模拟与数字电路

Analog and Digital Circuits

课程主页 扫一扫

第 十 八 讲：**频域变换与波特图**

Lecture 18: **Frequency Domain，Bode Plot**

主　　讲：陈 迟 晓

Instructor ： Chixiao Chen

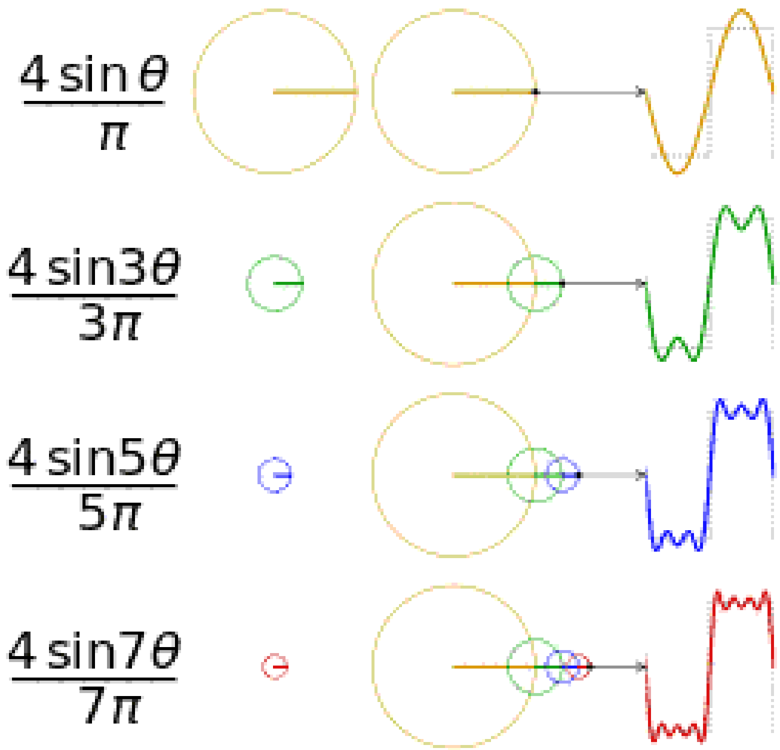
提纲

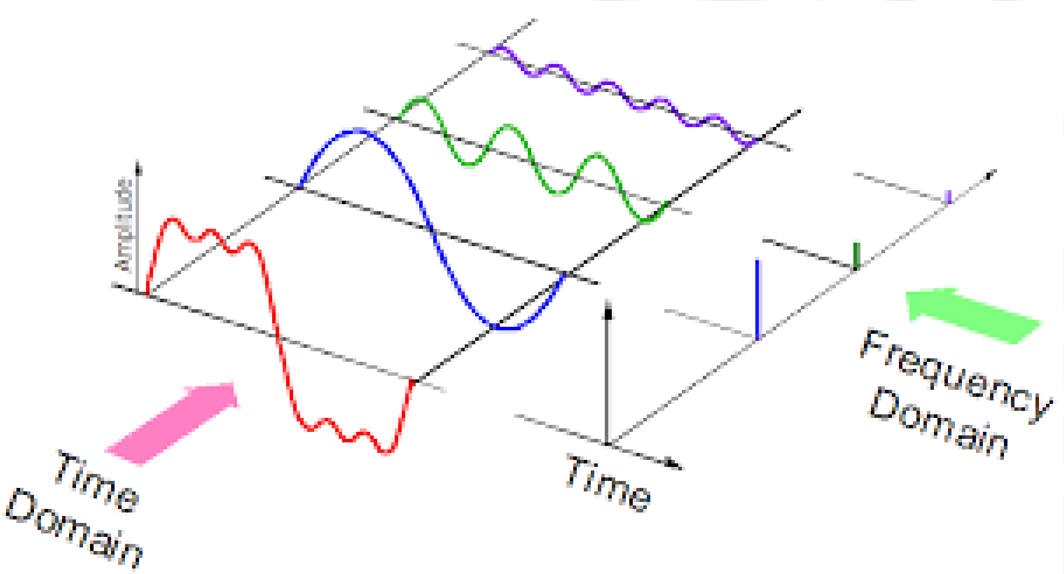
- 复习
  - 为什么要使用差分电路?

  - 傅里叶变化与拉普拉斯变化
  - 利用Laplace完成同步时序电路
  - 线性时不变系统
  - 累加电路

傅里叶级数，傅里叶变换

- 傅里叶级数的经典例子，用sin合成一个矩形波：





随着sin函数的个数增加，它们叠加而成的波形会越来越接近矩形波。完全叠加出一个矩形波需要无穷多个sin函数，也就是说这是个无穷级数。

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

非周期信号的傅里叶变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}dt$$

信号的拉普拉斯变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

非周期信号的傅里叶逆变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

信号的拉普拉斯变换逆变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{\sigma t}e^{j\omega t}d\omega$$

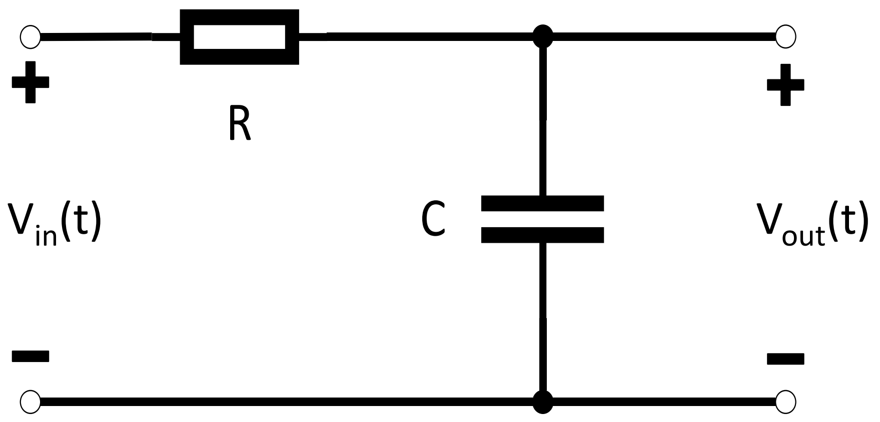
- 傅里叶变换，是将函数f(t)变换成了$e^{j\omega t}\,d\omega$的线性组合。（虚数）
- 拉普拉斯变换，是将f(t)变换成了$e^{st}\,d\omega$的线性组合（完整复平面$s=\sigma+j\omega$）
- 傅里叶变换需要原函数满足狄里赫利条件，而拉普拉斯变换的适用范围更广。（拉普拉斯变换有一个衰减因子$e^{-\sigma t}$，因此更容易收敛）

Laplace变换的积分、微分特性

Operation	$x(t)$	$X(s)$
Addition	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(s) + X_2(s)$
Scalar multiplication	$kx(t)$	$kX(s)$
Time differentiation	$\dfrac{dx}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$
	$\dfrac{d^2x}{dt^2}$	$s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)$
	$\dfrac{d^3x}{dt^3}$	$s^3X(s) - s^2x(0^-) - s\dot{x}(0^-) - \ddot{x}(0^-)$
	$\dfrac{d^nx}{dt^n}$	$s^nX(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}x^{(k-1)}(0^-)$
Time integration	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{1}{s}X(s)$
	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{1}{s}X(s) + \dfrac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(t)\,dt$

典型无源器件的s域表现形式

大部分的物理系统都可以用微分方程描述。例如一个如图所示的RC网络可描述为:



$$C \cdot \frac{dV_{out}(t)}{dt} + \frac{1}{R} \cdot V_{out}(t) = \frac{1}{R} \cdot V_{in}(t)$$

- *iv*-relation in the time domain

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} v(t).$$

- By operational Laplace transform:

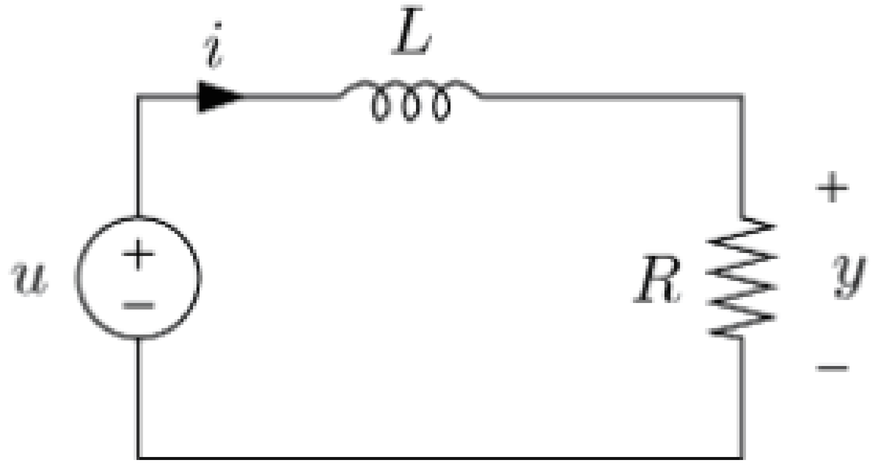
$$L\{i(t)\} = L\{C \cdot v'(t)\} = C \cdot L\{v'(t)\},$$

$$\Rightarrow I(s) = C \cdot [sV(s) - V_0] = sC \cdot V(s) - CV_0.$$

initial voltage

典型无源器件的s域表现形式

大部分的物理系统都可以用微分方程描述。例如一个如图所示的RL网络可描述为:



take Laplace transforms to get

$$-U + L(sI - i(0)) + Y = 0, \quad Y = RI$$

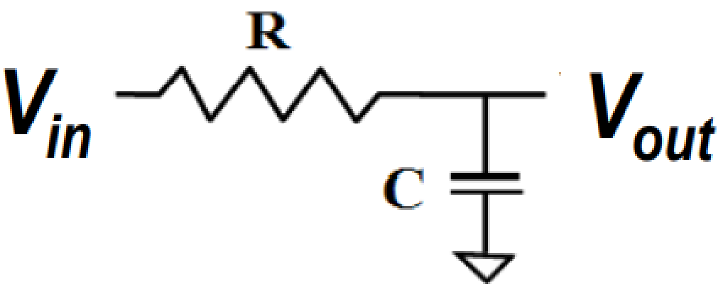
solve for Y to get

$$Y = \frac{U + Li(0)}{1 + sL/R} = \frac{1}{1 + sL/R}U + \frac{L}{1 + sL/R}i(0)$$

KCL, KVL, and branch relations yield: $-u + Li' + y = 0,\ y = Ri$

利用Laplace变化解决复杂计算

- 当一个电路中包含电感或者电容，那么这个电路在输入不同频率的正弦信号时，会表现出不同的特性。
- 对于一个常见的线性电路，输入如果是一个正弦波，输出一定是一个频率与之相同的正弦波。那么我们只要知道输入与输出之间的幅度、相位关系，就可以表示出电路的特性。



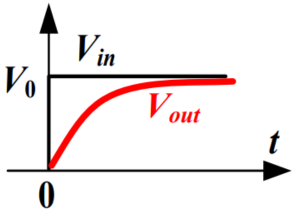
时域分析

微分方程：

$$\frac{V_{in}-V_{out}}{R}=C\frac{dV_{out}}{dt}$$

解方程得到：

$$V_{out}=V_0(1-e^{-t/RC})$$



频域分析

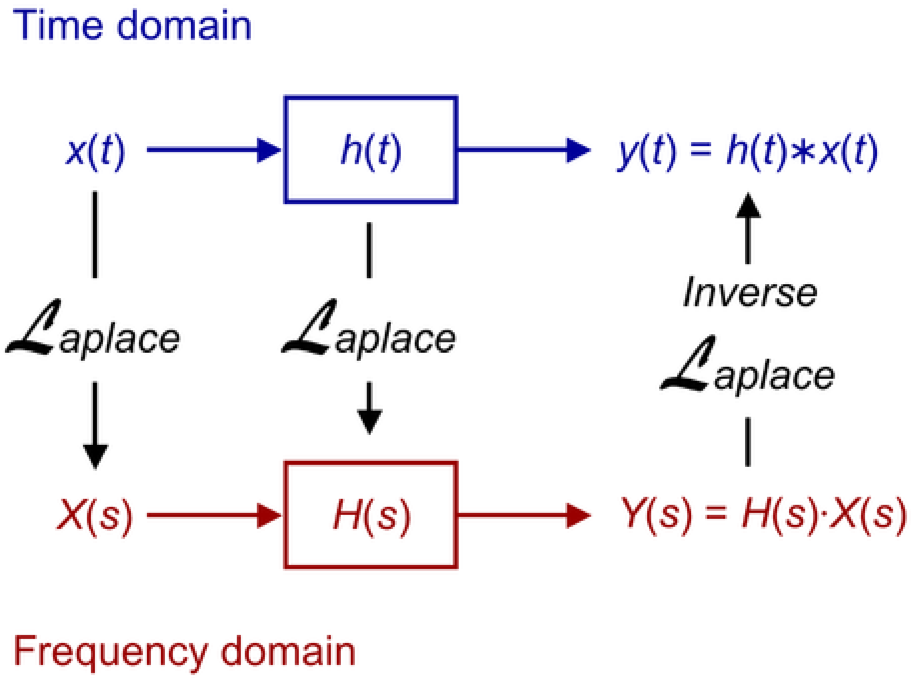
根据串联分压得到：

$$H(s)=\frac{V_{out}}{V_{in}}(s)=\frac{1/(sC)}{R+1/(sC)}=\frac{1}{1+sRC}=\frac{1}{1+s/\omega_p}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_p)^2}}=\frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2+\omega^2}}$$

$$\angle H(j\omega)=\arctan(-\frac{\omega}{\omega_p})$$

利用Laplace解决复杂计算



Angular frequency ω	Z	Y
Resistor	R	$G=\frac{1}{R}$
Capacitor	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$
Inductor	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$

线性时不变系统

- 该方程具有两个特征：
  1. 线性：即一个对于一个输入V_{in}=K_1V_{in1}+K_2V_{in2} (K_1、K_2为常数)产生的输出V_{out}，相当于将两个输入V_{in1}、V_{in2}分别输入这个系统得到的输出V_{out1}、V_{out2}的线性叠加K_1V_{out1}+K_2V_{out2}。

$$\left.\begin{aligned} C\cdot\frac{dV_{out1}(t)}{dt}+\frac{1}{R}\cdot V_{out1}(t)=\frac{1}{R}\cdot V_{in1}(t) \\ \\ C\cdot\frac{dV_{out2}(t)}{dt}+\frac{1}{R}\cdot V_{out2}(t)=\frac{1}{R}\cdot V_{in2}(t) \end{aligned}\right\} C\cdot\frac{dV_{out}(t)}{dt}+\frac{1}{R}\cdot V_{out}(t)=\frac{1}{R}\cdot V_{in}(t)$$

  2. 时不变：任意时刻的输出之与**当前时刻**的输入和**当前**系统的状态有关。简单的说就是方程中只有X(t)、Y(t)这种变量，没有X(t+θ)、Y(t+θ)这种变量(θ ≠0)。

线性时不变系统

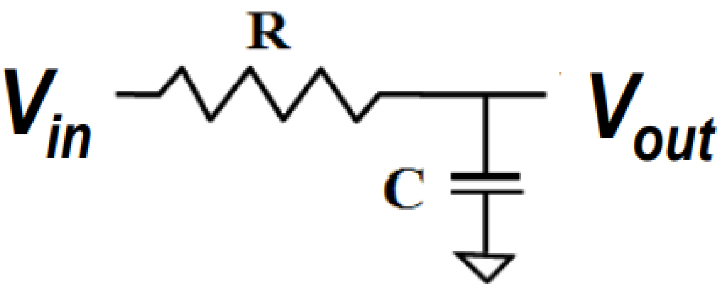
- 数学模型满足这两个特征的物理系统，我们称之为线性时不变系统。
- 对于这样一个系统，我们除了可以用微分模型进行描述，还可以将方程转换成另一种形式：把输入信号分解成基本信号的线性组合，只要得到了线性时不变系统对基本信号的响应，就可以利用系统的线性特性，将系统对任意输入信号产生的响应表示成系统对基本信号的响应的线性组合。
- 那么根据傅里叶的表述：任一函数都可以展成三角函数的无穷级数。那么任意的输入信号，也就可以拆分成正弦波的叠加。只要分析清楚线性时不变系统对正弦波的响应，就可以得到该系统对任意输入信号的响应。

频域

- 如果我们将输入信号表示成：$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$，则相当于把输入信号变成了$e^{j\omega t}$的线性叠加，我们称为将时域信号$x(t)$转换为了频域信号$X(j\omega)$。
- 这样做的好处是，一个可以用微分方程描述的系统，对于$e^{j\omega t}$的响应一定是$H(j\omega)e^{j\omega t}$的形式。我们分析时只要考虑系数$H(j\omega)$与ω之间的关系即可。（或者$H(j\omega)$也可以写成$H(s)$，电路中我们并不严格区分$j\omega$和s，本质上s是可以有实部的）
- 电容C在频域中可以表示为一个阻值为$\frac{1}{j\omega C}$的“电阻”，而电感L可以表示为$j\omega L$的形式。这样电容与电感两端的电压与电流也可以写成类似于欧姆定律的形式。

频率响应

- 当一个电路中包含电感或者电容，那么这个电路在输入不同频率的正弦信号时，会表现出不同的特性。
- 对于一个常见的线性电路，输入如果是一个正弦波，输出一定是一个频率与之相同的正弦波。那么我们只要知道输入与输出之间的幅度、相位关系，就可以表示出电路的特性。



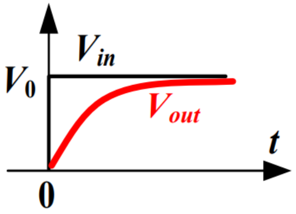
时域分析

微分方程：

$$\frac{V_{in}-V_{out}}{R}=C\frac{dV_{out}}{dt}$$

解方程得到：

$$V_{out}=V_0(1-e^{-t/RC})$$



频域分析

根据串联分压得到：

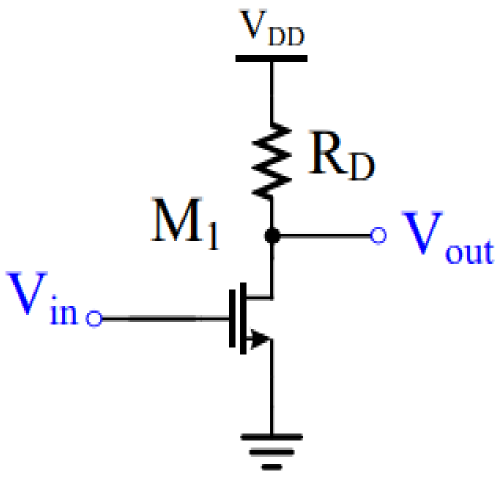
$$H(s)=\frac{V_{out}}{V_{in}}(s)=\frac{1/(sC)}{R+1/(sC)}=\frac{1}{1+sRC}=\frac{1}{1+s/\omega_p}$$

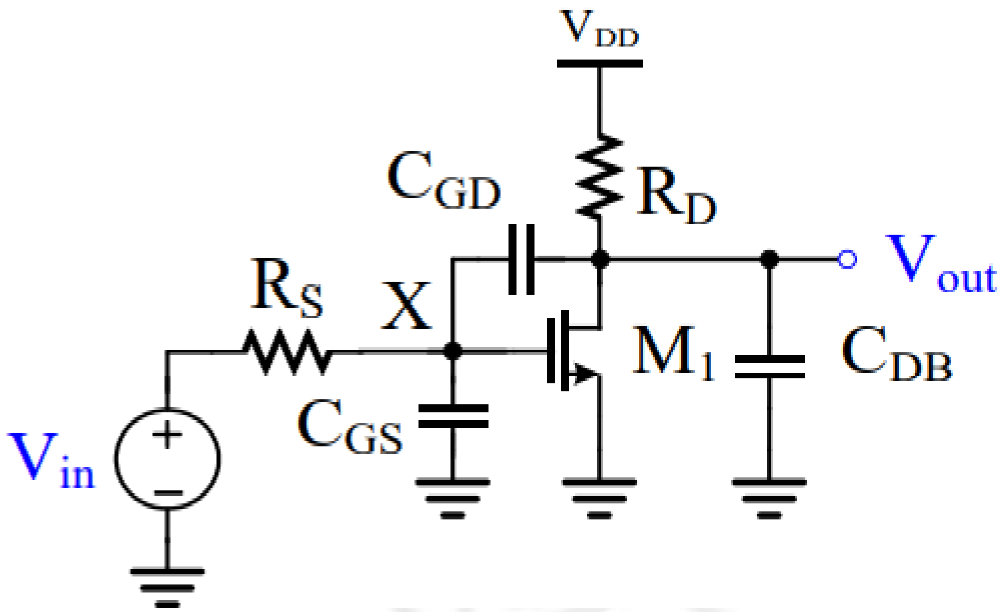
$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_p)^2}}=\frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2+\omega^2}}$$

$$\angle H(j\omega)=\arctan(-\frac{\omega}{\omega_p})$$

频率响应

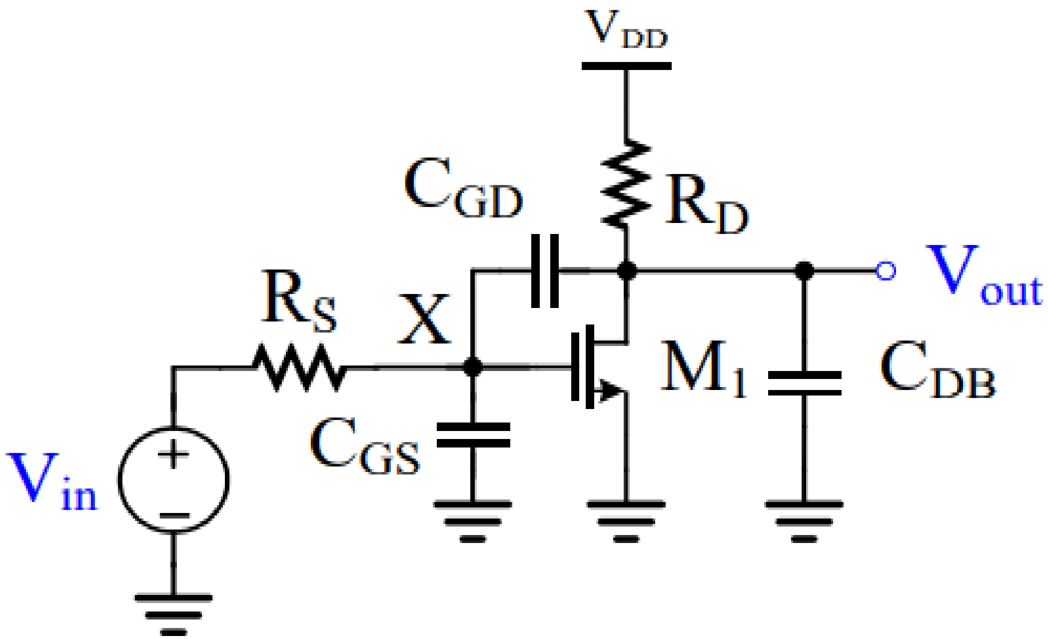
- 下面分析一个简单的共源级放大器。之前我们在做小信号分析时，得到增益为：$Av = -g_m R_{out}$
- 而实际上，MOS管的各端之间存在“寄生电容”，这些电容会影响不同频率下的小信号增益。这些寄生电容的存在是由MOS管的结构决定的。

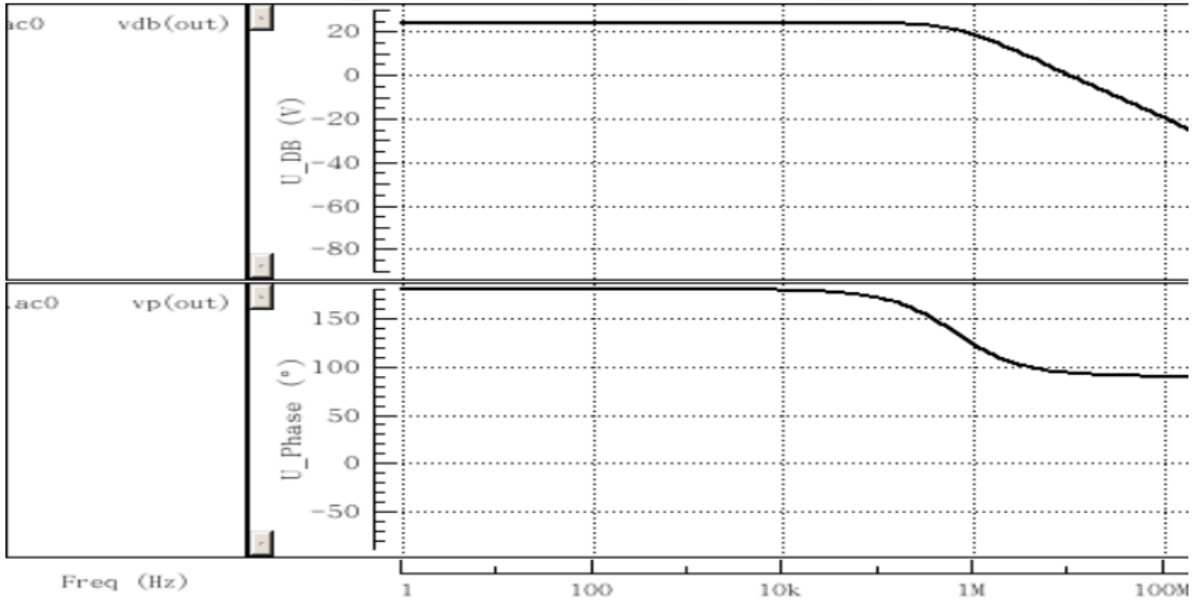




频率响应

- 用仿真工具可以得到这个电路的增益与频率之间的关系，这种表示出增益的模与相位随频率变化的图，我们称之为波特图。（模的单位是分贝dB，X轴为对数坐标）

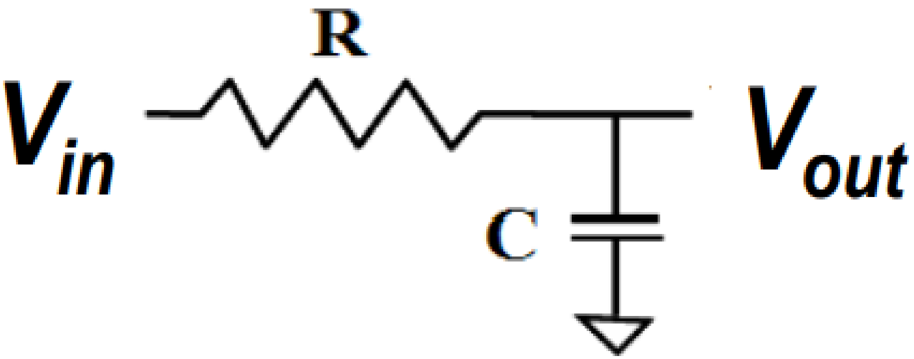




频率响应

- 我们用先之前的例子来说明波特图是如何计算得到的：

首先计算出频域的增益表达式：



$$H(s)=\frac{V_{out}}{V_{in}}(s)=\frac{1/(sC)}{R+1/(sC)}=\frac{1}{1+sRC}=\frac{1}{1+s/\omega_p}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_p)^2}}=\frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2+\omega^2}}$$

$$\angle H(j\omega)=\arctan(-\frac{\omega}{\omega_p})$$

频率响应

- 如何手画$H(j\omega) = \frac{1}{1+{}^{j\omega}/_{\omega p}}$的函数图像:

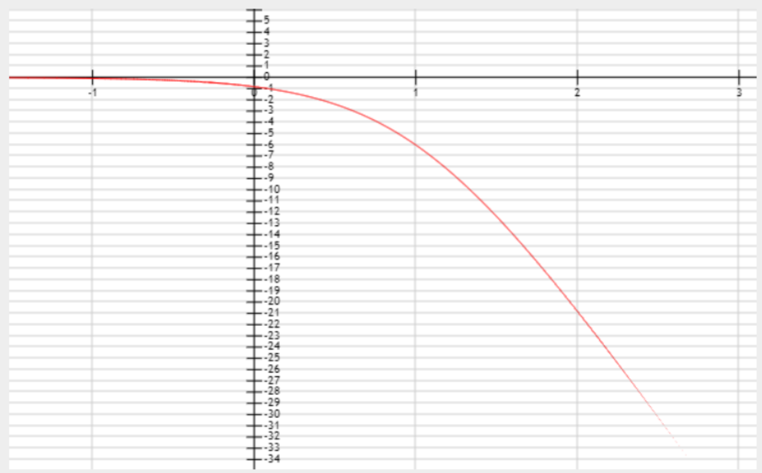
我们先用工具画一条ω_p=10时$20\lg|H(j\omega)|$与$\lg\omega$之间的函数图像

我们一般会分开绘制$|H(j\omega)|$和$\angle H(j\omega)$，纵坐标一般用dB和rad，横坐标为对数坐标

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{1/(sC)}{R+1/(sC)} = \frac{1}{1+sRC} = \frac{1}{1+s/\omega_p}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_p)^2}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2+\omega^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan(-\frac{\omega}{\omega_p})$$

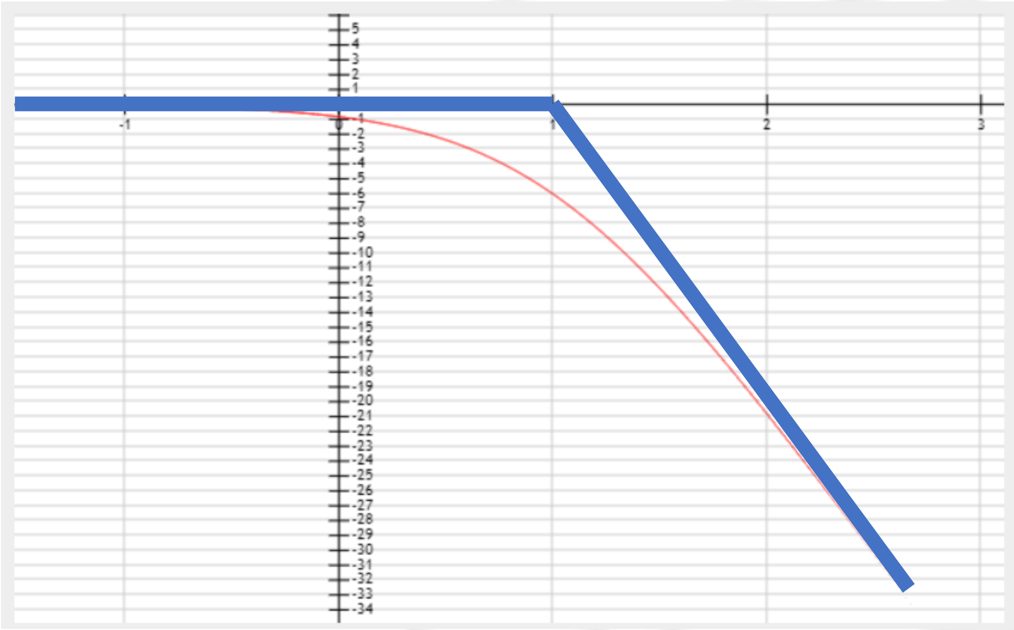


很明显的观察到，函数图像有一条渐近线$y = -20(x-1)$。通过计算可以发现，$20\lg|H(j\omega)|$与$\lg\omega$之间的函数图像有两条渐近线，表达式为$y = -20(x - lg\omega_p)$和$y = 0$。

波特图——幅度响应

- 如何手画$H(j\omega)=\frac{1}{1+{}^{j\omega}/_{\omega_p}}$的函数图像：

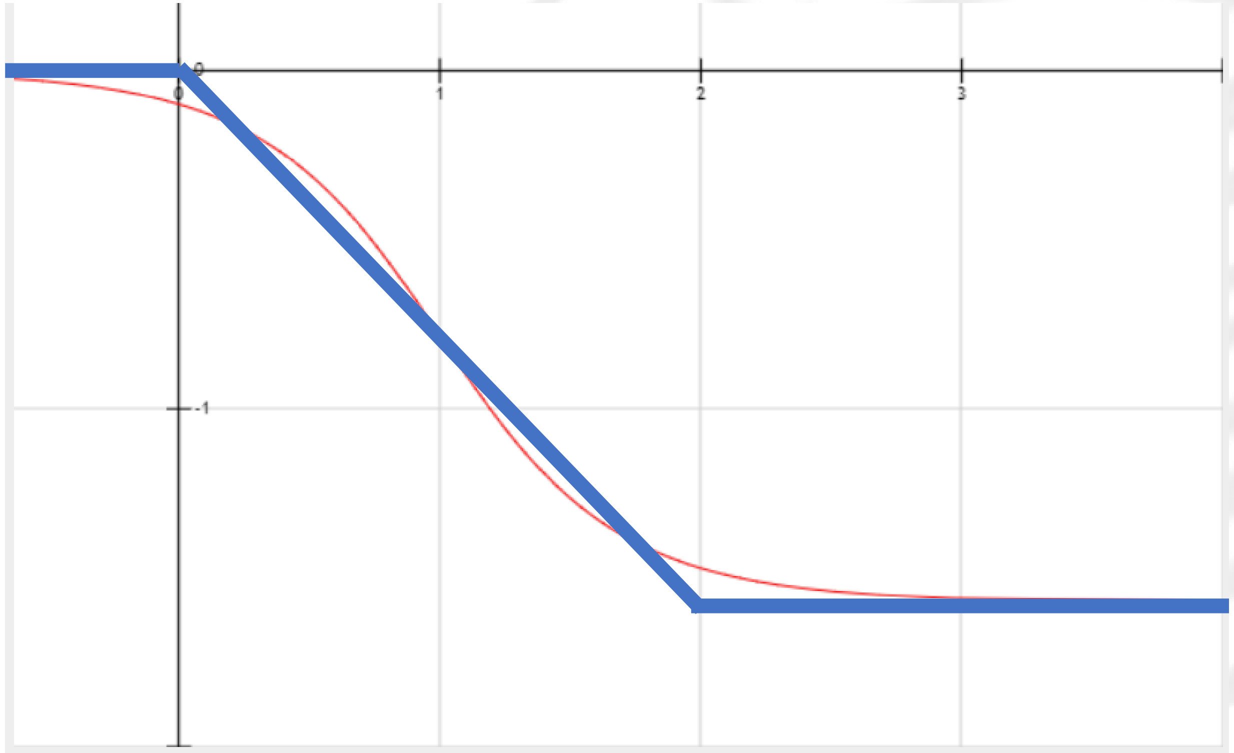
基于以上的考虑，我们在手画时，可以将这条曲线近似为折线，$y=-20(x-lg\omega_p)$和$y=0$。这样的近似在ω_p处的误差大约是-3dB，可以接受。



波特图——相位响应

- 如何手画$H(j\omega)=\frac{1}{1+{j\omega}/{\omega_p}}$的函数图像：

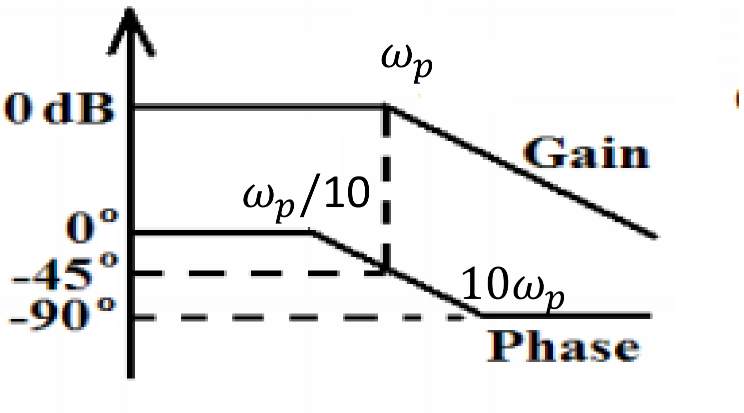
对于 $\angle H(j\omega)$ 我们也是先画出其准确的函数图像。该图像在ω_p处取值为$\frac{\pi}{4}$，且拥有$y=0$和$y=\frac{\pi}{2}$两条渐近线。我们用这两条渐近线和$y=-\frac{\pi}{4}x$来近似这条曲线。



波特图的近似画法

- 如何手画$H(j\omega)=\frac{1}{1+{}^{j\omega}/_{\omega_p}}$的函数图像:

最终的效果是:



我们称上面这条线为幅频特性曲线，下面这条为相频特性曲线。

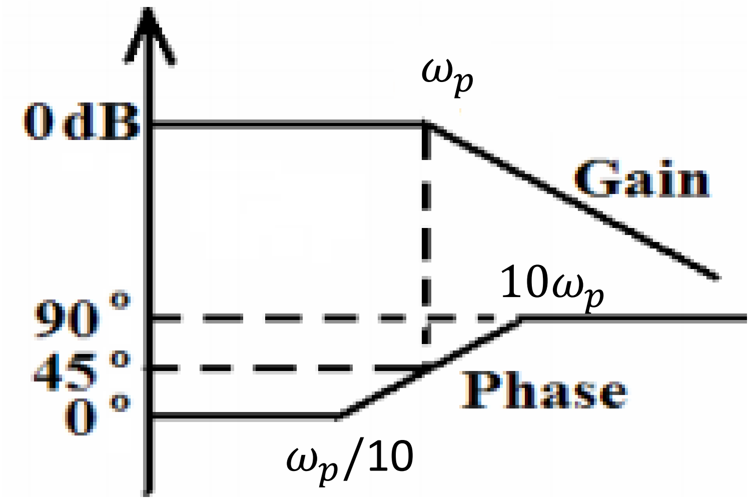
当增益遇到ω_0，斜率下降20dB/dec；相位则从$lg\omega_0-1$开始下降，一直到$lg\omega_0+1$共下降$\frac{\pi}{2}$。

当$s=-\omega_{\mathrm{p}}$时，该表达式有一个无穷间断点，我们称之为左边平面极点（LHP，P表示Pole，也就是极点），之所以叫做左半平面，是因为此时s在虚数轴的左侧。

波特图的近似画法

- 如何手画$H(j\omega) = \frac{1}{1 - {j\omega}/{\omega_p}}$的函数图像:

很容易发现，这个函数的模与上一个函数相同，而相位刚好相反



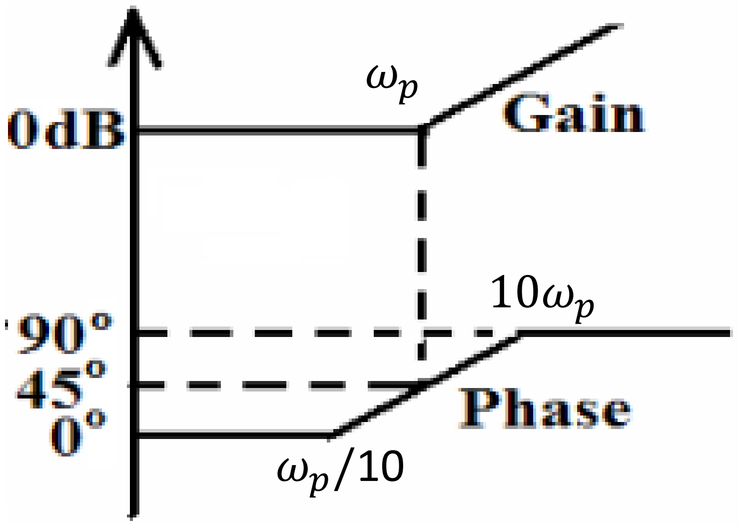
当增益遇到ω_0，斜率下降20dB/dec；相位则从$lg\omega_0 - 1$开始上升，一直到$lg\omega_0 + 1$一共上升$\frac{\pi}{2}$。

当$\mathrm{s} = \omega_\mathrm{p}$时，该表达式有一个无穷间断点，我们称之为右边平面极点（RHP），同理，也是因为此时s在虚数轴的右侧。

波特图的近似画法

- 如何手画$H(j\omega) = 1 + {}^{j\omega}/_{\omega_p}$的函数图像：

很容易发现，这个函数的模和相位均与$H(j\omega) = \frac{1}{1+{}^{j\omega}/_{\omega_p}}$相反。



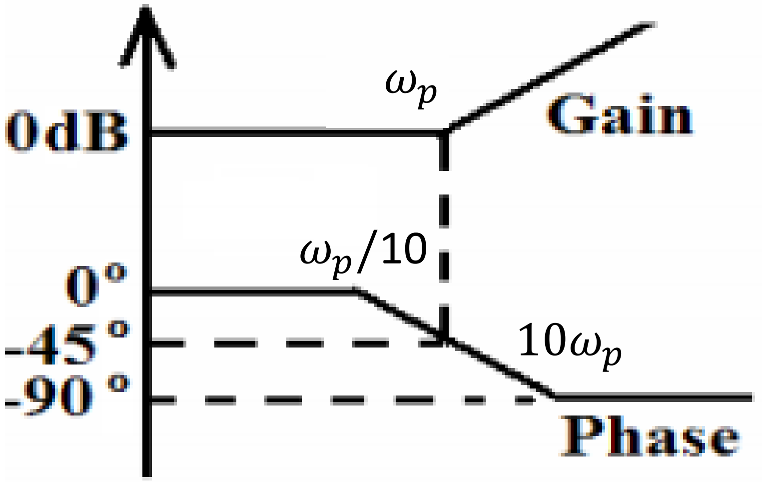
当增益遇到ω_0，斜率上升20dB/dec；相位则从$lg\omega_0 - 1$开始上升，一直到$lg\omega_0 + 1$一共上升$\frac{\pi}{2}$。

当$s = -\omega_\mathrm{p}$时，该表达式等于0，我们称之为左边平面零点（LHZ，Z表示Zero）。

波特图的近似画法

- 如何手画$H(j\omega) = 1 - {}^{j\omega}/_{\omega_p}$的函数图像:

很容易发现，这个函数的相位与$H(j\omega) = 1 + {}^{j\omega}/_{\omega_p}$相反，而模相同。



当增益遇到ω_0，斜率上升20dB/dec；相位则从$lg\omega_0 - 1$开始下降，一直到$lg\omega_0 + 1$一共下降$\frac{\pi}{2}$。

当$s = \omega_\mathrm{p}$时，该表达式等于0，我们称之为右边平面零点（RHZ）。

波特图的总结

总结:

LHP:

$$\frac{1}{1+s/\omega_0}$$

$$\frac{1}{1+j(\omega/\omega_0)}$$

RHP:

$$\frac{1}{1-s/\omega_0}$$

$$\frac{1}{1-j(\omega/\omega_0)}$$

LHZ:

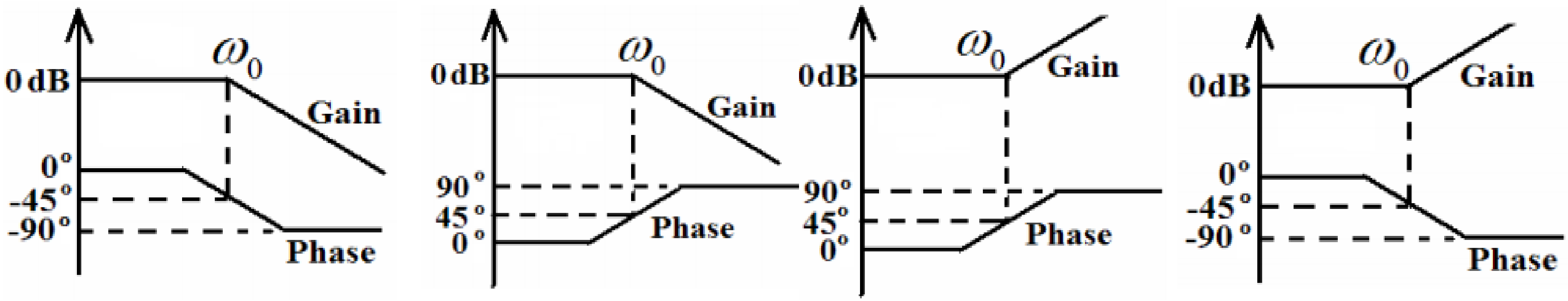
$$1+s/\omega_0$$

$$1+j(\omega/\omega_0)$$

RHZ:

$$1-s/\omega_0$$

$$1-j(\omega/\omega_0)$$



规律非常明显，即便不记得了，推一遍也并不难。

波特图的近似画法

实际的响应表达式一般是多个上面提到的形式的乘积再乘一个系数，一般式为：

$H(s) = A \cdot \prod_{i=0,1,2\ldots}\left(1+\frac{s}{j\omega_{zi}}\right) \cdot \prod_{j=0,1,2\ldots}\frac{1}{1+\frac{s}{j\omega_{pj}}}$由于是纵坐标是dB和rad，需要对$H(s)$取对数，

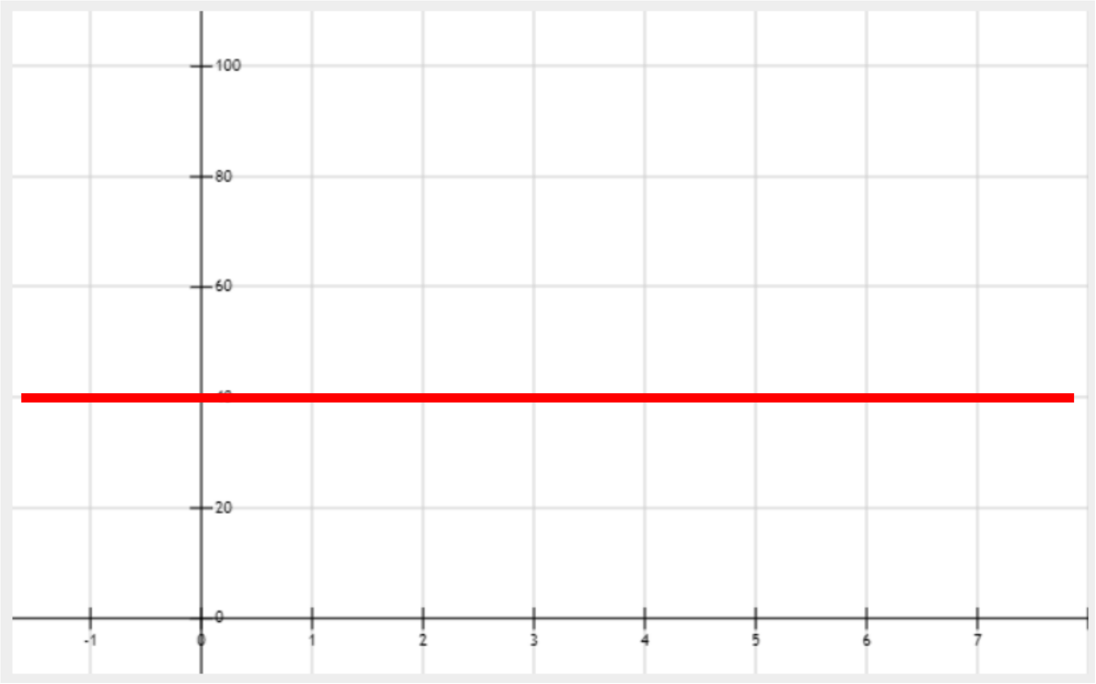
我们只要将每一项的幅度和相位累加即可。例如：

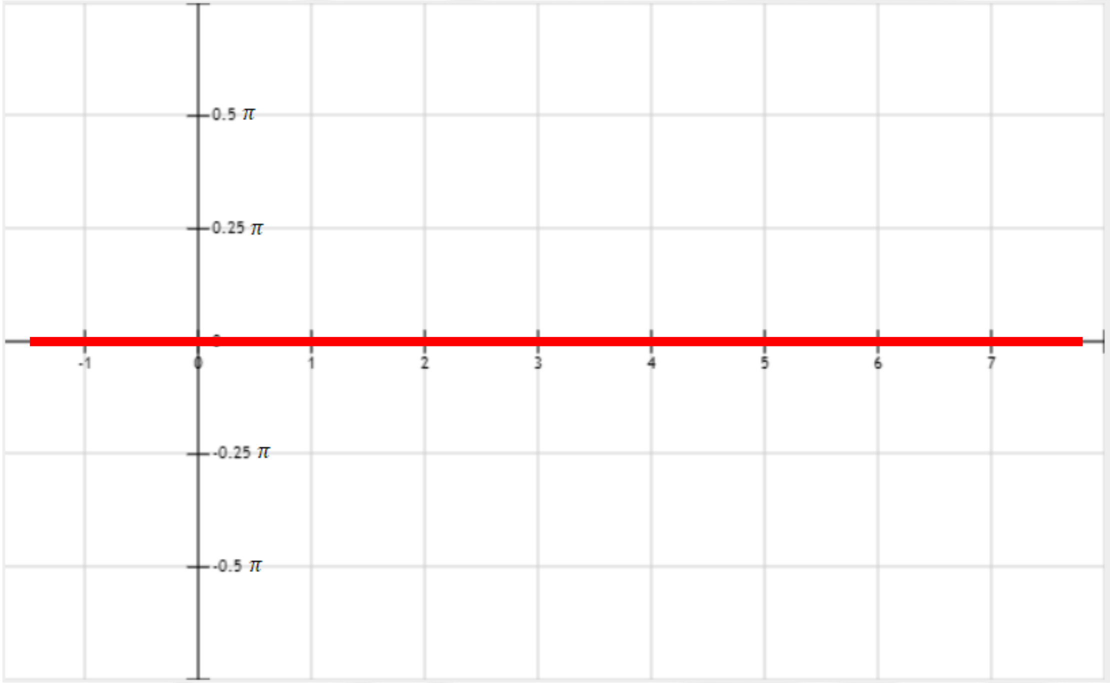
$H(s) = 10^2 \cdot \frac{1+\frac{s}{10^3}}{1-\frac{s}{10^6}}$ 其波特图可以视为以下三者的叠加：

$H_1(s) = 10^2$ $\quad$ $H_2(s) = 1+\frac{s}{10^3}$ $\quad$ $H_3(s) = \frac{1}{1-\frac{s}{10^6}}$

频率响应

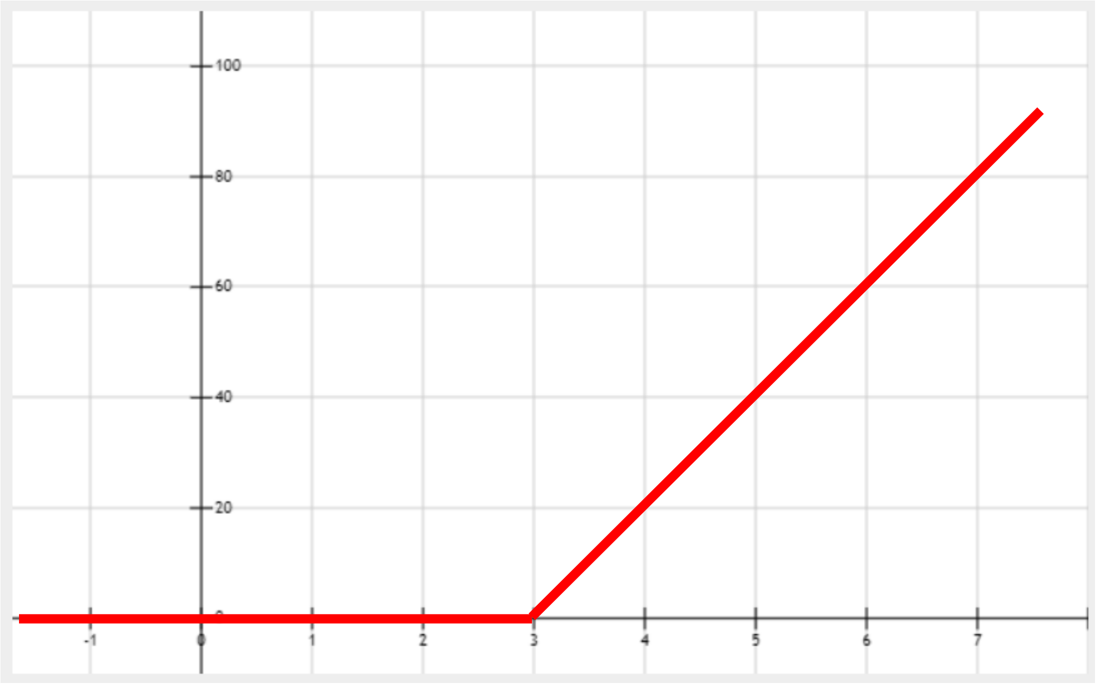
$H_1(s) = 10^2$

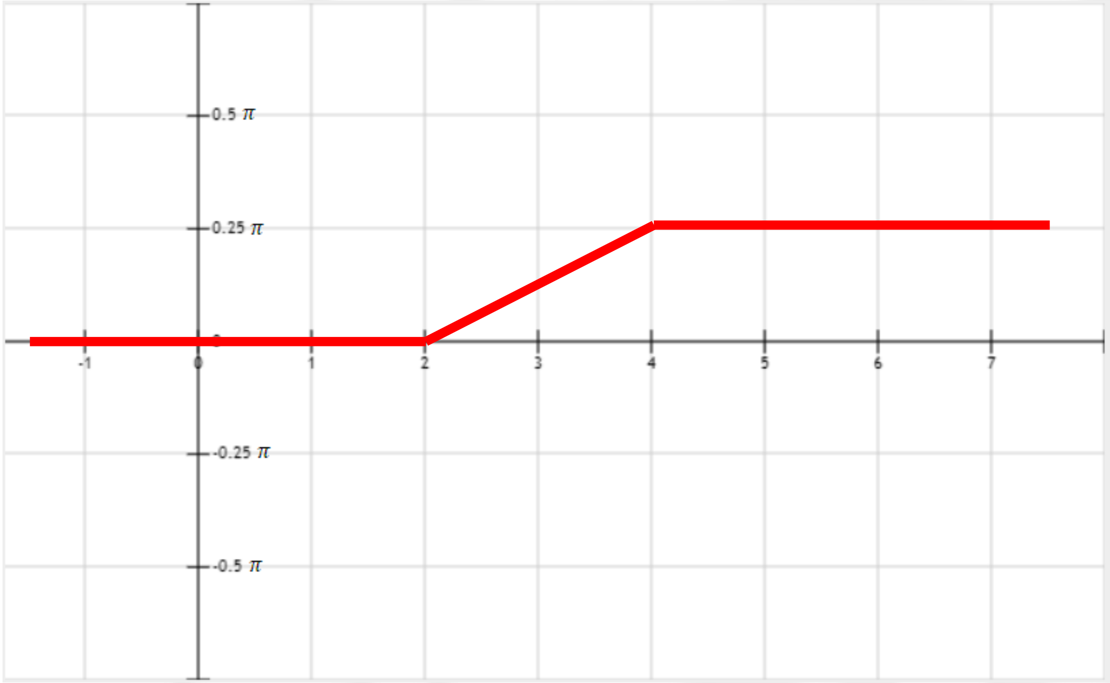




频率响应

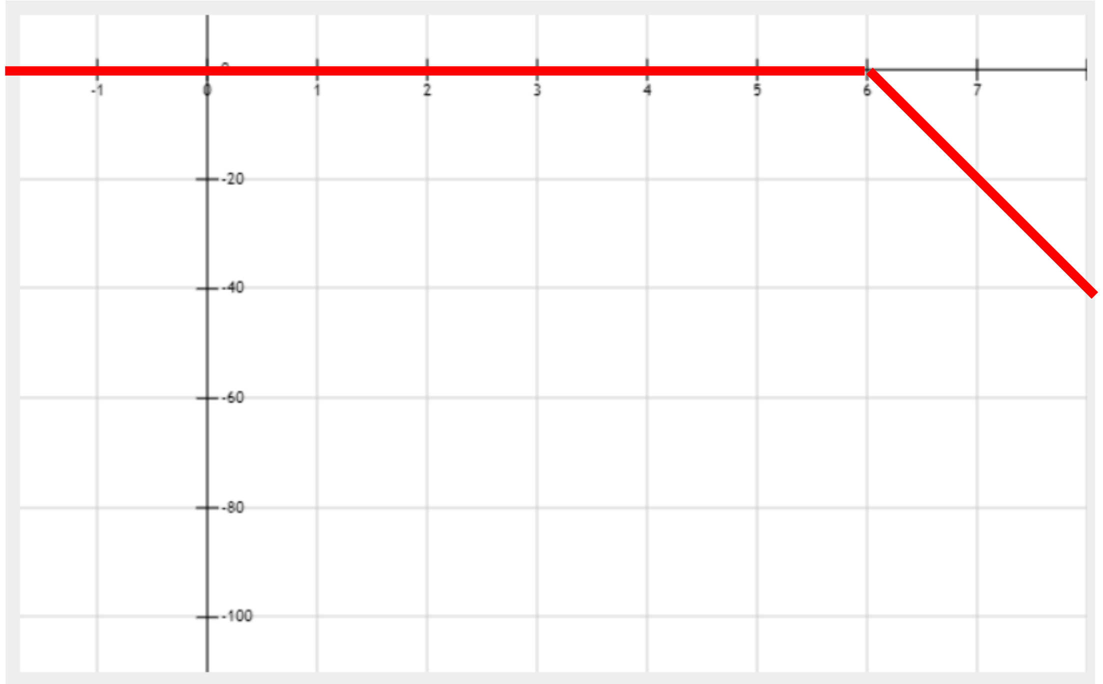
$$H_2(s) = 1 + \frac{s}{10^3}$$

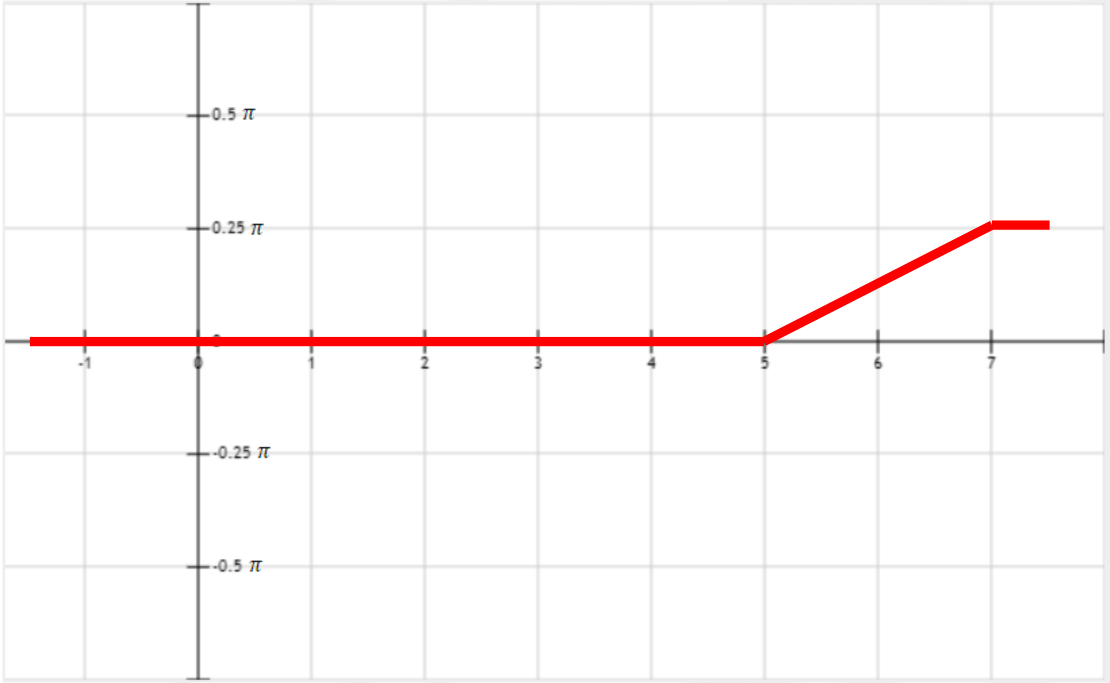




频率响应

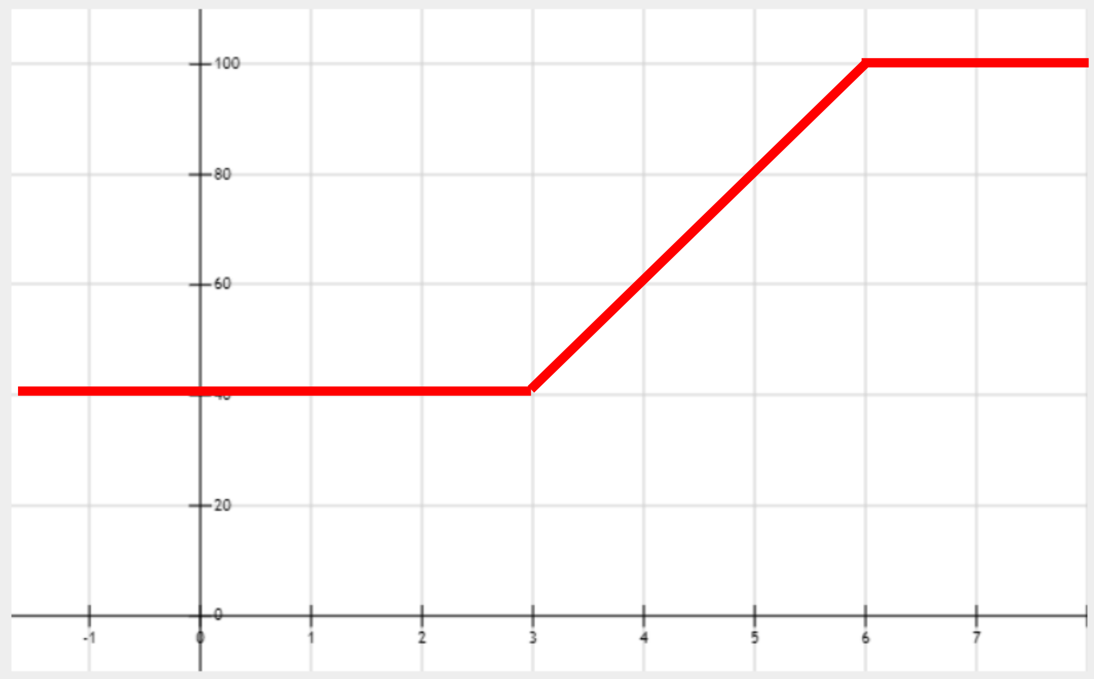
$$H_3(s) = \frac{1}{1 - \frac{s}{10^6}}$$



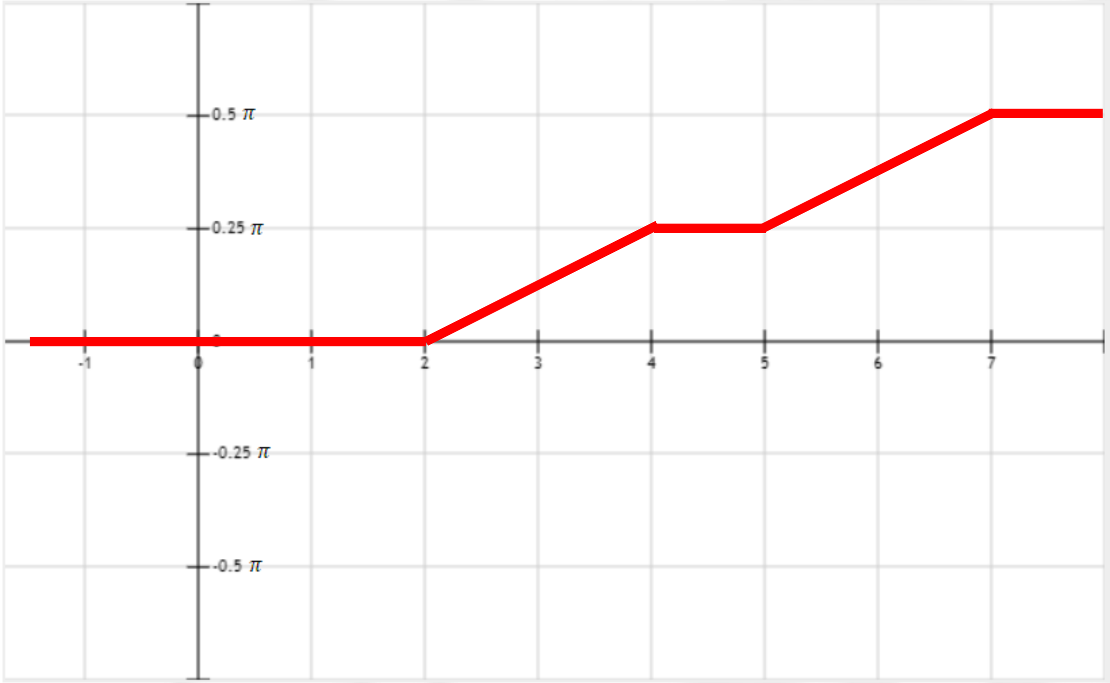


频率响应

叠加后可得$H(s)=10^2\cdot\frac{1+\frac{s}{10^3}}{1-\frac{s}{10^6}}$的波特图：



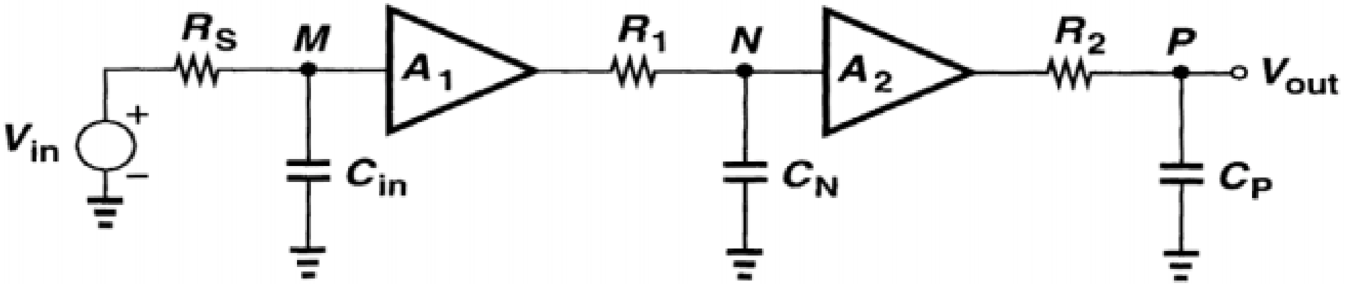
幅度每遇到一个零点，斜率上升20dB/dec，每遇到一个极点，斜率下降20dB/dec



相位每遇到一个RHP/LHZ，上升$\frac{\pi}{2}$，每遇到一个LHP/RHZ，下降$\frac{\pi}{2}$

频率响应

- 对于一个电路的结点，如果有电容和电阻连接在这个结点上，那么通常这个结点会给最终的表达式贡献一个极点：

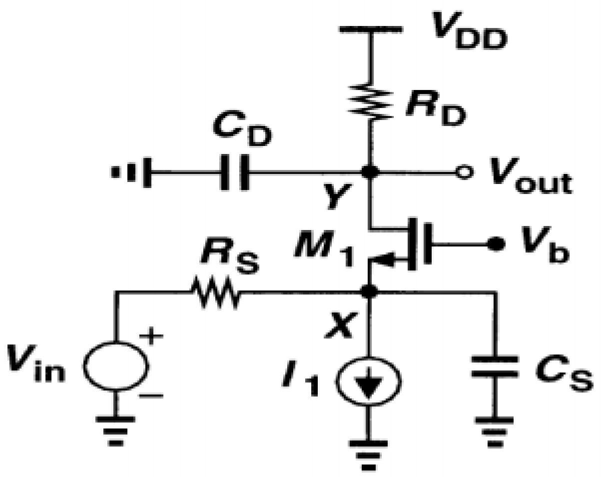


$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s)=\frac{1}{1+R_SC_{in}s}\cdot\frac{A_1}{1+R_1C_Ns}\cdot\frac{A_2}{1+R_2C_ps}$$

$$=1\cdot A_1A_2\frac{1}{1+s/\omega_{pM}}\cdot\frac{1}{1+s/\omega_{pN}}\cdot\frac{1}{1+s/\omega_{pP}}$$

一个实例

- 在举个具体点的例子：



这个电路有两个结点X、Y存在电阻和电容，贡献了两个极点：

$$\omega_{pX} = \frac{1}{C_S \cdot \left(R_S \parallel \frac{1}{g_m}\right)} \qquad \omega_{pY} = \frac{1}{C_D \cdot R_D}$$

最终的表达式可以写成：

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{g_m R_D}{1+g_m R_s} \cdot \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_{pX}}} \cdot \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_{pY}}}$$

表达式的前半部分是不考虑极点时的增益，后半部分是各个极点产生的对各个频率下的增益的修正项的乘积。