模拟与数字电路

Analog and Digital Circuits

课程主页 扫一扫

第 十 九 讲：**波特图与滤波器**

Lecture 18: **Bode Plot**

主　　讲：陈 迟 晓

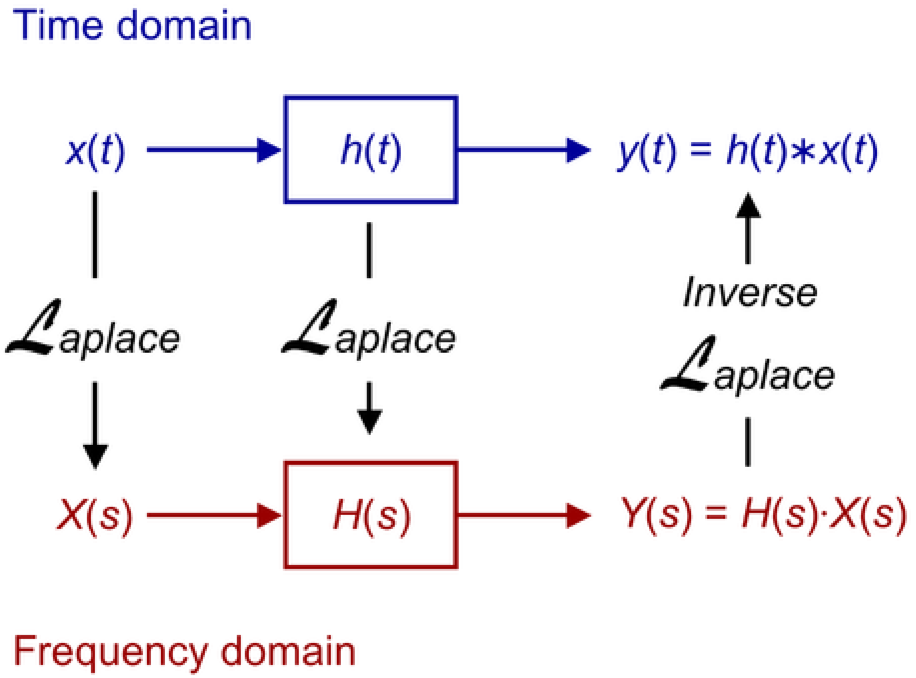
Instructor　：Chixiao Chen

提纲

- 复习
  - 从时域到频域的变化?

  - 波特图的近似画法
  - 一阶滤波器
  - 二阶滤波器
  - 高阶有源滤波器

利用Laplace解决复杂计算

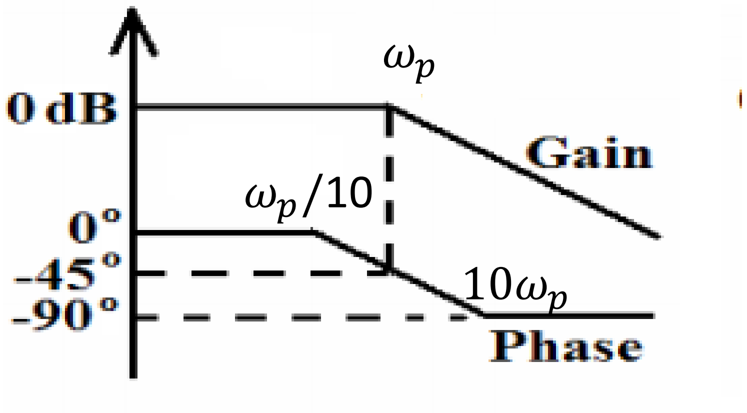


Angular frequency ω	Z	Y
Resistor	R	$G=\frac{1}{R}$
Capacitor	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$
Inductor	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$

波特图的近似画法

- 如何手画$H(j\omega)=\frac{1}{1+{j\omega}/{\omega_p}}$的函数图像：

最终的效果是：



我们称上面这条线为幅频特性曲线，下面这条为相频特性曲线。

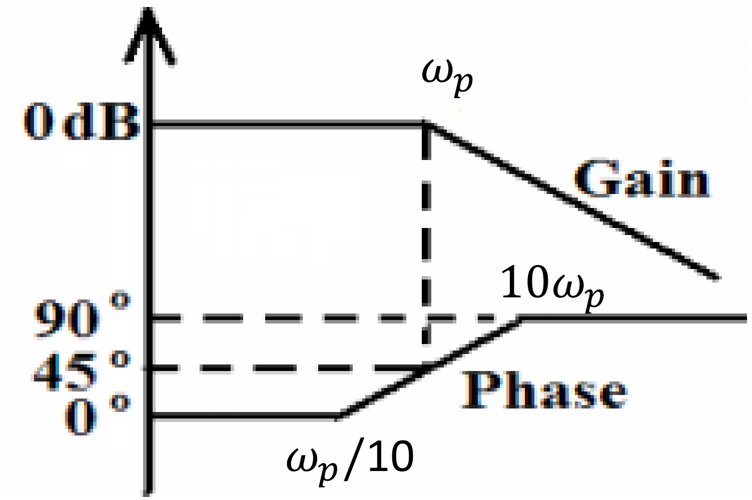
当增益遇到ω_0，斜率下降20dB/dec；相位则从$lg\omega_0-1$开始下降，一直到$lg\omega_0+1$共下降$\frac{\pi}{2}$。

当$\mathrm{s}=-\omega_\mathrm{p}$时，该表达式有一个无穷间断点，我们称之为左边平面极点（LHP，P表示Pole，也就是极点），之所以叫做左半平面，是因为此时s在虚数轴的左侧。

波特图的近似画法

- 如何手画$H(j\omega) = \frac{1}{1 - {j\omega}/{\omega_p}}$的函数图像:

很容易发现，这个函数的模与上一个函数相同，而相位刚好相反



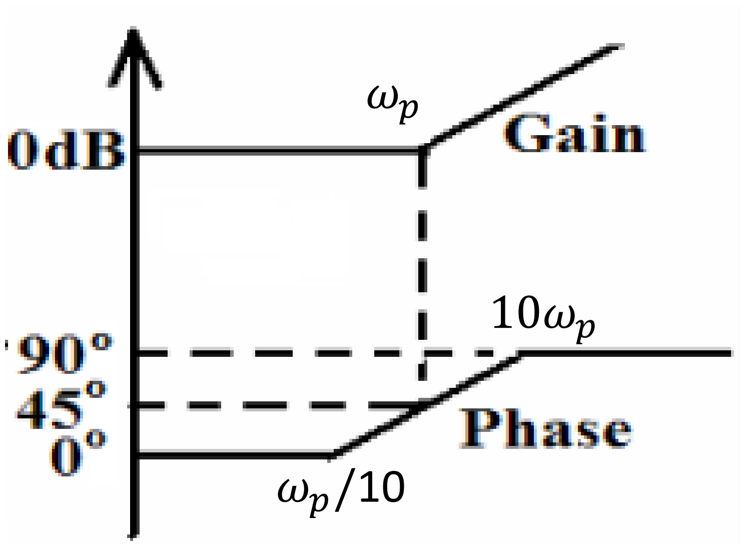
当增益遇到ω_0，斜率下降20dB/dec；相位则从$lg\omega_0 - 1$开始上升，一直到$lg\omega_0 + 1$一共上升$\frac{\pi}{2}$。

当$\mathrm{s} = \omega_\mathrm{p}$时，该表达式有一个无穷间断点，我们称之为右边平面极点（RHP），同理，也是因为此时s在虚数轴的右侧。

波特图的近似画法

- 如何手画$H(j\omega)=1+{}^{j\omega}/_{\omega_p}$的函数图像:

很容易发现，这个函数的模和相位均与$H(j\omega)=\frac{1}{1+{}^{j\omega}/_{\omega_p}}$相反。



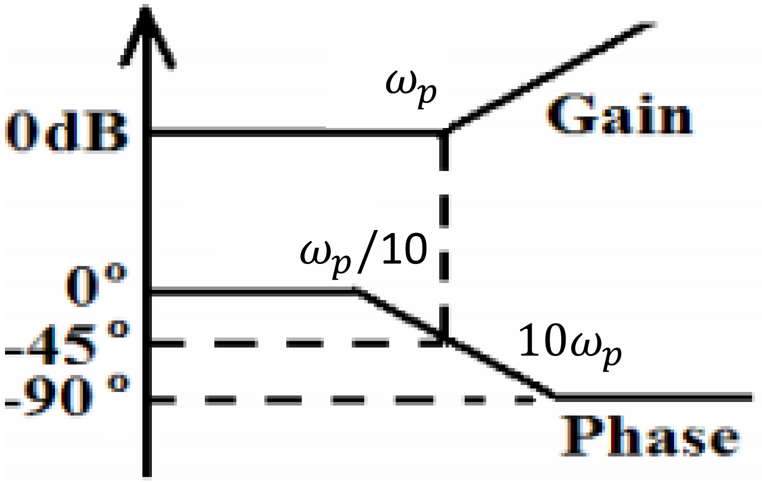
当增益遇到ω_0，斜率上升20dB/dec；相位则从$lg\omega_0-1$开始上升，一直到$lg\omega_0+1$一共上升$\frac{\pi}{2}$。

当$\mathrm{s}=-\omega_\mathrm{p}$时，该表达式等于0，我们称之为左边平面零点（LHZ，Z表示Zero）。

波特图的近似画法

- 如何手画$H(j\omega) = 1 - {}^{j\omega}/_{\omega_p}$的函数图像:

很容易发现，这个函数的相位与$H(j\omega) = 1 + {}^{j\omega}/_{\omega_p}$相反，而模相同。



当增益遇到ω_0，斜率上升20dB/dec；相位则从$lg\omega_0 - 1$开始下降，一直到$lg\omega_0 + 1$一共下降$\frac{\pi}{2}$。

当$\mathrm{s} = \omega_\mathrm{p}$时，该表达式等于0，我们称之为右边平面零点（RHZ）。

波特图的总结

总结:

LHP:

$$\frac{1}{1+s/\omega_0}$$

$$\frac{1}{1+j(\omega/\omega_0)}$$

RHP:

$$\frac{1}{1-s/\omega_0}$$

$$\frac{1}{1-j(\omega/\omega_0)}$$

LHZ:

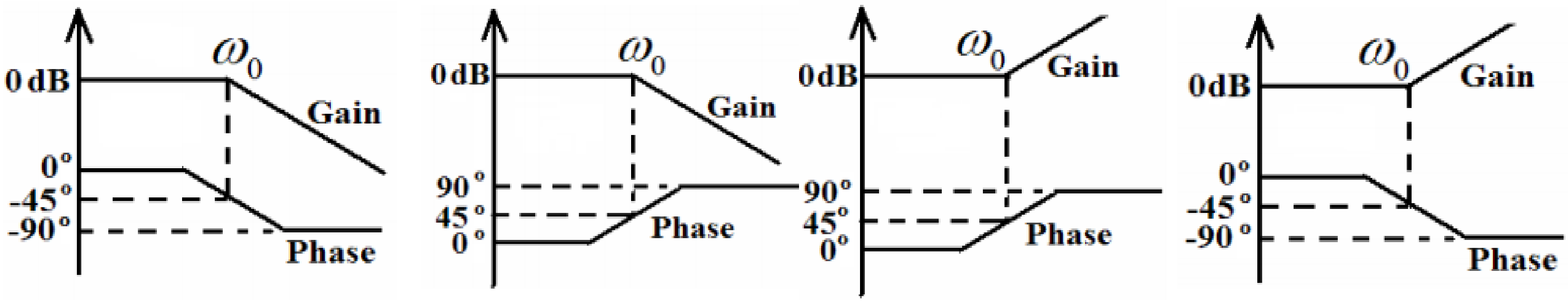
$$1+s/\omega_0$$

$$1+j(\omega/\omega_0)$$

RHZ:

$$1-s/\omega_0$$

$$1-j(\omega/\omega_0)$$



规律非常明显，即便不记得了，推一遍也并不难。

波特图的近似画法

实际的响应表达式一般是多个上面提到的形式的乘积再乘一个系数，一般式为：
$H(s) = A \cdot \prod_{i=0,1,2\ldots}\left(1+\frac{s}{j\omega_{zi}}\right) \cdot \prod_{j=0,1,2\ldots}\frac{1}{1+\frac{s}{j\omega_{pj}}}$由于是纵坐标是dB和rad，需要对$H(s)$取对数，我们只要将每一项的幅度和相位累加即可。例如：

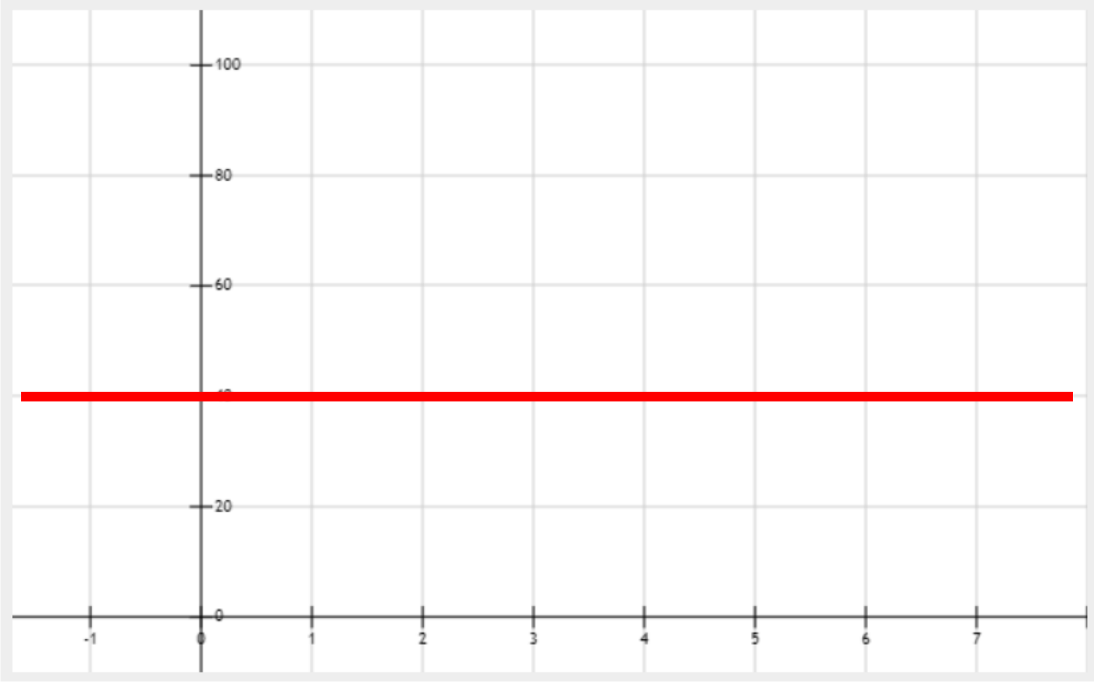
$$H(s) = 10^2 \cdot \frac{1+\frac{s}{10^3}}{1-\frac{s}{10^6}}$$

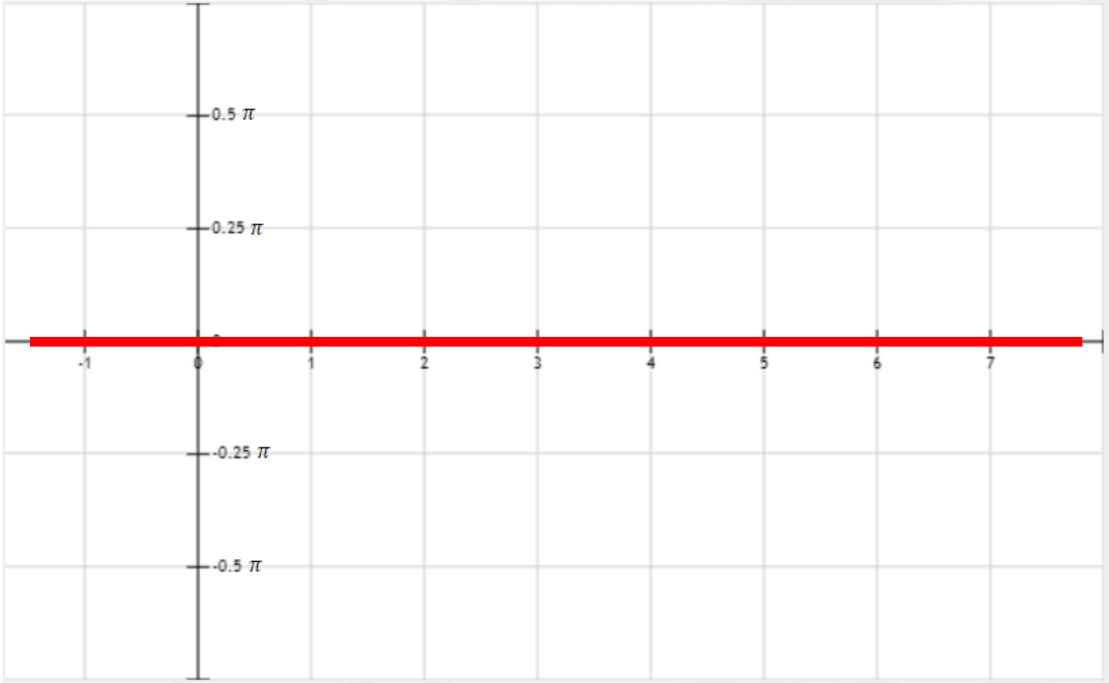
其波特图可以视为以下三者的叠加：

$$H_1(s) = 10^2 \qquad H_2(s) = 1+\frac{s}{10^3} \qquad H_3(s) = \frac{1}{1-\frac{s}{10^6}}$$

频率响应

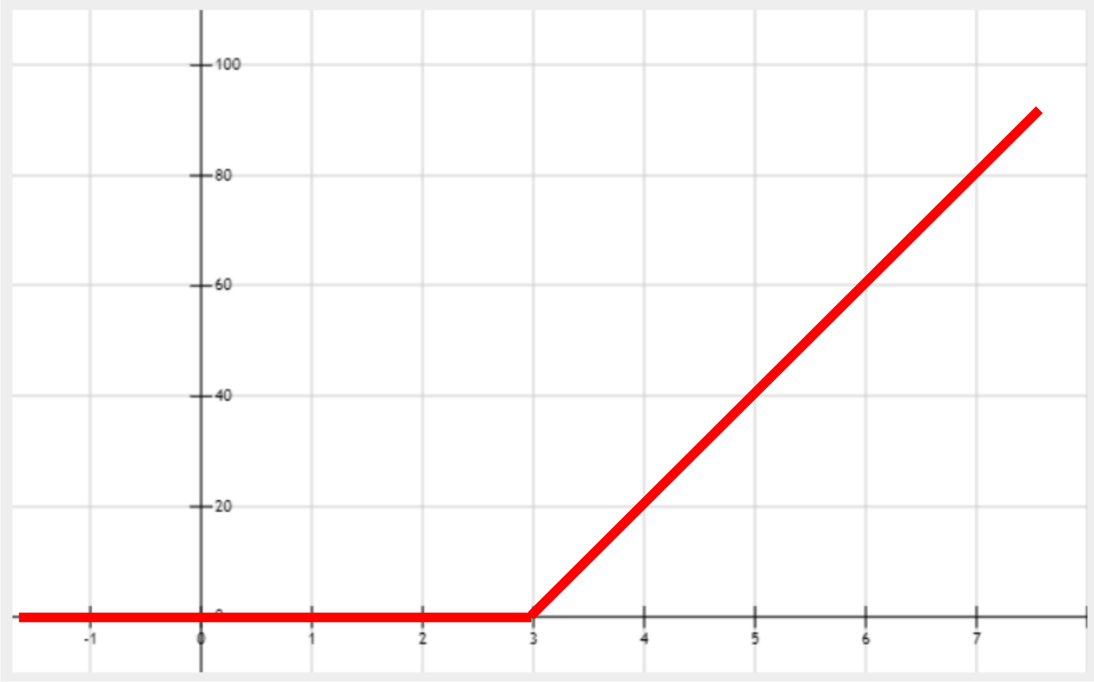
$H_1(s) = 10^2$

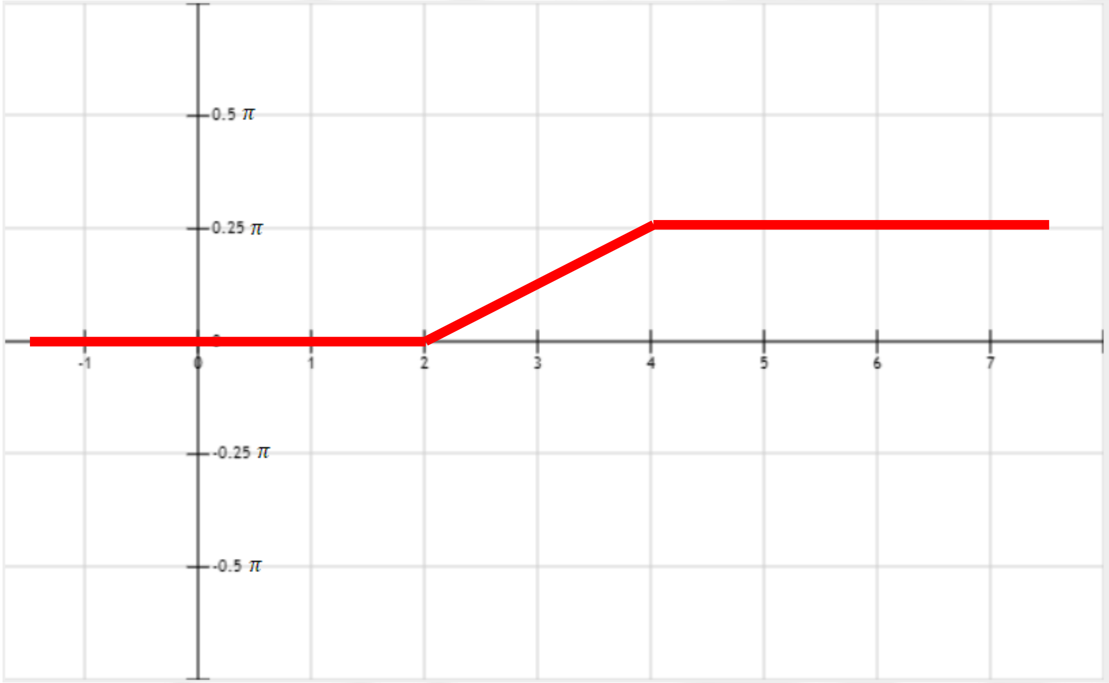




频率响应

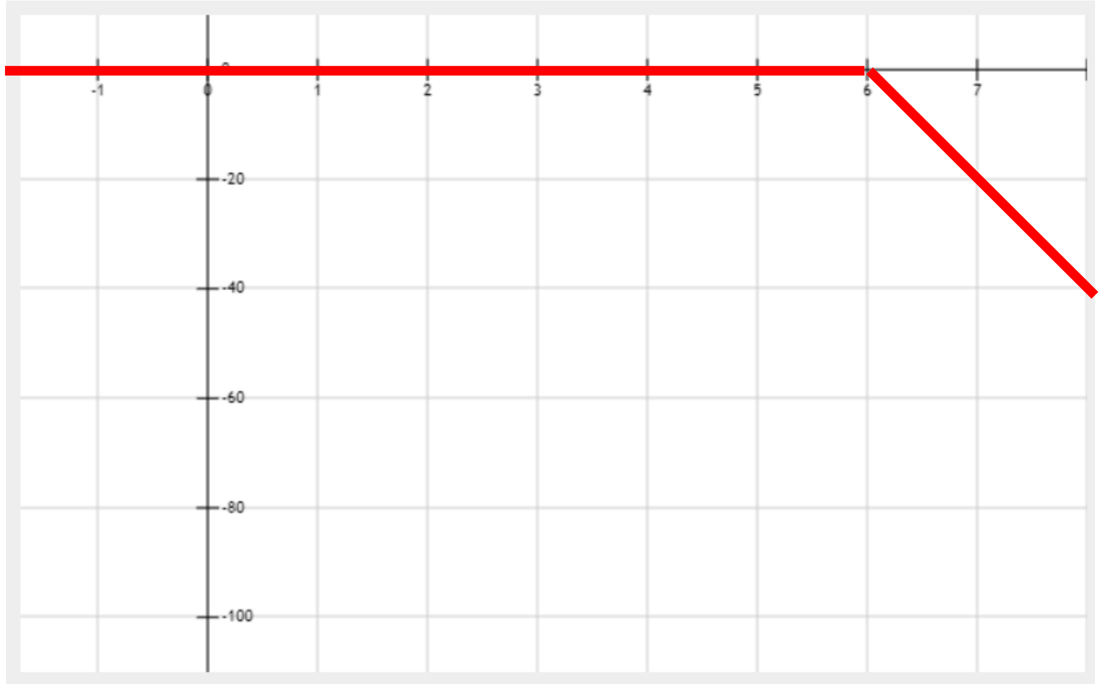
$$H_2(s) = 1 + \frac{s}{10^3}$$

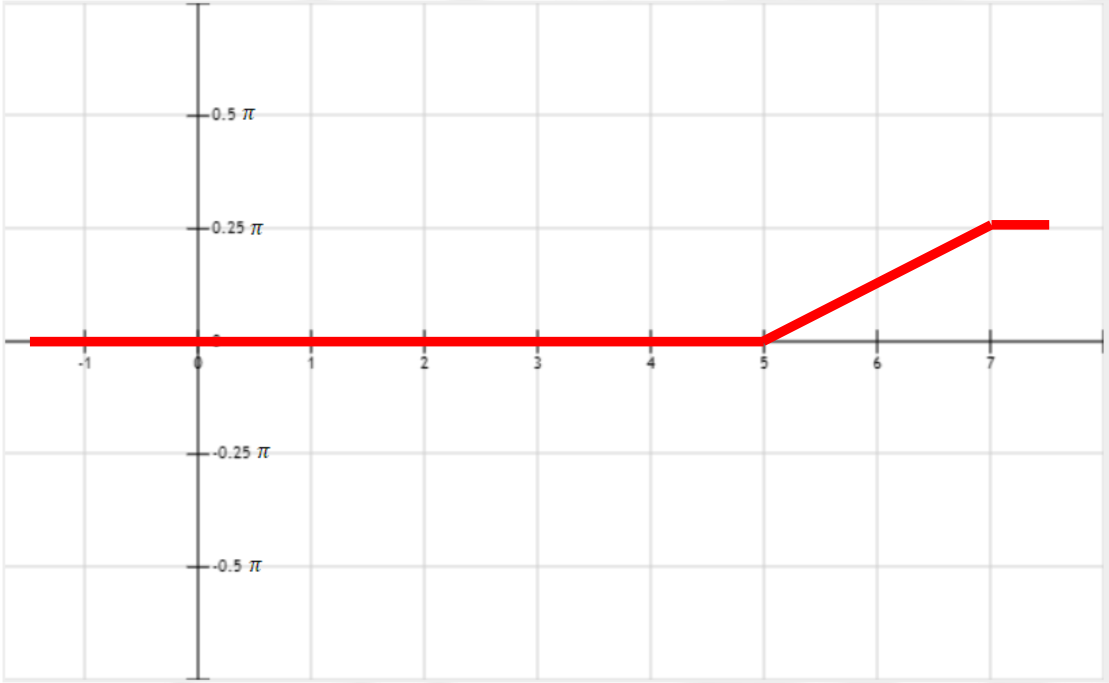




频率响应

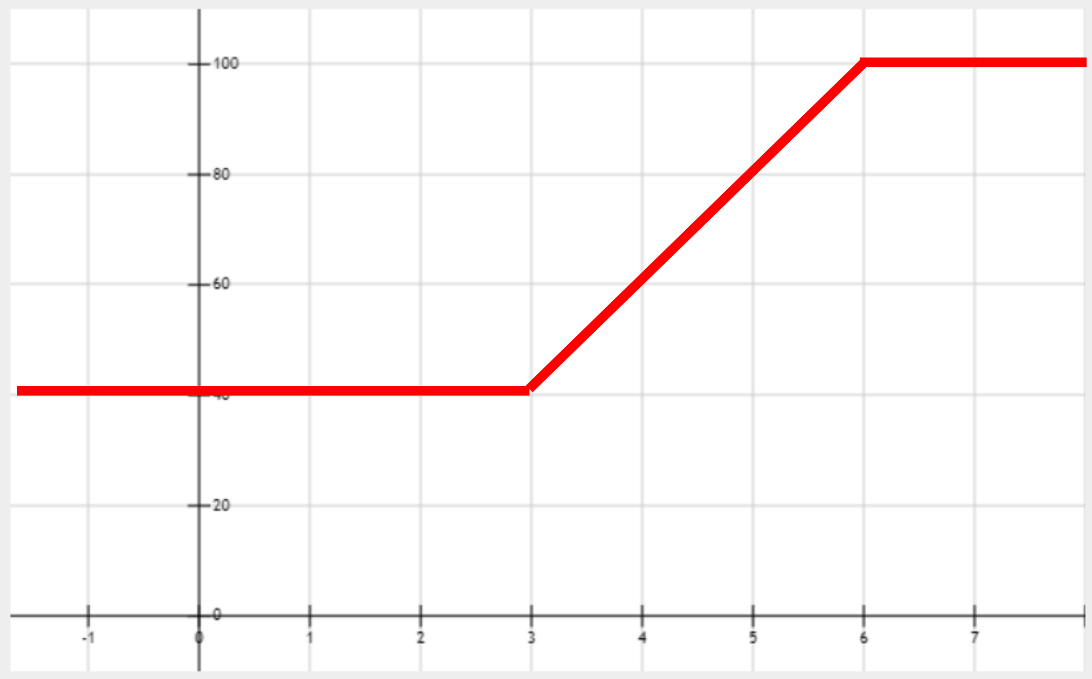
$$H_3(s) = \frac{1}{1 - \frac{s}{10^6}}$$



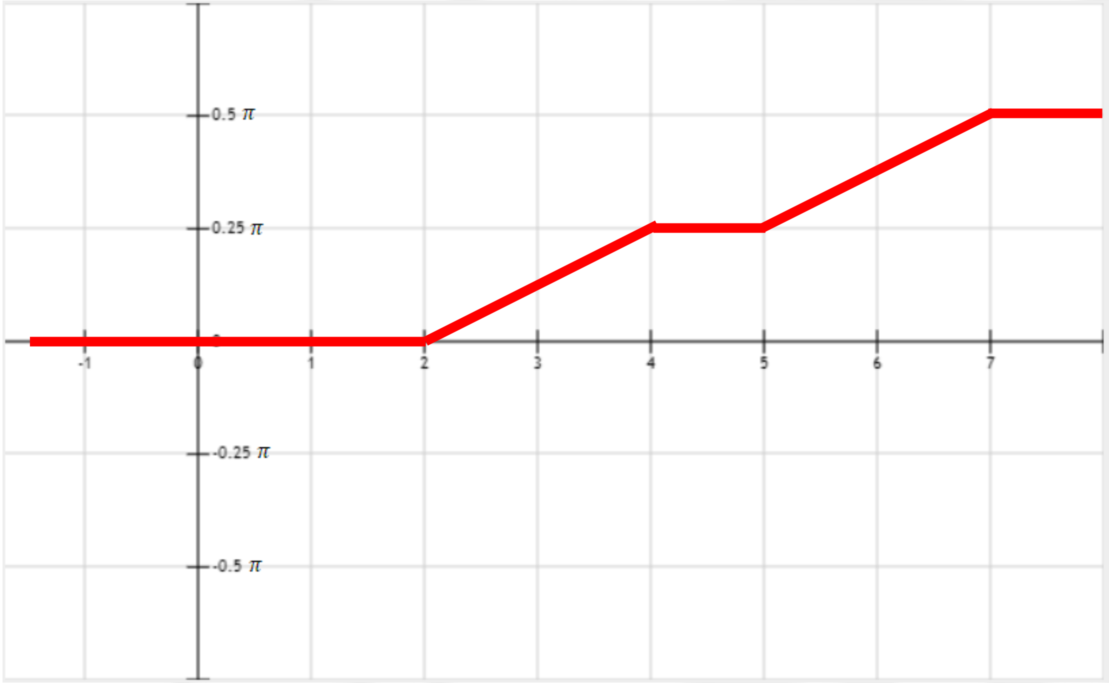


频率响应

叠加后可得$H(s)=10^2\cdot\frac{1+\frac{s}{10^3}}{1-\frac{s}{10^6}}$的波特图：



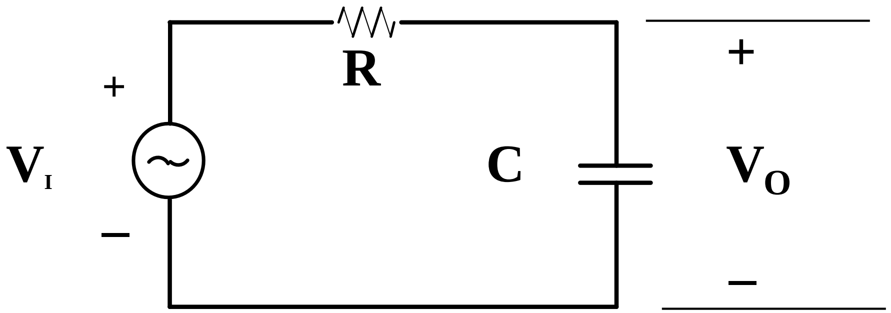
幅度每遇到一个零点，斜率上升20dB/dec，每遇到一个极点，斜率下降20dB/dec



相位每遇到一个RHP/LHZ，上升$\frac{\pi}{2}$，每遇到一个LHP/RHZ，下降$\frac{\pi}{2}$

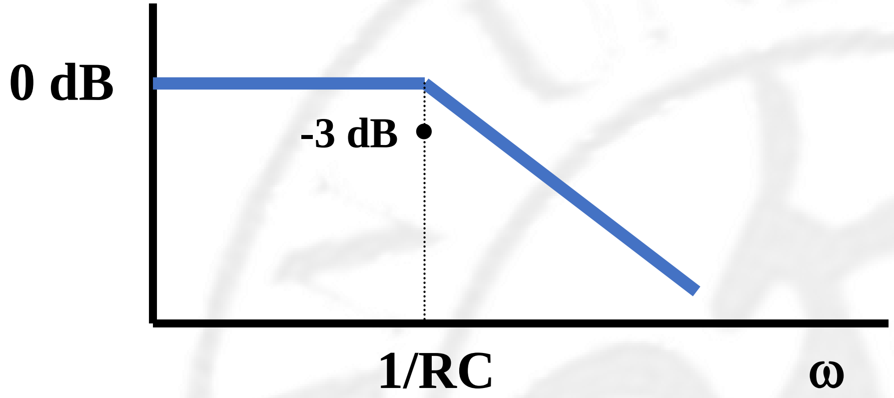
低通滤波器

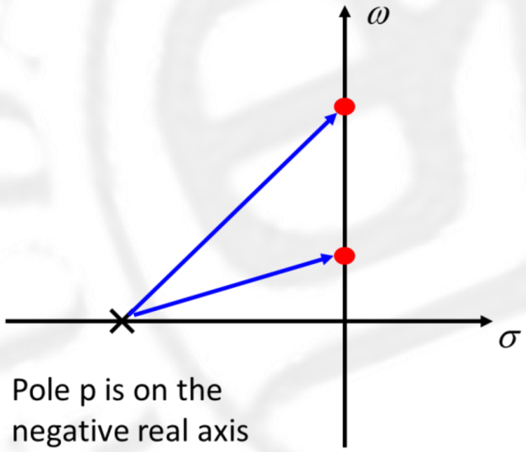
- 一阶无源低通滤波器（first-order passive low-pass filter）



Low pass filter circuit

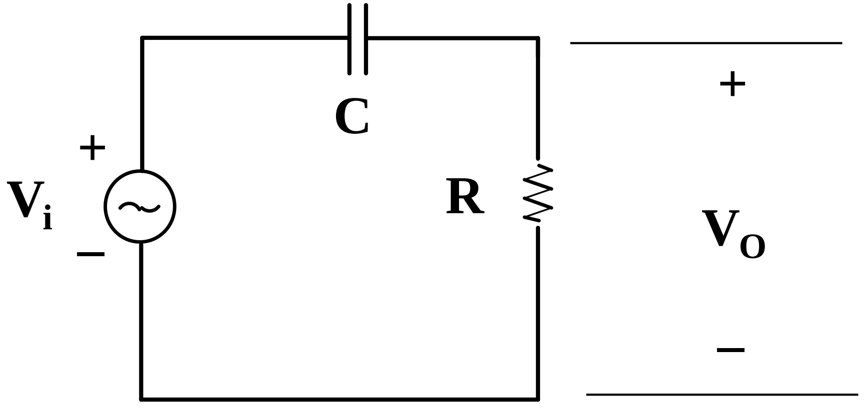
$$\frac{V_O(jw)}{V_i(jw)} = \frac{\frac{1}{jwC}}{R+\frac{1}{jwC}} = \frac{1}{1+jwRC}$$



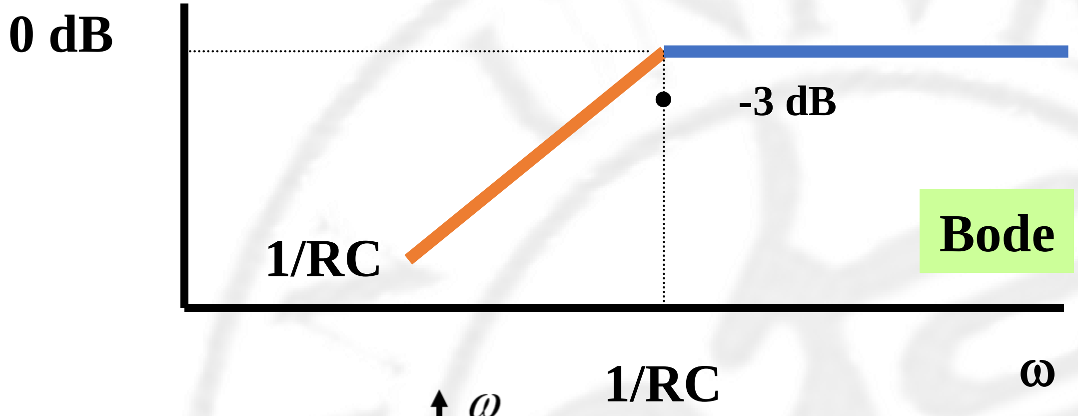


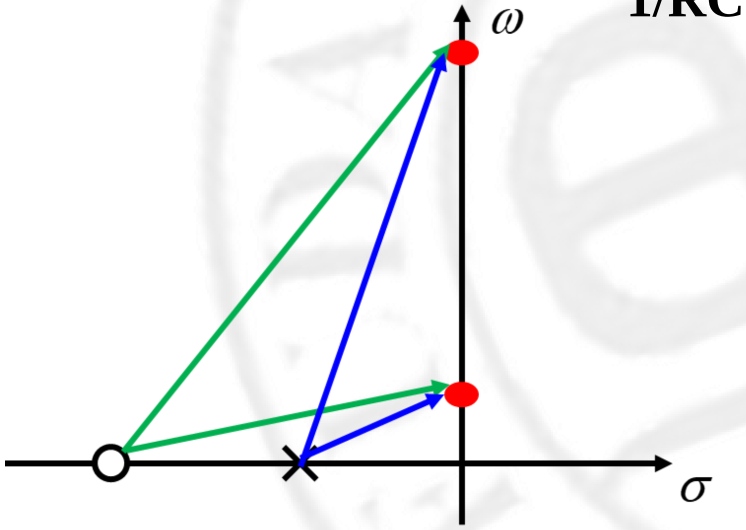
高通滤波器

- 一阶无源高通滤波器（first-order passive high-pass filter）



High Pass Filter

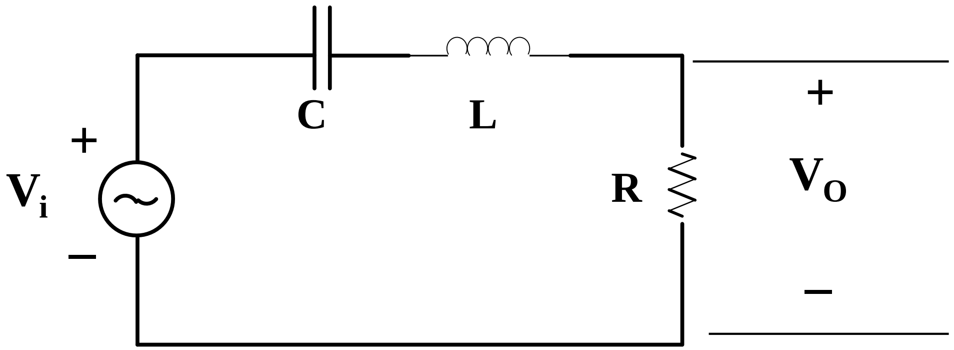


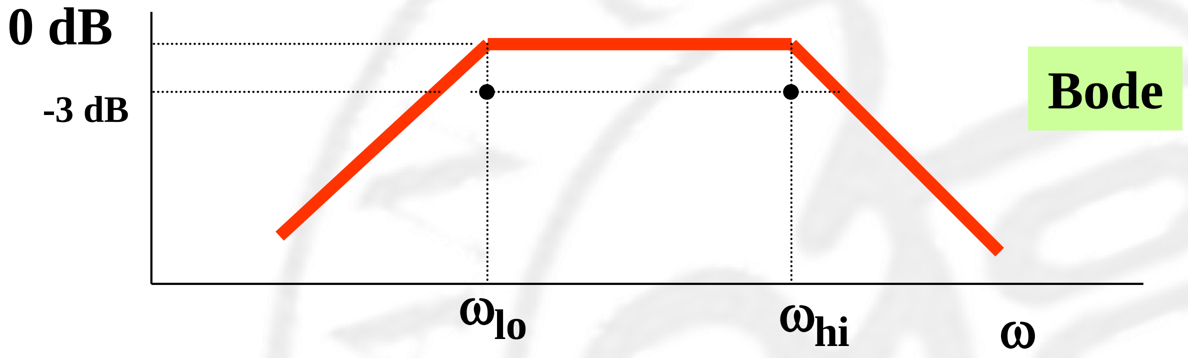


$$\frac{V_o(jw)}{V_i(jw)} = \frac{R}{R+\frac{1}{jwC}} = \frac{jwRC}{1+jwRC}$$

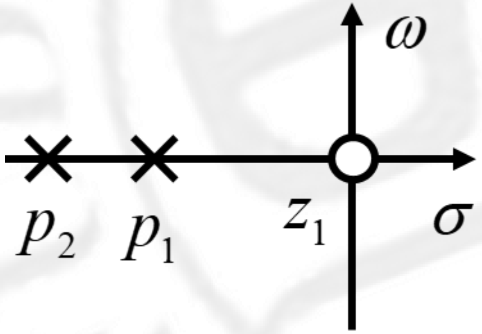
带通滤波器

- 无源带通滤波器（first-order passive band-pass filter）



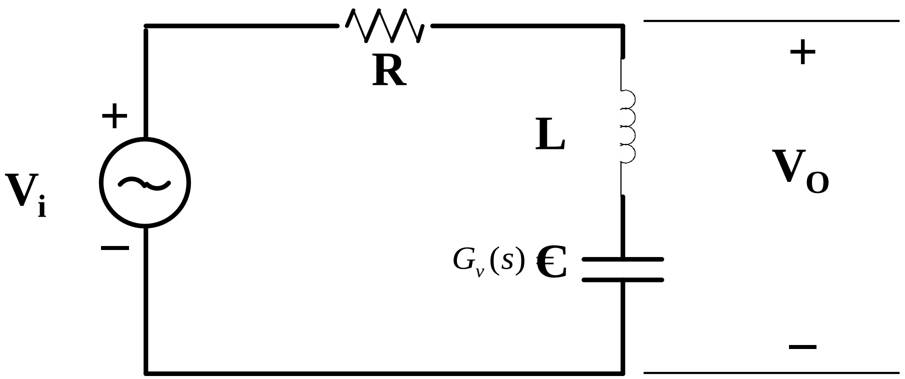


$$\frac{V_O(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

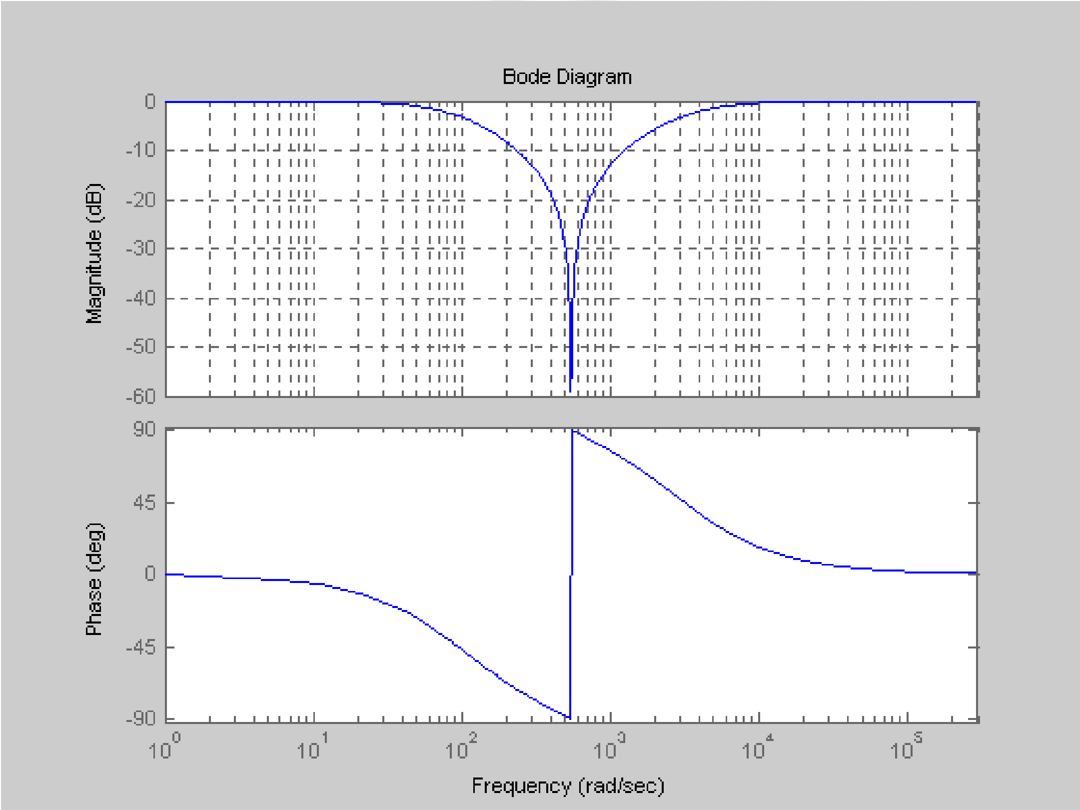


带阻滤波器

- 无源带阻滤波器（first-order passive band-stop filter）

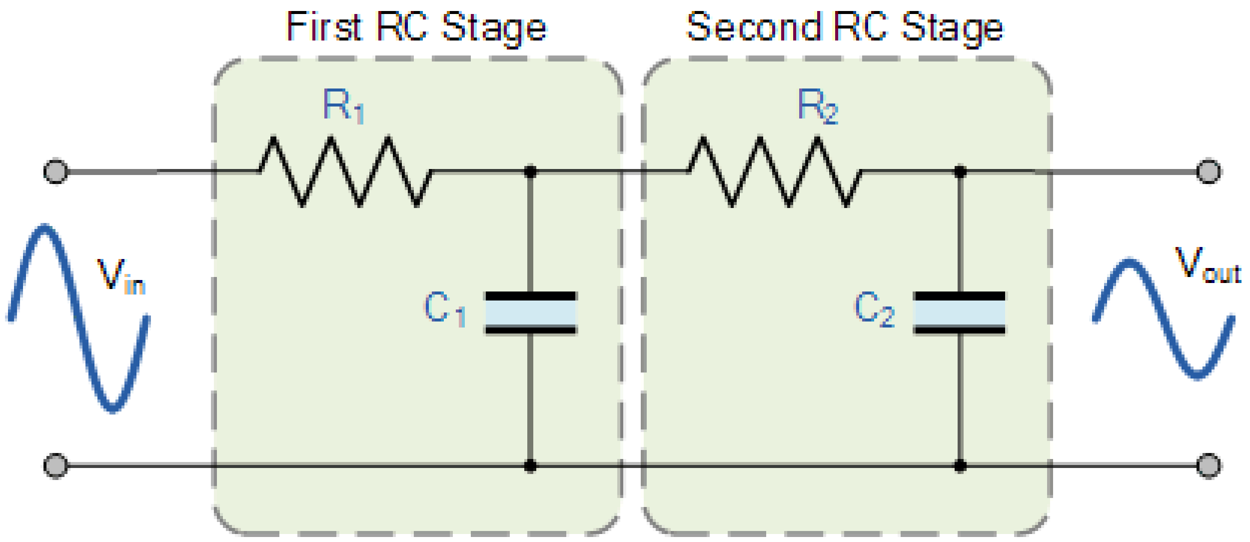


$$G_v(s)=\frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$



滤波器的级联

- 如果将2个低通滤波器级联，其频率响应、波特图是什么样子？



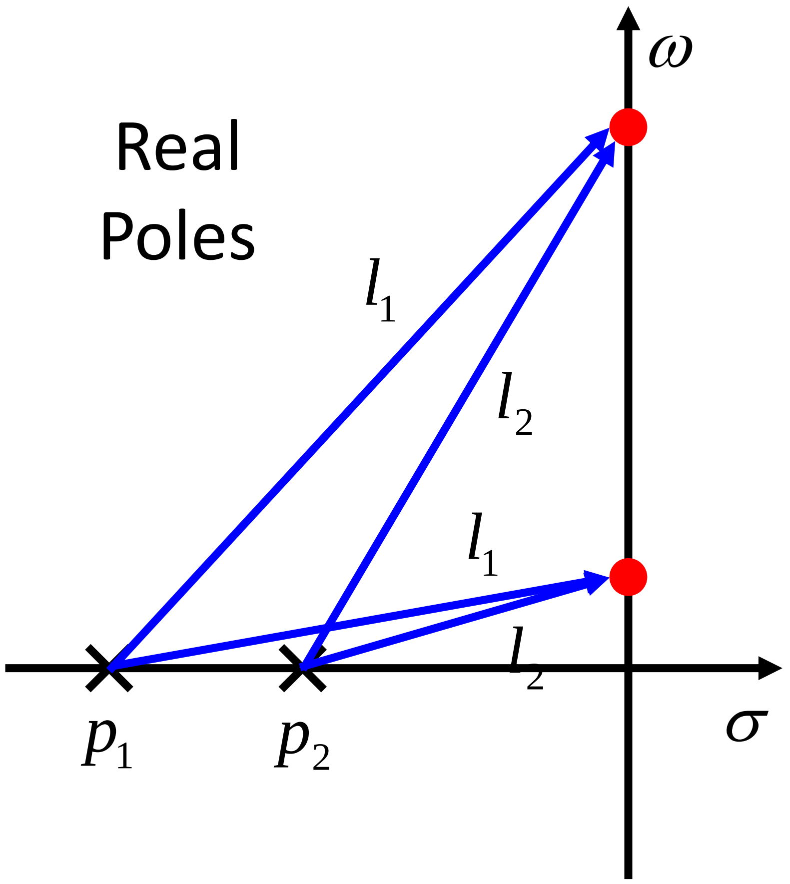
$$H_{lp1}(s)=\frac{V_x}{V_{in}}=\frac{Z_{eq}(s)}{Z_{eq}(s)+R_1}$$

$$Z_{eq}(s)=\frac{1}{sC_1}\parallel\left(R_2+\frac{1}{sC_2}\right)=\frac{sC_2R_2+1}{s(C_1+C_2)+s^2C_1C_2R_2}$$

$$H_{lp}(s)=H_{lp1}(s)\times H_{lp2}(s)=\frac{Z_{eq}(s)}{Z_{eq}(s)+R_1}\frac{\frac{1}{sC_2}}{\frac{1}{sC_2}+R_2}$$

$$=\frac{1}{1+s(R_1C_1+C_2R_2+R_1C_2)+s^2C_1C_2R_1R_2}$$

二阶低通滤波器——实根



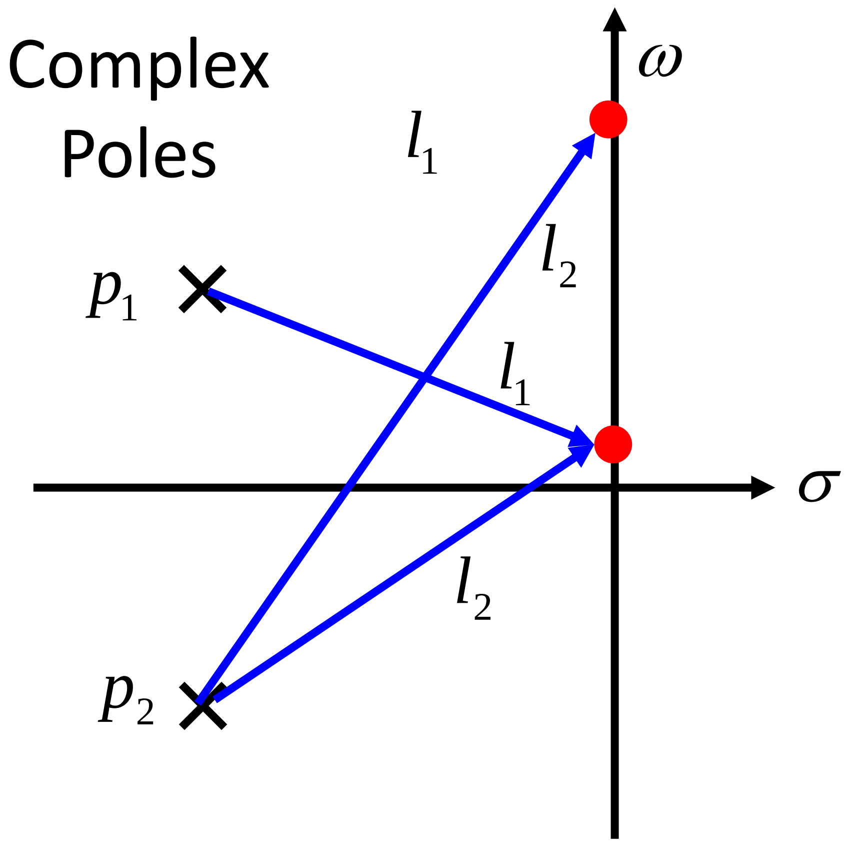
The magnitude is $\dfrac{K}{l_1 l_2}$

As ω increases

The magnitude monotonically decreases.

Decrease faster than first order low pass

二阶低通滤波器——共轭虚根



The magnitude is $\dfrac{K}{l_1 l_2}$

As ω increases,

l_1 decrease first and then increase.

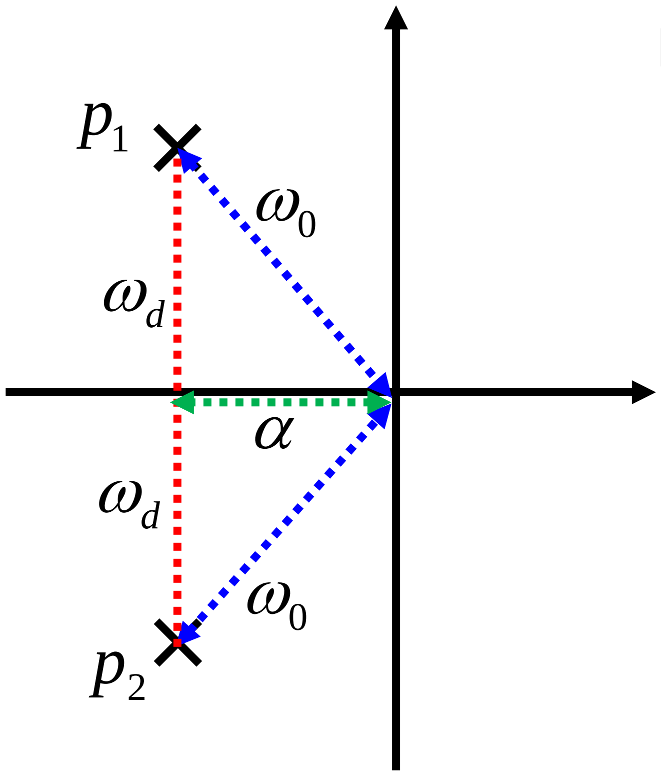
l_2 always increase

What will happen to magnitude?

品质因数

$$H(s)=\frac{K}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$

$$p_1,p_2=\frac{-\frac{\omega_0}{Q}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2}}{2}$$

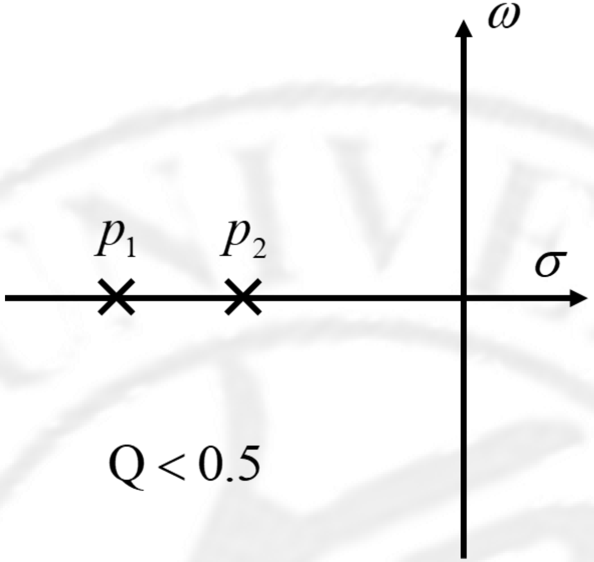


For complex poles

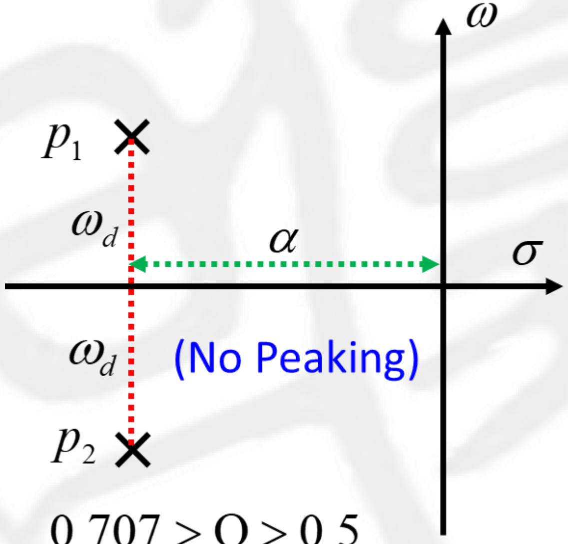
$$\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2<0 \Rightarrow Q>\frac{1}{2}$$

$$\alpha=\frac{\omega_0}{2Q} \qquad \omega_d=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

$$\sqrt{\alpha^2+\omega_d^2}=\omega_0$$

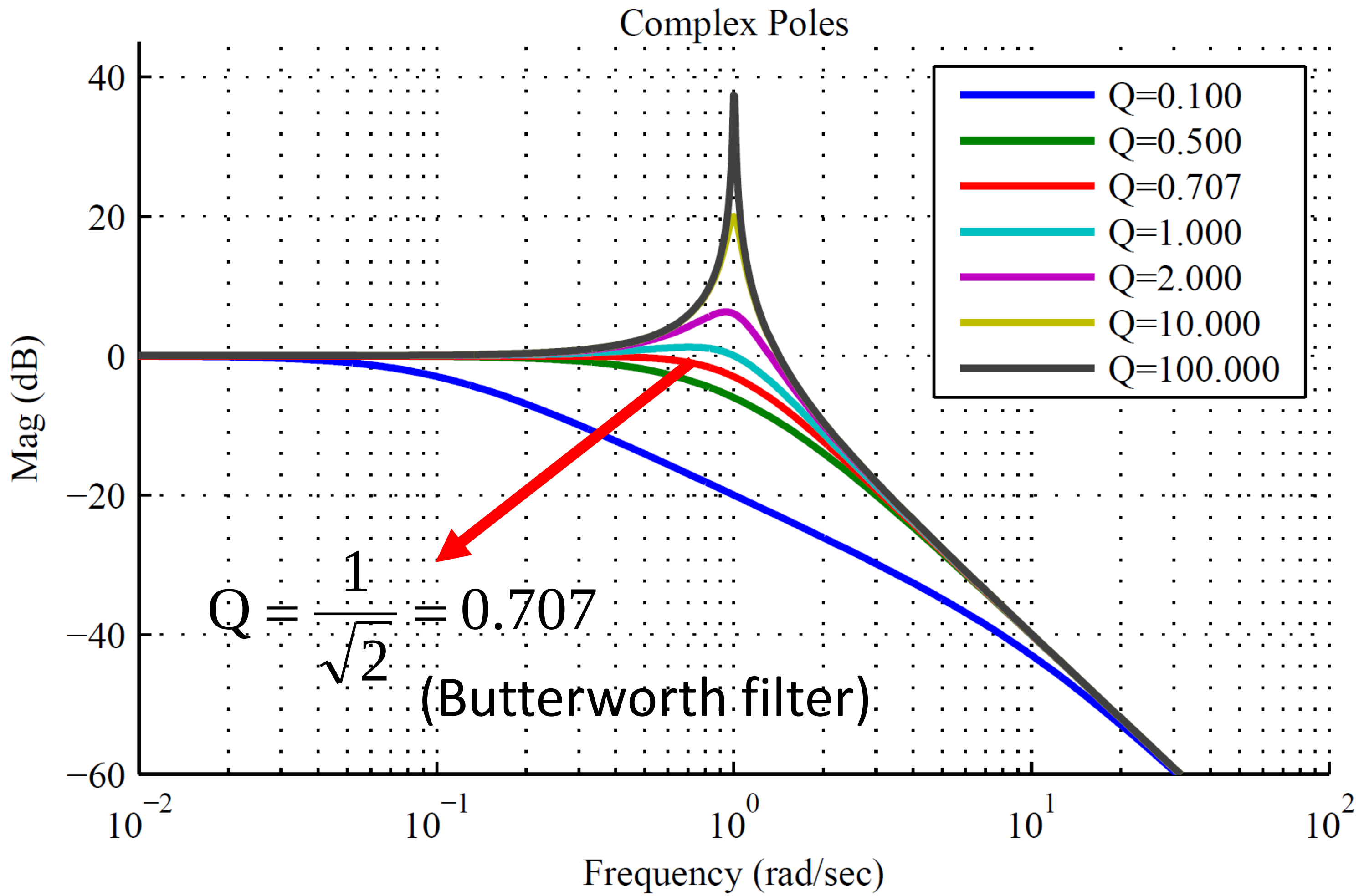


$Q<0.5$



$0.707>Q>0.5$

品质因数



$$H(s)=\frac{K}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$

$Q>0.707$ Peaking

高阶滤波器

- 高阶滤波器导致 阻带变化斜率增大