

# 模拟与数字电路

## Analog and Digital Circuits



课程主页 扫一扫

第五讲：基于卡诺图的化简

Lecture 5: K-map Logic Simplification

主讲：陈迟晓

Instructor: Chixiao Chen

# 提纲

- 复习
  - 见0得0, 与见1得1, 分别是什么逻辑门?
  - 什么是demorgan定律?
- 布尔代数的公式化简法
- 布尔代数的一般表达式
- 译码器与编码器
- 卡诺图



Maurice Karnaugh (1924 - )  
美国知名物理学、数学家

# 从真值表到卡诺图

	W	X	Y	Z	$F_{WXYZ}$
Minterm - 0	0	0	0	0	0
Minterm - 1	0	0	0	1	1
Minterm - 2	0	0	1	0	1
Minterm - 3	0	0	1	1	0
Minterm - 4	0	1	0	0	1
Minterm - 5	0	1	0	1	1
Minterm - 6	0	1	1	0	0
Minterm - 7	0	1	1	1	1
Minterm - 8	1	0	0	0	0
Minterm - 9	1	0	0	1	0
Minterm - 10	1	0	1	0	1
Minterm - 11	1	0	1	1	0
Minterm - 12	1	1	0	0	1
Minterm - 13	1	1	0	1	0
Minterm - 14	1	1	1	0	1
Minterm - 15	1	1	1	1	1

Four Variable K-Map

	$\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{Y}Z$	$YZ$	$Y\bar{Z}$
$\bar{W}\bar{X}$	0 <sub>0</sub>	1 <sub>1</sub>	0 <sub>3</sub>	1 <sub>2</sub>
$\bar{W}X$	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>7</sub>	0 <sub>6</sub>
$W X$	1 <sub>12</sub>	0 <sub>13</sub>	1 <sub>15</sub>	1 <sub>14</sub>
$W\bar{X}$	0 <sub>8</sub>	0 <sub>9</sub>	0 <sub>11</sub>	1 <sub>10</sub>

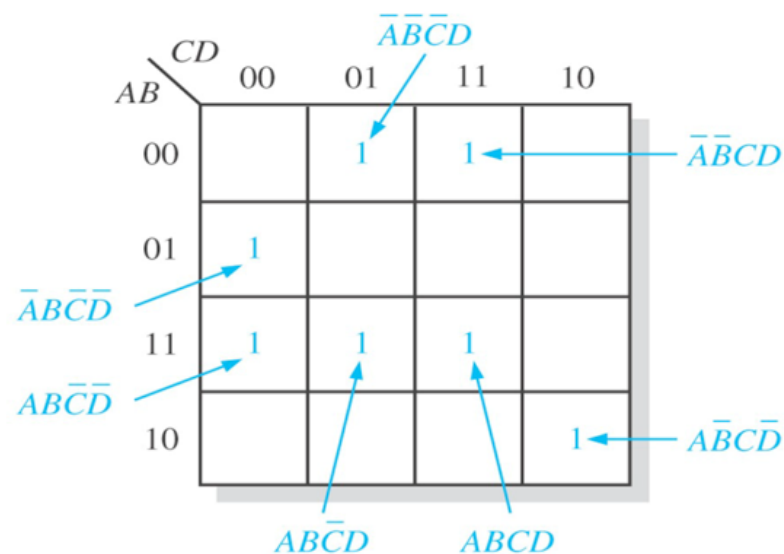
- 最小项:包含全部变量的乘积项, 且变量仅出现一次

- 卡诺图:将n 变量的全部最小项各用一个小方块表示, 并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上也相邻地排列起来, 所得图形叫做卡诺图

# 从SOP表达式到卡诺图

- 乘积项值为1，则在卡诺图对应位置填1

- 例题  $\bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABCD + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D}$



- 注意此处表达式为标准SOP格式

# 从SOP表达式到卡诺图

- 非标准SOP表达式 => 卡诺图

- 例题  $\overline{A} + A\overline{B} + AB\overline{C}$

乘积项扩展

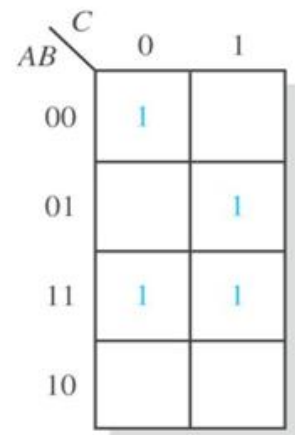
$\overline{A}$	$A\overline{B}$	$AB\overline{C}$
$\overline{A}BC=011$	$A\overline{B}C=101$	$AB\overline{C}=110$
$\overline{A}B\overline{C}=010$	$A\overline{B}\overline{C}=100$	
$\overline{A}\overline{B}C=001$		
$\overline{A}\overline{B}\overline{C}=000$		

填入卡诺图

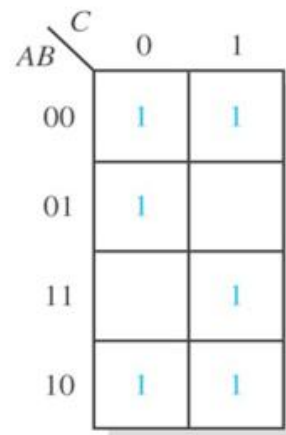
		$C$	
		0	1
$AB$	00	1	1
	01	1	1
	11	1	
	10	1	1

# 卡诺图化简

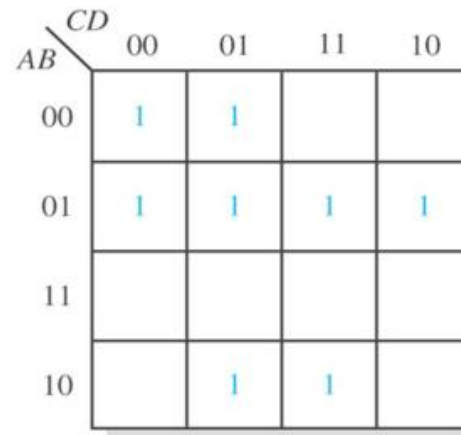
- 例子



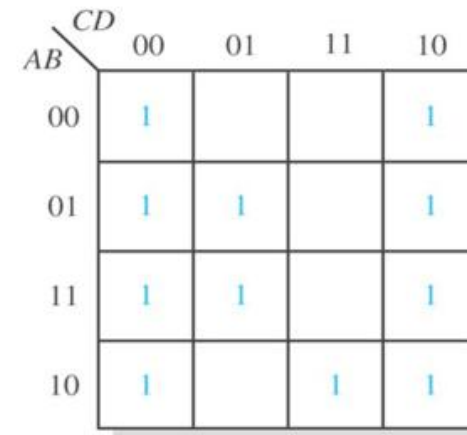
(a)



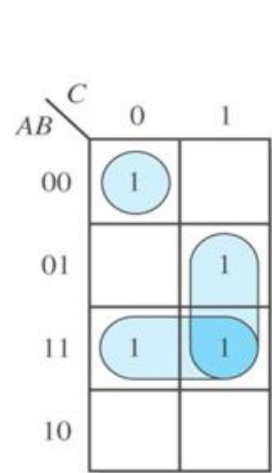
(b)



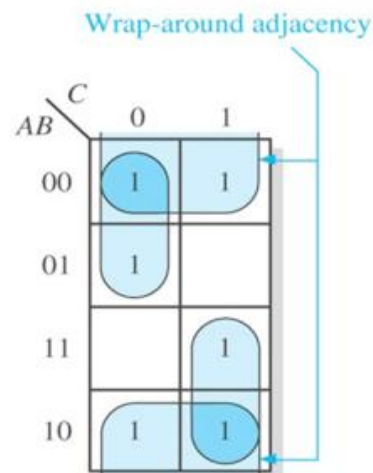
(c)



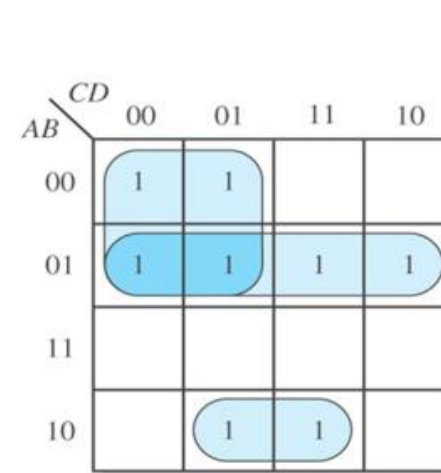
(d)



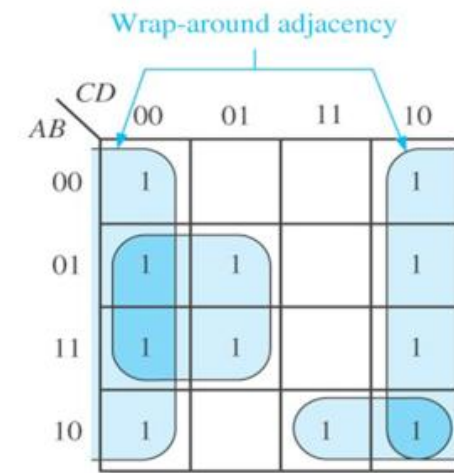
(a)



(b)



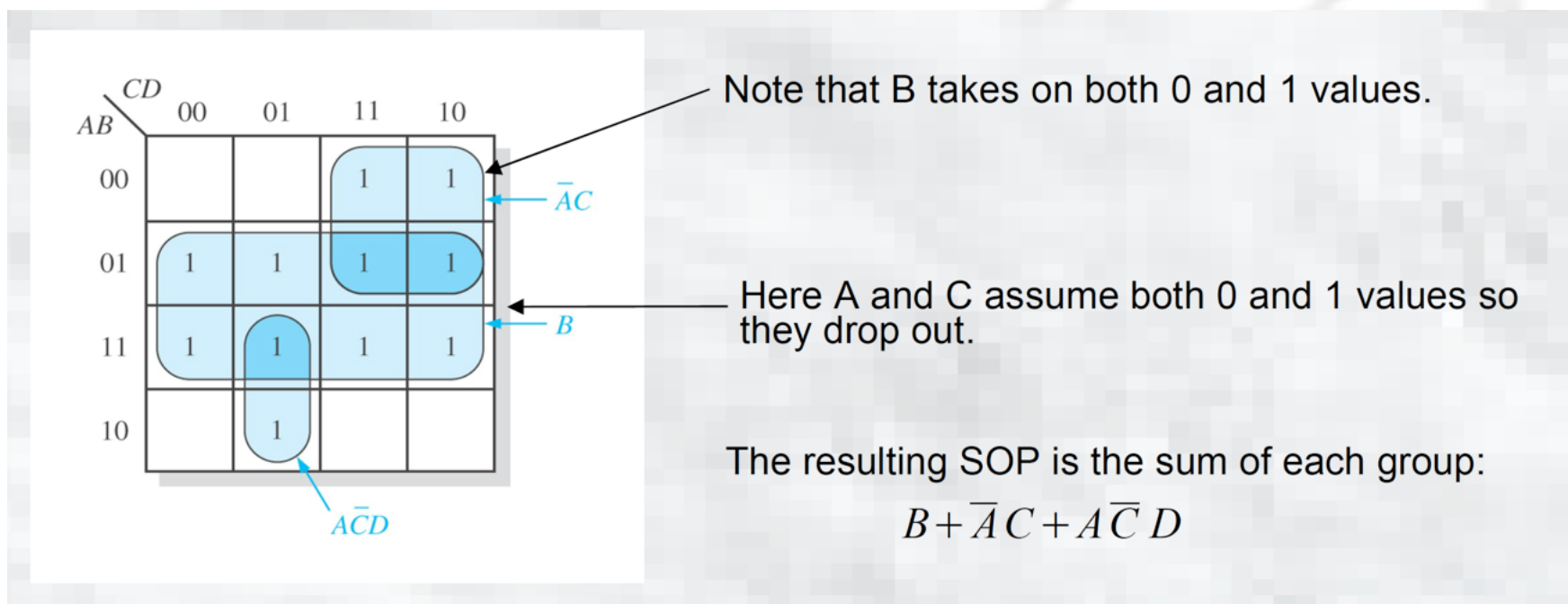
(c)



(d)

# 卡诺图化简

- 如何得到最简SOP表达式
  - 圈出 1 之后，找出圈内没有改变的变量并保留
  - 一组必须包含1,2,4,8,16...个 1
    - 例: 将如下卡诺图化简为最简SOP表达式



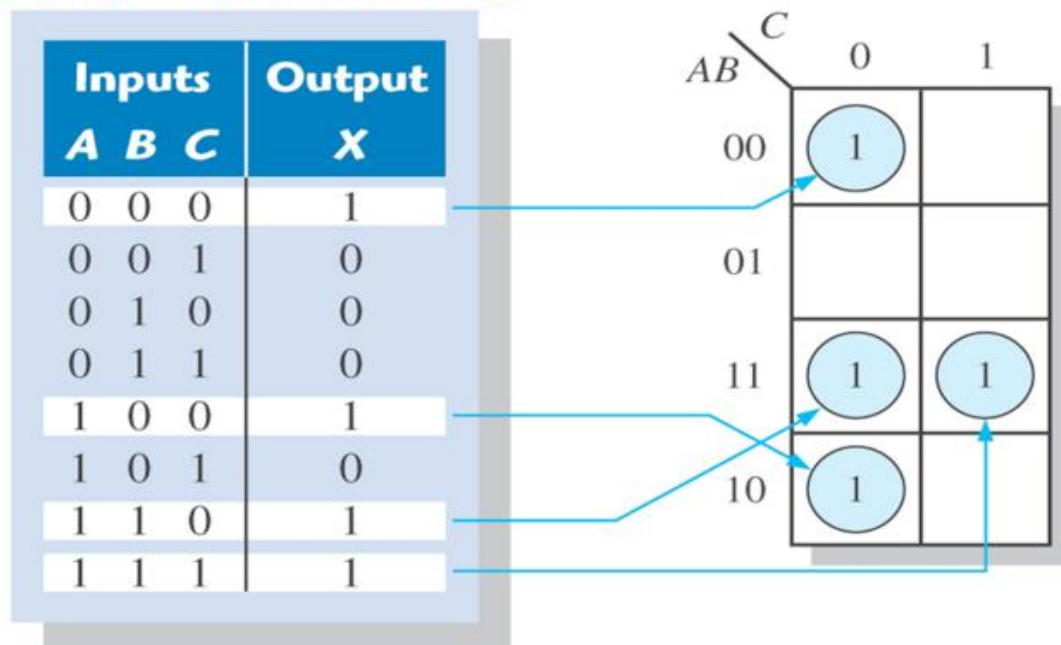


# 卡诺图化简

- 直接由真值表化简

- 例:

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$



- Don't care 情形

- 有时某种变量组合不被允许。这种情况下在卡诺图和真值表中用“X”表示



# 卡诺图化简

(1) 任何2个标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去1个变量（消去互为反变量的因子，保留公因子）

BC		00	01	11	10	
A						
0	1	0	0	0	1	<del><math>\bar{A}\bar{B}\bar{C}</math></del> + <del><math>\bar{A}BC</math></del> $= \bar{A}\bar{C}(\bar{B} + B)$
1	0	1	1	0	0	

$$\boxed{\cancel{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + \cancel{ABC}} = AC = \bar{A}\bar{C}$$

CD		00	01	11	10	
AB						
00	0	1	0	0		<del><math>\bar{A}BC\bar{D}</math></del> + <del><math>ABC\bar{D}</math></del> $= BCD$
01	0	0	0	1		
11	0	0	0	1		
10	0	1	0	0		

$$\cancel{\bar{A}BCD} + \cancel{ABCD} = \bar{B}\bar{C}D$$

# 卡诺图化简

(2) 任何4个标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去2个变量

BC		00	01	11	10
A	0	1	1	1	1
	1	0	1	1	0

$$\begin{aligned}
 & \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC \\
 &= (\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B} + AB)C \\
 &= [\bar{A}(\bar{B} + B) + A(\bar{B} + B)]C \\
 &= C
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 & \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC \\
 &= (\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C + B\bar{C} + BC)\bar{A} \\
 &= [B(\bar{C} + C) + \bar{B}(\bar{C} + C)]\bar{A} \\
 &= \bar{A}
 \end{aligned}$$

CD		00	01	11	10
AB	00	0	1	0	0
	01	1	1	1	1
	11	0	1	1	0
	10	0	1	0	0
		$\bar{C}D$	$\bar{B}D$		


# 卡诺图化简

(3) 任何8个标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去3个变量

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0




AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	1	0	0	1




# 卡诺图化简

(3) 任何8个标1的相邻最小项，可以合并为一项，并消去3个变量

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0



AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	1	0	0	1



# 卡诺图化简原则

- 卡诺图尽可能圈大，先圈大后圈小
- 每个圈只能含有 $2^n$ 个相邻项。要特别注意对边相邻性和四角相邻性
- 圈的个数尽量少
- 卡诺图中所有取值为1的方格都要被圈过，即不能漏掉取值为1的最小项
- 将每一个圈对应的与项进行逻辑加，即得到与或表达式。

# 例题

【例1】用卡诺图化简逻辑函数  
 $F(A, B, C) = \sum(1, 2, 3, 6, 7)$ 的最简与或表达式。

解: 1. 画出函数F的  
三变量卡诺图。

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	3	2
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

2. 把函数F表达中出现的最小项，在卡诺图对应小方格中填上1，其余方格填0(常不填)。

$$F(A, B, C) = \sum(1, 2, 3, 6, 7)$$

3. 合并最小项。  
圈卡诺圈

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	3	2
0	0	1	1	1
1	4	5	1	1

Diagram showing two prime implicants circled on the Karnaugh map:  
- A purple circle covers cells (0,1), (0,3), (1,1), (1,3), labeled  $\bar{A}C$ .  
- A green circle covers cells (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), labeled  $B$ .

4. 写与或表达式

$$F(A, B, C) = \sum(1, 2, 3, 6, 7) = \bar{A}C + B$$

# 例题

## 【例2】用卡诺图化简函数

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}D + AB\overline{C}D + A\overline{B}CD$$

解:根据最小项

的编号规则,可知

$$F = m_3 + m_9 + m_{11} + m_{13}$$

得卡诺图。

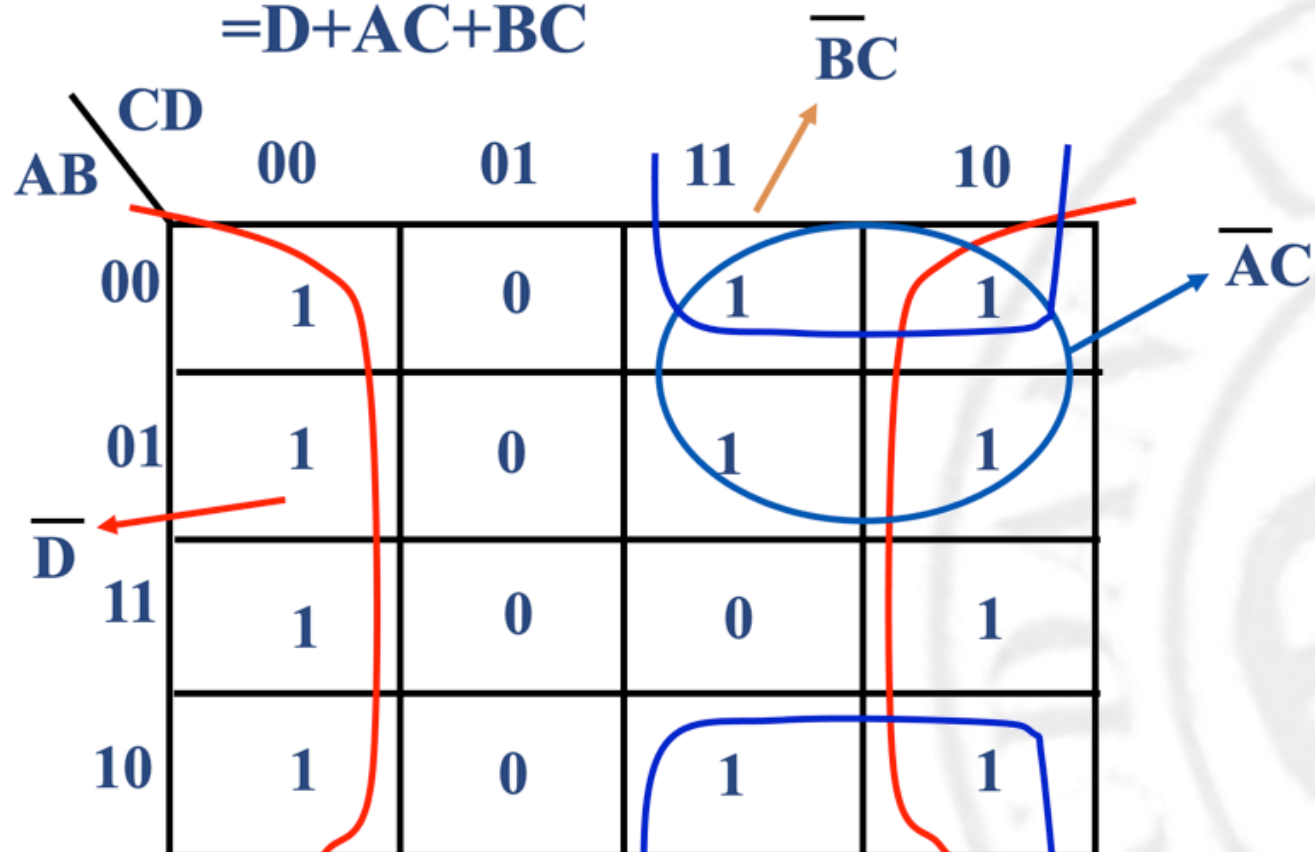
$$F = A\overline{C}D + \overline{B}CD$$

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

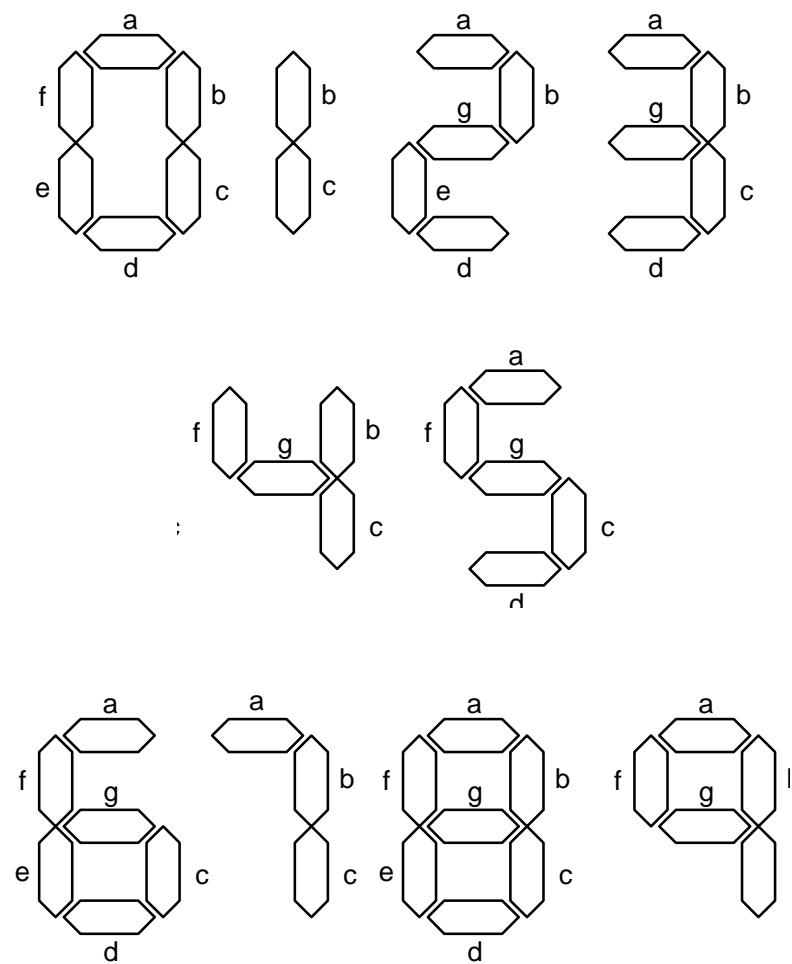


# 例题

例:  $Y = AB\bar{D} + \bar{D} + \bar{A}DBC + \bar{A}C + \bar{B}C$   
 $= \bar{D} + \bar{A}C + \bar{B}C$



# BCD-7段显示译码器



Digit	A	B	C	D	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
5	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0

# BCD-7段显示译码器 - 卡诺图化简

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$$a = A + C + BD + \overline{B}\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	1	0
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$$b = \overline{B} + \overline{C}\overline{D} + CD$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	1
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$$c = B + \overline{C} + D$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	1
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$$d = \overline{B}\overline{D} + C\overline{D} + B\overline{C}D + \overline{B}C + A$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$e = \overline{B}\overline{D} + C\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	1
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$$f = A + \overline{C}\overline{D} + B\overline{C} + B\overline{D}$$