模拟与数字电路

Analog and Digital Circuits

课程主页 扫一扫

第 十 讲： **Karnaugh Maps and Simplification**

Lecture 10: **卡诺图及其化简**

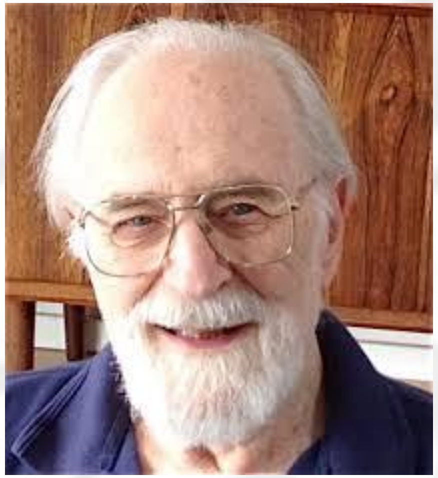
主　　讲： 陈 迟 晓

Instructor : Chixiao Chen

提纲

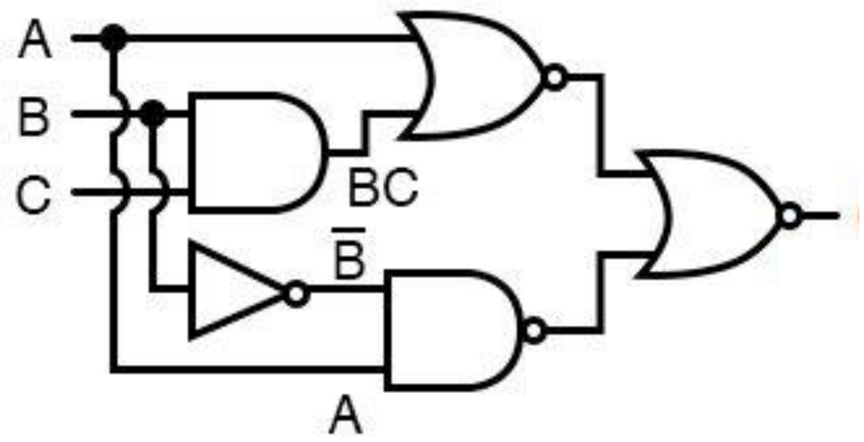
- 复习
  - 什么是demorgan定律?
  - Verilog 的实验课

- 卡诺图
- 卡诺图化简方法与例题
- 组和逻辑



Maurice Karnaugh （1924 - ）
美国知名物理学、数学家

写出下列电路的表达式并化简



$$\overline{\overline{A + BC} + \overline{A\overline{B}}}$$

Breaking longest bar

$$(\overline{\overline{A + BC}})(\overline{\overline{A\overline{B}}})$$

Applying identity $\overline{\overline{A}} = A$ wherever double bars of equal length are found

$$(A + BC)(A\overline{B})$$

Distributive property

$$AA\overline{B} + BCA\overline{B}$$

Applying identity $AA = A$ to left term; applying identity $A\overline{A} = 0$ to B and $\overline{B}$ in right term

$$A\overline{B} + 0$$

Applying identity $A + 0 = A$

$$A\overline{B}$$

从真值表到卡诺图

	W	X	Y	Z	F_{WXYZ}
Minterm – 0	0	0	0	0	0
Minterm – 1	0	0	0	1	1
Minterm – 2	0	0	1	0	1
Minterm – 3	0	0	1	1	0
Minterm – 4	0	1	0	0	1
Minterm – 5	0	1	0	1	1
Minterm – 6	0	1	1	0	0
Minterm – 7	0	1	1	1	1
Minterm – 8	1	0	0	0	0
Minterm – 9	1	0	0	1	0
Minterm – 10	1	0	1	0	1
Minterm – 11	1	0	1	1	0
Minterm – 12	1	1	0	0	1
Minterm – 13	1	1	0	1	0
Minterm – 14	1	1	1	0	1
Minterm – 15	1	1	1	1	1

Four Variable K-Map

	$\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{Y}Z$	YZ	$Y\bar{Z}$
$\bar{W}\bar{X}$	0_{0}	1_{1}	0_{3}	1_{2}
$\bar{W}X$	1_{4}	1_{5}	1_{7}	0_{6}
WX	1_{12}	0_{13}	1_{15}	1_{14}
$W\bar{X}$	0_{8}	0_{9}	0_{11}	1_{10}

- 最小项:包含全部变量的乘积项，且变量仅出现一次
- 卡诺图:将n 变量的全部最小项各用一个小方块表示，并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上也相邻地排列起来，所得图形叫做卡诺图

- 例题:已知Y的真值表，求其卡诺图

A B C	Y
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

A \ BC	00	01	11	10
0				
1				

- 二变量卡诺图

A	B	m_i
0	0	m_0
0	1	m_1
1	0	m_2
1	1	m_3

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

- 三变量卡诺图

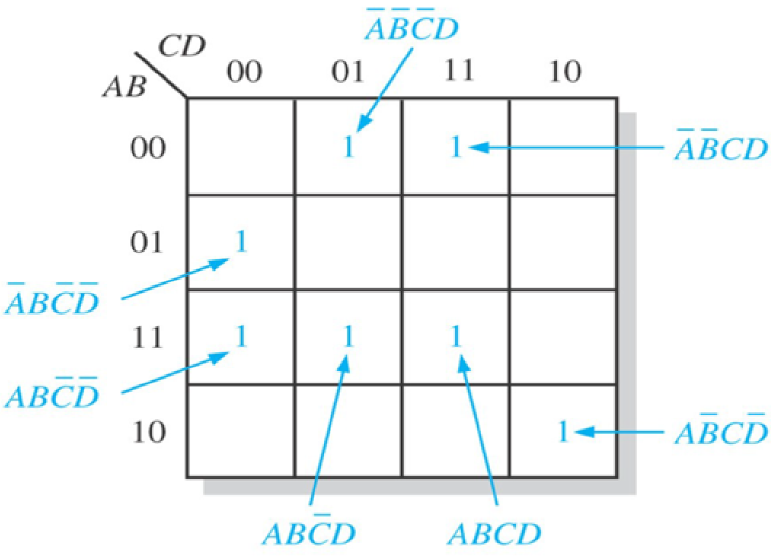
A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

→

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

从SOP表达式到卡诺图

- 乘积项值为1，则在卡诺图对应位置填1
- 例题 $\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+AB\overline{C}D+ABCD+AB\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}$



- 注意此处表达式为标准SOP格式

从SOP表达式到卡诺图

- 非标准SOP表达式 => 卡诺图
- 例题 $\overline{A}+A\overline{B}+AB\overline{C}$

乘积项扩展

$$\overline{A}$$
$$\overline{A}BC=011$$
$$\overline{A}B\overline{C}=010$$
$$\overline{A}\,\overline{B}C=001$$
$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=000$$

$$A\overline{B}$$
$$A\overline{B}C=101$$
$$A\overline{B}\,\overline{C}=100$$

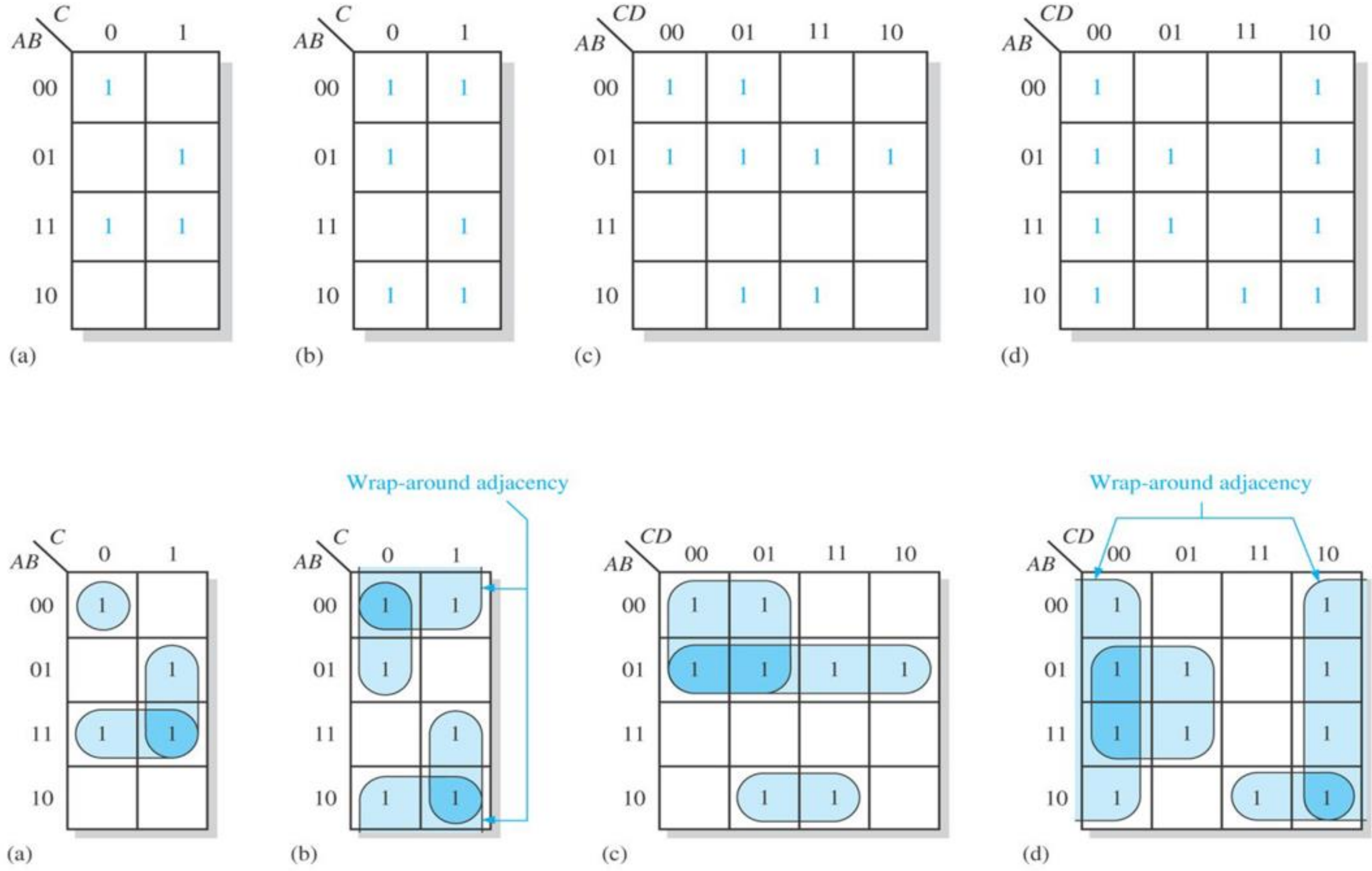
$$AB\overline{C}=110$$

填入卡诺图

AB \ C	0	1
00	1	1
01	1	1
11	1	
10	1	1

卡诺图化简

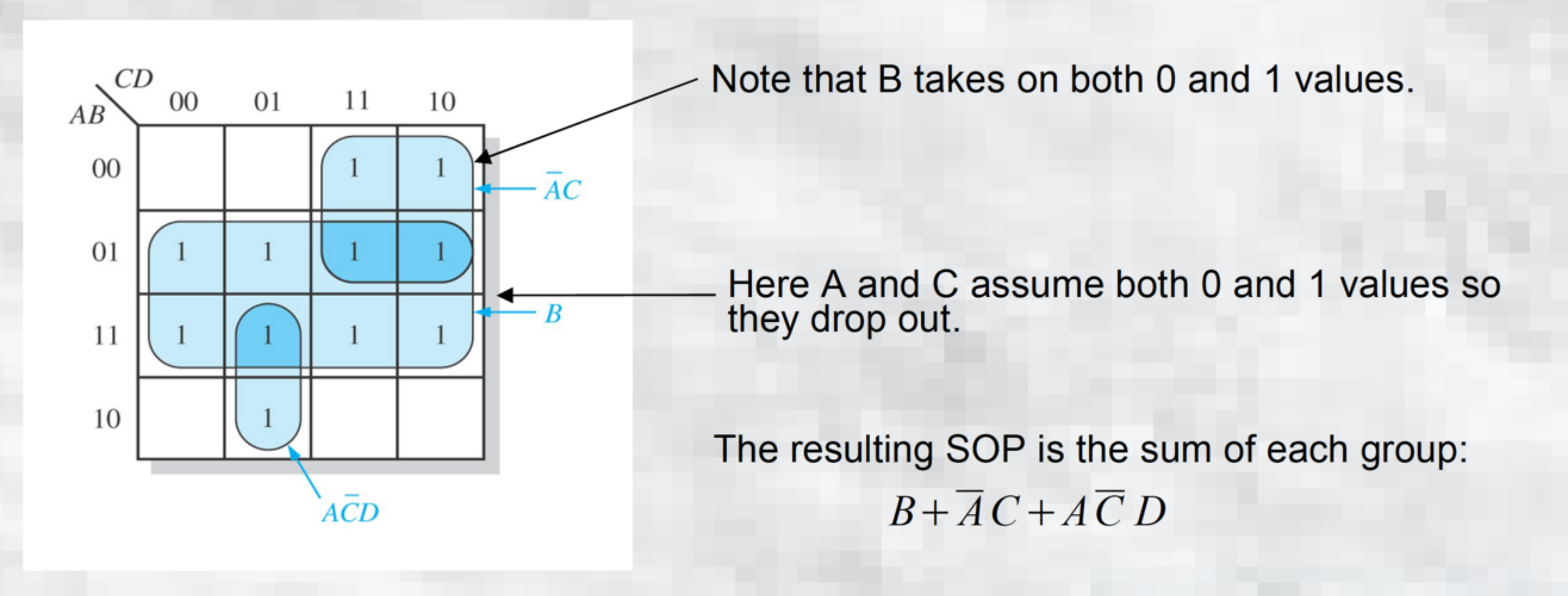
- 例子



C
AB
0
1
00
01
11
10
CD
00
01
11
10
(a)
(b)
(c)
(d)
Wrap-around adjacency
Wrap-around adjacency

卡诺图化简

- 如何得到最简SOP表达式
  - 圈出 1 之后，找出圈内没有改变的变量并保留
  - 一组必须包含1,2,4,8,16...个 1
    - 例: 将如下卡诺图化简为最简SOP表达式

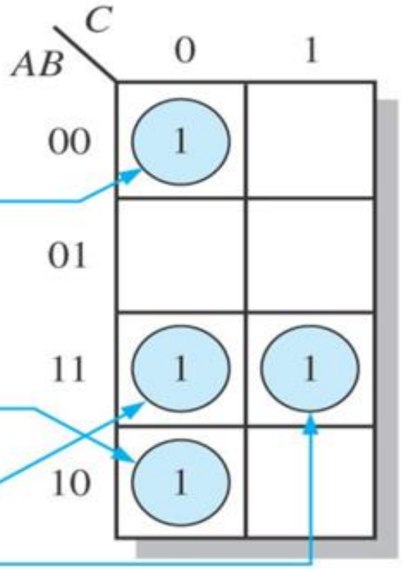


卡诺图化简

- 直接由真值表化简
  - 例:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

Inputs A	B	C	Output X
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



- Don’t care 情形
  - 有时某种变量组合不被允许。这种情况下在卡诺图和真值表中用 “X” 表示

卡诺图化简

（1）任何2个标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去1个变量（消去互为反变量的因子，保留公因子）

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

$$\bar{A}\cancel{\bar{B}}\bar{C} + \bar{A}\cancel{B}\bar{C}$$

$$= \bar{A}\bar{C}(\bar{B} + B)$$

$$\boxed{A\cancel{\bar{B}}C + A\cancel{B}C} = AC \quad = \bar{A}\bar{C}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	0	1	0	0

$$\cancel{\bar{A}}BC\bar{D} + \cancel{A}BC\bar{D}$$

$$= BC\bar{D}$$

$$\cancel{\bar{A}}\bar{B}\bar{C}D + \cancel{A}\bar{B}\bar{C}D = \bar{B}\bar{C}D$$

卡诺图化简

（2）任何4个标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去2个变量

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	1	0

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+\bar{A}B\bar{C}$$
$$=(\bar{B}\bar{C}+\bar{B}C+BC+B\bar{C})\bar{A}$$
$$=[\bar{B}(\bar{C}+C)+B(C+\bar{C})]\bar{A}$$
$$=\bar{A}$$

$$\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}C+ABC$$
$$=(\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+A\bar{B}+AB)C$$
$$=[\bar{A}(\bar{B}+B)+A(\bar{B}+B)]C$$
$$=C$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	0	0

$\bar{A}B$

$\bar{C}D$

BD

卡诺图化简

（3）任何8个标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去3个变量

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

B

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$\overline{D}$

卡诺图化简原则

- 卡诺图尽可能圈大，先圈大后圈小
- 每个圈只能含有2^n个相邻项。要特别注意对边相邻性和四角相邻性
- 圈的个数尽量少
- 卡诺图中所有取值为1的方格都要被圈过，即不能漏掉取值为1的最小项
- 将每一个圈对应的与项进行逻辑加，即得到与或表达式。

例题

【例1】用卡诺图化简逻辑函数

$F(A, B, C)=\sum(1, 2, 3, 6, 7)$的最简与或表达式。

解: 1.画出函数F的三变量卡诺图。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

2.把函数F表达中出现的最小项，在卡诺图对应小方格中填上1，其余方格填0(常不填)。

$F(A, B, C)=\sum(1, 2, 3, 6, 7)$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1 (1)	1 (3)	1 (2)
1	4	5	1 (7)	1 (6)

$\bar{A}C$ B

3.合并最小项。

圈卡诺圈

4.写与或表达式

$F(A, B, C)=\sum(1, 2, 3, 6, 7)=\bar{A}C+B$

例题

【例2】用卡诺图化简函数

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}\,\overline{B}CD+A\overline{B}\,\overline{C}D+AB\overline{C}D+A\overline{B}CD$$

解:根据最小项

的编号规则,可知

$F=m_3+m_9+m_{11}+m_{13}$。

得卡诺图。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1 3	2
01	4	5	7	6
11	12	1 13	15	14
10	8	1 9	1 11	10

$$F=A\overline{C}D+\overline{B}CD$$

例题

例: $Y = AB\bar{D} + \bar{D} + \bar{A}DBC + \bar{A}C + \bar{B}C$

$= \bar{D} + \bar{A}C + \bar{B}C$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	1	1
11	1	0	0	1
10	1	0	1	1

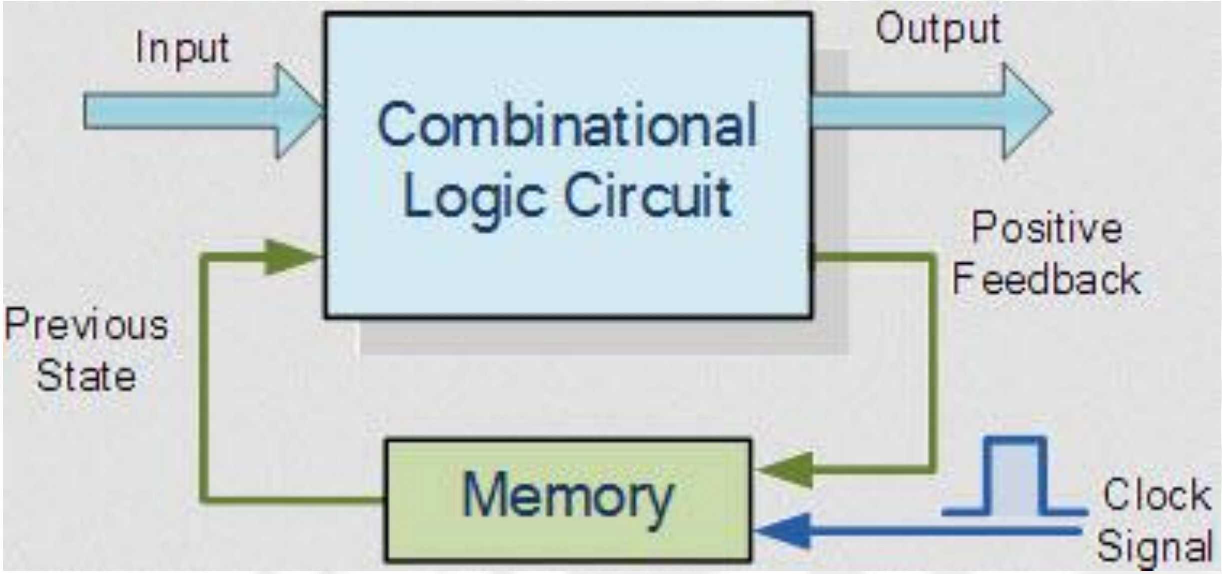
$\bar{B}C$

$\bar{A}C$

$\bar{D}$

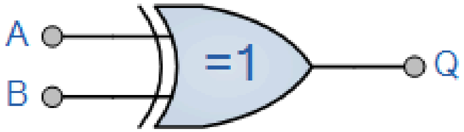
组和逻辑 Combinational Logic

- **定义：任一时刻的输出状态只取决于该时刻的输入状态的组合，而与电路的以前状态无关。** 电路只是由门电路组成，没有记忆单元，也没有反馈电路。

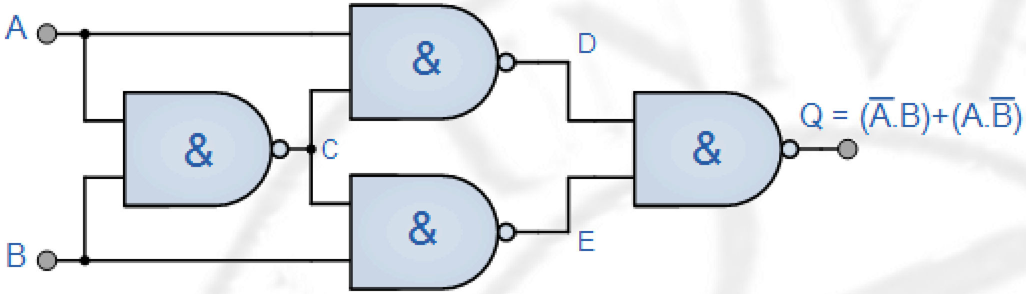


Exclusive-OR Gate

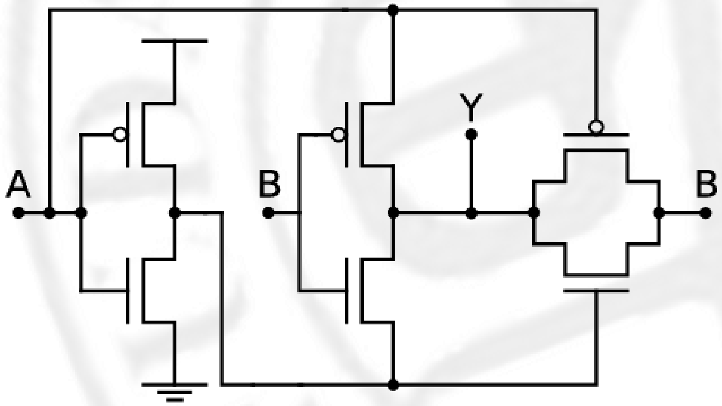
- 真值表

Symbol	Truth Table		
	B	A	Q
 2-input Ex-OR Gate	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0
Boolean Expression Q = A ⊕ B	A OR B but NOT BOTH gives Q		

- 基于SOP/CMOS的表达式



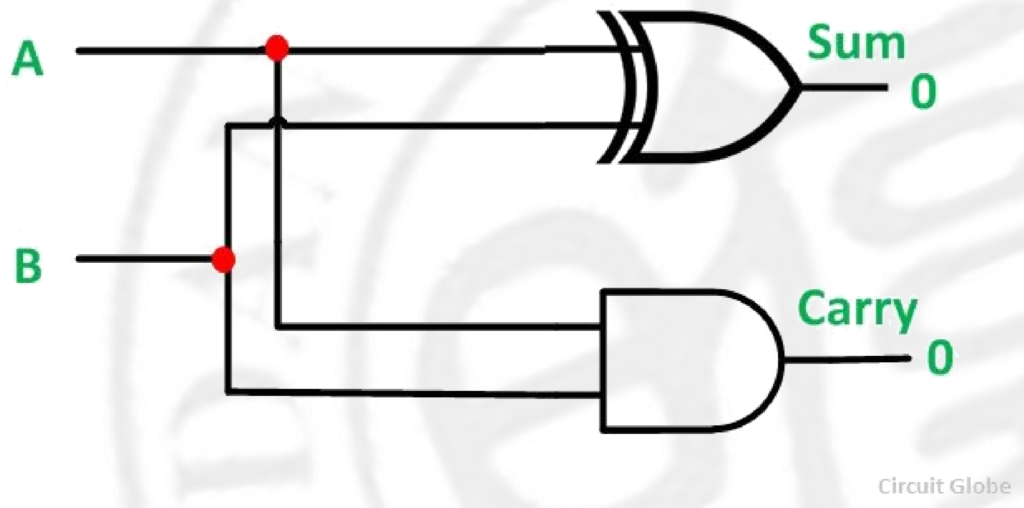
- 非CMOS电路的XOR实现



半加器 Half Adder

- 两个1bit 输入， 一个2bit 输入出的无符号加法器

Truth Table			
Input		Output	
A	B	Sum	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



Two Bit Adder (continued)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

X

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	1
11	1	0	1	0
10	1	1	0	0

Y

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

Z

1's on diagonal suggest XOR!
Y K-Map not minimal as drawn

X = A C + B C D + A B D

Z = B D' + B' D = B xor D

Y = A' B' C + A B' C' + A' B C' D + A' B C D' + A B C' D' + A B C D

= B' (A xor C) + A' B (C xor D) + A B (C xnor D)

= B' (A xor C) + B (A xor B xor C)

gate count reduced if XOR available

问题：

如果输入位宽越来越宽？是否仍然使用卡诺图进行优化？

答案： NO