\mathrm{MAX}} \quad \text{ili} \quad T_s < \frac{\pi}{\Omega_{\mathrm{MAX}}} \qquad (15)}$$

Navedeni uvjet se ubičajeno naziva *Nyquistovim* uvjetom.

Ako je Nyquistov uvjet zadovoljen onda iz poznatog $X_s(\Omega)$ možemo odrediti polazni $X(\Omega)$ tako da spektar pomnožimo s T_s te zatim samo ostavimo temeljni period oko ishodišta duljine Ω_s.

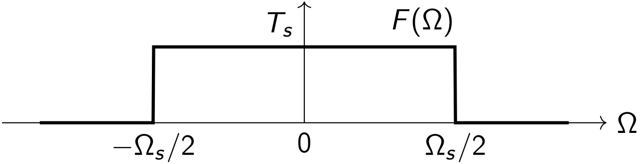
Tu operaciju nazivamo spektralnom **filtracijom**.

Filtracija spektra očitanog signala

Opisanu filtraciju spektra $X_s(\Omega)$ formalno zapisujemo kao množenje spektra s funkcijom pravokutnog otvora na sljedeći način:

$$X(\Omega) = X_s(\Omega) \cdot \underbrace{T_s \operatorname{rect}\big(\Omega/\Omega_s\big)}_{=F(\Omega)} . \tag{16}$$

Dio $F(\Omega) = T_s \operatorname{rect}\big(\Omega/\Omega_s\big)$ je spektralni filtar koji ima oblik pravokutnog spektralnog otvora:



Filtracija u vremenskoj domeni

Time smo u potpunosti odredili veze između $X(\Omega)$ i $X_s(\Omega)$.

Spektar očitanog signala iz spektra izvornog signala dobivamo kao

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\Omega - k\Omega_s). \tag{17}$$

Spektar izvornog signala iz spektra očitanog signala dobivamo kao

$$X(\Omega) = X_s(\Omega)\, T_s \,\mathrm{rect}\big(\Omega/\Omega_s\big), \tag{18}$$

no samo u slučaju da je ispunjen Nyquistov uvjet

$$\Omega_s > 2\Omega_{\mathrm{MAX}} \quad \text{ili} \quad T_s < \pi/\Omega_{\mathrm{MAX}}. \tag{19}$$

Sada moramo utvrditi čemu u vremenskoj domeni odgovara spektralna filtracija, odnosno kako točno provodimo interpolaciju.

Veza filtracije i konvolucije

Konvolucija jest jedna od temeljnih operacija u obradbi signala.

Do obrazloženja zašto je konvolucija važna ćemo doći kod uvođenja sustava i detaljnijeg razmatranja problema filtracije, a sada ćemo samo definirati konvoluciju te pokazati da množenju u spektralnoj domeni odgovara konvolucija u vremenskoj domeni.

Konvolucija dva vremenski kontinurana signala $x(t)$ i $y(t)$ je

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau. \tag{20}$$

Konvolucija dva vremenski diskretna signala $x[n]$ i $y[n]$ je

$$x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]y[n-m] \tag{21}$$

Teoremi o konvoluciji za Fourierove transformacije

Pokazuje se da za sve Fourierove transformacije postoje odgovarajući teoremi o konvoluciji koji u osnovi izriču da se konvolucija u jednoj domeni preslikava u umnožak u drugoj domeni.

Problem filtracije kojeg razmatramo jest problem množenja u frekvencijskoj domeni,

$$X_s(\Omega)F(\Omega), \tag{22}$$

te očekujemo da u vremenskoj domeni to postaje konvolucija

$$x_s(t) * f(t). \tag{23}$$

Pokažimo da ta tvrdnja uistinu vrijedi.

Teorem o konvoluciji za CTFT

Znamo da je

$$X_s(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t}\, dt \quad \text{i} \quad F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t}\, dt. \tag{24}$$

Razmatramo produkt $X_s(\Omega)F(\Omega)$ za kojeg vrijedi

$$\begin{aligned} X_s(\Omega)F(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\tau_1) e^{-j\Omega\tau_1}\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau_2) e^{-j\Omega\tau_2}\, d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\tau_1) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau_2) e^{-j\Omega(\tau_1+\tau_2)}\, d\tau_2 \right) d\tau_1 \end{aligned}$$

Sada ćemo u unutrašnjem integralu zamijeniti varijable tako da umjesto τ_2 uvedemo $t = \tau_1 + \tau_2$.

Teorem o konvoluciji za CTFT

Zamjena $\tau_2 = t - \tau_1$ sada daje:

$$X_s(\Omega)F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\tau_1)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau_1)e^{-j\Omega t}\,dt\right)d\tau_1$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\Omega t}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\tau_1)f(t-\tau_1)\,d\tau_1\right)}_{=x_s(t)*f(t)}dt$$

U dobivenom izrazu vanjski integral prepoznajemo kao CTFT transformaciju unutrašnjeg integrala, a unutrašnji integral prepoznajemo kao konvoluciju signala $x_s(t)$ i $f(t)$.

Još nam preostaje odrediti točan izraz za $f(t)$ korištenjem inverzne CTFT kao

$$f(t) = \mathrm{ICTFT}\big[F(\Omega)\big]. \tag{25}$$

Inverzna CTFT pravokutnog otvora

Računamo prema definiciji:

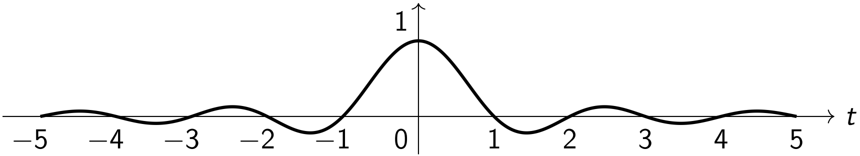
$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathrm{ICTFT}\big[F(\Omega)\big] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} T_s \,\mathrm{rect}\Big(\frac{\Omega}{\Omega_s}\Big) e^{j\Omega t}\, d\Omega \\
&= \frac{T_s}{2\pi}\int_{-\Omega_s/2}^{+\Omega_s/2} e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{T_s}{2\pi}\frac{1}{jt}\big(e^{j\Omega_s/2t} - e^{-j\Omega_s/2t}\big) \\
&= \frac{1}{\pi t/T_s}\frac{1}{2j}\big(e^{j\pi t/T_s} - e^{-j\pi t/T_s}\big) = \frac{1}{\pi t/T_s}\sin(\pi t/T_s).
\end{aligned}
$$

Dobivena funkcija je oblika $\sin(x)/x$ i toliko se često koristi u obradbi signala da je dobila svoj naziv **sinc** funkcija.

Funkcija sinc

Normaliziranu funkciju sinc definiramo kao

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi t}\sin(\pi t), & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \tag{26}$$



Nule funkcije sinc su svi cijeli brojevi osim nule, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Spektar funkcije sinc je $\text{CTFT}\big[\operatorname{sinc}(t)\big] = \operatorname{rect}\big(\frac{\Omega}{2\pi}\big)$.

Funkcija se još naziva i funkcijom očitavanja, prema engl. *the sampling function*.

Filtracija i interpolacija

Sada znamo da spektralna filtracija

$$X(\Omega) = X_s(\Omega)F(\Omega) = X_s(\Omega)\,T_s\,\mathrm{rect}\big(\Omega/\Omega_s\big), \tag{27}$$

postaje konvolucija u vremenskoj domeni

$$x(t) = x_s(t) * f(t) = x_s(t) * \mathrm{sinc}(t/T_s). \tag{28}$$

Kako je $x_s(t) = x(t)\,\mathrm{comb}_{T_s}(t)$ vrijedi

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\mathrm{comb}_{T_s}(\tau)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{t-\tau}{T_s}\Big)\,d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{t-nT_s}{T_s}\Big) \end{aligned}$$

Shanonova interpolacijska formula

Sada možemo dati točnu formulu za interpolaciju pojasno ograničenih signala:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right) \tag{29}$$

Navedenu formulu nazivamo Shannonovom interpolacijskom formulom ili jednostavnije idealnom sinc interpolacijom.

Formula nam u osnovi govori da kontinuirani signal rekonstruiramo tako da na mjesto svakog uzorka postavimo funkciju sinc skaliranu tako da njena amplituda bude upravo jednaka amplitudi uzorka.

Primjer interpolacije

Razmotrimo opet signal $x(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$ s periodom očitavanja $T_s = \frac{1}{2}$ za kojeg znamo da nema preklapanja spektra.

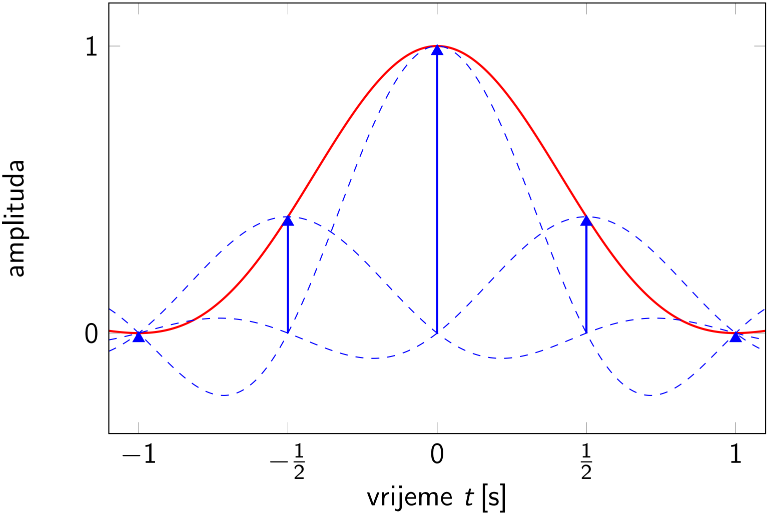
Uzorci signala su

$$x[n] = \mathrm{sinc}^2(nT_s) = \mathrm{sinc}^2(n/2)$$

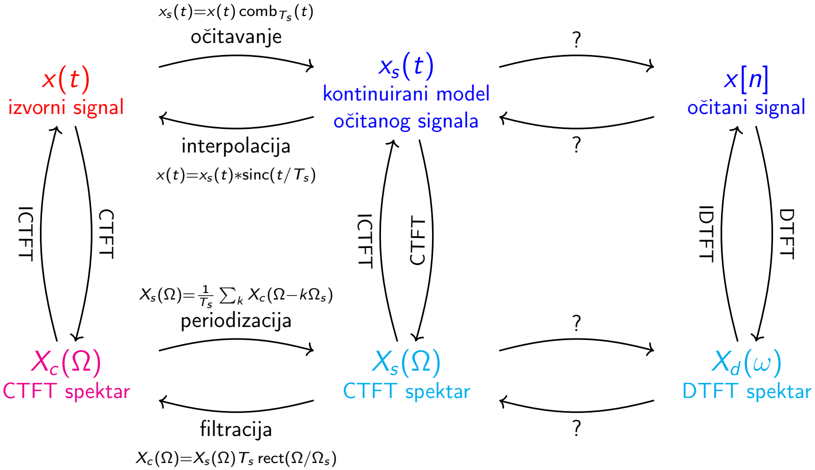
te prema Shannonovoj interpolacijskoj formuli singla rekonstruiramo kao

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{t}{T_s} - n\Big) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(n/2)\,\mathrm{sinc}(2t - n) \end{aligned}$$

Primjer interpolacije



Što smo naučili i što je još ostalo?



Veza kontinuirane i diskretne domene

Sve veze u spektralnoj domeni smo izveli korištenjem CTFT-a.

Uobičajena Fourierova transformacija za vremenski diskretne signale jest DTFT.

Prema tome moramo odrediti vezu između signala

$$x_s(t) \quad \text{i} \quad x[n]$$

te između njihovih spektara

$$X_s(\Omega) \quad \text{i} \quad X_d(\omega).$$

Veza kontinuiranog i diskretnog vremena

Veza između kontinuiranog i diskretnog vremena je već poznata,

$$t = nT_s. \tag{30}$$

Kontinuirano vrijeme t uobičajeno mjerimo u **sekundama** [s].

Diskretno vrijeme kojeg još zovemo i korak n mjerimo u cjelobrojnim **uzorcima** [uzorak].

Kod pretvaranja $x_s(t)$ u $x[n]$ i obrnuto vrijednost uzorka ostaje ista, a jedino što se mijenja jest domena. Kažemo da $x[n]$ iz $x_s(t)$ dobivamo *diskretizacijom* vremena, te da $x_s(t)$ iz $x[n]$ dobivamo *kontinuacijom* vremena.

Veza frekvencija CTFT-a i DTFT-a

Za razliku od vremenske veze koja je odmah jasna, za vezu frekvencija moramo usporediti formule za računanje spektara.

Odredimo prvo spektar vremenski kontinuirnog signala $x_s(t)$:

$$
\begin{aligned}
X_s(\Omega) = \mathrm{CTFT}[x_s(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{comb}_{T_s}(t) e^{j\Omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - nT_s) \Big) e^{j\Omega t}\,dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - nT_s) e^{j\Omega t}\,dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(nT_s)}_{=x[n]} e^{j\Omega n T_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{j\Omega n T_s}
\end{aligned}
$$

Veza frekvencija CTFT-a i DTFT-a

Spektar vremenski kontinuiranog signala $x_s(t)$ je

$$X_s(\Omega) = \mathrm{CTFT}\left[x_s(t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{j\Omega T_s n} \tag{31}$$

Spektar vremenski diskretnog signal $x[n]$ je

$$X_d(\omega) = \mathrm{DTFT}\left[x[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{j\omega n}. \tag{32}$$

Usporedbom izraza odmah dobivamo vezu frekvencija Ω i ω kao

$$\omega = \Omega T_s \tag{33}$$

Veza frekvencija CTFT-a i DTFT-a

Vezu između frekvencije CTFT-a Ω i frekvencije DTFT-a ω jest

$$\boxed{\omega = \Omega T_s. \qquad (34)}$$

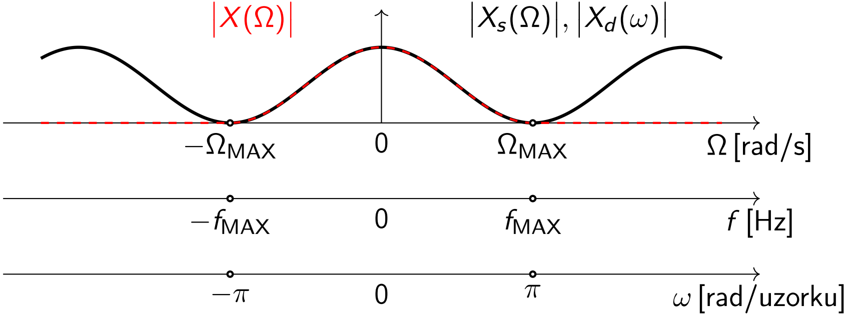
Frekvenciju Ω vremenski kontinuiranih signala mjerimo u **radijanima po sekundi** [rad/s].

Frekvenciju ω vremenski diskretnih signala mjerimo u **radijanima po uzorku** [rad/uzorak].

Osim Ω [rad/s] ponekad koristimo i f [Hz] za koju vrijedi $\Omega = 2\pi f$.

Prema tome kod pretvaranja $X_s(\Omega)$ u $X_d(\omega)$ i obrnuto samo skaliramo frekvencijsku os.

Veza frekvencija CTFT-a i DTFT-a



Kažemo da je frekvencija ω normalizirana jer najveća frekvencija signala postaje $\omega_{\mathrm{MAX}} = \pi$, pa zato postupak pretvorbe ovisno o smjeru zovemo normalizacija ili denormalizacija.

Sve operacije koje morate znati

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{c} x(t) \\ \text{izvorni signal} \end{array}
\arrow[r, bend left, "\begin{array}{c} x_s(t)=x(t)\,\mathrm{comb}_{T_s}(t) \\ \text{očitavanje} \end{array}"]
\arrow[d, bend left, "\text{CTFT}"]
&
\begin{array}{c} x_s(t) \\ \text{kontinuirani model} \\ \text{očitanog signala} \end{array}
\arrow[l, bend left, "\begin{array}{c} \text{interpolacija} \\ x(t)=x_s(t)*\mathrm{sinc}(t/T_s) \end{array}"]
\arrow[r, bend left, "\begin{array}{c} x[n]=x(nT_s) \\ \text{diskretizacija} \end{array}"]
\arrow[d, bend left, "\text{CTFT}"]
&
\begin{array}{c} x[n] \\ \text{očitani signal} \end{array}
\arrow[l, bend left, "\begin{array}{c} \text{kontinuacija} \\ x_s(t)=\sum_n x[n]\,\delta(t-nT_s) \end{array}"]
\arrow[d, bend left, "\text{DTFT}"]
\\
\begin{array}{c} X_c(\Omega) \\ \text{CTFT spektar} \end{array}
\arrow[u, bend left, "\text{ICTFT}"]
\arrow[r, bend left, "\begin{array}{c} X_s(\Omega)=\frac{1}{T_s}\sum_k X_c(\Omega-k\Omega_s) \\ \text{periodizacija} \end{array}"]
&
\begin{array}{c} X_s(\Omega) \\ \text{CTFT spektar} \end{array}
\arrow[u, bend left, "\text{ICTFT}"]
\arrow[l, bend left, "\begin{array}{c} \text{filtracija} \\ X_c(\Omega)=X_s(\Omega)\,T_s\,\mathrm{rect}(\Omega/\Omega_s) \end{array}"]
\arrow[r, bend left, "\begin{array}{c} X_d(\omega)=X_s(\omega/T_s) \\ \text{normalizacija} \end{array}"]
&
\begin{array}{c} X_d(\omega) \\ \text{DTFT spektar} \end{array}
\arrow[u, bend left, "\text{IDTFT}"]
\arrow[l, bend left, "\begin{array}{c} \text{denormalizacija} \\ X_s(\Omega)=X_d(\Omega T_s) \end{array}"]
\end{tikzcd}
$$

Teorem očitavanja

Sada kada znamo sve operacije možemo razmotriti teorem očitavanja.

Svrha teorema očitavanja jest definiranje pod kojim uvjetima su sve pretvorbe između signala i njihovih spektara koje smo do sada izveli valjane i jednoznačne.

Dvije operacije koje nam predstavalju problem su očitavanje u vremenskoj domeni i periodizacija u frekvencijskoj domeni, a za njih smo pokazali da uz zadovoljen Nyquistov uvjet one postaju invertibilne.

Primijetite da je Nyquistov uvjet samo jedno moguće rješenje, odnosno moguće je postaviti i neke druge uvjete koji garantiraju jednoznačnu vezu između signala i njegovih uzoraka.

Teorem očitavanja

Neka je $x(t)$ vremenski kontinuirani signal i neka je $T_s > 0$ pozitivan broj. Definiramo red

$$\hat{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right). \tag{35}$$

Ako je $x(t)$ pojasno ograničen s maksimalnom frekvencijom Ω_{MAX} i ako je $T_s < \pi/\Omega_{\text{MAX}}$ onda vrijedi $\hat{x}(t) = x(t)$.

Alternativno, teorem se kraće može izreći tako da kažemo da je signal jednoznačno određen svojim uzorcima, a osim toga možemo ga izreći i preko frekvencije očitavanja umjesto perioda očitavanja.

U svim svojim formama ovaj teorem veže Nyquistov uvjet i jednoznačnost reprezentacije signala svojim uzorcima.

Nazivi teorema očitavanja

Uz teorem očitavanja je vezano puno imena: Edmund Taylor Whittaker, Claude Elwood Shannon, Harry Nyquist, Vladimir Aleksandrović Koteljnikov, i mnogi drugi.

Zbog toga ćemo teorem zvati jednostavno teoremom očitavanja, ili preciznije kardinalnim teoremom teorije interpolacije.

Interpretacija interpolacijske formule

Shannonova interpolacijska formula je

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right). \tag{36}$$

Kod razmatranja dekompozicije signala smo razmatrali izraze oblika

$$x(t) = \sum_{k} s[k] \phi_k(t), \tag{37}$$

gdje su $\phi_k(t)$ bile bazne funkcije rastava i gdje su $s[k]$ bile odgovarajuće težine tih funkcija.

Prema tome, interpolacijsku formulu možemo interpretirati kao reprezentaciju signala $x(t)$ u bazi $\phi_n(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$ uz pomalo neočekivani rezultat da su težine upravo jednake vrijednostima signala u trenutcima $t = nT_s$

Interpretacija interpolacijske formule

Teorem očitavanja kaže da ako se signal $x(t)$ nalazi u prostoru razapetom funkcijama $\phi_n(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$ onda je reprezentacija jednoznačna.

No ako $x(t)$ nije u tom prostoru, odnosno ako nije pojasno ograničen, onda reprezentacija preko uzoraka ima neku grešku.

Obzirom da vrijedi $x(nT_s) = \left\langle x(t), \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)\right\rangle$ odmah dobivamo da su uzorci uzeti u trenutcima nT_s optimalni u smislu da pogreška reprezentacije $e(t)$ definirana kao

$$e(t) = x(t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right) \tag{38}$$

postaje minimalna u normi dva, odnosno bilo koja promjena koeficijenata $x(nT_s)$ će povećati $\left|\left|e(t)\right|\right|_2$.

Očitavanje analognog signala

Prema teoremu očitavanja analogni signal mora biti pojasno ograničen ako ga želimo jednoznačno reprezentirati preko njegovih uzoraka.

Ako nemamo pojasnu ograničenost onda dolazi do distorzija i artifakata uzrokovanih preklapanjem spektra:

- Kod audio signala frekvencije iznad pola frekvencije očitavanja postaju niske frekvencije.
- Kod očitavanja slike pojavljuje se *moiré*.
- Kod očitavanja videa pojavljuje se stroboskopski efekt u kojem se objekti prividno (o)kreću u smjeru različitom od stvarnog.

Zato uvijek kada je to moguće koristimo filtar protiv preklapanja spektra (engl. *anti-aliasing filter*).

Filtar protiv preklapanja spektra

Filtar protiv preklapanja spektra ili AA filtar (od engl. *anti-aliasing*) je nisko-propusni filtar koji potiskuje sve frekvencije veće od pola frekvencije očitavanja.

Konkretna realizacija filtra ovisi o primjeni, na primjer za očitavanje audio signala i za očitavanje slike izvedba ne može biti ista jer je audio signal prije očitavanja električni, a slika je optički signal.

Kod očitavanja analognog signala filtar mora biti izveden u analognoj tehnici, odnosno ne možemo ga realizirati na računalu.

No filtar protiv preklapanja spektra se realizira na računalu kada se primjenjuje na digitalne signale prije smanjivanja broja uzoraka, npr. prije smanjivanja rezolucije slike istu je potrebno filtrirati.

Interpolacija u stvarnom vremenu

Shanonova interpolacijska formula koristi $\mathrm{sinc}(t/T_s)$ kao interpolacijsku funkciju čiji nosač (potpora) jest cijeli $\mathbb{R}$.

Stoga tu idealnu interpolaciju ne možemo koristiti u stvarnom vremenu jer svaki uzorak signala daje nezanemarivi doprinos.

U praski se stoga za interpolaciju koriste jednostavnije interpolacijske funkcije $h(t)$ konačnog trajanja koje zadovoljavaju interpolacijski uvjet:

$$h(t) = 0 \quad \text{za} \quad t = nT_s,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{39}$$

Interpolirani signal $x(t)$ računamo iz uzoraka $x[n] = x(nT_s)$ kao

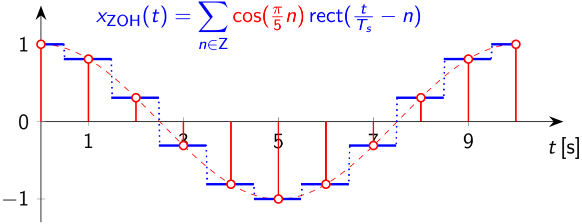
$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] h\left(\frac{t}{T_s} - n\right).} \tag{40}$$

Interpolacija nultog reda

Interpolacijska funkcija za interpolaciju nultog reda ili ZOH interpolaciju (od engl. *zero order hold*) jest:

$$h_{\mathrm{ZOH}}(t) = \mathrm{rect}(t/T_s). \tag{41}$$

Primjer za signal $x(t) = \cos(\frac{\pi}{5}t)$ očitan s periodom $T_s = 1$:



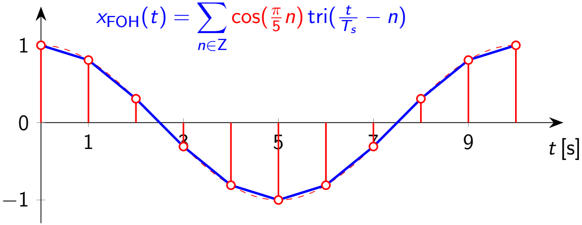
Ova interpolacija je složena od pravokutnih impulsa.

Interpolacija prvog reda

Interpolacijska funkcija za interpolaciju prvog reda ili FOH interpolaciju (od engl. *first order hold*) jest:

$$h_{\text{ZOH}}(t) = \text{tri}(t/T_s). \tag{42}$$

Primjer za signal $x(t) = \cos(\frac{\pi}{5}t)$ očitan s periodom $T_s = 1$:



Interpolacija je linearna jer uzroke spajamo ravnim linijama.

Interpolacije višeg reda i splajnovi

Uzastopnom konvolucijom interpolacijske funkcije nultog reda $h_{ZOH}(t) = \mathrm{rect}(t/T_s)$ dobivamo B-splajn K-tog reda $\beta_K(t)$:

$$\beta_K(t) = \frac{1}{T_s^K}\Big(\underbrace{h_{ZOH}(t) * h_{ZOH}(t) * \cdots * h_{ZOH}(t)}_{K \text{ konvolucija}}\Big). \tag{43}$$

Skup pomaknutih $\beta_K(t)$ čini bazu koju možemo koristiti za interpolaciju.

B-splajnovi ne zadovoljavaju interpolacijsko svojstvo (39) pa se često umjesto njih koriste *kardinalni* splajnovi koje nećemo razmatrati.

Napomena: Interpolacija B-splajnovima ne teži k idealnoj interpolaciji funkcijom $\mathrm{sinc}(\cdot)$ kada $K \to \infty$. Idealna interpolacija funkcijom $\mathrm{sinc}(\cdot)$ je povezana s Lagrangeovim polinomima i s kardinalnim splajnovima.

Pojasnopropusno očitavanje

Umjesto ograničavanja na temeljni pojas oko nulte frekvencije mogli smo ograničiti spektar na neki uski pojas oko neke centralne frekvencije.

U tom slučaju govorimo o pojasnopropusnom očitavanju (engl. *bandpass sampling*).

To je česti slučaj u telekomunikacijama gdje komunikacijski kanal ima neku usku širinu oko centrale frekvencije, npr. mobilna telefonija.

U tom slučaju možemo promijeniti Nyquistov uvjet te pokazati da je dovoljno frekvenciju očitavanja vezati uz širinu pojasa bez obzira gdje se nalazi centralna frekvencija.

To je značajno olakšanje za slučaj visokih centralnih frekvencija raspona između giga i tera herca kao što je slučaj u današnjim telekomunikacijama.

Sažimajuće očitavanje

Za kraj spominjemo sažimajuće očitavanje (engl. *compressive sensing*), koje uvodi nešto složenije dodatne uvjete na signal uključujući obaveznu pretpostavku da signal dozvoljava rijetku reprezentaciju u nekoj bazi.

Te dodatne pretpostavke omogućuju da se smanji broj uzoraka koje je potrebno prikupiti da bi dostigli dovoljno vjernu reprezentaciju signala s dovoljno malom pogreškom.

Preporučeno čitanje

- P. Prandoni, M. Vetterli, "Signal Processing for Communications" (`https://sp4comm.org/`), poglavlje 9.
- B. Jeren, "Signali i sustavi", Školska knjiga, 2021., dio 4.7. i 4.6.4.
- H. Babić, "Signali i sustavi" (`http://sis.zesoi.fer.hr/predavanja/pdf/sis_2001_skripta.pdf`), dio 14.1. i 14.2.
- M. Vetterli, J. Kovačević, V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing" (`https://fourierandwavelets.org/`), poglavlje 5.