模拟与数字电路

Analog and Digital Circuits

课程主页 扫一扫

第 四 讲： **布尔代数的化简，译码，编码**

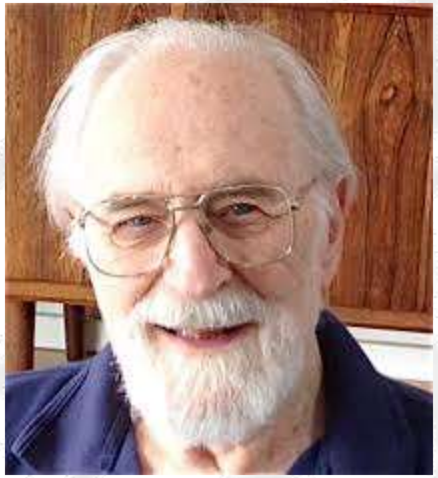
Lecture 4: **Boolean Logic and Simplification**

主　　讲： 陈 迟 晓

Instructor : Chixiao Chen

提纲

- 复习
  - 见0得0，与见1得1，分别是什么逻辑门？
  - 什么是demorgan定律？
- 布尔代数的公式化简法
- 布尔代数的一般表达式
- 译码器与编码器
- 卡诺图

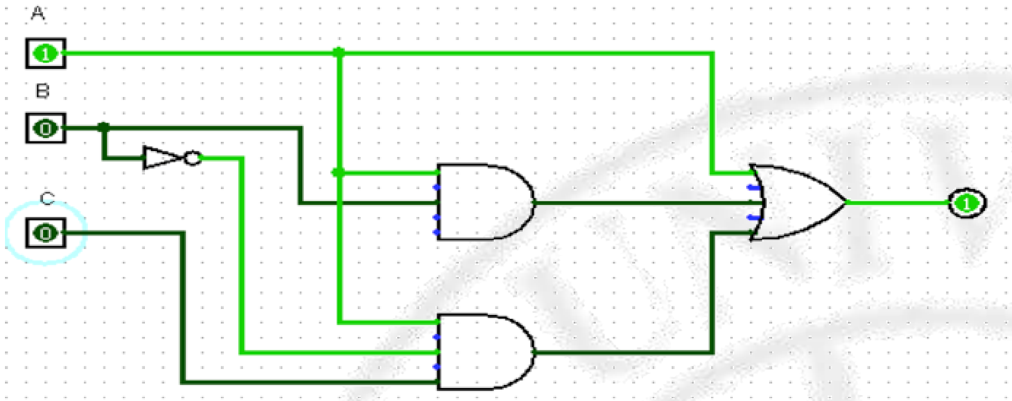


Maurice Karnaugh （1924 - ）
美国知名物理学、数学家

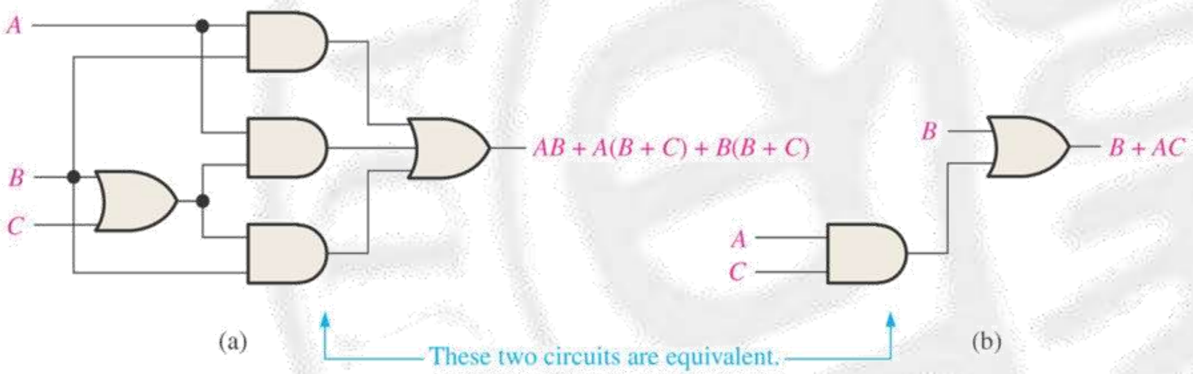
布尔代数化简例题-i

- 化简 $A + AB + A\bar{B}C$
- $\rightarrow A + A\bar{B}C$
- $\rightarrow A$

$A + AB = A$



- 化简 $AB + A(B + C) + B(B + C)$
- $\rightarrow AB + AB + AC + BB + BC$
- $\rightarrow AB + AC + B + BC$
- $\rightarrow AB + B + AC$
- $\rightarrow B + AC$



布尔代数化简例题-i

- 化简　$ABC + A\bar{B} + A\bar{C}$
- $\rightarrow ABC + A(\bar{B} + \bar{C})$
- $\rightarrow ABC + A\overline{BC}$
- $\rightarrow A(BC + \overline{BC})$
- $\rightarrow A$

- 根据公式 $A + A = A$,为某项配上其所能合并的项

$$Y = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$$
$$= (ABC + AB\overline{C}) + (ABC + A\overline{B}C) + (ABC + \overline{A}BC)$$
$$= AB(C + \overline{C}) + AC(B + \overline{B}) + BC(A + \overline{A})$$
$$= AB + AC + BC$$

布尔代数化简例题

将$Y=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$

化简为最简与或式。

$$Y=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$$

$$=\bar{A}B(\bar{C}+C)+A\bar{B}C+AB(\bar{C}+C)$$

$$=\bar{A}B+A\bar{B}C+AB$$ 利用$\bar{C}+C=1$

$$=(\bar{A}+A)B+A\bar{B}C$$

$$=B+\bar{B}AC$$ 利用$\bar{A}+AB=A+B$

$$=B+AC$$

将Y化简为最简与或式。

$$Y=A\bar{B}+(\bar{A}+B)CD$$

解：$Y=A\bar{B}+(\bar{A}+B)CD$ ；$A=\bar{\bar{A}}$

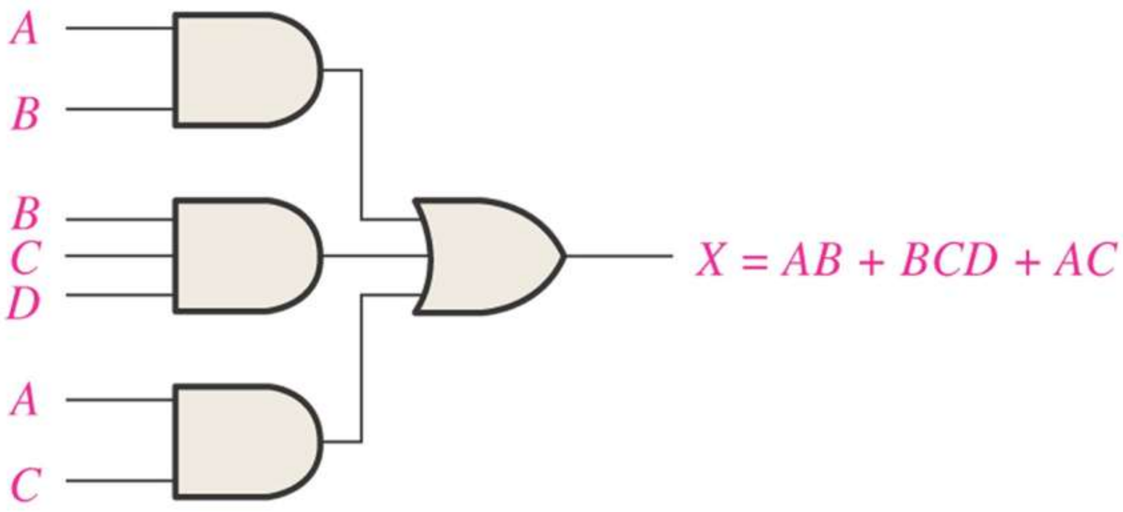
$$=A\bar{B}+\overline{\overline{(\bar{A}+B)}}CD$$;利用摩根定理

$$=A\bar{B}+\overline{A\bar{B}}\,CD$$;将$A\bar{B}$当成一个变量，

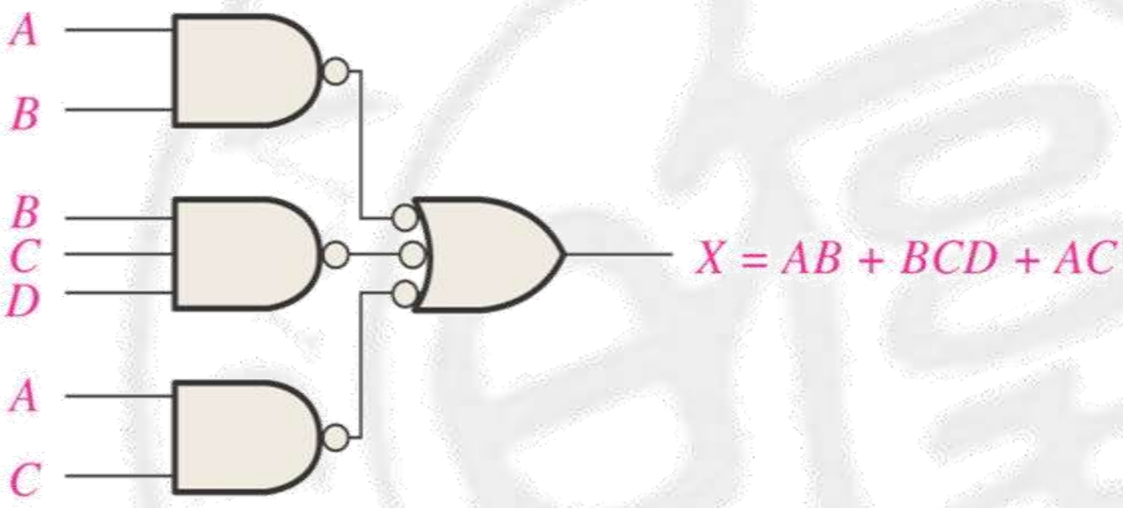
$$=A\bar{B}+CD$$ 利用公式$A+\bar{A}B=A+B$

布尔代数的一般表达：SOP及其电路实现

- SOP(Sum-of-Product) Form
  - e.g. $AB + ABC, ABC + CDE + \bar{B}CD$
  - SOC表达式的AND/OR实现



AND/OR实现



NAND/NOR实现

SOP表达法及其电路

- 将一般表达式转化为SOP形式
  - e.g. AB + B(CD + EF) → AB + BCD +BEF
- 标准SOP形式
  - 所有变量都要出现在表达式中
  - e.g. $A\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}CD$
  - $A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + AB\bar{C}D$转化为标准SOP形式

↓

$$A\bar{B}C = A\bar{B}C(D+\bar{D}) = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$$

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B}(C+\bar{C}) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}C(D+\bar{D}) + \bar{A}\bar{B}\bar{C}(D+\bar{D}) = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + AB\bar{C}D = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D$$

真值表与SOP表达法

- 将SOP表达式转化为真值表
  - e.g. 求表达式$\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C$ 的真值表

Inputs			Output	Product Term
A	B	C	X	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\bar{B}C$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

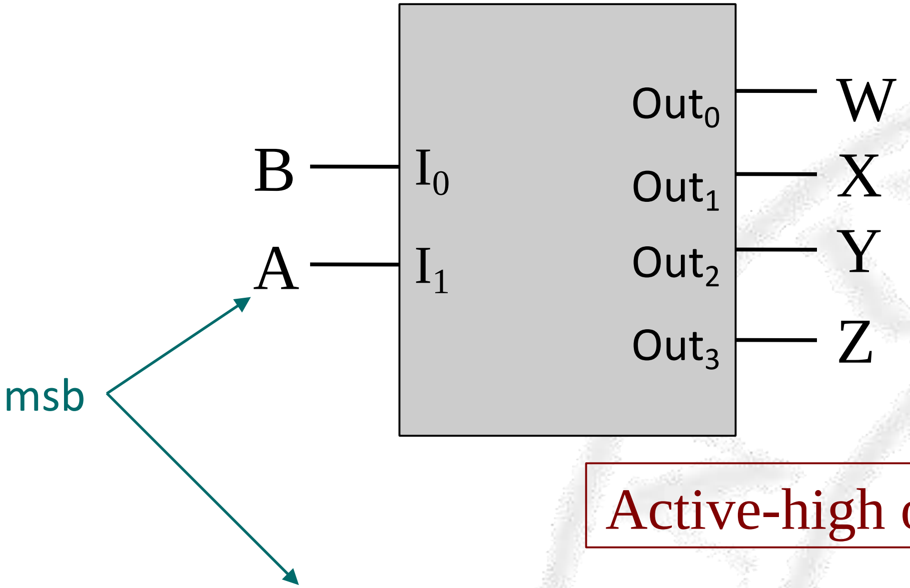
真值表与SOP表达法(例题)

- 举重比赛A、B、C三个裁判，判杠铃完全举起为成功。按一下按钮，只有当两个或两个以上裁判判断成功才表明成功，表决电路灯亮。

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

译码器 Decoder

- A decoder has
  - N inputs
  - 2^N outputs



$W = A'.B'$

$X = A.B'$

$Y = A'.B$

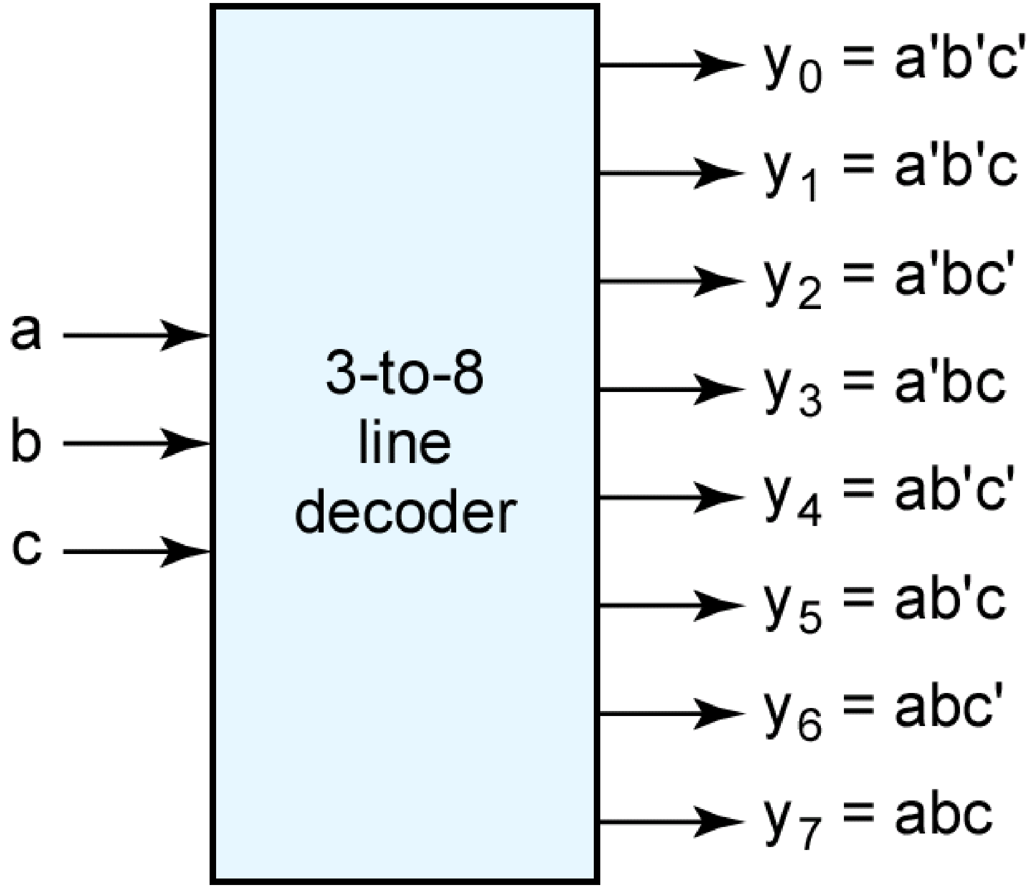
$Z = A.B$

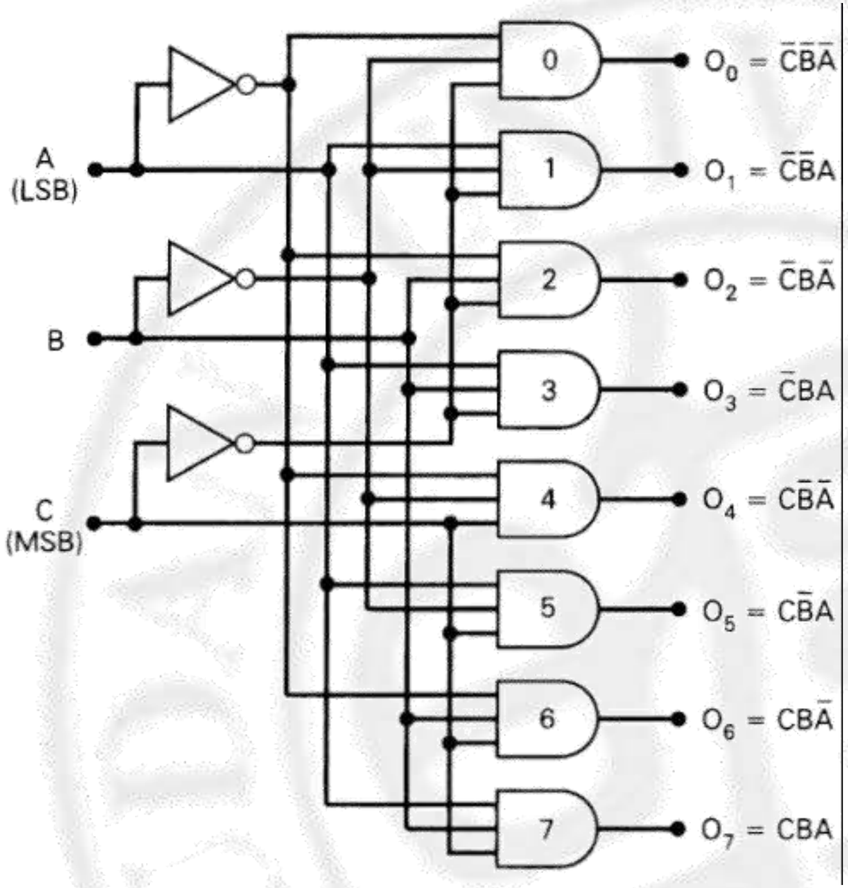
Active-high outputs

- A decoder selects one of 2^N outputs （one-hot，独热码） by decoding the binary value on the N inputs.

A	B	**W**	**X**	**Y**	**Z**
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

3-8 line decoder （3-8译码器）

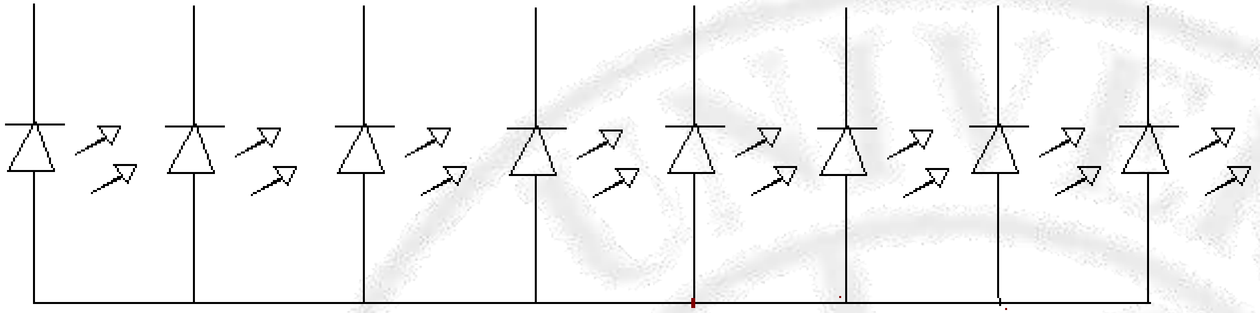


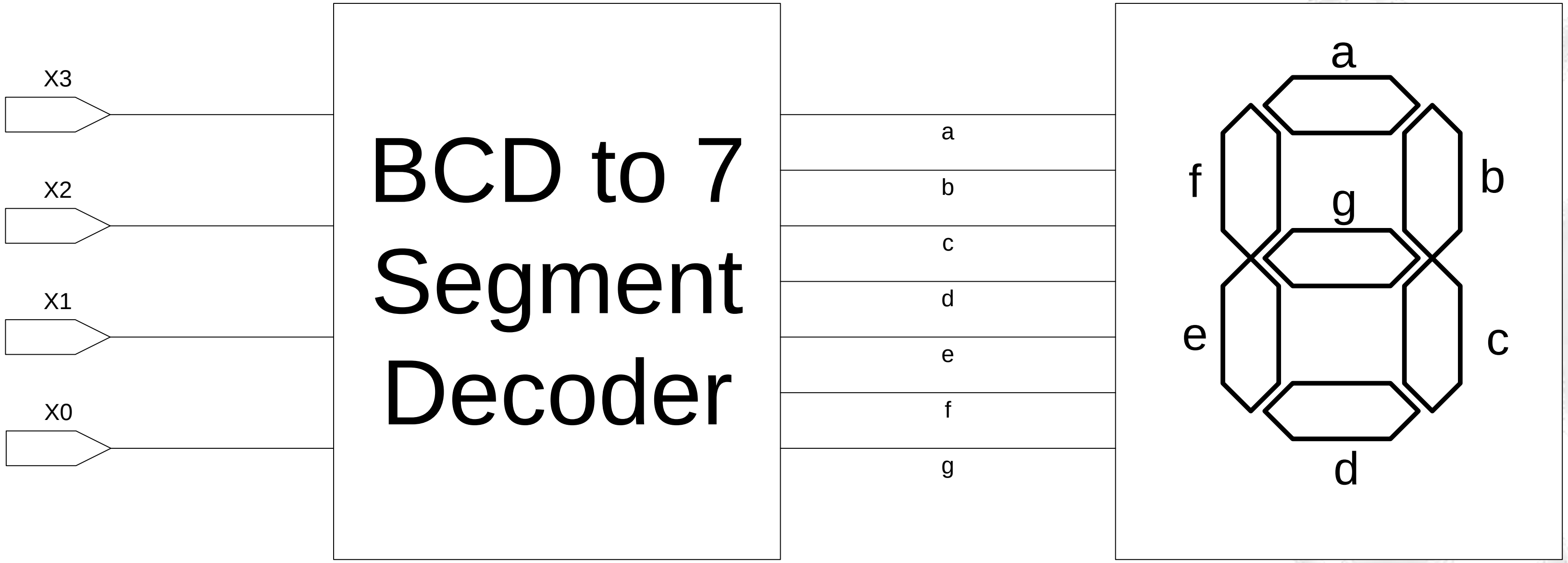


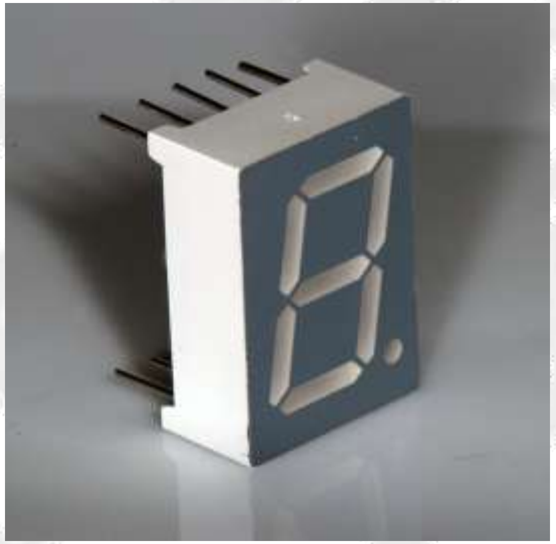
注：左图与右图的msb顺序相反

BCD-7段显示译码器

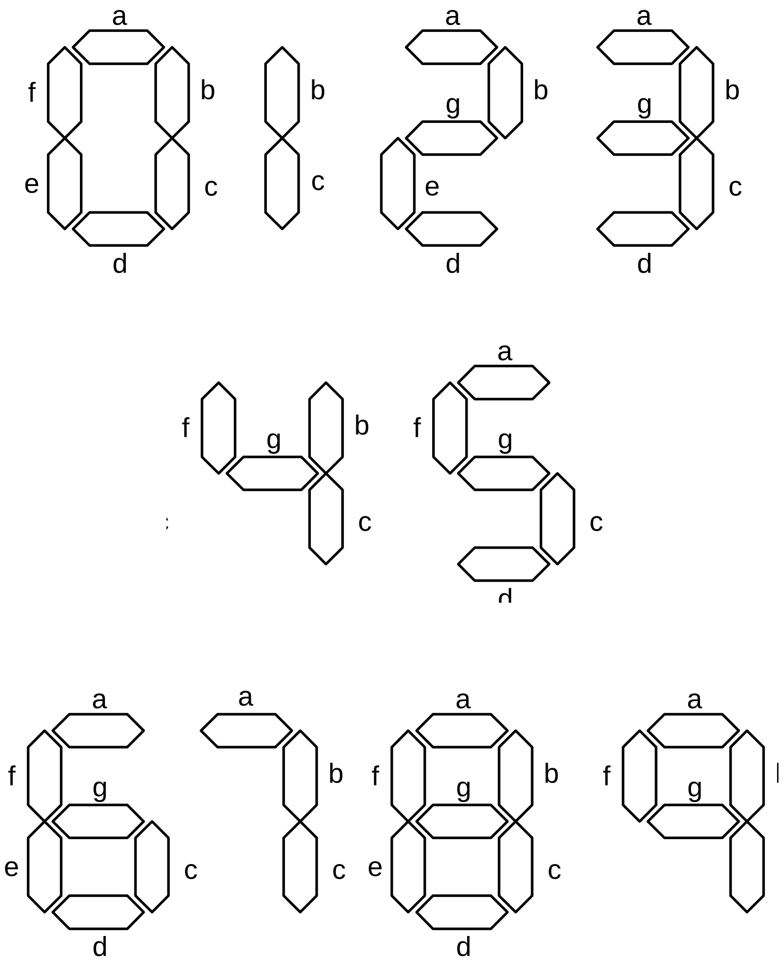
- BCD=Binary coded decimal
- 7段显示，共同端接电源







BCD-7段显示译码器



Digit	A	B	C	D	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
5	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0

BCD-7段显示译码器

$a = A + C + BD + \overline{B}\,\overline{D}$

$b = \overline{B} + \overline{C}\,\overline{D} + CD$

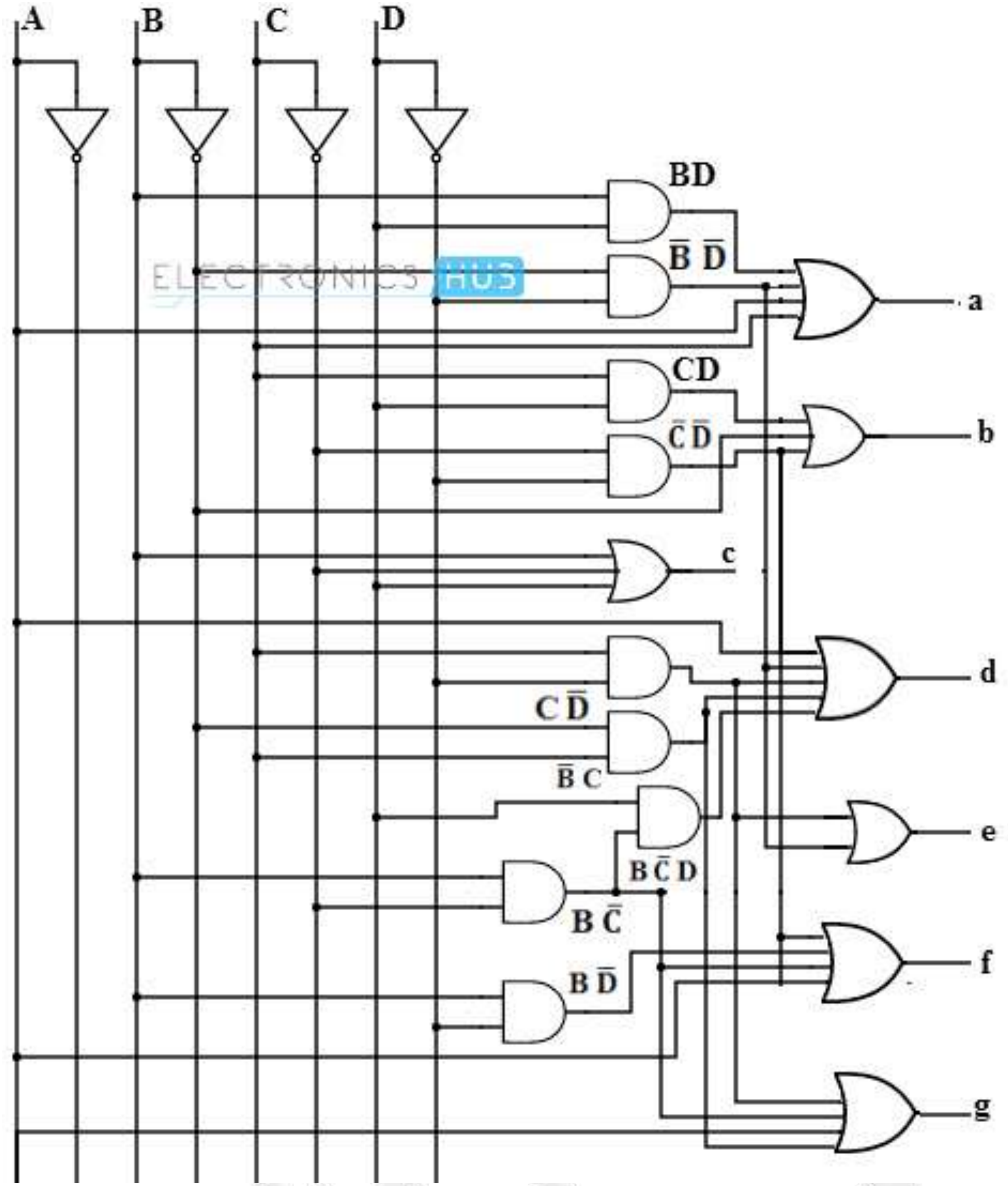
$c = B + \overline{C} + D$

$d = \overline{B}\,\overline{D} + C\overline{D} + B\overline{C}D + \overline{B}C + A$

$e = \overline{B}\,\overline{D} + C\overline{D}$

$f = A + \overline{C}\,\overline{D} + B\overline{C} + B\overline{D}$

$g = A + B\overline{C} + \overline{B}C + C\overline{D}$

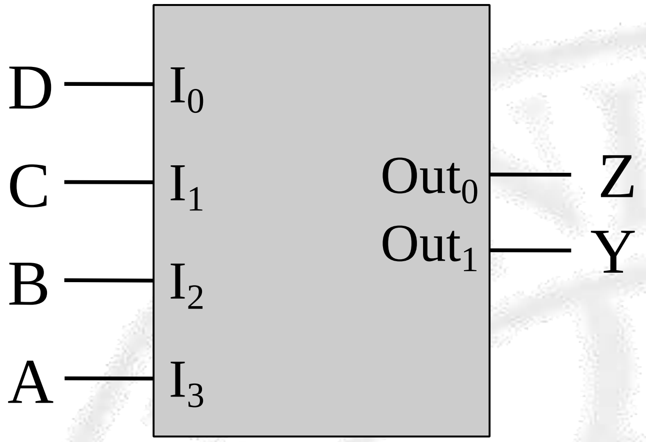


基于译码器的逻辑表达

- 译码器的结果可以与真值表一一对应
- 用译码器函数与SoP表达式联合，可以表达任意逻辑
  - 将输出为高的部分穷举
- 举例：
- 基于3-8线译码器的3输入逻辑表达：$F(A,B,C) = \Sigma m(2, 3, 5, 6, 7)$

编码器

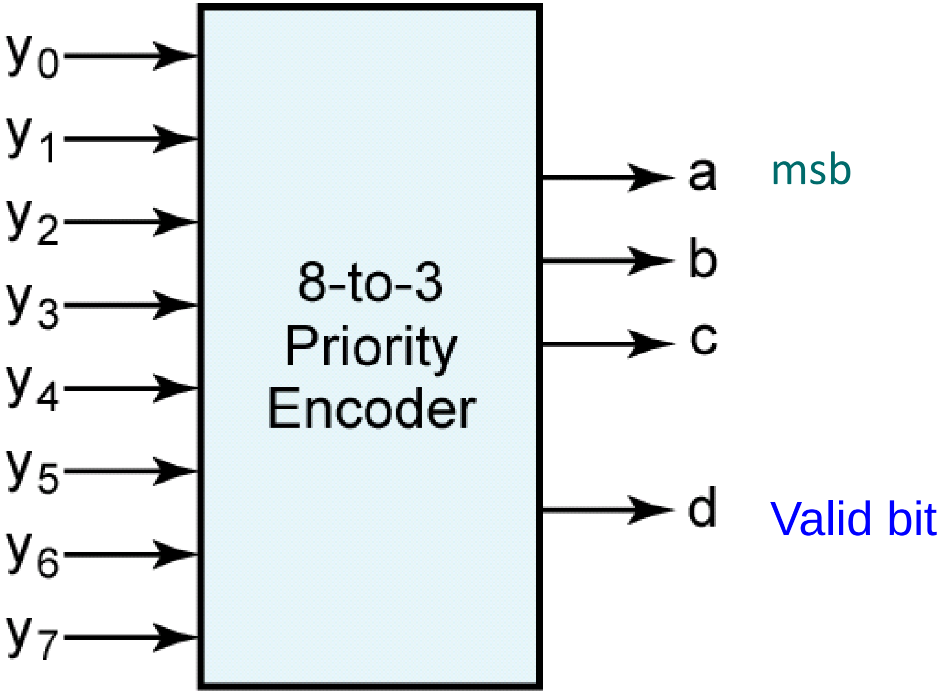
- An encoder has
  - 2^N inputs
  - N outputs
- An encoder outputs the binary value of the selected (or active) input.
- An encoder performs the inverse operation of a decoder.
- Is all input valid?



A	B	C	D	**Y**	**Z**
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1

优先编码器

- 允许所有的输入编码模式，但是仅根据优先级编码



y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
X	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
X	X	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
X	X	X	1	0	0	0	0	0	1	1	1
X	X	X	X	1	0	0	0	1	0	0	1
X	X	X	X	X	1	0	0	1	0	1	1
X	X	X	X	X	X	1	0	1	1	0	1
X	X	X	X	X	X	X	1	1	1	1	1

在有X的条件下，如何完成逻辑化简？

从真值表到卡诺图

	W	X	Y	Z	F_{WXYZ}
Minterm – 0	0	0	0	0	0
Minterm – 1	0	0	0	1	1
Minterm – 2	0	0	1	0	1
Minterm – 3	0	0	1	1	0
Minterm – 4	0	1	0	0	1
Minterm – 5	0	1	0	1	1
Minterm – 6	0	1	1	0	0
Minterm – 7	0	1	1	1	1
Minterm – 8	1	0	0	0	0
Minterm – 9	1	0	0	1	0
Minterm – 10	1	0	1	0	1
Minterm – 11	1	0	1	1	0
Minterm – 12	1	1	0	0	1
Minterm – 13	1	1	0	1	0
Minterm – 14	1	1	1	0	1
Minterm – 15	1	1	1	1	1

Four Variable K-Map

	$\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{Y}Z$	YZ	$Y\bar{Z}$
$\bar{W}\bar{X}$	0_{0}	1_{1}	0_{3}	1_{2}
$\bar{W}X$	1_{4}	1_{5}	1_{7}	0_{6}
WX	1_{12}	0_{13}	1_{15}	1_{14}
$W\bar{X}$	0_{8}	0_{9}	0_{11}	1_{10}

- 最小项:包含全部变量的乘积项，且变量仅出现一次
- 卡诺图:将n 变量的全部最小项各用一个小方块表示，并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上也相邻地排列起来，所得图形叫做卡诺图

• 例题:已知Y的真值表，求其卡诺图

A B C	Y
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

A \ BC	00	01	11	10
0				
1				

- 二变量卡诺图

A	B	m_i
0	0	m_0
0	1	m_1
1	0	m_2
1	1	m_3

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

- 三变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

→

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6