Hull White Simulation 로직

1. 이론적 기초

HW 1F Dynamics of Short Rate

$$\mathrm{dr(t)} = [\theta(\mathrm{t}) - \kappa \cdot r(t)]dt + \sigma(t)dW = \kappa\left[\frac{\theta(\mathrm{t})}{\kappa} - r(t)\right]dt + \sigma(t)dW$$

if $r(t) > \frac{\theta(\mathrm{t})}{\kappa}$ Then Drift have (-) else (+)

$$\mathrm{r(t)} = \phi(\mathrm{t}) + x(t)$$

$$d\alpha(t) = [\theta(t) - \kappa\phi(t)]dt$$

$$dx(t) = -\kappa x(t)dt + \sigma dW$$

2. 확률과정 $\mathbf{e^{\kappa t}} \cdot \boldsymbol{x_t}$에 대하여

$$\mathbf{d}(\mathbf{e^{\kappa t}} \cdot \boldsymbol{x_t}) = \kappa e^{\kappa t}xdt + e^{\kappa t}dx_t = \kappa e^{\kappa t}x_t dt + e^{\kappa t}[-\kappa x_t dt + \sigma_t dW]$$
$$= \kappa e^{\kappa t}x_t dt + e^{\kappa t}(-\kappa x_t)dt + \sigma_t e^{\kappa t}dW = \boldsymbol{\sigma_t e^{\kappa t} dW}$$

양 변을 T1에서 T2까지 적분하면

$$\mathrm{e}^{\kappa \mathrm{T}_2} \times x_{T_2} - \mathrm{e}^{\kappa \mathrm{T}_1} \times x_{T_1} = \int_{T1}^{T2} \sigma_t e^{\kappa t} dW$$

$$\boldsymbol{x_{T_2}} = \frac{e^{\kappa T_1}}{e^{\kappa T_2}} x_{T_1} + \int_{T1}^{T2} \sigma_t e^{\kappa(t-T_2)}\, dW = \boldsymbol{e^{-\kappa(T_2-T_1)} x_{T_1}} + \int_{\boldsymbol{T1}}^{\boldsymbol{T2}} \boldsymbol{\sigma_t e^{\kappa(t-T_2)}\, dW}$$

$$r_{\mathrm{T}_2} = e^{-\kappa(T_2-T_1)} x_{T_1} + \int_{T1}^{T2} \sigma_t e^{\kappa(t-T_2)}\, dW + \phi_{T_2}$$

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{T}_2} | T_1\right) = e^{-\kappa(T_2-T_1)} x_{T_1}$$

$$\mathrm{V}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{T}_2} | T_1\right) = V\left(\int_{T_1}^{T_2} \sigma_t e^{\kappa(t-T_2)}\, dW | T_1\right) = \mathrm{E}\left(\left(\int_{T_1}^{T_2} \sigma_t e^{\kappa(t-T_2)}\, dW\right)^2 \middle| T_1\right)$$
$$= \mathrm{E}\left(\int_{T_1}^{T_2} \sigma_t^2 e^{2\kappa(t-T_2)}\, dt\right) = \int_{T_1}^{T_2} \sigma_t^2 e^{-2\kappa(T_2-t)}\, dt$$

3. 따라서, 차기 x(t)은 다음과 같이 계산

$$\mathrm{x(t)} \sim N\left(e^{\kappa(t-s)}x(s), \int_s^t \sigma_u^2 e^{-2\kappa(t-u)}du\right)$$

$$\mathrm{x(t)} = e^{\kappa(t-s)}x(s) + \left(\int_s^t e^{-2\kappa(t_{i+1}-\tau)}\sigma^2 d\tau\right)^{0.5} \cdot \epsilon$$

따라서, $\mathbf{x(t_{i+1}) = XA(t_i) \cdot \boldsymbol{x(t_i)} + \boldsymbol{XV(t_i)} \cdot \boldsymbol{\epsilon_i}}$형태이며 다음과 같이 구현한다.

$$\mathrm{XA(t_i)} = e^{-\kappa(t_{i+1}-t_i)},\ \mathrm{XV(t_i)} = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-2\kappa(t_{i+1}-\tau)}\sigma^2(\tau)d\tau\right)^{0.5}$$

만약 Vol이 Simple Vol이라면,

$$\mathrm{XV(t_i)} = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-2\kappa(t_{i+1}-\tau)}\sigma^2 d\tau\right)^{0.5} = \left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa(t_{i+1}-t_i)}\right)\right)^{0.5}$$

```
//A_k = exp(-kappa * (t_(k+1) - t_(k))
double XA(
    double kappa,
    double t0,
    double t1
)
{
    double A_k = exp(-kappa * (t1 - t0));
    return A_k;
}
```

```
double XV(
    double kappa,
    long NHWVol,
    double* HWVolTerm,
    double* HWVol,
    double t0,
    double t1
)
{
    long i;
    double vol = 0.0;
    double B_k, B_k_Square;
    kappa = max(0.00001, kappa);

    if (NHWVol == 1 || t1 - t0 < 0.25)  SimpleVol
    {
        vol = Interpolate_Linear(HWVolTerm, HWVol, NHWVol, t0);
        B_k_Square = vol * vol * 0.5 / kappa * (1.0 - exp(-2.0 * kappa * (t1 - t0)));
    }
    else
    {
        long NInteg = 10.0;            TermVol
        double u = t0;
        double du = (t1 - t0) / ((double)NInteg);
        B_k_Square = 0.0;
        for (i = 0; i < NInteg; i++)
        {
            vol = Interpolate_Linear(HWVolTerm, HWVol, NHWVol, u);
            B_k_Square += vol * vol * exp(-2.0 * kappa * (t1 - u)) * du;
            u = u + du;
        }
    }

    B_k = sqrt(B_k_Square);
    return B_k;
}
```

4. $\boldsymbol{P_{HW}(t,T) = E\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_u du}\middle|F_t\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T (x_u+\phi_u)du}|F_t\right)}$**이다.**

x_t는 정규분포를 따르고, 위 수식은 정규분포 적률생성함수(MGF) 형태이다.

$$\mathbf{E(e^{tx}) = e^{\mu t+\frac{1}{2}(\sigma t)^2}}$$

여기서 $\int_t^T x(u)du$는 평균 x(t)B(t,T), 분산 V(t,T)인 정규분포를 따른다.

$$\mathrm{B(t,T)} = \int_t^T e^{-\kappa(\bar{T}-u)}du = \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}$$

$$\mathrm{V(t,T)} = \int_t^T \sigma^2(u)B^2(u,T)du \approx \int_t^T \frac{\sigma^2\left[1-2e^{-\kappa(T-u)}+e^{-2\kappa(T-u)}\right]}{\kappa^2}du$$

$$= \frac{\sigma^2}{\kappa^2}\left(\mathrm{T}-\mathrm{t}+2\frac{\mathrm{e}^{-\kappa(\mathrm{T}-\mathrm{t})}-1}{\kappa}-\frac{\mathrm{e}^{-2\kappa(\mathrm{T}-\mathrm{t})}-1}{2\kappa}\right)$$

따라서 위험 중립 측도에서 $\mathrm{P(t,T)}$ 는 정규분포의 적률생성함수(Moment Generate Function)에 따라 다음과 같다.

※ $\mathrm{E(e^{tx})} = e^{\mu t+\frac{1}{2}(\sigma t)^2}$ MGF of Normal Distribution 따라서,

$$\mathrm{P(t,T)} = \hat{E}\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T \phi(u)du - x(t)B(t,T)+\frac{1}{2}V(t,T)}\right)$$

0시점 시장에서 관측된 만기 T인 Zero Bond $P^{\mathrm{M}}(0,T)$가 다음을 만족한다.

$$\mathrm{P^M}(0,T) = \mathrm{e}^{-\int_0^T \alpha(u)du+\frac{1}{2}V(0,T)}$$

$$\mathrm{e}^{-\int_0^T \alpha(u)du} = \mathrm{P^M}(0,T)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(0,T)}$$

따라서

$$\mathrm{e}^{-\int_t^T \alpha(u)du} = \frac{P^{\mathrm{M}}(0,T)}{P^M(0,t)}e^{-\frac{1}{2}(V(0,T)-V(0,t))}$$

$$\mathrm{P_{HW}^{x_i}(t,T)} = \frac{P^{\mathrm{M}}(0,T)}{P^M(0,t)}\exp\left(-x_iB(t,T)+\frac{1}{2}\big(V(t,T)-V(0,T)+V(0,t)\big)\right)$$

$$\mathrm{P_{HW}^{x_i}(t,T)} = \frac{P^{\mathrm{M}}(0,T)}{P^M(0,t)}\exp\big(-x_i \times B(t,T)+QVT(t,T)\big)$$

HW 2F Dynamics of Short Rate

$$\mathrm{r(t)} = \alpha(\mathrm{t}) + x(t) + y(t)$$

$$d\alpha(t) = [\theta(t) - \kappa_1\alpha(t) - \kappa_2\alpha(t)]dt$$

$$dx(t) = -\kappa_1 x(t)dt + \sigma_1 dW_1$$

$$dy(t) = -\kappa_2 y(t)dt + \sigma_2 dW_2$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HW2F}}^{x_i y_i}(\mathrm{t},\mathrm{T}) = \frac{P^{\mathrm{M}}(0,T)}{P^M(0,t)}\exp\Big(-x_i B_x(t,T) + QVT_x(t,T) - y_i B_y(t,T) + QVT_y(t,T) + \mathrm{CrossTerm_{2F}}(\mathrm{t},\mathrm{T})\Big)$$

$$\mathbf{CrossTerm_{2F}(t,T)} = \mathbf{2\rho\frac{1}{2}\big(VT_{2F}(t,T,\kappa_1,\kappa_2,\sigma_1,\boldsymbol{\sigma}_2) - VT_{2F}(0,T,\kappa_1,\kappa_2,\sigma_1,\boldsymbol{\sigma}_2) + VT_{2F}(0,t,\kappa_1,\kappa_2,\sigma_1,\boldsymbol{\sigma}_2)\big)}$$

$$\mathbf{VT_{2F}(T_1,T_2,\kappa_1,\kappa_2,\sigma_1,\boldsymbol{\sigma}_2)} \approx \frac{\boldsymbol{\sigma_1\sigma_2}}{\kappa_1\kappa_2}\left(\mathrm{T}-\mathrm{t}+\frac{\mathrm{e}^{-\kappa_1(\mathrm{T}-\mathrm{t})}-1}{\kappa_1}+\frac{\mathrm{e}^{-\kappa_2(\mathrm{T}-\mathrm{t})}-1}{\kappa_2}-\frac{\mathrm{e}^{-(\kappa_1+\kappa_2)(\mathrm{T}-\mathrm{t})}-1}{(\kappa_1+\kappa_2)}\right)$$

· $B(t,T,\kappa)$와 $VT(t,T,\kappa)$은 다음과 같이 구현한다.

```
double B_s_to_t(
    double kappa,
    double s,
    double t
)
{
    return (1.0 - exp(-kappa * (t - s))) / kappa;
}
```

```
double V_t_T(
    double kappa,
    double kappa2,
    double t,
    double T,
    double vol,
    double vol2
)
{
    return vol * vol2 / (kappa * kappa2) * (T - t + (exp(-kappa * (T - t)) - 1.0) / kappa + (exp(-kappa2 * (T - t)) - 1.0) / kappa2 - (exp(-(kappa + kappa2) * (T - t)) - 1.0) / (kappa + kappa2));
}
```

5. **반복되는 연산을 피하기 위해 $\mathbf{XA}$, $\mathbf{XV}$, $\boldsymbol{B(t,T,\kappa)}$, $\boldsymbol{VT(t,T,\kappa,\{\sigma\})}$는 시뮬레이션 전에 미리 Generate 해놓고 epsilon을 시뮬레이션을 통해 산출하여 Short-Rate path 시뮬레이션한다.**

$$\mathbf{x(t_{i+1})} = \mathbf{XA}(\boldsymbol{t_i, t_{i+1}, \kappa}) \cdot \boldsymbol{x(t_i)} + \boldsymbol{XV(t_i, t_{i+1}, \kappa, \{\sigma\})} \cdot \boldsymbol{\epsilon_i}$$

$$\boldsymbol{P_{HW}(t,T)} = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T (x_u + \phi_u) du} | F_t\right) = \mathbf{e}^{\boldsymbol{-x_t \cdot B(t,T,\kappa) + QVT(t,T,\kappa)}}$$

여기서 $\mathbf{XA}, \mathbf{XV}$는 Short Rate의 시뮬레이션 t마다 dt 간격으로 생성

[ShortRate에 관한 파라미터] = XA, XV is 2D Matrix

2D Matrix Size = (ShortRate시뮬레이션 커브개수, 시뮬레이션의 날짜개수)

Ex) 시뮬레이션 대상 커브가 2개이고 측정 날짜 개수가 30개일 경우

XA.shape = (2, 30) , XV.shape = (2, 30)

또한 $\boldsymbol{B(t,T,\kappa)}$**와** $\boldsymbol{\frac{1}{2} VT(t,T,\kappa\{\sigma\})}$**는** 각 Rcv, Pay Leg의 기초금리의 만기까지 사전에 Generate해야함.

$\boldsymbol{B_{Rcv}(t_{Simul}, T_{Rcv}, \kappa)}$, $\boldsymbol{B_{Pay}(t_{Simul}, T_{Pay}, \kappa)}$ **사이즈와**

$\boldsymbol{VT_{Rcv}(t_{Simul}, T_{Rcv}, \kappa, \{\sigma\}), VT_{Pay}(t_{Simul}, T_{Pay}, \kappa, \{\sigma\})}$ **사이즈는**

[Simulated Curve에 관한 파라미터] = $\boldsymbol{B(t,T,\kappa)}$**,** $\boldsymbol{\frac{1}{2} VT(t,T,\kappa\{\sigma\})}$ **is 3D Matrix**

3D Matrix Size = (시뮬레이션 커브개수, 시뮬레이션의 날짜개수, 스왑 쿠폰개수)

Ex) 시뮬레이션 대상 커브가 2개이고 측정 날짜 개수가 30개, 기초금리가 만기 5년 분기지급 스왑일 경우

$\boldsymbol{B}$.shape = (2, 30, 20) , $\boldsymbol{VT}$.shape = (2, 30, 20)

6. 이후 기초금리를 계산한다.

$$\mathrm{R_{HW}}(\mathrm{t},\mathrm{T}) = \frac{1 - P_{HW}(t, T_N)}{\sum_1^N [\Delta T_i \times P_{HW}(t, T_i)]}$$

예를 들어 2년 만기 스왑금리를 기초금리라고 가정한다면,

1년 뒤의 시뮬레이션된 금리 산출과정은 다음과 같다.

$$\mathrm{P_{HW}}(1,1.25) = \frac{P(0,1.25)}{P(0,1)} \exp\left(-r_1 \times B(1,1.25) + QVT(1,1.25)\right)$$

$$\mathrm{P_{HW}}(1,1.5) = \frac{P(0,1.5)}{P(0,1)} \exp\left(-r_1 \times B(1,1.5) + QVT(1,1.5)\right)$$

$$\mathrm{P_{HW}}(1,1.75) = \frac{P(0,1.75)}{P(0,1)} \exp\left(-r_1 \times B(1,1.75) + QVT(1,1.75)\right)$$

$$\mathrm{P_{HW}}(1,2) = \frac{P(0,2)}{P(0,1)} \exp\left(-r_1 \times B(1,2) + QVT(1,2)\right)$$

$$\mathrm{P_{HW}}(1,2.25) = \frac{P(0,2.25)}{P(0,1)} \exp\left(-r_1 \times B(1,2.25) + QVT(1,2.25)\right)$$

$$\mathrm{P_{HW}}(1,2.5) = \frac{P(0,2.5)}{P(0,1)} \exp\left(-r_1 \times B(1,2.5) + QVT(1,2.5)\right)$$

$$\mathrm{P_{HW}}(1,2.75) = \frac{P(0,2.75)}{P(0,1)} \exp\left(-r_1 \times B(1,2.75) + QVT(1,2.75)\right)$$

$$\mathrm{P_{HW}}(1,3) = \frac{P(0,3)}{P(0,1)} \exp\left(-r_1 \times B(1,3) + QVT(1,3)\right)$$

$$\mathrm{R_{HW}^{\mathit{Swap}}}(1,3) = \frac{1 - P_{HW}(1,3)}{\sum_1^8 [\Delta T_i \times P_{HW}(1, T_i)]}$$

평가가능상품

1. Callable Swap – 1Factor Hull White

Callable Swap은 투자자(또는 발행자)가 스왑을 조기종료 할 수 있는 권리를 가진 스왑이다.

예) Receive Floating CD 91, Pay Fixed 3.5%, 매 년 Receive Leg가 조기종료 옵션 보유

2. Range Accrual Swap (또는 Inverse Accrual Swap) – 1Factor Hull White

Range Accrual Swap의 Structured Leg는 기준금리가 특정 범위 안에 들어오는 일수에 비례하여 쿠폰을 지급하는 상품이다. 쿠폰의 계산식은 다음과 같다.

$$\mathrm{CpnRate}(\%) = \text{고정금리} \times \frac{\text{기준금리가 Range 안에 들어온 일수}}{D\left(\text{기산일}, \text{기말일}\right)}$$

예) $5.5\% \times \frac{\mathrm{n}}{D(T_1,T_2)}$ (n = 0<CD<6% 인 일수)를 지급하는 Range Accrual

(Inverse Range Accrual의 경우 0≤ (α% - CD91) ≤6% 인 일수)

항 목	내 역	
Product	CD Range Accrual Swap	CD Inverse Accrual Swap
Expiry Date	10 Years	10 Years
Coupon Frequency	Quaterly	Quaterly
Structured Coupon Payment	Phase1(~2Y): 5% Phase2(~10Y): $5.5\% \times \frac{\mathrm{n}}{D(T_1,T_2)}$ Range: 0≤ CD91 ≤6% n: Range를 만족하는 날짜 수	Phase1(~2Y): 5% Phase2(~10Y): $5.5\% \times \frac{\mathrm{n}}{D(T_1,T_2)}$ Range: 0≤ (α% - CD91) ≤6% n: Range를 만족하는 날짜 수
Floating Coupon Payment	KRW 3m CD	KRW 3m CD

3. Power Spread Swap (= CMS Callable Swap 등) – 2Factor Hull White

Power Spread Swap의 Structured Leg는 일정기간(예:3개월)마다 관찰된 두 이종금리의 차(예:CMT10Y-CMT5Y, SOFR10Y-SOFR5Y)에 승수를 곱한 후 미리 정해진 상수를 더하고 cap과 floor를 적용시켜 얻는 상품이다.

$$\mathbf{Max}\left(\mathbf{Min}\left(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\cdot\left(\textbf{기초금리}_{\mathbf{1}}-\textbf{기초금리}_{\mathbf{2}}\right),\boldsymbol{Cap}\right),\boldsymbol{Floor}\right)$$

예) ① $\mathrm{Max(Min(0.3\%+12.5\cdot(KRW\ \ 5yCMS-KRW\ \ 3yCMS),5\%),0\%)}$

② $\mathrm{Max}\big(\mathrm{Min}\big(0.3\%+12.5\cdot \mathrm{Average}_{T_1,T_2}(EURIBOR10Y-EURIBOR5Y),5\%\big),0\%\big)$

항목	내역
Product	CMS Spread Swap
Expiry Date	10 Years
Coupon Frequency	Quaterly
Fixed Coupon Payment	Phase1(~2Y): 5% Phase2(~10Y): Cpn Cpn: $\mathrm{Max(Min(0.3\%+12.5\cdot(KRW\ \ 5yCMS-KRW\ \ 3yCMS),5\%),0\%)}$
Floating Coupon Payment	KRW 3mCD + 20 bps

4. Spread Range Accrual Swap

Spread Range Accrual Swap의 Structured Leg는 두 이종금리의 차가 특정 범위 안에 들어오는 일수에 비례하여 쿠폰을 지급하는 상품이다. 쿠폰의 계산식은 다음과 같다.

$$\mathrm{CpnRate(\%)}=\text{고정금리}\times\frac{(R_{Min}<R<R_{Max})\text{을 만족하는 일 수}}{D\left(\textit{기산일, 기말일}\right)}$$

$$\mathbf{R}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\cdot\left(\textbf{기초금리}_{\mathbf{1}}-\textbf{기초금리}_{\mathbf{2}}\right)$$

5. Dual(Triple) Range Accrual Swap – 1Factor HW MultiCurve

Dual Range Accrual Swap의 Structured Leg는 두 이종금리가 특정 범위 안에 동시에 들어오는 일수에 비례하여 쿠폰을 지급하는 상품이다.(Triple의 경우 세 금리가 Range를 만족) 쿠폰의 계산식은 다음과 같다.

$$\text{CpnRate}(\%) = \text{고정금리} \times \frac{(R_{Min} < R_1 < R_{Max})\&(R_{Min} < R_2 < R_{Max})\,\textit{만족하는 일 수}}{D\left(\textit{기산일}, \textit{기말일}\right)}$$

$$\mathbf{R_1} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \cdot \textbf{기초금리}_{\mathbf{1}}$$

$$\mathbf{R_2} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \cdot \textbf{기초금리}_{\mathbf{2}}$$

예) ① $5.5\% \times \frac{\mathrm{n}}{D(T_1,T_2)}$ (n = 0<CD<6%, 0<SOFR3M<6%인 일수)를 지급하는 Dual Range Accrual

② $7.5\% \times \frac{\mathrm{n}}{D(T_1,T_2)}$ (n = 0<CD<6%, 0<SOFR3M<6%, 0<EURIBOR 6M<6%인 일수)를 지급하는 Triple Range Accrual

6. Spread Dual(Triple) Range Accrual Swap – 2Factor(or 1F+2F결합) HW

Spread Dual Range Accrual Swap의 Structured Leg는 두 종류의 이종금리 차이가 특정 범위 안에 동시에 들어오는 일수에 비례하여 쿠폰을 지급하는 상품이다.(Triple의 경우 세 금리 차이가 Range를 만족) 쿠폰의 계산식은 다음과 같다.

$$\text{CpnRate}(\%) = \text{고정금리} \times \frac{(R_{Min} < R_1 < R_{Max})\&(R_{Min} < R_2 < R_{Max})\,\textit{만족하는 일 수}}{D\left(\textit{기산일}, \textit{기말일}\right)}$$

$$\mathbf{R_1} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \cdot \left(\textbf{기초금리}_{\mathbf{1}} - \textbf{기초금리}_{\mathbf{2}}\right)$$

$$\mathbf{R_2} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \cdot \left(\textbf{기초금리}_{\mathbf{3}} - \textbf{기초금리}_{\mathbf{4}}\right)$$

예) ① $5.5\% \times \frac{\mathrm{n}}{D(T_1,T_2)}$

(n = 0<KRW CMS5Y – KRW CMS3Y<6%, 0<USD SOFR 5Y – USD SOFR 3Y<6%인 일수)를 지급하는 Dual Range Accrual

② $7.5\% \times \frac{\mathrm{n}}{D(T_1,T_2)}$

(n = 0<KRW CMS5Y – KRW CMS3Y<6%, 0<USD SOFR 5Y – USD SOFR 3Y<6%,

0<EURIBOR 6M<6%인 일수 인 일수)를 지급하는 Triple Range Accrual