

Hull White Simulation 로직

1. 이론적 기초

Callable Swap 등 옵션 내재 스왑을 평가하기 위해 이자율을 시뮬레이션해야함. 이자율의 프로세스는 다음과 같음.

HW 1F Dynamics of Short Rate

$$dr(t) = [\theta(t) - \kappa \cdot r(t)]dt + \sigma(t)dW = \kappa \left[\frac{\theta(t)}{\kappa} - r(t) \right] dt + \sigma(t)dW$$

if $r(t) > \frac{\theta(t)}{\kappa}$ Then Drift have (-) else (+)

$$r(t) = \phi(t) + x(t)$$

$$d\alpha(t) = [\theta(t) - \kappa\phi(t)]dt$$

$$dx(t) = -\kappa x(t)dt + \sigma dW$$

2. Stochastic process $e^{\kappa t} \cdot x_t$ 에 대하여

$$\begin{aligned} d(e^{\kappa t} \cdot x_t) &= \kappa e^{\kappa t} x_t dt + e^{\kappa t} dx_t = \kappa e^{\kappa t} x_t dt + e^{\kappa t} [-\kappa x_t dt + \sigma_t dW] \\ &= \kappa e^{\kappa t} x_t dt + e^{\kappa t} (-\kappa x_t) dt + \sigma_t e^{\kappa t} dW = \sigma_t e^{\kappa t} dW \end{aligned}$$

위 식을 양 변을 T_1 에서 T_2 까지 적분하면

$$e^{\kappa T_2} \cdot X_{T_2} - e^{\kappa T_1} \cdot X_{T_1} = \int_{T_1}^{T_2} \sigma_t e^{\kappa t} dW$$

$$X_{T_2} = \frac{e^{\kappa T_1}}{e^{\kappa T_2}} X_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_t e^{\kappa(t-T_2)} dW = e^{-\kappa(T_2-T_1)} X_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_t e^{\kappa(t-T_2)} dW$$

$$r_{T_2} = e^{-\kappa(T_2-T_1)} X_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_t e^{\kappa(t-T_2)} dW + \phi_{T_2}$$

$$E(x_{T_2} | T_1) = e^{-\kappa(T_2-T_1)} x_{T_1}$$

$$V(x_{T_2} | T_1) = V \left(\int_{T_1}^{T_2} \sigma_t e^{\kappa(t-T_2)} dW | T_1 \right) = E \left(\left(\int_{T_1}^{T_2} \sigma_t e^{\kappa(t-T_2)} dW \right)^2 \middle| T_1 \right)$$

$$= E \left(\int_{T_1}^{T_2} \sigma_t^2 e^{2\kappa(t-T_2)} dt \right) = \int_{T_1}^{T_2} \sigma_t^2 e^{-2\kappa(T_2-t)} dt$$

3. 시뮬레이션 방법) 따라서, 차기 $x(t)$ 은 다음과 같이 계산($x(0) = 0$)

$$x(t) \sim N \left(e^{\kappa(t-s)} x(s), \int_s^t \sigma_u^2 e^{-2\kappa(t-u)} du \right)$$

$$x(t) = e^{\kappa(t-s)} x(s) + \left(\int_s^t e^{-2\kappa(t_{i+1}-\tau)} \sigma^2 d\tau \right)^{0.5} \cdot \epsilon$$

따라서, $x(t_{i+1}) = \underline{XA(t_i)} \cdot x(t_i) + \underline{XV(t_i)} \cdot \epsilon_i$ 형태이며 다음과 같이 구현한다.

$$XA(t_i) = e^{-\kappa(t_{i+1}-t_i)}, \quad XV(t_i) = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-2\kappa(t_{i+1}-\tau)} \sigma^2(\tau) d\tau \right)^{0.5}$$

만약 Vol이 Simple Vol이라면,

$$XV(t_i) = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-2\kappa(t_{i+1}-\tau)} \sigma^2 d\tau \right)^{0.5} = \left(\frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t_{i+1}-t_i)}) \right)^{0.5}$$

```
//A_k = exp(-kappa * (t_(k+1) - t_(k)))
double XA(
    double kappa,
    double t0,
    double t1
)
{
    double A_k = exp(-kappa * (t1 - t0));
    return A_k;
}
```

```

double XY(
    double kappa,
    long NHWVol,
    double* HWVolTerm,
    double* HWVol,
    double t0,
    double t1
)
{
    long i;
    double vol = 0.0;
    double B_k, B_k_Square;
    kappa = max(0.00001, kappa);

    if (NHWVol == 1 || t1 - t0 < 0.25) SimpleVol
    {
        vol = Interpolate_Linear(HWVolTerm, HWVol, NHWVol, t0);
        B_k_Square = vol * vol * 0.5 / kappa * (1.0 - exp(-2.0 * kappa * (t1 - t0)));
    }
    else
    {
        long NInteg = 10.0;
        double u = t0;
        double du = (t1 - t0) / ((double)NInteg);
        B_k_Square = 0.0;
        for (i = 0; i < NInteg; i++)
        {
            vol = Interpolate_Linear(HWVolTerm, HWVol, NHWVol, u);
            B_k_Square += vol * vol * exp(-2.0 * kappa * (t1 - u)) * du;
            u = u + du;
        }
    }

    B_k = sqrt(B_k_Square);
    return B_k;
}

```

$$4. P_{HW}(t, T) = E\left(e^{-\int_t^T r_u du} \middle| F_t\right) = E\left(e^{-\int_t^T (x_u + \phi_u) du} \middle| F_t\right) \approx P^M(t, T) E\left(e^{-\int_t^T x_u du} \middle| F_t\right)$$

x_t 는 정규분포를 따르고, $E\left(e^{-\int_t^T x_u du} \middle| F_t\right)$ 은 정규분포 적률생성함수(MGF) 형태이다.

$$E(e^{tx}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}(\sigma t)^2}$$

여기서 $\int_t^T x(u)du$ 는 평균 $x_i B(t, T)$, 분산 $V(t, T)$ 인 정규분포를 따른다.

$$B(t, T) = \int_t^T e^{-\kappa(\bar{T}-u)} du = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}$$

$$\begin{aligned}
 V(t, T) &= \int_t^T \sigma^2(u) B^2(u, T) du \approx \int_t^T \frac{\sigma^2 [1 - 2e^{-\kappa(T-u)} + e^{-2\kappa(T-u)}]}{\kappa^2} du \\
 &= \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left(T - t + 2 \frac{e^{-\kappa(T-t)} - 1}{\kappa} - \frac{e^{-2\kappa(T-t)} - 1}{2\kappa} \right)
 \end{aligned}$$

따라서 위험 중립 측도에서 $P(t, T)$ 는 정규분포의 적률생성함수(Moment

Generate Function)에 따라 다음과 같다.

$$\times E(e^{tx}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}(\sigma t)^2} \text{ MGF of Normal Distribution,}$$

따라서

$$P_{HW}^{x_i}(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left(-x_i \mathbf{B}(t, T) + \frac{1}{2} \mathbf{V}(t, T)\right)$$

$\therefore P^M(0, t_i)$ 는 현재시점 제로쿠폰채 가격(Discount Factor)

- 소스코드 정보 $B(t, T)$, $V(t, T)$, $V^{TermVol}(t, T)$ 는 다음을 참고

(1) $B(t, T)$

```
double B_s_to_t(
    double kappa,
    double s,
    double t
)
{
    return (1.0 - exp(-kappa * (t - s))) / kappa;
}
```

(2) $V(t, T)$

```
double V_t_T(
    double kappa,
    double kappa2,
    double t,
    double T,
    double vol,
    double vol2
)
{
    return vol * vol2 / (kappa * kappa2 * (T - t + (exp(-kappa * (T - t)) - 1.0) /
        kappa + (exp(-kappa2 * (T - t)) - 1.0) / kappa2 - (exp(-(kappa + kappa2) * (T - t)) - 1.0) / (kappa + kappa2)));
}
```

Simple Volatility일 때

```
double V_t_T(double k1, double k2, double t, double T,
    double* tVol1, double* Vol1, long nVol1,
    double* tVol2, double* Vol2, long nVol2)
{
    long NInteg = 10;
    double RHS = 0.0;
    double du = (T - t) / (double)NInteg;
    double u, v1, v2, term;
    for (long i = 0; i < NInteg; i++)
    {
        u = t + du * (i + 0.5);
        v1 = Interpolate_Linear(tVol1, Vol1, nVol1, u);
        v2 = Interpolate_Linear(tVol2, Vol2, nVol2, u);

        term = v1 * v2 * (1.0 - exp(-k1 * (T - u))) / k1 * (1.0 - exp(-k2 * (T - u))) / k2 * du;
        RHS += term;
    }
    return RHS;
}
```

Term Volatility 일 때

HW 2F Dynamics of Short Rate(HJM 2F Model)

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \alpha(t) + x(t) + y(t) \\
 d\alpha(t) &= [\theta(t) - \kappa_1\alpha(t) - \kappa_2\alpha(t)]dt \\
 dx(t) &= -\kappa_1x(t)dt + \sigma_1dW_1 \\
 dy(t) &= -\kappa_2y(t)dt + \sigma_2dW_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{HW2F}}^{x_i y_i}(t, T) &= \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left(-x_i B_x(t, T) + V_x(t, T) - y_i B_y(t, T) + V_y(t, T) \right. \\
 &\quad \left. + \text{CrossTerm}_{2\text{F}}(t, T) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{CrossTerm}_{2\text{F}}(t, T) &= 2\rho \frac{1}{2} \left(\text{VT}_{2\text{F}}(t, T, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2) - \text{VT}_{2\text{F}}(0, T, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2) \right. \\
 &\quad \left. + \text{VT}_{2\text{F}}(0, t, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{VT}_{2\text{F}}(T_1, T_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2) &\approx \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\kappa_1 \kappa_2} \left(T - t + \frac{e^{-\kappa_1(T-t)} - 1}{\kappa_1} + \frac{e^{-\kappa_2(T-t)} - 1}{\kappa_2} - \frac{e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)(T-t)} - 1}{(\kappa_1 + \kappa_2)} \right)
 \end{aligned}$$

5. 반복되는 연산을 피하기 위해 $XA, XV, B(t, T, \kappa), VT(t, T, \kappa, \{\sigma\})$ 는 시뮬레이션 전에 미리 Generate 해놓고 epsilon을 시뮬레이션을 통해 산출하여 Short-Rate path 시뮬레이션한다.

$$x(t_{i+1}) = XA(t_i, t_{i+1}, \kappa) \cdot x(t_i) + XV(t_i, t_{i+1}, \kappa, \{\sigma\}) \cdot \epsilon_i$$

$$P_{HW}(t, T) = P^M(t, T) e^{-x_t \cdot B(t, T, \kappa) + V(t, T, \kappa)}$$

여기서 XA, XV 는 Short Rate의 시뮬레이션 t마다 dt 간격으로 생성

[ShortRate에 관한 파라미터] = XA, XV is 2D Matrix

2D Matrix Size = (ShortRate시뮬레이션 커브개수, 시뮬레이션의 날짜개수)

Ex) 시뮬레이션 대상 커브가 2개이고 측정 날짜 개수가 30개일 경우

$$XA.shape = (2, 30) \quad , \quad XV.shape = (2, 30)$$

또한 $B(t, T, \kappa)$ 와 $\frac{1}{2}VT(t, T, \kappa, \{\sigma\})$ 는 각 Rcv, Pay Leg의 기초금리의 만기까지 사전에 Generate해야함.

$B_{Rcv}(t_{Simul}, T_{Rcv}, \kappa), B_{Pay}(t_{Simul}, T_{Pay}, \kappa)$ 사이즈와

$VT_{Rcv}(t_{Simul}, T_{Rcv}, \kappa, \{\sigma\}), VT_{Pay}(t_{Simul}, T_{Pay}, \kappa, \{\sigma\})$ 사이즈는

[Simulated Curve에 관한 파라미터] = $B(t, T, \kappa), \frac{1}{2}VT(t, T, \kappa, \{\sigma\})$ is 3D Matrix

3D Matrix Size = (시뮬레이션 커브개수, 시뮬레이션의 날짜개수, 스왑 쿠폰개수)

Ex) 시뮬레이션 대상 커브가 2개이고 측정 날짜 개수가 30개, 기초금리가 만기 5년 분기지급 스왑일 경우

$$B.shape = (2, 30, 20) \quad , \quad VT.shape = (2, 30, 20)$$

6. 이후 기초금리를 계산한다.

$$R_{HW}(t, T) = \frac{1 - P_{HW}(t, T_N)}{\sum_1^N [\Delta T_i \times P_{HW}(t, T_i)]}$$

예를 들어 2년 만기 스왑금리를 기초금리라고 가정한다면,

1년 뒤의 시뮬레이션된 금리 산출과정은 다음과 같다.

$$P_{HW}(1, 1.25) = \frac{P(0, 1.25)}{P(0, 1)} \exp(-x_1 \times B(1, 1.25) + V(1, 1.25))$$

$$P_{HW}(1, 1.5) = \frac{P(0, 1.5)}{P(0, 1)} \exp(-x_1 \times B(1, 1.5) + V(1, 1.5))$$

$$P_{HW}(1, 1.75) = \frac{P(0, 1.75)}{P(0, 1)} \exp(-x_1 \times B(1, 1.75) + V(1, 1.75))$$

$$P_{HW}(1, 2) = \frac{P(0, 2)}{P(0, 1)} \exp(-x_1 \times B(1, 2) + V(1, 2))$$

$$P_{HW}(1, 2.25) = \frac{P(0, 2.25)}{P(0, 1)} \exp(-x_1 \times B(1, 2.25) + V(1, 2.25))$$

$$P_{HW}(1, 2.5) = \frac{P(0, 2.5)}{P(0, 1)} \exp(-x_1 \times B(1, 2.5) + V(1, 2.5))$$

$$P_{HW}(1, 2.75) = \frac{P(0, 2.75)}{P(0, 1)} \exp(-x_1 \times B(1, 2.75) + V(1, 2.75))$$

$$P_{HW}(1, 3) = \frac{P(0, 3)}{P(0, 1)} \exp(-x_1 \times B(1, 3) + V(1, 3))$$

$$R_{HW}^{Swap}(1, 3) = \frac{1 - P_{HW}(1, 3)}{\sum_1^8 [\Delta T_i \times P_{HW}(1, T_i)]}$$

평가가능상품

1. Callable Swap – 1Factor Hull White

Callable Swap은 투자자(또는 발행자)가 스왑을 조기종료 할 수 있는 권리를 가진 스왑이다.

예) Receive Floating CD 91, Pay Fixed 3.5%, 매 년 Receive Leg가 조기종료 옵션 보유

2. Range Accrual Swap (또는 Inverse Accrual Swap) – 1Factor Hull White

Range Accrual Swap의 Structured Leg는 기준금리가 특정 범위 안에 들어오는 일수에 비례하여 쿠폰을 지급하는 상품이다. 쿠폰의 계산식은 다음과 같다.

$$\text{CpnRate}(\%) = \text{고정금리} \times \frac{\text{기준금리가 Range 안에 들어온 일수}}{D(\text{기산일, 기말일})}$$

예) $5.5\% \times \frac{n}{D(T_1, T_2)}$ ($n = 0 < \text{CD} < 6\%$ 인 일수)를 지급하는 Range Accrual

(Inverse Range Accrual의 경우 $0 \leq (\alpha\% - \text{CD91}) \leq 6\%$ 인 일수)

항 목	내 역	
Product	CD Range Accrual Swap	CD Inverse Accrual Swap
Expiry Date	10 Years	10 Years
Coupon Frequency	Quarterly	Quarterly
Structured Coupon Payment	Phase1(~2Y): 5% Phase2(~10Y): $5.5\% \times \frac{n}{D(T_1, T_2)}$ Range: $0 \leq \text{CD91} \leq 6\%$ n: Range를 만족하는 날짜 수	Phase1(~2Y): 5% Phase2(~10Y): $5.5\% \times \frac{n}{D(T_1, T_2)}$ Range: $0 \leq (\alpha\% - \text{CD91}) \leq 6\%$ n: Range를 만족하는 날짜 수
Floating Coupon Payment	KRW 3m CD	KRW 3m CD

3. Power Spread Swap (= CMS Callable Swap 등) – 2Factor Hull White

Power Spread Swap의 Structured Leg는 일정기간(예:3개월)마다 관찰된 두 이종금리의 차(예:CMT10Y-CMT5Y, SOFR10Y-SOFR5Y)에 승수를 곱한 후 미리 정해진 상수를 더하고 cap과 floor를 적용시켜 얻는 상품이다.

$$\text{Max}\left(\text{Min}\left(\alpha + \beta \cdot (\text{기초금리}_1 - \text{기초금리}_2), \text{Cap}\right), \text{Floor}\right)$$

예) ① $\text{Max}(\text{Min}(0.3\% + 12.5 \cdot (\text{KRW } 5\text{yCMS} - \text{KRW } 3\text{yCMS}), 5\%), 0\%)$

② $\text{Max}(\text{Min}(0.3\% + 12.5 \cdot \text{Average}_{T_1, T_2}(\text{EURIBOR}10\text{Y} - \text{EURIBOR}5\text{Y}), 5\%), 0\%)$

항목	내역
Product	CMS Spread Swap
Expiry Date	10 Years
Coupon Frequency	Quarterly
Fixed Coupon Payment	Phase1(~2Y): 5% Phase2(~10Y): Cpn Cpn: $\text{Max}(\text{Min}(0.3\% + 12.5 \cdot (\text{KRW } 5\text{yCMS} - \text{KRW } 3\text{yCMS}), 5\%), 0\%)$
Floating Coupon Payment	KRW 3mCD + 20 bps

4. Spread Range Accrual Swap

Spread Range Accrual Swap의 Structured Leg는 두 이종금리의 차가 특정 범위 안에 들어오는 일수에 비례하여 쿠폰을 지급하는 상품이다. 쿠폰의 계산식은 다음과 같다.

$$\text{CpnRate}(\%) = \text{고정금리} \times \frac{(R_{Min} < R < R_{Max}) \text{을 만족하는 일 수}}{D(\text{기산일, 기말일})}$$

$$R = \alpha + \beta \cdot (\text{기초금리}_1 - \text{기초금리}_2)$$

5. Dual(Triple) Range Accrual Swap – 1Factor HW MultiCurve

Dual Range Accrual Swap의 Structured Leg는 두 이종금리가 특정 범위 안에 동시에 들어오는 일수에 비례하여 쿠폰을 지급하는 상품이다.(Triple의 경우 세 금리가 Range를 만족) 쿠폰의 계산식은 다음과 같다.

$$\text{CpnRate}(\%) = \text{고정금리} \times \frac{(R_{Min} < R_1 < R_{Max}) \& (R_{Min} < R_2 < R_{Max}) \text{ 만족하는 일 수}}{D(\text{기산일, 기말일})}$$

$$R_1 = \alpha + \beta \cdot \text{기초금리}_1$$

$$R_2 = \alpha + \beta \cdot \text{기초금리}_2$$

예) ① $5.5\% \times \frac{n}{D(T_1, T_2)}$ ($n = 0 < CD < 6\%, 0 < \text{SOFR3M} < 6\%$ 인 일수)를 지급하는 Dual Range Accrual

② $7.5\% \times \frac{n}{D(T_1, T_2)}$ ($n = 0 < CD < 6\%, 0 < \text{SOFR3M} < 6\%, 0 < \text{EURIBOR 6M} < 6\%$ 인 일수)를

지급하는 Triple Range Accrual

6. Spread Dual(Triple) Range Accrual Swap – 2Factor(or 1F+2F결합) HW

Spread Dual Range Accrual Swap의 Structured Leg는 두 종류의 이종금리 차이가 특정 범위 안에 동시에 들어오는 일수에 비례하여 쿠폰을 지급하는 상품이다.(Triple의 경우 세 금리 차이가 Range를 만족) 쿠폰의 계산식은 다음과 같다.

$$\text{CpnRate}(\%) = \text{고정금리} \times \frac{(R_{Min} < R_1 < R_{Max}) \& (R_{Min} < R_2 < R_{Max}) \text{ 만족하는 일 수}}{D(\text{기산일, 기말일})}$$

$$R_1 = \alpha + \beta \cdot (\text{기초금리}_1 - \text{기초금리}_2)$$

$$R_2 = \alpha + \beta \cdot (\text{기초금리}_3 - \text{기초금리}_4)$$

예) ① $5.5\% \times \frac{n}{D(T_1, T_2)}$

($n = 0 < \text{KRW CMS5Y} - \text{KRW CMS3Y} < 6\%, 0 < \text{USD SOFR 5Y} - \text{USD SOFR 3Y} < 6\%$ 인 일수)를

지급하는 Dual Range Accrual

$$\textcircled{2} \quad 7.5\% \times \frac{n}{D(T_1, T_2)}$$

(n = 0 < KRW CMS5Y – KRW CMS3Y < 6%, 0 < USD SOFR 5Y – USD SOFR 3Y < 6%,

0 < EURIBOR 6M < 6%인 일수 인 일수)를 지급하는 Triple Range Accrual