



저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#) 

이학석사 학위 논문

Hull White 모델을 이용한
구조화채권상품의 평가에 관한 연구

가톨릭대학교 대학원

수학과 금융수학 전공

박상빈

2015년 2월

Hull White 모델을 이용한
구조화채권상품의 평가에 관한 연구
Studies on the evaluation of structured notes
using the Hull White model

지도 : 전인태 교수

이 논문을 이학석사 학위 논문으로 제출함

2015년 2월

가톨릭대학교 대학원

수학과 금융수학 전공

박 상 빈

박상빈의 이학석사 학위논문을 인준함.

위원장 이두범 (인)

위원 전인태 (인)

위원 권성화 (인)

2015년 2월

가톨릭대학교 대학원

초 록

본 논문은 구조화채권인 Range Accrual Note와 Spread Range Accrual Note 상품의 가격을 평가하는 연구에 관한 글이다. 금리구조에 관한 모형인 Hull-White 모형에서 1-factor 모형과 2-factor 모형에 관하여 서술하였다. 파생상품의 수치해석적인 평가방법으로 보편적으로 사용되는 Monte Carlo Simulation(이하 MCS)과 FDM 방법을 사용하였다.

MCS와 FDM의 평가방법으로 1-factor 모형 하에서 Range Accrual Note의 가격을 산출하였고, 2-factor 모형을 이용하여 Spread Range Accrual Note 상품의 가격을 평가하였다.

각 상품의 가격 산출을 통하여 MCS와 FDM 방법의 차이를 이해하고 1-factor 모형과 2-factor 모형을 이용한 구조화채권의 평가방법을 확인하고자 한다.

목 차

초록.....	1
I. 서론.....	1
1.1 연구의 배경 및 목적.....	1
1.2 논문의 구성.....	2
II. 구조화 채권.....	3
2.1 구조화 채권 시장의 현황.....	3
2.2 구조화 채권 구조.....	5
III. Hull White 모델.....	7
3.1 1-factor 모형.....	7
3.2 2-factor 모형.....	14

IV. 평가방법.....	23
4.1 시뮬레이션: 1-Factor 모형.....	23
4.2 유한차분법: 1-Factor 모형.....	24
4.3 시뮬레이션: 2-Factor 모형.....	26
4.4 유한차분법: 2-Factor 모형.....	27
V. 결과 분석.....	33
5.1 산출결과.....	33
5.2 결론.....	35

[참고문헌]

I. 서론

1.1 연구의 배경 및 목적

금융시장에 변동금리 채권이 발행되기 시작한 것은 1992년 이후부터이다. 처음에 발행된 변동금리 채권은 Vanilla FRN이었다. 2001년에는 높은 금리로 인한 자금조달의 어려움을 해소하고자 구조화 채권인 Inverse FRN이 발행되었다. 이 후 국내 금융 산업의 발달에 맞춰 구조화 채권 시장에는 다양하고 복잡한 상품이 유입되었다. 2004년에는 발행자가 조기상환권을 갖는 Callable Bond가 발행되었다. 2007년에는 두 기준금리의 스프레드에 승수를 곱하여 Coupon을 지급하는 Power Spread Note가 등장하였다.

구조화 채권의 경우 불확실한 시장상황에서 수요에 비해 공급이 부족한 우량등급의 장기 채권을 갖는 효과를 얻을 수 있고, 일반채권에 비해 비교적 높은 Coupon을 얻을 수 있다. 이러한 특성 때문에 요즘과 같은 저금리 시대에 구조화 채권은 투자대안으로 취급되고 있다.

국내에 구조화 채권이 발행되기 시작한지 10년이 넘는 시간이 흘렀지만 평가방법에 대한 연구가 부족한 것이 현실이다. 본 연구는 구조화 채권의 기초자산이 되는 금리의 미래 기간구조를 파악하는 적절한 방법론에 대하여 서술한다. 또한 본 연구는 금리 모델에서 더 나아가 상품평가에 필요한 Parameter의 설정에 주목한다.

1.2 논문의 구성

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 제 I 장에서는 논문의 연구 배경 및 목적과 논문의 구성을 기술하였다. 제 II 장에서는 구조화 채권 시장의 현황과 구조화 채권의 구조를 설명하였고, 제 III 장에는 평가방법에 사용되는 1-factor Hull White 모델과 2-factor Hull White 모델에 대하여 서술하였다. 제 IV 장에서는 평가방법을 제시하였다. 제 V 장에서는 제 IV 장에서의 평가방법을 이용하여 구조화 채권의 가치를 분석하고 연구의 의미와 한계점을 언급하였다.

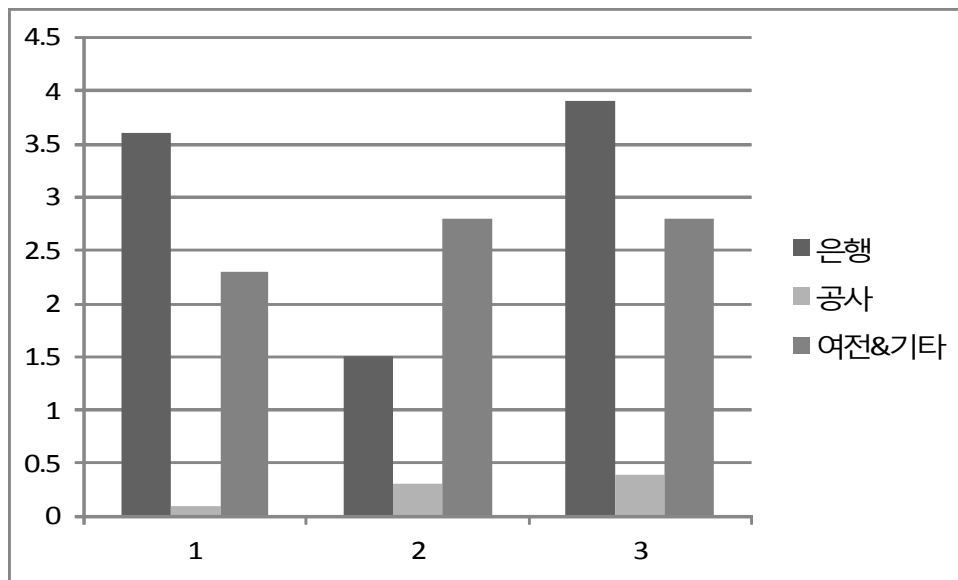
Ⅱ. 변동금리 채권

2.1 구조화 채권 시장의 현황

시장의 요구로 인해 구조화 채권 상품은 끊임없이 발전하고 있다. 구조화 채권은 변동금리 채권의 한 종류이다. 변동금리 채권은 채권과 금리파생상품을 결합하여 이자가 다양한 형태로 결정된다. 변동금리 채권의 형태로는 금리가 내려가면 높은 이자를 받을 수 있는 상품, 장단기 금리차를 이용한 상품, 다른 종류의 금리의 차로 이루어진 상품 등 다양한 종류가 있다.

요즘과 같이 저금리가 지속되는 경우 투자자들은 은행예금이나 일반채권에 대한 투자를 줄이게 된다. 투자자들은 위험을 조금 감수하더라도 높은 수익률을 얻을 수 있는 상품을 찾는다. 이러한 시장의 수요에 따라 높은 수익을 얻을 수 있는 다양한 구조화 채권이 발달하게 된다. 국내의 경우 구조화 채권의 시장은 2001년 약 4500억 원의 규모였고, 2007년에는 8조 5천억원으로 증가하였다. 2008 서브프라임 모기지 사태로 시장의 규모가 축소되었다가 이 후 다시 증가하고 있다. 구조화 채권이 포함된 변동금리채권 시장의 발행 규모는 2011년도에 24조원 이었고, 2012년도에는 33조원이었다. 2013년도에는 시장의 규모가 약간 축소하여 27조원이 되었다. 시장금리 수준이 낮은 현재 2014년도의 경우 변동금리 시장의 규모는 상당히 증가할 것으로 생각된다.

은행, 공사, 증권회사의 구조화 채권 발행은 2011년 이후 2013년까지 꾸준히 증가하고 있으며 2014년에도 증가한 것으로 보여 진다.



[그림1] 구조화 채권 발행 현황

2014년 11월 현재 발행된 금리 연계 변동금리채권 시장의 발행 상품은 Vanilla FRN이 약60% 정도를 차지하고 있다. 또한 Vanilla FRN의 95% 이상이 지표금리로 CD91을 사용하고 있다. Spread Range Accrual 상품은 전체 발행 상품의 약15% 정도로 Vanilla FRN 다음으로 많았고, 그 뒤로는 Spread Average Note, Range Accrual Note 상품의 순으로 발행량이 많았다. 지표금리를 기준으로 변동금리 채권 시장의 발행 동향을 살펴보면 전체 발행 상품의 약 60%가 CD91금리를 지표금리로 사용하고 있었고, 약 15% 정도가 지표금리로 IRS를 사용하고 있다.

2.2 구조화 채권 구조

(1) Vanilla FRN

변동금리부 채권(FRN)은 이자가 변동금리에 연동되어 주어진다. 주어지는 이자는 다음과 같다.

$$\text{지급이자율} = \text{기준금리} + \alpha \quad (\alpha: \text{가산금리})$$

예를 들어 이자가 3개월마다 지급되고 기준금리가 *CD91*, 가산금리가 0.5%인 변동금리부 채권의 경우에 3개월 후의 *CD*금리가 2.14%라면 6개월 후에 0.5%를 더해서 2.64%의 이자를 지급받는다.

변동금리부 채권은 이자율이 상승하면 투자자는 높은 수익률을 기대할 수 있는 반면 이자율이 하락하면 낮은 수익률을 받게 되는 위험을 부담하게 된다.

(2) Dual Indexed FRN

Dual Indexed FRN은 2개의 기준금리의 스프레드에 일정한 고정금리를 더해 이자를 지급한다.

$$\text{지급이자율} = (\text{기준금리1} - \text{기준금리2}) + \text{고정금리}$$

이중금리변동채권은 금리간의 스프레드가 확대되거나 축소될 때 이자의 크기가 변한다.

(3) Range Accrual Note

Range Accrual Note은 기준금리가 설정된 금리의 조건을 충족하는 날이 많은 경우에는 높은 이자를 지급하고, 조건을 미충족한 날이 많은 경우에는 낮은 이자를 지급하는 채권이다.

쿠폰이자율 결정 기간이 t_1 에서 t_2 까지이고, $t_1 < t \leq t_2$ 인 t 시점에서의 기준금리를 r 이라고 하자. 이자지급 기간에 포함되어 있는 날의 수가 N 이고, 설

정된 금리조건이 $a \leq r \leq b$, 이 범위 내에 있었던 날이 n 일이라면, 결정된 이자는 다음과 같다.

$$\text{지급이자율} = \text{고정금리} \times \frac{n}{N}$$

기준금리 r_1, r_2 의 금리차이가 설정된 조건을 충족되는 날이 많은 경우 높은 이표를 지급하고, 설정된 조건을 미충족하는 경우 낮은 Coupon를 지급하는 Spread Range Accrual Note도 있다.

(4) Callable Bond

Callable Bond은 시장이 예상과 다른 움직임을 보일 때 발행자가 채권을 조기 상환할 수 있는 권리를 갖도록 구성된 구조화 채권이다. 투자자는 조기 상환권을 발행자에게 매도하였으므로 시장금리보다 높은 이자를 수령하게 된다.

구조화 채권 시장에서는 점점 다양하고 복잡한 상품이 개발되고 있다. 종류를 명확히 규정짓기 모호한 위의 채권들이 결합된 상품도 발행되고 있다.

III. Hull White 모델

3.1 1-factor

1개의 Gaussian factor와 deterministic function의 합으로 표현되는 short rate model을 소개하고, 이 모형으로부터 유도된 무이표채권 및 cap, swaption의 가격 공식을 살펴본다. (자세한 전개 과정은 참고문헌 [8]에서 확인할 수 있다.) 또, 모수 추정과 유한차분법을 위한 편미분방정식, 그리고 수치적인 적분 계산 방안을 살펴본다.

(1) 금리모형

Risk adjusted measure \mathbb{Q} 하에서 instantaneous short rate $r(t)$ 의 움직임은 다음과 같다고 가정하자.

$$\begin{aligned} r(t) &= x(t) + \varphi(t), & r(0) &= r_0, \\ dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma(t)dW(t), & x(0) &= 0 \end{aligned}$$

임의의 시점 $s(< t)$ 에 대해 위 식을 간단한 적분식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t) &= x(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dW(u) \\ r(t) &= x(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dW(u) + \varphi(t) \end{aligned}$$

(2) 무이표채권 가격

만기가 T 인 무이표채권의 t 시점에서의 가격을 $P(t, T)$ 라고 하자. t 점까지 $x(t)$ 에 의해 형성된 sigma field를 \mathbf{F}_t 라고 정의했을 때, $P(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$P(t, T) = E \left\{ \exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \middle| F_t \right\} = E \left\{ \exp \left(- \int_t^T (x(u) + \varphi(u)) du \right) \middle| F_t \right\}$$

F_t 에 대한 조건부 random variable $\int_t^T x(u) du$ 는 평균 $x(t)B(t, T)$, 분산 $V(t, T)$ 인 정규분포를 따른다.

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a},$$

$$V(t, T) = \text{Var} \left(\int_t^T \sigma(u) B(u, T) dW(u) \middle| F_t \right) = \int_t^T \sigma(u)^2 B(u, T)^2 du$$

따라서, risk adjusted measure Q 하에서 무이표채권의 가격을 나타낸 식은 다음과 같이 정리된다.

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T \varphi(u) du - x(t)B(t, T) + \frac{1}{2} V(t, T) \right)$$

따라서 시장에서 관측된 만기가 T 인 discount factor $P^M(0, T)$ 가 다음을 만족하면, 이는 short rate model이 실제 시장에서 관측되는 term structure를 잘 설명한다는 가정과 일맥상통한다.

$$P^M(0, T) = \exp \left(- \int_0^T \varphi(u) du + \frac{1}{2} V(0, T) \right) \Leftrightarrow \exp \left(- \int_0^T \varphi(u) du \right) = P^M(0, T) \exp \left(- \frac{1}{2} V(0, T) \right)$$

위의 관계식을 이용하면 함수 φ 에 대해 다음이 성립하므로

$$\exp \left(- \int_t^T \varphi(u) du \right) = \frac{\exp \left(- \int_0^T \varphi(u) du \right)}{\exp \left(- \int_0^t \varphi(u) du \right)} = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left(- \frac{1}{2} \{V(0, T) - V(0, t)\} \right)$$

따라서, 무이표채권의 가격은 다음과 같이 정리된다.

$$P(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left(-x(t)B(t, T) + \frac{1}{2} \{V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)\} \right)$$

한편, $P(0, t) = \exp \left(- \int_0^t \varphi(u) du + \frac{1}{2} V(0, t) \right)$ 이므로 자연로그를 취한 다음 미분하면

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln P(0, t) = -\varphi(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} V(0, t) = x(t) - r(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} V(0, t)$$

이므로

$$r(t) - f(0, t) = x(t) + \int_0^t \sigma(u)^2 e^{-a(t-u)} B(u, t) du$$

가 성립한다.

만기 S 인 무이표채권이 기초자산이고 옵션만기가 T , 행사가격이 K 인 call 옵션의 t 시점에서의 가격은 다음과 같다.

$$ZBC(t, T, S, K) = E \left\{ \exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \{P(T, S) - K\}^+ | F_t \right\}$$

위 기대값을 계산하기 위해서는 probability measure를 Radon-Nikodym derivatives에 의해 정의된 risk adjusted T -forward probability measure Q_T 로 변경하는 작업이 필요하다. (probability measure, Radon-Nikodym derivatives 등에 대한 자세한 내용은 참고문헌 [1], [7]에서 볼 수 있다.)

$$ZBC(t, T, S, K) = P(t, T) E^{Q_T} \{ (P(T, S) - K)^+ | F_t \}$$

Money market account $B_T = \exp \left(\int_0^T r(u) du \right)$ 에 대하여, Q_T 와 Q 의 Radon-Nikodym derivatives를 계산하면

$$\frac{dQ_T}{dQ} = \frac{1}{B_T P(0, T)} = \exp \left(- \int_0^T \sigma(u) B(u, T) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma(u)^2 B(u, T)^2 du \right)$$

이므로 $dW^T(t) = \sigma(t) B(t, T) dt + dW(t)$ 이다. 따라서, T -forward measure Q_T 하에서 $x(t)$ 의 확률과정은 다음과 같으며,

$$dx(t) = [-ax(t) - \sigma(t)^2 B(t, T)] dt + \sigma(t) dW^T(t)$$

$s \leq t \leq T$ 에 대해 $x(t)$ 는

$$x(t) = x(s) e^{-a(t-s)} - \int_s^t \sigma(u)^2 e^{-a(t-u)} B(u, T) du + \int_s^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dW^T(u)$$

로 정리된다.

특히, $s = 0$ 이면

$$x(t) = - \int_0^t \sigma(u)^2 e^{-a(t-u)} B(u, T) du + \int_0^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dW^T(u)$$

이다. $t = T$ 이면 $x(T) = - \int_0^T \sigma(u)^2 e^{-a(T-u)} B(u, T) du + \int_0^T \sigma(u) e^{-a(T-u)} dW^T(u)$ 이고, 앞서 설명한 무이표채권의 가격 공식에 의하면

$$P(T, S) = \frac{P^M(0, S)}{P^M(0, T)} \exp \left(-x(T) B(T, S) + \frac{1}{2} \{V(T, S) - V(0, S) + V(0, T)\} \right)$$

이므로 $\ln P(T, S)$ 는 평균 M_P , 분산 V_P^2 인 log-normal 분포를 따르고,

$$M_P = \ln \frac{P^M(0, S)}{P^M(0, T)} + \frac{1}{2} \{V(T, S) - V(0, S) + V(0, T)\} - B(T, S) \int_0^T \sigma(u)^2 e^{-a(T-u)} B(u, T) du,$$

$$V_P^2 = B(T, S)^2 \int_0^T \sigma(u)^2 e^{-2a(T-u)} du$$

한편, $\frac{P(t, S)}{P(t, T)}$ 은 Q_T -martingale이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{P(t, S)}{P(t, T)} = E^{Q_T} \left\{ \frac{P(T, S)}{P(T, T)} \middle| F_t \right\} = \exp \left(M_P + \frac{1}{2} V_P^2 \right) \Leftrightarrow \ln \frac{P(t, S)}{P(t, T)} = M_P + \frac{1}{2} V_P^2$$

따라서, 만기 S 인 무이표채권이 기초자산인 옵션만기가 T 이고 행사가격이 K 인 call 옵션의 t 시점에서의 가치는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} ZBC(t, T, S, K) &= P(t, T) E^{Q_T} \{ (P(T, S) - K)^+ | F_t \} \\ &= P(t, T) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} V_P} (e^z - K)^+ e^{\frac{(z - M_P)^2}{2V_P^2}} dz \\ &= P(t, T) \left[e^{M_P + \frac{1}{2} V_P^2} \Phi \left(\frac{M_P - \ln K + V_P^2}{V_P} \right) - K \Phi \left(\frac{M_P - \ln K}{V_P} \right) \right] \\ &= P(t, S) \Phi \left(\frac{\ln \frac{P(t, S)}{K P(t, T)}}{V_P} + \frac{1}{2} V_P \right) - P(t, T) K \Phi \left(\frac{\ln \frac{P(t, S)}{K P(t, T)}}{V_P} - \frac{1}{2} V_P \right) \end{aligned}$$

(3) Cap 가격

T_{i-1} 시점에서 결정된 금리 $L(T_{i-1}, T_i)$ 에 대하여 $\delta_i(L(T_{i-1}, T_i) - K)^+$, $\delta_i = T_i - T_{i-1}$ 를 T_i 시점에 지급하는 caplet의 가격은

$$\text{Caplet}_i = P(0, T_{i-1})P(T_{i-1}, T_i)\delta_i(L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ = P(0, T_{i-1})(1 - (1 + K\delta_i)P(T_{i-1}, T_i))^+$$

이므로 $x'(t) = r(t) - f(0, t)$ 일 때

$$x'(t) = \int_0^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dW^t(u),$$

$$P(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left(-x'(t)B(t, T) - \frac{1}{2} B(t, T)^2 \int_0^t \sigma(u)^2 e^{-2a(t-u)} du\right)$$

임을 이용하면

$$\text{Caplet}_i = P(0, T_{i-1})N(d_{1i}) - (1 + K\delta_i)P(0, T_i)N(d_{2i})$$

이다. 여기서,

$$d_{1i} = -\frac{\ln \frac{(1 + K\delta_i)P(0, T_i)}{P(0, T_{i-1})}}{\sqrt{V_{T_i}}} + \frac{\sqrt{V_{T_i}}}{2}, \quad d_{2i} = -\frac{\ln \frac{(1 + K\delta_i)P(0, T_i)}{P(0, T_{i-1})}}{\sqrt{V_{T_i}}} - \frac{\sqrt{V_{T_i}}}{2},$$

$$V_{T_i} = B(T_{i-1}, T_i)^2 \int_0^{T_{i-1}} \sigma(u)^2 e^{-2a(T_{i-1}-u)} du$$

이다. 따라서, cap의 가격은

$$\text{Cap} = \sum_{i=1}^n \text{Caplet}_i = \sum_{i=1}^n \{P(0, T_{i-1})N(d_{1i}) - (1 + K\delta_i)P(0, T_i)N(d_{2i})\}$$

이다.

(4) Swaption 가격

변동금리를 수취하고 고정금리 K 를 지급하는 현금교환이 $T_i, i = 1, 2, \dots, n$ 에 발생하는 swap에 대한 swaption 만기가 T_0 일 때, swaption의 가격은 다음과 같은 근사식으로 계산한다.

$$\text{Swaption} = P(0, T_0) \left\{ N\left(-\frac{\ln G}{H\sqrt{V_{T_0}}} + \frac{H\sqrt{V_{T_0}}}{2}\right) - \text{GN}\left(-\frac{\ln G}{H\sqrt{V_{T_0}}} - \frac{H\sqrt{V_{T_0}}}{2}\right) \right\}$$

여기서,

$$G = \frac{P(0, T_n) + K \sum_{i=1}^n \delta_i P(0, T_i)}{P(0, T_0)},$$

$$H = \frac{P(0, T_n)B(T_0, T_n) + K \sum_{i=1}^n \delta_i P(0, T_i)B(T_0, T_n)}{P(0, T_n) + K \sum_{i=1}^n \delta_i P(0, T_i)},$$

$$V_{T_0} = \int_0^{T_0} \sigma(u)^2 e^{-2a(T_0-u)} du$$

이다.

(5) 모수 추정(calibration)

Black 모형으로 추정된 swaption 변동성 $\sigma_1^B, \sigma_2^B, \sigma_3^B, \dots, \sigma_N^B$ 가 주어졌다고 가정하자.

이 때, 가격 공식이 존재하므로 Black 모형의 swaption 가격 $P_1^B(\sigma_1^B), P_2^B(\sigma_2^B), P_3^B(\sigma_3^B), \dots, P_N^B(\sigma_N^B)$ 를 각각 계산할 수 있다. (Black 모형의 가격 공식은 참고문헌 [6]에서 찾아볼 수 있다.) 한편, 1-factor 모형의 회귀모수 a 와 변동성 함수 $\sigma(\cdot)$ 가 주어지면 1-factor 모형의 swaption 가격 $P_1^{HW}(a, \sigma(\cdot)), P_2^{HW}(a, \sigma(\cdot)), P_3^{HW}(a, \sigma(\cdot)), \dots, P_N^{HW}(a, \sigma(\cdot))$ 를 각각 계산할 수 있다.

따라서, a 와 $\sigma(\cdot)$ 를 추정하기 위해서는 다음 식이 최소가 되도록 하면 된다.

$$\sum_{i=1}^N \{P_i^B(\sigma_i^B) - P_i^{HW}(a, \sigma(\cdot))\}^2$$

그런데, 이 문제에서 $\sigma(\cdot)$ 는 유한개의 값에 의존하는 함수로 제한해야 한다. 일반적으로 swaption의 만기를 경계로 하는 계단함수(step function) 또는 선형함수로 가정한다.

(6) 편미분방정식

$V(t, x)$ 를 금리를 기초자산으로 하는 파생상품의 가격이라 하고,

$B_t = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right)$ 라 하면 $\frac{V(t,x)}{B_t}$ 는 마팅게일이므로 Ito lemma 에 의해

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - ax \frac{\partial V}{\partial x} - r(t)V = 0$$

이 성립한다. 이 때, $r(t)$ 는 관측할 수 없는 변수이므로 $U(t,x) = V(t,x)P(0,t)$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - ax \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma(t,x)U &= 0, \\ \gamma(t,x) &= x + \int_0^t \sigma(u)^2 e^{-a(t-u)} B(u,t) du \end{aligned}$$

이 성립한다.

7) 적분 계산

앞에서 설명한 모든 식에 포함된 적분은 다음과 같은 모양으로 정리된다.

$$I(t) = \int_0^t \sigma(u)^2 e^{\alpha u} du$$

그런데, 변동성 함수 $\sigma(t)$ 는 현실적으로 유한개의 값으로 주어지므로 보간 방법에 따라 적분 계산이 달라진다. 간단히 계단함수, 즉,

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_i, & t_{i-1} \leq t < t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sigma_n, & t \geq t_n \end{cases}$$

로 표현된다고 가정하자. 여기서, $t_0 = 0$ 이고 $t_i < t$ 인 i 의 최대값을 m 이라 할 때, 위 적분은

(i) $\alpha \neq 0$ 이면

$$I(t) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\alpha u} du + \sigma_{m+1}^2 \int_{t_m}^t e^{\alpha u} du = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \frac{e^{\alpha t_i} - e^{\alpha t_{i-1}}}{\alpha} + \sigma_{m+1}^2 \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha t_m}}{\alpha}$$

(ii) $\alpha = 0$ 이면

$$I(t) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 (t_i - t_{i-1}) + \sigma_{m+1}^2 (t - t_m)$$

로 계산된다.

3.2 2-factor

상관관계가 있는 두 개의 Gaussian factor와 deterministic function의 합으로 표현되는 short rate model을 소개하고, 이 모형으로부터 유도된 무이표 채권 및 cap, swaption의 가격 공식을 살펴본다. 또, 모수 추정과 유한차분법을 위한 편미분방정식, 그리고 수치적인 적분 계산 방안을 살펴본다.

(1) 금리모형

Risk-adjusted measure \mathbf{Q} 하에서 instantaneous short rate $\mathbf{r(t)}$ 의 움직임은 다음과 같다고 가정하자. (참고문헌 [2]에서는 변동성들을 상수로 가정하여 전개하였다.)

$$\begin{aligned} r(t) &= x(t) + y(t) + \varphi(t), & r(0) &= r_0, \\ dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma(t)dW_1(t), & x(0) &= 0, \\ dy(t) &= -by(t)dt + \eta(t)dW_2(t), & y(0) &= 0, \\ dW_1(t)dW_2(t) &= \rho dt, & -1 &\leq \rho \leq 1 \end{aligned}$$

임의의 시점 $s(< t)$ 에 대해 위 식을 간단한 적분식으로 나타내면 다음과 같다.

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \int_s^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \int_s^t \eta(u) e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t)$$

두 개의 Gaussian factor $x(t), y(t)$ 는 서로 독립인 Brownian motion에 의해

다음과 같이 표현 가능하다.

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma(t)d\tilde{W}_1(t),$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta(t)(\rho d\tilde{W}_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}d\tilde{W}_2(t))$$

따라서 instantaneous short rate의 확률과정은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} r(t) = & x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \int_s^t \sigma(u)e^{-a(t-u)}d\tilde{W}_1(u) \\ & + \rho \int_s^t \eta(u)e^{-b(t-u)}d\tilde{W}_1(u) + \sqrt{1-\rho^2} \int_s^t \eta(u)e^{-b(t-u)}d\tilde{W}_2(u) + \varphi(t) \end{aligned}$$

(2) 무이표채권 가격

만기가 T 인 무이표채권의 t 시점에서의 가격을 $P(t, T)$ 라고 하자. t 시점까지 $x(t), y(t)$ 에 의해 형성된 sigma field를 F_t 라고 정의했을 때, $P(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$P(t, T) = E \left\{ \exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \middle| F_t \right\} = E \left\{ \exp \left(- \int_t^T (x(u) + y(u) + \varphi(u)) du \right) \middle| F_t \right\}$$

F_t 에 대한 조건부 random variable $\int_t^T x(u) + y(u) du$ 는 평균 $x(t)B_1(t, T) + y(t)B_2(t, T)$, 분산 $V(t, T)$ 인 정규분포를 따른다.

$$B_1(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \quad B_2(t, T) = \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b},$$

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \text{Var} \left(\int_t^T \sigma(u)B_1(u, T)dW_1(u) + \int_t^T \eta(u)B_2(u, T)dW_2(u) \middle| F_t \right) \\ = & \int_t^T \sigma(u)^2 B_1(u, T)^2 du + \int_t^T \eta(u)^2 B_2(u, T)^2 du + 2\rho \int_t^T \sigma(u)\eta(u) B_1(u, T)B_2(u, T)du \end{aligned}$$

따라서, risk-adjusted measure Q 하에서 무이표채권의 가격을 나타낸 식은 다음과 같이 정리된다.

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T \varphi(u) du - x(t)B_1(t, T) - y(t)B_2(t, T) + \frac{1}{2} V(t, T) \right)$$

따라서 시장에서 관측된 만기가 T 인 discount factor $P^M(0, T)$ 가 다음을 만족하면, 이는 short rate model이 실제 시장에서 관측되는 term structure를 잘 설명한다는 가정과 일맥상통한다.

$$P^M(0, T) = \exp\left(-\int_0^T \varphi(u)du + \frac{1}{2}V(0, T)\right)$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\int_0^T \varphi(u)du\right) = P^M(0, T)\exp\left(-\frac{1}{2}V(0, T)\right)$$

위의 관계식을 이용하면 함수 φ 에 대해 다음이 성립하므로

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi(u)du\right) = \frac{\exp\left(-\int_0^T \varphi(u)du\right)}{\exp\left(-\int_0^t \varphi(u)du\right)} = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\{V(0, T) - V(0, t)\}\right)$$

따라서, 무이표채권 가격은 다음과 같이 정리된다.

$$P(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left(-x(t)B_1(t, T) - y(t)B_2(t, T) + \frac{1}{2}\{V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)\}\right)$$

한편, $P(0, t) = \exp\left(-\int_0^t \varphi(u)du + \frac{1}{2}V(0, t)\right)$ 이므로 자연로그를 취한 다음 미분하면

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln P(0, t) = -\varphi(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} V(0, t) = x(t) + y(t) - r(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} V(0, t)$$

이므로

$$r(t) - f(0, t) = x(t) + y(t) + \int_0^t \sigma(u)^2 e^{-a(t-u)} B_1(u, t) du + \int_0^t \eta(u)^2 e^{-b(t-u)} B_2(u, t) du$$

$$+ \rho \int_0^t \sigma(u) \eta(u) \{e^{-b(t-u)} B_1(u, t) + e^{-a(t-u)} B_2(u, t)\} du$$

가 성립한다.

만기 S 인 무이표채권이 기초자산이고 옵션만기가 T , 행사가격이 K 인 call 옵션의 t 시점에서의 가격은 다음과 같다.

$$ZBC(t, T, S, K) = E\left\{\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\{P(T, S) - K\}^+ | F_t\right\}$$

위 기대값을 계산하기 위해서는 probability measure를 Radon-Nikodym derivatives에 의해 정의된 risk-adjusted T-forward probability measure Q_T 로 변경하는 작업이 필요하다.

$$ZBC(t, T, S, K) = P(t, T) E^{Q_T} \{ (P(T, S) - K)^+ | F_t \}$$

결론적으로, Q_T 하에서 $x(t), y(t)$ 의 확률과정은 다음과 같으며,

$$dx(t) = [-ax(t) - \sigma(t)^2 B_1(t, T) - \rho\sigma(t)\eta(t)B_2(t, T)]dt + \sigma(t)dW_1^T(t),$$

$$dy(t) = [-ay(t) - \eta(t)^2 B_2(t, T) - \rho\sigma(t)\eta(t)B_1(t, T)]dt + \eta(t)dW_2^T(t),$$

$$dW_1^T(t)dW_2^T(t) = \rho dt$$

$s \leq t \leq T$ 에 대해 $x(t), y(t)$ 는

$$x(t) = x(s)e^{-a(t-s)} - M_x^T(s, t) + \int_s^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dW_1^T(u),$$

$$y(t) = y(s)e^{-b(t-s)} - M_y^T(s, t) + \int_s^t \eta(u) e^{-b(t-u)} dW_2^T(u),$$

$$M_x^T(s, t) = \int_s^t e^{-a(t-u)} \{ \sigma(u)^2 B_1(u, T) - \rho\sigma(u)\eta(u)B_2(u, T) \} du,$$

$$M_y^T(s, t) = \int_s^t e^{-b(t-u)} \{ \eta(u)^2 B_2(u, T) - \rho\sigma(u)\eta(u)B_1(u, T) \} du$$

로 정리된다.

특히, $s = 0$ 이면

$$x(t) = -M_x^T(0, t) + \int_0^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dW_1^T(u),$$

$$y(t) = -M_y^T(0, t) + \int_0^t \eta(u) e^{-b(t-u)} dW_2^T(u)$$

이다. $t = T$ 이면

$$x(T) = -M_x^T(0, T) + \int_0^T \sigma(u) e^{-a(T-u)} dW_1^T(u),$$

$$y(T) = -M_y^T(0, T) + \int_0^T \eta(u) e^{-b(T-u)} dW_2^T(u)$$

이고, 앞서 설명한 무이표채권의 가격 공식에 의하면

$$P(T, S) = \frac{P^M(0, S)}{P^M(0, T)} \exp \left(-x(T)B_1(T, S) - y(T)B_2(T, S) + \frac{1}{2} \{V(T, S) - V(0, S) + V(0, T)\} \right)$$

이므로 $\ln P(T, S)$ 는 평균 M_P , 분산 V_P^2 인 log-normal 분포를 따르고,

$$M_P = \ln \frac{P^M(0, S)}{P^M(0, T)} + \frac{1}{2} \{V(T, S) - V(0, S) + V(0, T)\} - B_1(T, S) \int_0^T \sigma(u)^2 e^{-a(T-u)} B_1(u, T) du \\ - B_2(T, S) \int_0^T \eta(u)^2 e^{-b(T-u)} B_2(u, T) du,$$

$$V_P^2 = B_1(T, S)^2 \int_0^T \sigma(u)^2 e^{-2a(T-u)} du + B_2(T, S)^2 \int_0^T \eta(u)^2 e^{-2b(T-u)} du \\ + 2\rho B_1(T, S) B_2(T, S) \int_0^T \sigma(u) \eta(u) e^{-(a+b)(T-u)} du$$

한편, $\frac{P(t, S)}{P(t, T)}$ 은 Q_T -martingale이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{P(t, S)}{P(t, T)} = E_{Q_T} \left\{ \frac{P(T, S)}{P(T, T)} \middle| F_t \right\} = \exp \left(M_P + \frac{1}{2} V_P^2 \right) \Leftrightarrow \ln \frac{P(t, S)}{P(t, T)} = M_P + \frac{1}{2} V_P^2$$

따라서, 만기 S 인 무이표채권에 내재된 옵션만기가 T 이고 행사가격이 K 인 call 옵션의 t 시점에서의 가치는 다음과 같이 정리된다.

$$ZBC(t, T, S, K) = P(t, T) E_{Q_T} \{ (P(T, S) - K)^+ | F_t \} \\ = P(t, T) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} V_P} (e^z - K)^+ e^{\frac{(z - M_P)^2}{2V_P^2}} dz \\ = P(t, T) \left[e^{M_P + \frac{1}{2} V_P^2} \Phi \left(\frac{M_P - \ln K + V_P^2}{V_P} \right) - K \Phi \left(\frac{M_P - \ln K}{V_P} \right) \right] \\ = P(t, S) \Phi \left(\frac{\ln \frac{P(t, S)}{KP(t, T)}}{V_P} + \frac{1}{2} V_P \right) - P(t, T) K \Phi \left(\frac{\ln \frac{P(t, S)}{KP(t, T)}}{V_P} - \frac{1}{2} V_P \right)$$

(3) Cap 가격

T_{i-1} 시점에서 결정된 금리 $L(T_{i-1}, T_i)$ 에 대하여 $\delta_i(L(T_{i-1}, T_i) - K)^+$, $\delta_i = T_i - T_{i-1}$ 를 T_i 시점에 지급하는 caplet의 가격은

$$\begin{aligned}\text{Caplet}_i &= P(0, T_{i-1})P(T_{i-1}, T_i)\delta_i(L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \\ &= P(0, T_{i-1})(1 - (1 + K\delta_i)P(T_{i-1}, T_i))^+ \\ &= P(0, T_{i-1})N(d_{1i}) - (1 + K\delta_i)P(0, T_i)N(d_{2i})\end{aligned}$$

이다. 여기서

$$d_{1i} = -\frac{\ln \frac{(1 + K\delta_i)P(0, T_i)}{P(0, T_{i-1})}}{\sqrt{V_{T_i}}} + \frac{\sqrt{V_{T_i}}}{2}, \quad d_{2i} = -\frac{\ln \frac{(1 + K\delta_i)P(0, T_i)}{P(0, T_{i-1})}}{\sqrt{V_{T_i}}} - \frac{\sqrt{V_{T_i}}}{2},$$

$$\begin{aligned}V_{T_i} &= B_1(T_{i-1}, T_i)^2 \int_0^{T_{i-1}} \sigma(u)^2 e^{-2a(T_{i-1}-u)} du + B_2(T_{i-1}, T_i)^2 \int_0^{T_{i-1}} \eta(u)^2 e^{-2b(T_{i-1}-u)} du \\ &\quad + 2\rho B_1(T_{i-1}, T_i)B_2(T_{i-1}, T_i) \int_0^{T_{i-1}} \sigma(u)\eta(u) e^{-(a+b)(T_{i-1}-u)} du\end{aligned}$$

이다. 따라서, cap의 가격은

$$\text{Cap} = \sum_{i=1}^n \text{Caplet}_i = \sum_{i=1}^n \{P(0, T_{i-1})N(d_{1i}) - (1 + K\delta_i)P(0, T_i)N(d_{2i})\}$$

이다.

(4) Swaption 가격

변동금리를 수취하고 고정금리 K 를 지급하는 현금교환이 $T_i, i = 1, 2, \dots, n$ 에 발생하는 swap에 대한 swaption 만기가 T_0 일 때, swaption의 가격은 다음과 같은 근사식으로 계산한다.

$$\text{Swaption} = P(0, T) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \left\{ N(-h_1(x)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e^{\kappa_i(x)} N(-h_{2,i}(x)) \right\} dx$$

여기서,

$$h_1(x) = \frac{\bar{y}(x) - \mu_y}{\sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} - \frac{\rho_{xy}(x - \mu_x)}{\sigma_x \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}$$

$$\begin{aligned}
h_{2,i}(x) &= h_1(x) + B_2(T_0, T_i) \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}, \\
\lambda_i(x) &= c_i A(T_0, T_i) e^{-B_1(T_0, T_i)x}, \\
\kappa_i(x) &= -B_2(T_0, T_i) \left\{ \mu_y - \frac{1}{2} (1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 B_2(T_0, T_i) + \rho_{xy} \sigma_y \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right\}, \\
A(T_0, T_i) &= \frac{P^M(0, T_i)}{P^M(0, T_0)} \exp \left(\frac{1}{2} \{V(T_0, T_i) - V(0, T_i) + V(0, T_0)\} \right), \\
\mu_x &= -M_x^{T_0}(0, T_0), \quad \mu_y = -M_y^{T_0}(0, T_0), \\
\sigma_x^2 &= \int_0^{T_0} \sigma(u)^2 e^{-2a(T_0-u)} du, \quad \sigma_y^2 = \int_0^{T_0} \eta(u)^2 e^{-2b(T_0-u)} du, \\
\rho_{xy} &= \frac{\rho \int_0^{T_0} \sigma(u) \eta(u) e^{-(a+b)(T_0-u)} du}{\sigma_x \sigma_y}
\end{aligned}$$

이고, $\bar{y}(x)$ 는 주어진 x 에 대하여

$$\sum_{i=1}^n c_i A(T_0, T_i) e^{-B_1(T_0, T_i)x - B_2(T_0, T_i)\bar{y}(x)} = 1$$

의 유일한 해이고, $c_i = K\delta_i, i = 1, 2, \dots, n-1, c_n = 1 + K\delta_n$ 이다.

(5) 모수 추정(calibration)

Black 모형으로 추정된 swaption 변동성 $\sigma_1^B, \sigma_2^B, \sigma_3^B, \dots, \sigma_N^B$ 가 주어졌다고 가정하자.

이 때, 가격 공식이 존재하므로 Black 모형의 swaption 가격 $P_1^B(\sigma_1^B), P_2^B(\sigma_2^B), P_3^B(\sigma_3^B), \dots, P_N^B(\sigma_N^B)$ 를 각각 계산할 수 있다.(Black 모형의 가격 공식은 참고문헌 [6]에서 찾아볼 수 있다.) 한편, 2-factor 모형의 회귀모수 a, b , 변동성 함수 $\sigma(\cdot), \eta(\cdot)$ 와 상관계수 ρ 가 주어지면 2-factor 모형의 swaption 가격

$$P_1^{HW}(a, b, \sigma(\cdot), \eta(\cdot), \rho), P_2^{HW}(a, b, \sigma(\cdot), \eta(\cdot), \rho), P_3^{HW}(a, b, \sigma(\cdot), \eta(\cdot), \rho), \dots, P_N^{HW}(a, b, \sigma(\cdot), \eta(\cdot), \rho)$$

를 각각 계산할 수 있다.

따라서, $a, b, \sigma(\cdot), \eta(\cdot), \rho$ 를 추정하기 위해서는 다음 식이 최소가 되도록 하면 된다.

$$\sum_{i=1}^N \{P_i^B(\sigma_i^B) - P_i^{HW}(a, b, \sigma(\cdot), \eta(\cdot), \rho)\}^2$$

그런데, 이 문제에서 $\sigma(\cdot)$ 와 $\eta(\cdot)$ 는 유한개의 값에 의존하는 함수로 제한해야 한다. 일반적으로 swaption의 만기를 경계로 하는 계단함수(step function) 또는 선형함수로 가정한다.

(6) 편미분방정식

$V(t, x, y)$ 를 금리를 기초자산으로 하는 파생상품의 가격이라 하고, $B_t = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right)$ 라 하면 $\frac{V(t, x, y)}{B_t}$ 는 마팅계일이므로 Ito lemma 에 의해

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \rho\sigma(t)\eta(t) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\eta(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - ax \frac{\partial V}{\partial x} - ay \frac{\partial V}{\partial y} - r(t)V = 0$$

이 성립한다. 이 때, $r(t)$ 는 관측할 수 없는 변수이므로

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \rho\sigma(t)\eta(t) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\eta(t)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - ax \frac{\partial U}{\partial x} - ay \frac{\partial U}{\partial y} - \gamma(t, x, y)U &= 0, \\ \gamma(t, x, y) &= x(t) + y(t) + \int_0^t \sigma(u)^2 e^{-a(t-u)} B_1(u, t) du + \int_0^t \eta(u)^2 e^{-b(t-u)} B_2(u, t) du \\ &\quad + \rho \int_0^t \sigma(u)\eta(u) \{e^{-b(t-u)} B_1(u, t) + e^{-a(t-u)} B_2(u, t)\} du \end{aligned}$$

이 성립한다.

(7) 적분 계산

앞에서 설명한 모든 식에 포함된 적분은 다음과 같은 모양들로 정리된다.

$$I(t) = \int_0^t \sigma(u)^2 e^{\alpha u} du, \quad I(t) = \int_0^t \eta(u)^2 e^{\alpha u} du, \quad I(t) = \int_0^t \sigma(u)\eta(u) e^{\alpha u} du$$

이는 모두 앞에서 설명한 방법으로 계산하면 된다. $I(t) = \int_0^t \sigma(u)\eta(u) e^{\alpha u} dx$ 의 경우 $\sigma(u)\eta(u) > 0$ 이므로 $\tau(u) = \sqrt{\sigma(u)\eta(u)}$ 로 놓으면 $I(t) = \int_0^t \tau(u)^2 e^{\alpha u} du$ 가 되고 $\sigma(u), \eta(u)$ 가 계단함수이면 $\tau(u)$ 도 계단함수이므로 앞에서 설명한 방법으로 계산하면 된다.

IV. 평가방법

파생상품의 수치해석적인 평가방법으로 널리 사용되고 있는 시뮬레이션과 유한차분법에 대해서 1-factor 모형과 2-factor 모형으로 구분하여 살펴본다.

4.1 시뮬레이션: 1-Factor 모형

확률과정 $dx(t) = -ax(t)dt + \sigma(t)dW(t)$ 을 이산화하면 다음과 같다.

$$x_{t+\Delta t} = x_t - ax_t \Delta t + \sigma(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

여기서 ε 는 표준정규분포의 난수(random number)이다.

따라서, 시간을 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{M-1} < t_M = T$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ 로 등분하면

$$x_{t_{i+1}} = x_{t_i} - ax_{t_i} \Delta t + \sigma(t_i)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

로부터 시나리오 $x_{t_0}, x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3}, \dots, x_{t_i}, \dots, x_{t_{M-1}}, x_{t_M}$ 을 얻을 수 있다.

이 시나리오에서 구하고자 하는 상품의 현금흐름과 할인율들을 계산하고 할인하여 합산한다. 그런데, 필요한 정보는 임의의 i 에 대하여 x_{t_i} 를 이용한 t_i 시점에서의 금리 기간구조이므로 $T(> t_i)$ 에 대하여

$$P(t_i, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t_i)} \exp\left(-x_{t_i} B(t_i, T) + \frac{1}{2}\{V(t_i, T) - V(0, T) + V(0, t_i)\}\right)$$

를 계산하면 된다.

이러한 시행을 충분히 수행하여 평균을 구하면 그 값이 구하고자 하는 상품의 현재 가격이 된다. (시뮬레이션에 대한 일반적인 내용을 위해서는 참고문헌 [3]를 보면 된다.)

4.2 유한차분법: 1-Factor 모형

편미분방정식에 유한차분법(FDM)을 적용하기 위해서 변수 t 는 0부터 만기 T 까지, 변수 x 는 적당한 양수 x_{\max} 에 대하여 영역 $[-x_{\max}, x_{\max}]$ 으로 제한하고 경계조건을 각 경계 부분에서

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=-x_{\max}} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=x_{\max}} = 0$$

으로 설정한다. 또, 변수 t, x 의 영역을 다음과 같이 등분한다.

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{M-1} < t_M = T, \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i,$$

$$-x_{\max} = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_{\max}, \quad \Delta x = x_{j+1} - x_j$$

이 때, $U_{i,j} = U(t_i, x_j)$ 라 하고 근사적으로

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta x)^2}$$

라 하면 편미분방정식은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma(t_i)^2 \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} - ax_j \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta x} - \gamma(x_j, t_i) U_{i,j} = 0$$

양변에 Δt 를 곱하고, $W_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $W_2 = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ 라 하고 이를 정리하면

$$\left\{ -\frac{1}{2} \sigma(t_i)^2 W_2 - \frac{1}{2} ax_j W_1 \right\} U_{i,j-1} + \left\{ 1 + \gamma(t_i, x_j) \Delta t + \sigma(t_i)^2 W_2 \right\} U_{i,j} + \left\{ -\frac{1}{2} \sigma(t_i)^2 W_2 + \frac{1}{2} ax_j W_1 \right\} U_{i,j+1} = U_{i+1,j}$$

가 된다.

한편, 경계조건으로부터

$$U_{i,2} - 2U_{i,1} + U_{i,0} = 0, \quad U_{i,N} - 2U_{i,N-1} + U_{i,N-2} = 0$$

이므로

$$A_i = \frac{1}{2} \sigma(t_i)^2 W_2, \quad B_{i,j} = 1 + \gamma(t_i, x_j) \Delta t, \quad C_j = \frac{1}{2} a x_j W_1$$

라 하면 다음과 같은 행렬방정식이 성립한다.

$$\begin{pmatrix} B_{i,1} - 2C_1 & 2C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -A_i - C_2 & B_{i,2} + 2A_i - A_i + C_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_i - C_3 & B_{i,3} + 2A_i - A_i + C_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_i - C_4 & B_{i,4} + 2A_i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{i,N-3} + 2A_i & A_i + C_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -A_i - C_{N-2} & B_{i,N-2} + 2A_i & A_i + C_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2C_{N-1} & B_{i,N-1} + 2C_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i,1} \\ U_{i,2} \\ U_{i,3} \\ U_{i,4} \\ \vdots \\ U_{i,N-3} \\ U_{i,N-2} \\ U_{i,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{i+1,1} \\ U_{i+1,2} \\ U_{i+1,3} \\ U_{i+1,4} \\ \vdots \\ U_{i+1,N-3} \\ U_{i+1,N-2} \\ U_{i+1,N-1} \end{pmatrix}$$

만기 시점의 payoff로부터 $j = 1, 2, \dots, N$ 에 대하여 $U_{M,j}$ 을 정하고 위 행렬방정식을 풀어 $U_{M-1,j}$ 을 구한다. 계속해서 같은 식으로 위 행렬방정식을 풀어 $U_{M-2,j}, U_{M-3,j}, U_{M-4,j}, \dots, U_{1,j}, U_{0,j}$ 을 순차적으로 구한다. 만약 중간에 현금흐름이 발생하면 각 노드에 발생한 현금흐름을 합산하면서 위 과정을 수행한다. 주의해야 할 점은 $U_{i,j}$ 가 $t = 0$ 에서 가치이므로 현금흐름도 $t = 0$ 에서의 가치로 환산하여 합산해야 한다는 것이다. 시뮬레이션과 비슷한 방법으로 (t_i, x_j) 노드에서 $T(> t_i)$ 에 대하여

$$P(t_i, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t_i)} \exp \left(-x_j B(t_i, T) + \frac{1}{2} \{V(t_i, T) - V(0, T) + V(0, t_i)\} \right)$$

를 계산하여 필요한 현금흐름과 할인율을 구한다. (유한차분법에 대한 일반적인 내용을 위해서는 참고문헌 [9]를 보면 된다.)

4.3 시뮬레이션: 2-Factor 모형

확률과정

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma(t)d\tilde{W}_1(t),$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta(t)(\rho d\tilde{W}_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}d\tilde{W}_2(t))$$

을 이산화하면 다음과 같다.

$$x_{t+\Delta t} = x_t - ax_t\Delta t + \sigma(t)\varepsilon_1\sqrt{\Delta t},$$

$$y_{t+\Delta t} = y_t - by_t\Delta t + \eta(t)(\rho\varepsilon_1\sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2\sqrt{\Delta t})$$

여기서 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 는 표준정규분포의 난수(random number)이다.

따라서, 시간을 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{M-1} < t_M = T$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ 로 등분하면

$$x_{t_{i+1}} = x_{t_i} - ax_{t_i}\Delta t + \sigma(t_i)\varepsilon_1\sqrt{\Delta t},$$

$$y_{t_{i+1}} = y_{t_i} - by_{t_i}\Delta t + \eta(t_i)(\rho\varepsilon_1\sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2\sqrt{\Delta t})$$

로부터 시나리오 $x_{t_0}, x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3}, \dots, x_{t_i}, \dots, x_{t_{M-1}}, x_{t_M}$ 와

$y_{t_0}, y_{t_1}, y_{t_2}, y_{t_3}, \dots, y_{t_i}, \dots, y_{t_{M-1}}, y_{t_M}$ 을 얻을 수 있다.

이 시나리오에서 구하고자 하는 상품의 현금흐름과 할인율들을 계산하고 할인하여 합산한다. 그런데, 필요한 정보는 임의의 i 에 대하여 x_{t_i}, y_{t_i} 를 이용한 t_i 시점에서의 금리 기간구조이므로 $T(> t_i)$ 에 대하여

$$P(t_i, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t_i)} \exp\left(-x_{t_i}B_1(t_i, T) - y_{t_i}B_2(t_i, T) + \frac{1}{2}\{V(t_i, T) - V(0, T) + V(0, t_i)\}\right)$$

를 계산하면 된다.

이러한 시행을 충분히 수행하여 평균을 구하면 그 값이 구하고자 하는 상품의 현재 가격이 된다.

4.4 유한차분법: 2-Factor 모형

편미분방정식에 유한차분법(FDM)을 적용하기 위해서 변수 t 는 0부터 만기 T 까지, 변수 x, y 는 적당한 양수 m 에 대하여 영역 $[-m, m]$ 으로 제한하고 경계 조건을 각 경계 부분에서

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=-m} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=m} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{y=-m} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{y=m} = 0$$

으로 설정한다. 또, 변수 t, x, y 의 영역을 다음과 같이 등분한다.

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{M-1} < t_M = T, \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i,$$

$$-m = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N = m, \quad \Delta x = x_{j+1} - x_j,$$

$$-m = y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_{N-1} < y_N = m, \quad \Delta y = y_{k+1} - y_k$$

Δx 와 Δy 는 동일한 영역을 같은 수만큼 분할하여 같은 값을 갖는다. 즉, $\Delta x = \Delta y$ 이다.

이 때, $U_{j,k}^i = U(t_i, x_j, y_k)$ 라 하고 근사적으로

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_{j,k}^{i+1} - U_{j,k}^i}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{j+1,k}^i - U_{j-1,k}^i}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \approx \frac{U_{j,k+1}^i - U_{j,k-1}^i}{2\Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{j+1,k}^i - 2U_{j,k}^i + U_{j-1,k}^i}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{U_{j,k+1}^i - 2U_{j,k}^i + U_{j,k-1}^i}{(\Delta y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \approx \frac{U_{j+1,k+1}^i - U_{j+1,k-1}^i - U_{j-1,k+1}^i + U_{j-1,k-1}^i}{4\Delta x \Delta y},$$

라 하면 편미분방정식은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} & \frac{U_{j,k}^{i+1} - U_{j,k}^i}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma(t_i)^2 \frac{U_{j+1,k}^i - 2U_{j,k}^i + U_{j-1,k}^i}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} \eta(t_i)^2 \frac{U_{j,k+1}^i - 2U_{j,k}^i + U_{j,k-1}^i}{(\Delta y)^2} \\ & + \rho \sigma(t_i) \eta(t_i) \frac{U_{j+1,k+1}^i - U_{j+1,k-1}^i - U_{j-1,k+1}^i + U_{j-1,k-1}^i}{4\Delta x \Delta y} \\ & - a x_j \frac{U_{j+1,k}^i - U_{j-1,k}^i}{2\Delta x} - b y_k \frac{U_{j,k+1}^i - U_{j,k-1}^i}{2\Delta y} - \gamma(t_i, x_j, y_k) U_{j,k}^i = 0 \end{aligned}$$

양변에 Δt 를 곱하고,

$$W_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad W_2 = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2},$$

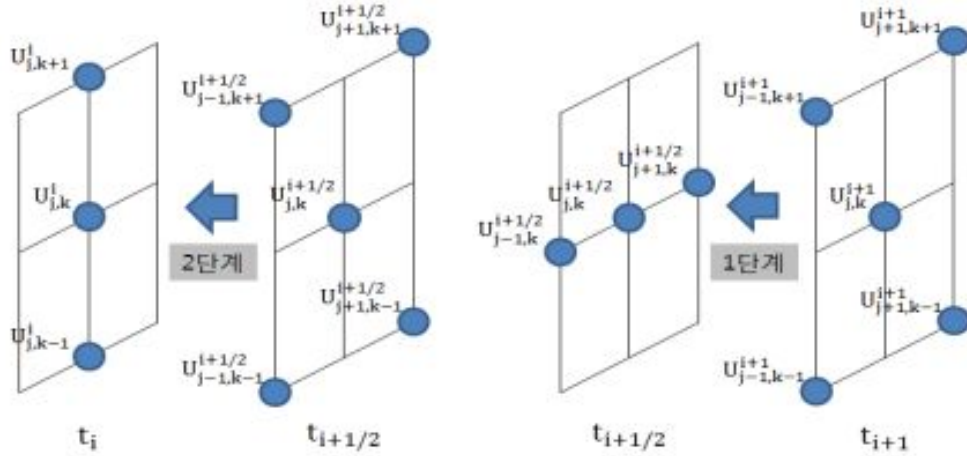
$$A_i = \frac{1}{2} \sigma(t_i)^2 W_2, \quad B_i = \frac{1}{8} \rho \sigma(t_i) \eta(t_i) W_2, \quad C_i = \frac{1}{2} \eta(t_i)^2 W_2,$$

$$D_j = -\frac{1}{2} a x_j W_1, \quad E_k = -\frac{1}{2} b y_k W_1, \quad F_{i,j,k} = \frac{1}{2} \gamma(t_i, x_j, y_k) \Delta t$$

라 하면

$$\begin{aligned} & U_{j,k}^{i+1} - U_{j,k}^i + A_i (U_{j+1,k}^i - 2U_{j,k}^i + U_{j-1,k}^i) + C_i (U_{j,k+1}^i - 2U_{j,k}^i + U_{j,k-1}^i) \\ & + 2B_i (U_{j+1,k+1}^i - U_{j+1,k-1}^i - U_{j-1,k+1}^i + U_{j-1,k-1}^i) + D_j (U_{j+1,k}^i - U_{j-1,k}^i) + E_k (U_{j,k+1}^i - U_{j,k-1}^i) - 2F_{i,j,k} U_{j,k}^i = 0 \end{aligned}$$

이다.



[그림2] operator splitting method

확률 변수가 2개인 경우의 유한차분법을 계산하기 위해서 operator splitting method을 이용할 수 있다. (이 방법에 대해서는 참고문헌 [5]를 보면 되고, 참고문헌 [4]의 ADI 방법을 사용하여도 비슷한 결과를 얻을 수 있다.)

t_{i+1} 시점의 값을 이용하여 t_i 시점의 값을 계산하기 위해 $t_{i+1/2}$ 시점을 거쳐 계산한다. 우선 t_{i+1} 시점의 값을 이용하여 $t_{i+1/2}$ 을 계산하고 다시 $t_{i+1/2}$ 을 이용하여 t_i 시점의 값을 계산한다.

위와 같이 계산하기 위하여 편미분방정식으로부터 유도된 식을 다음과 같이 변형한다.

1단계: t_{i+1} 시점의 값을 이용하여 $t_{i+1/2}$ 의 값을 계산할 때 다음의 식을 이용한다.

$$U_{j,k}^{i+1} - U_{j,k}^{i+1/2} + A_i(U_{j+1,k}^{i+1/2} - 2U_{j,k}^{i+1/2} + U_{j-1,k}^{i+1/2}) + D_j(U_{j+1,k}^{i+1/2} - U_{j-1,k}^{i+1/2}) \\ + B_i(U_{j+1,k+1}^{i+1} - U_{j+1,k-1}^{i+1} - U_{j-1,k+1}^{i+1} + U_{j-1,k-1}^{i+1}) - F_{i,j,k}U_{j,k}^{i+1/2} = 0,$$

이를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& (-A_i + D_j)U_{j-1,k}^{i+1/2} + (1 + 2A_i + F_{i,j,k})U_{j,k}^{i+1/2} + (-A_i - D_j)U_{j+1,k}^{i+1/2} \\
& = U_{j,k}^{i+1} + B_i(U_{j+1,k+1}^{i+1} - U_{j+1,k-1}^{i+1} - U_{j-1,k+1}^{i+1} + U_{j-1,k-1}^{i+1})
\end{aligned}$$

따라서, 모든 $k = 1, 2, \dots, N$ 에 대하여, 경계조건

$$U_{0,k}^{i+1/2} - 2U_{1,k}^{i+1/2} + U_{2,k}^{i+1/2} = 0, \quad U_{N-2,k}^{i+1/2} - 2U_{N-1,k}^{i+1/2} + U_{N,k}^{i+1/2} = 0$$

을 이용하여 1-factor 모형에서와 같이 3-대각행렬을 풀면 된다.

$$\begin{pmatrix}
1 + 2D_1 + F_{i,1,k} & -2D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-A_i + D_2 & 1 + 2A_i + F_{i,2,k} & -A_i - D_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -A_i + D_3 & 1 + 2A_i + F_{i,3,k} & -A_i - D_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -A_i + D_4 & 1 + 2A_i + F_{i,4,k} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + 2A_i + F_{i,N-3,k} & -A_i - D_{N-3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -A_i + D_{N-2} & 1 + 2A_i + F_{i,N-2,k} & -A_i - D_{N-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2D_{N-1} & 1 - 2D_{N-1} + F_{i,N-1,k}
\end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} U_{1,k}^{i+1/2} \\ U_{2,k}^{i+1/2} \\ U_{3,k}^{i+1/2} \\ U_{4,k}^{i+1/2} \\ \vdots \\ U_{N-3,k}^{i+1/2} \\ U_{N-2,k}^{i+1/2} \\ U_{N-1,k}^{i+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,k}^{i+1} + B_i(U_{2,k+1}^{i+1} - U_{2,k-1}^{i+1} - U_{0,k+1}^{i+1} + U_{0,k-1}^{i+1}) \\ U_{2,k}^{i+1} + B_i(U_{3,k+1}^{i+1} - U_{3,k-1}^{i+1} - U_{1,k+1}^{i+1} + U_{1,k-1}^{i+1}) \\ U_{3,k}^{i+1} + B_i(U_{4,k+1}^{i+1} - U_{4,k-1}^{i+1} - U_{2,k+1}^{i+1} + U_{2,k-1}^{i+1}) \\ U_{4,k}^{i+1} + B_i(U_{5,k+1}^{i+1} - U_{5,k-1}^{i+1} - U_{3,k+1}^{i+1} + U_{3,k-1}^{i+1}) \\ \vdots \\ U_{N-3,k}^{i+1} + B_i(U_{N-2,k+1}^{i+1} - U_{N-2,k-1}^{i+1} - U_{N-4,k+1}^{i+1} + U_{N-4,k-1}^{i+1}) \\ U_{N-2,k}^{i+1} + B_i(U_{N-1,k+1}^{i+1} - U_{N-1,k-1}^{i+1} - U_{N-3,k+1}^{i+1} + U_{N-3,k-1}^{i+1}) \\ U_{N-1,k}^{i+1} + B_i(U_{N,k+1}^{i+1} - U_{N,k-1}^{i+1} - U_{N-2,k+1}^{i+1} + U_{N-2,k-1}^{i+1}) \end{pmatrix}$$

2단계: $t_{i+1/2}$ 시점의 값을 이용하여 t_i 의 값을 계산할 때 다음의 식을 이용한 다.

$$\begin{aligned}
& U_{j,k}^{i+1/2} - U_{j,k}^i + C_i(U_{j,k+1}^i - 2U_{j,k}^i + U_{j,k-1}^i) + E_k(U_{j,k+1}^i - U_{j,k-1}^i) \\
& + B_i(U_{j+1,k+1}^{i+1/2} - U_{j+1,k-1}^{i+1/2} - U_{j-1,k+1}^{i+1/2} + U_{j-1,k-1}^{i+1/2}) - F_{i,j,k}U_{j,k}^i = 0
\end{aligned}$$

이를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& (-C_i + E_k)U_{j,k-1}^i + (1 + 2C_i + F_{i,j,k})U_{j,k}^i + (-C_i - E_k)U_{j,k+1}^i \\
& = U_{j,k}^{i+1/2} + B_i(U_{j+1,k+1}^{i+1/2} - U_{j+1,k-1}^{i+1/2} - U_{j-1,k+1}^{i+1/2} + U_{j-1,k-1}^{i+1/2})
\end{aligned}$$

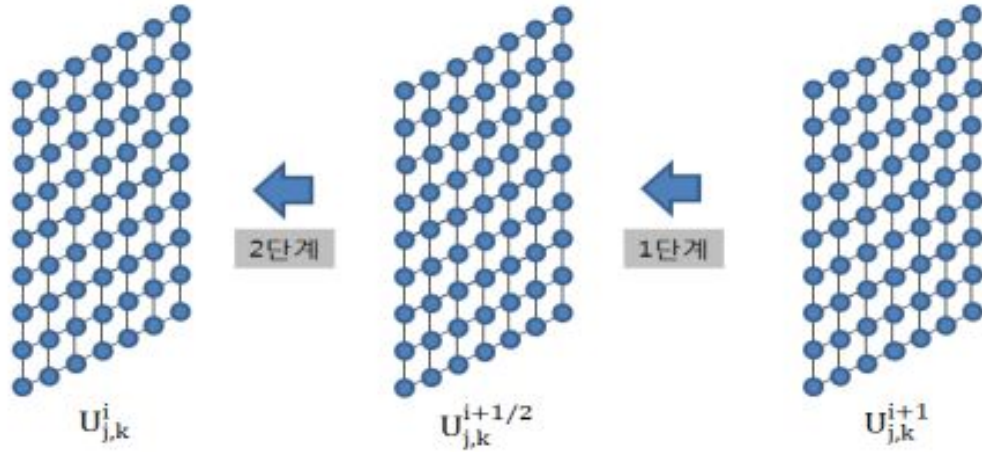
따라서, 모든 $j = 1, 2, \dots, N$ 에 대하여, 경계조건

$$U_{j,0}^i - 2U_{j,1}^i + U_{j,2}^i = 0, \quad U_{j,N-2}^i - 2U_{j,N-1}^i + U_{j,N}^i = 0$$

을 이용하여 1-factor 모형에서와 같이 3-대각행렬을 풀면 된다.

$$\begin{pmatrix} 1+2E_1+F_{i,j,1} & -2E_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -C_1+E_2 & 1+2C_1+F_{i,j,2} & -C_1-E_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_1+E_3 & 1+2C_1+F_{i,j,3} & -C_1-E_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_1+E_4 & 1+2C_1+F_{i,j,4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2C_1+F_{i,j,N-3} & -C_1-E_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -C_1+E_{N-2} & 1+2C_1+F_{i,j,N-2} & -C_1-E_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2E_{N-1} & 1-2E_{N-1}+F_{i,j,N-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_{j,1}^i \\ U_{j,2}^i \\ U_{j,3}^i \\ U_{j,4}^i \\ \vdots \\ U_{j,N-3}^i \\ U_{j,N-2}^i \\ U_{j,N-1}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{j,1}^{i+1/2} + B_i(U_{j+1,2}^{i+1/2} - U_{j+1,0}^{i+1/2} - U_{j-1,2}^{i+1/2} + U_{j-1,0}^{i+1/2}) \\ U_{j,2}^{i+1/2} + B_i(U_{j+1,3}^{i+1/2} - U_{j+1,1}^{i+1/2} - U_{j-1,3}^{i+1/2} + U_{j-1,1}^{i+1/2}) \\ U_{j,3}^{i+1/2} + B_i(U_{j+1,4}^{i+1/2} - U_{j+1,2}^{i+1/2} - U_{j-1,4}^{i+1/2} + U_{j-1,2}^{i+1/2}) \\ U_{j,4}^{i+1/2} + B_i(U_{j+1,5}^{i+1/2} - U_{j+1,3}^{i+1/2} - U_{j-1,5}^{i+1/2} + U_{j-1,3}^{i+1/2}) \\ \vdots \\ U_{j,N-3}^{i+1/2} + B_i(U_{j+1,N-2}^{i+1/2} - U_{j+1,N-4}^{i+1/2} - U_{j-1,N-2}^{i+1/2} + U_{j-1,N-4}^{i+1/2}) \\ U_{j,N-2}^{i+1/2} + B_i(U_{j+1,N-1}^{i+1/2} - U_{j+1,N-3}^{i+1/2} - U_{j-1,N-1}^{i+1/2} + U_{j-1,N-3}^{i+1/2}) \\ U_{j,N-1}^{i+1/2} + B_i(U_{j+1,N}^{i+1/2} - U_{j+1,N-2}^{i+1/2} - U_{j-1,N}^{i+1/2} + U_{j-1,N-2}^{i+1/2}) \end{pmatrix}$$

주의해야 할 점은 1단계에서 모든 $k = 1, 2, \dots, N$ 에 대하여 3-대각행렬을 풀어 모든 j, k 에 대하여 $U_{j,k}^{i+1/2}$ 를 구한 다음, 2단계에서 모든 $j = 1, 2, \dots, N$ 에 대하여 3-대각행렬을 풀어 모든 j, k 에 대하여 $U_{j,k}^i$ 를 구하여야 한다는 것이다. 결국, $U_{j,k}^{i+1}$, $j = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, N$ 로부터 1단계에서 N 번, 2단계에서 N 번 3-대각행렬을 풀어 $U_{j,k}^i$, $j = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, N$ 을 계산할 수 있게 된다.



[그림3] $U_{j,k}^i$ 를 구하는 과정

만기 시점의 payoff로부터 $j = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, N$ 에 대하여 $U_{j,k}^M$ 을 정하고 위 1단계와 2단계를 거쳐 $U_{j,k}^{M-1}$ 을 구한다. 계속해서 같은 식으로 위 행렬방정식을 풀어 $U_{j,k}^{M-2}, U_{j,k}^{M-3}, U_{j,k}^{M-4}, \dots, U_{j,k}^1, U_{j,k}^0$ 을 순차적으로 구한다. 만약 중간에 현금흐름이 발생하면 각 노드에 발생한 현금흐름을 합산하면서 위 과정을 수행한다. 주의해야 할 점은 $U_{j,k}^i$ 가 $t = 0$ 에서 가치이므로 현금흐름도 $t = 0$ 에서의 가치로 환산하여 합산해야 한다는 것이다. 시뮬레이션과 비슷한 방법으로 (t_i, x_j, y_k) 노드에서 $T(> t_i)$ 에 대하여

$$P(t_i, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t_i)} \exp \left(-x_j B_1(t_i, T) - y_k B_2(t_i, T) + \frac{1}{2} \{V(t_i, T) - V(0, T) + V(0, t_i)\} \right)$$

를 계산하여 필요한 현금흐름과 할인율을 구한다.

V. 결과 분석

5.1 산출결과

다음 예제들은 모두 액면금액 10,000원, 시장 데이터로 금리 기간구조 (term-structure)는

t	0.25	0.50	1.00	2.00	3.00	5.00	7.00	10.00
R(0,t)	2.34%	2.50%	2.89%	3.00%	3.10%	3.30%	3.60%	3.80%

[표1] 금리 기간구조

이고, 추정된 모수로 회귀모수는 $a = 0.01$, $b = 0.1$ 이며, 변동성은

t	0.25	0.50	1.00	3.00	5.00	10.00
$\sigma(t)$	1.05%	1.00%	1.04%	1.03%	0.95%	1.05%
$\eta(t)$	0.90%	0.90%	0.90%	0.90%	0.90%	0.90%

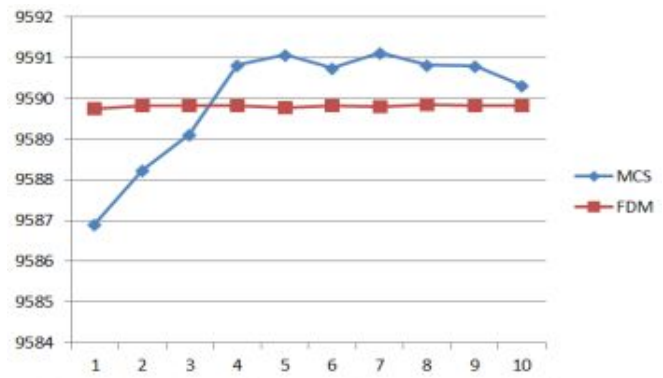
[표2] 변동성

다음과 같이 주어진다. 또한 상관계수 $\rho = 0.5$ 로 가정한다. b , $\eta(t)$, ρ 는 2-factor 모형에서만 사용한다.

(1) Range Accrual Note

이 예제는 3개월 기간 동안 매일 3개월 금리가 2.5%와 3.5% 사이에 있는 일수 n 과 전체 일수 N 에 대하여 구간 말에 $\frac{n}{N} * 5.0\%$ 를 지급하는 3년 만기 range accrual note이다. 다음 그래프의 x 축은 시뮬레이션 회수 $5000 \times i$, $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ 과 유한차분법의 금리축 분할개수 $1000 \times i$, $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ 를 각각 나타내고 y 축은 range accrual note의 가격을 나타낸다.

ntrials	MCS	nx	FDM
5000	9586.925	1000	9589.742
10000	9588.245	2000	9589.812
15000	9589.111	3000	9589.818
20000	9590.817	4000	9589.828
25000	9591.067	5000	9589.781
30000	9590.755	6000	9589.829
35000	9591.131	7000	9589.804
40000	9590.816	8000	9589.844
45000	9590.787	9000	9589.827
50000	9590.333	10000	9589.824



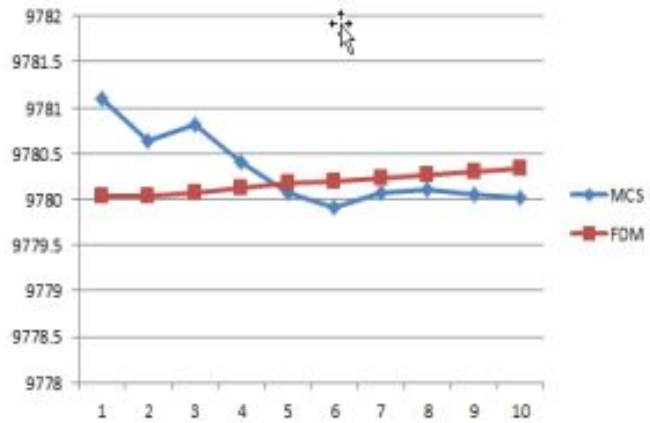
[그림4] Range Accrual Note의 가격

그래프를 보면 시뮬레이션 회수 50000이면 유한차분법과 거의 비슷한 결과를 얻을 수 있다.

(2) Spread Range Accrual Note

이 예제는 3개월 기간 동안 매일 지급주기 3개월인 10년 만기 swap rate와 3년 만기 swap rate 차이가 0%와 0.5% 사이에 있는 일수 n 과 전체 일수 N 에 대하여 구간 말에 $\frac{n}{N} * 3.0\%$ 를 지급하는 1년 만기 spread range accrual note이다. 다음 그래프의 x 축은 시뮬레이션 회수 $1000 \times i, i = 1, 2, 3, \dots, 10$ 과 유한차분법의 금리축 분할개수 $100 + 10 \times i, i = 1, 2, 3, \dots, 10$ 를 각각 나타내고 y 축은 spread range accrual note의 가격을 나타낸다.

ntrials	MCS	nx	FDM
1000	9781.103	110	9780.039
2000	9780.636	120	9780.044
3000	9780.816	130	9780.077
4000	9780.401	140	9780.122
5000	9780.075	150	9780.17
6000	9779.905	160	9780.201
7000	9780.075	170	9780.236
8000	9780.105	180	9780.267
9000	9780.049	190	9780.3
10000	9780.011	200	9780.331



[그림5] Spread Range Accrual Note의 가격

그래프를 보면 시뮬레이션과 유한차분법의 차이가 0.3bp 정도로 결과값이 거의 비슷함을 확인 할 수 있다.

5.2 결론

구조화채권의 가치평가에서 금리 기간구조를 파악하는 일은 매우 중요하다. 금리 기간구조의 파악을 위해 본 논문에서는 Hull White 모델을 사용하였다. 파생상품의 수치해석적인 평가방법으로 보편적으로 사용되는 Monte Carlo Simulation(이하 MCS)과 FDM을 이용하여 1-factor 모형 하에서 Range Accrual Note의 가치를 평가하였고, 2-factor 모형 하에서 Spread Range Accrual Note의 가격을 산출하였다.

시장에서 구조화채권의 가치를 산출 할 때 평가방법으로는 일반적으로는 MCS를 많이 사용한다. 또한 금리 기간구조의 경우에는 보편적으로 Hull White 모델의 1-factor 모형을 사용한다. 시장에서 1-factor 모형을 사용하는 이유는 2-factor 모형에서 calibration의 어려움이 있기 때문으로 보여진다. 본 논문에서는 1-factor 모형에서 더 나아가 2-factor 모형을 사용하여 MCS와 FDM을 구현해 보았다.

1-factor 모형에서 MCS을 50000번 시행했을 때와 FDM에서 금리축의

node를 10000개로 분할했을 때의 Range Accrual Note의 가격은 0.5bp 차이로 수렴하였다. 이는 평가방법의 수치적인 오차의 범위로 판단된다. MCS의 경우 5000번 시행했을 때와 50000번 시행했을 때 Range Accrual Note의 가격이 약0.3bp 차이가 났고, FDM의 경우에는 분할개수가 1000개 일 때와 10000개 일 때 약0.08bp 차이가 확인되었다. MCS 방법의 경우 FDM보다 상대적으로 구현이 용이하지만 시행 횟수에 따라 가격의 차가 컸다. 기초자산이 1개인 FDM의 경우 분할개수를 크게 증가시키지 않아도 비교적 정확한 상품 가격 산출이 가능하였다. Range Accrual Note와 같은 기초자산 1개의 금리상품의 경우 FDM 방법이 좋은 결과가 나온다.

2-factor 모형에서 MCS를 1000번 시행했을 때와 FDM에서 금리축의 분할개수를 200개로 두었을 때의 Spread Range Accrual Note의 가격은 0.3bp로 수렴하였다. 이는 Range Accrual Note의 경우와 같이 수치적인 오차로 판단된다. 또한 기초자산이 2개인 2-factor 모형의 유한차분법의 경우 시간적인 문제로 인해 분할 개수를 충분히 크게 정할 수 없는 한계로도 볼 수 있다. MCS의 경우 1000번 시행했을 때와 10000번 시행했을 때 Range Accrual Note의 가격이 약1bp 차이가 났고, FDM의 경우에는 분할개수가 110개 였을 때와 200개 였을 때 약0.2bp 차이가 확인되었다. MCS 방법의 경우가 FDM보다 큰 가격의 차가 확인되었지만, 기초자산이 2개인 경우 FDM은 구현이 복잡하고, 분할개수를 증가시키는 것에 한계가 존재한다. Spread Range Accrual Note와 같은 기초자산 2개인 금리상품의 경우 MCS의 시행 횟수를 늘려 상품의 가격을 평가하는 방법이 좋은 결과가 나온다.

MCS의 경우 비교적 구현이 용의하고 기초자산의 수에 관계없이 상품의 평가가 가능하다. 또한 본 논문에서 다루지 않은 Callable 상품의 가치 산출이 가능하다. FDM의 경우 가격에 대한 수렴속도가 빠르고 계산시간이 단축된다는 장점이 있다. 그러나 경로의존적인 상품의 평가에 어려움이 있다. Hull

White Model의 1-factor 모형의 경우 추정하는 모수가 2개이고, 2-factor 모형의 경우 추정하는 모수가 5개 이므로 보다 정교하게 금리의 기간구조를 파악할 수 있다. 그러나 2-factor 모형의 경우 FDM에서 분할개수를 충분히 크게 정할 수 없는 한계가 있다. 금리모델과 평가방법의 장점들을 파악하여 다양한 구조화 채권들에 따라 각각 방법을 선택하여 평가하면 보다 더 적절한 가치를 산출하는 방법을 찾을 수 있을 것이라 생각된다.

참고문헌

- [1] M. Baxter & A. Rennie, Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing, Cambridge University Press, 1996
- [2] D. Brigo & F. Mercurio, Interest Rate Models Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit, Springer, 2006
- [3] L. Clewlow & C. Strickland, Implementing Derivatives Models, John Wiley & Sons Ltd, 1998, pp.57-81
- [4] J. Douglas Jr. & H. H. Ratchford Jr., On The Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables, Trans. Amer. Math. Soc. 82, pp.421-439
- [5] D. J. Duffy, Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach, John Wiley & Sons, Ltd, 2006
- [6] J. C. Hull, Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, 2006
- [7] M. Musiela & M. Rutkowski, Martingale Methods in Financial Modelling, Springer-Verlag, 1997
- [8] M. Overhaus, A. Bermudez, H. Buehler, A. Ferraris, C. Jordinson & A. Lamnouar, Equity Hybrid Derivatives, John Wiley & Sons Ltd, 2007, pp.91-111
- [9] P. Wilmott, S. Howison & J. Dewynne, The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction, Cambridge University Press, 1995

Studies on the evaluation of structured notes using the Hull White model

A THESIS SUBMITTED TO THE GRADUATE SCHOOL THE
CATHOLIC UNIVERSITY OF KOREA IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE

BY

SANG-BIN PARK

SEOUL, KOREA

February, 2015

The undersigned certify that have read this thesis and that in their opinion it is satisfactory in scope and quality as a thesis for the degree of master of science

THESIS COMMITTEE

Chairman Doo-Beum Lee

Member In-Tae Jeon

Member Song-Hwa Kwon

February, 2015

GRADUATE SCHOOL
THE CATHOLIC UNIVERSITY OF KOREA
SEOUL, KOREA

ABSTRACT

This paper is an article about the study to evaluate the value of structured notes, such as the Range Accrual Note and Spread Range Accrual Note. In the thesis, there was described with respect to the structure of interest rates Hull-White 1-factor Model and 2-factor Model. I was using a Monte Carlo Simulation and FDM methods that are commonly used as a numerical analytic evaluation method of derivatives.

I had calculated the cost of Range Accrual Note in the Hull-White 1-factor Model, for above-mentioned 2 ways. And then similarly Spread Range Accrual Note in the 2-factor Model.

To understand the difference between MCS and FDM way through to calculate the price of each derivative, and I want to check the evaluation method of structured notes with 1-factor model and the 2-factor model.