Clase 4. Expresiones Regulares.

Definición.

Equivalencias entre Expresiones Regulares y Autómatas Finitos.

Expresiones Regulares

- Definen los mismos lenguajes que describen los autómatas finitos: los lenguajes regulares.
- Las expresiones regulares ofrecen una forma declarativa para expresar las cadenas que se desea aceptar.

Definición de Expresiones Regulares.

Construcción Recursiva:

Dado un alfabeto Σ, los símbolos $\emptyset$, λ y los operadores $+$ (unión), . (concatenación) y * (clausura) y los paréntesis (y), definimos una EXPRESIÓN REGULAR (ER) sobre el alfabeto Σ como:

BASE:

- El símbolo $\emptyset$ es una ER.
- El símbolo λ es una ER.
- Cualquier símbolo $a \in \Sigma$ es una ER

PASO INDUCTIVO:

- Si α y β son ER, entonces $\alpha + \beta$ es una ER.
- Si α y β son ER, entonces $\alpha \cdot \beta$ es una ER.
- Si α es una ER, entonces α^* es una ER.
- Si α es una ER, entonces (α) es una ER.

Precedencia de los operadores.

1. El operador *
2. El operador de concatenación .
3. El operador de unión +

Lenguaje descripto por las E R.

BASE:

- Si $\alpha = \varnothing$, entonces $L(\alpha) = \varnothing$
- Si $\alpha = \lambda$, entonces $L(\alpha) = \{\lambda\}$
- Si $\alpha = a$ y $(a \in \Sigma)$, entonces $L(\alpha) = \{a\}$

PASO INDUCTIVO:

- Si α y β son ER, entonces $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- Si α y β son ER, entonces $L(\alpha \cdot \beta) = L(\alpha) \cdot L(\beta)$
- Si α es una ER, entonces $L(\alpha^*) = (L(\alpha))^*$
- Si α es una ER, entonces $L((\alpha)) = L(\alpha)$

Equivalencia de Expresiones Regulares.

Dos expresiones regulares r1 y r2 son equivalentes si describen el mismo lenguaje.

$$r1 = r2 \iff \mathrm{L(r1)} = \mathrm{L(r2)}$$

Propiedades de Expresiones Regulares.

1. Asociativa de + y de .

   $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

   $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

2. Conmutativa e idempotencia de +

   $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

   $\alpha + \alpha = \alpha$

3. Distributiva

   $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

   $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

4. Elementos neutros de + y .

   $\alpha + \emptyset = \emptyset + \alpha = \alpha$

   $\alpha\lambda = \lambda\alpha = \alpha$

5. $\emptyset\alpha = \alpha\emptyset = \emptyset$

6. Si$\lambda \in L(\alpha) \Rightarrow \alpha + \lambda = \alpha$

7. $\alpha^* = \lambda + \alpha\alpha^*$

8. $\lambda^* = \lambda$

9. $\emptyset^* = \lambda$

10. $\alpha^*\alpha^* = \alpha^*$

11. $\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha$

12. $(\alpha^*)^* = \alpha^*$

13. $(\alpha^* + \beta^*)^* = (\alpha^*\beta^*)^* = (\alpha + \beta)^* = (\alpha^*\beta)^*\alpha^*$

14. $(\alpha\beta)^*\alpha = \alpha(\beta\alpha)^*$

Demostración de algunas propiedades…

<u>Propiedad Asociativa de +.</u>

$$Si\ \alpha, \beta\ y\ \gamma\ son\ ER, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Demostración:

$Si\ \alpha, \beta\ y\ \gamma\ son\ ER$:

$L((\alpha + \beta) + \gamma) = L(\alpha + \beta) \cup L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta) \cup \mathrm{L}(\gamma)$

$Por\ asociatividad\ de\ la\ unión\ de\ conjuntos$:

$L(\alpha) \cup L(\beta) \cup \mathrm{L}(\gamma) = L(\alpha) \cup \left(L(\beta) \cup L(\gamma)\right) = L(\alpha) \cup \left(L(\beta + \gamma)\right)$

$Por\ lo\ tanto$: $(L(\alpha + \beta) + \gamma) = L(\alpha + (\beta + \gamma))$

$$Es\ decir, (\alpha + \beta) + \gamma) = (\alpha + (\beta + \gamma))$$

Demostración de algunas propiedades…

Neutro de concatenación.

$$Si\ \alpha, es\ una\ ER, \alpha.\lambda = \alpha$$

Demostración:

$Si\ \alpha\ es\ una\ ER:$

$$L(\alpha.\lambda) = L(\alpha).L(\lambda) = L(\alpha).\{\lambda\}$$

$Por\ definición\ de\ concatenación\ de\ lenguajes:$

$L(\alpha).\{\lambda\} = \{\omega = \omega_1.\omega_2 | \omega_1 \in L(\alpha) \wedge \omega_2 \in \{\lambda\}\}$

$Eso\ equivale\ a: \big(L(\alpha\lambda) = \{\omega = \omega_1\lambda = \omega_1 \in L(\alpha)\big) = L(\alpha)$

$$Es\ decir, (\alpha\lambda) = \alpha$$

Demostración de algunas propiedades…

Clausura * de ∅ .

$$\emptyset^* = \lambda$$

Demostración:

$Si\ \alpha\ es\ una\ ER: L(\alpha^*) = \left(L(\alpha)\right)^*$

$En\ este\ caso: L(\emptyset^*) = (L(\emptyset))^* = \emptyset^*$

$Por\ definición\ de\ clausura\ de\ Kleene\ *: L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

$En\ este\ caso: \emptyset^* =$
$\bigcup_{i=0}^{\infty} \emptyset^i = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cup \emptyset^2 \cup \cdots = \{\lambda\} \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots = \{\lambda\}$

$$Es\ decir, \emptyset^* = \lambda$$

Autómatas Finitos y Expresiones Regulares

- Teorema de Análisis de Kleene.
  Todo lenguaje definido mediante un AFD también se define mediante una expresión regular.
- Teorema de Síntesis de Kleene.
  Todo lenguaje definido por una expresión regular puede definirse mediante un AFND-λ

Conversión de autómata finito a expresión regular.

- Método de las R_{ij}^{n} (Hopcroft).
- Eliminación de estados (Hopcroft, Linz)
- Ecuaciones características (Alfonseca, Isasi)

- Veremos el Método de Ecuaciones Características.

Conversión de autómata finito a expresión regular.

- Para obtener la expresión regular a partir de un AF:

1. Obtener las ecuaciones características del autómata.
2. Resolver el sistema de ecuaciones.
3. Obtener la solución para el estado inicial.

Ecuaciones de expresiones regulares.

Es una ecuación del tipo $x_i = \alpha_{io} + \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n$ donde cada coeficiente α_{ij}es una expresión regular.

Una solución para x_i es una expresión regular.

A una ecuación de la forma $X = \alpha X + \beta$ donde α y β son expresiones regulares se la llama ecuación fundamental.

La solución para la ecuación fundamental $\mathrm{X} = \alpha X + \beta$ es $\alpha^*\beta$ y es única si $\lambda \notin L(\alpha)$

Lema de Arden.

Lema de Arden.

$\mathrm{X} = \alpha X + \beta \Leftrightarrow \mathrm{X} = \alpha^{*}\beta$ y es única si $\lambda \notin L(\alpha)$

$$\mathrm{X} = \alpha^{*}\beta \Rightarrow X = \alpha X + \beta$$

$$X = \alpha^{*} \cdot \beta \Rightarrow X = (\alpha^{+} + \lambda) \cdot \beta \Rightarrow X = \alpha^{+} \cdot \beta + \beta \Rightarrow X = (\alpha \cdot \alpha^{*}) \cdot \beta + \beta$$

Eso equivale a: $X = \alpha \cdot (\alpha^{*} \cdot \beta) + \beta$

Es decir, $X = \alpha \cdot X + \beta$

Algoritmo para obtener la ER a partir del AF

Entrada: $M =< Q, \Sigma, q_o, \delta, F >$

Salida: $\alpha, tal\ que\ L(\alpha) = L(M)$

1. Obtener las ecuaciones características del autómata.

$\forall q_i \in Q$, la ecuación tiene en el primer miembro el estado q_i y en el segundo miembro una suma de términos aq_j por cada $\delta(q_i, a) = q_j$.

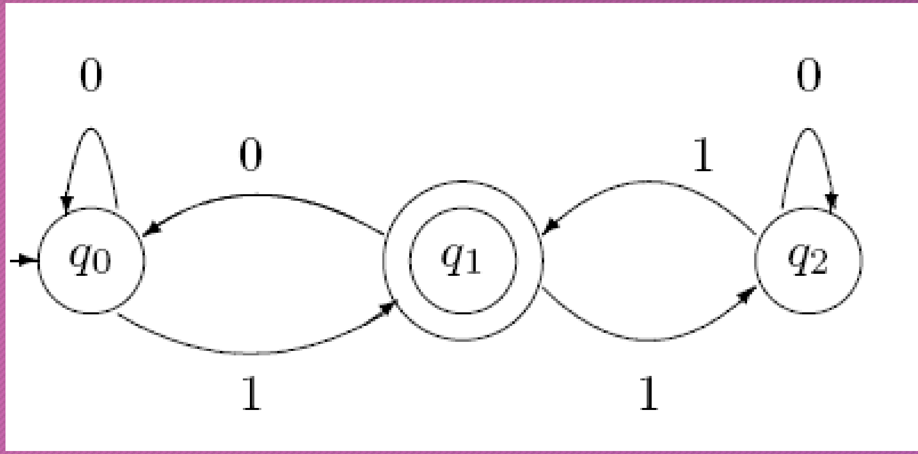
Si $q_i \in F$, agregar el término λ al segundo miembro.

2. Resolver el sistema de ecuaciones.

   Usando lema de Arden y las propiedades

3. $\alpha \leftarrow$solución para la ecuación correspondiente al estado inicial.

Ejemplo:



q0 = 0.q0 + 1.q1 (1)
q1 = 0.q0 + 1.q2 + λ (2)
q2 = 0.q2 + 1.q1 (3)
q2 = 0* 1.q1 por Lema de Arden (4)
q0 = 0* 1.q1 por Lema de Arden (5)
q0 = q2 por (4) y (5) →(6)
q1 = 0.q0 + 1.q0 + λ por (6) →(7)
q0 = 0.q0 + 1.(0.q0 + 1.q0 + λ) por (1) y (7)→(8)
q0 = 0.q0 + 1.0.q0 + 1.1.q0 + 1 por (8) y Distributiva
q0 = (0+1.0+1.1).q0 + 1 por Distributiva

q0 = (0+1.0+1.1)* . 1 por Lema de Arden

Lema de Arden:
La solución de una ecuación $X=\alpha X+\beta$
Es:
$X=\alpha^*\beta$

Conversión de expresión regular a autómata finito.

- Método de ***composición de autómatas***

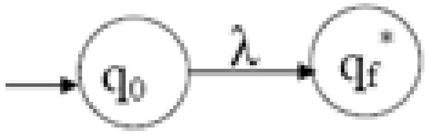
Si L es un lenguaje asociado a la expresión regular α, existe un autómata finito M, tal que L=L(M)=L(α). Este autómata tiene un único estado de aceptación y ningún arco que entre al estado inicial, o que salga del estado de aceptación.

Demostración: Por inducción estructural en R.

Conversión de expresión regular a autómata finito.(cont.)

BASE:

- Si $\alpha = \lambda$, entonces $L(\alpha) = \{\lambda\}$, por lo que existe un autómata finito

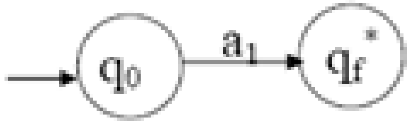


$M = \langle \{q_0, q_f\}, \Sigma, q_0, \delta, \{q_f\} \rangle$ ya que $L(M) = \{\lambda\}$

- Si $\alpha = \varnothing$, entonces $L(\alpha) = \varnothing$, por lo que existe un autómata finito

$M = \langle \{q_0, q_f\}, \Sigma, q_0, \delta, \{q_f\} \rangle$ ya que $L(M) = \emptyset$

- Si $\alpha = a_1$ y $a_1 \in \Sigma$, entonces $L(\alpha) = \{a_1\}$, por lo que existe un autómata finito



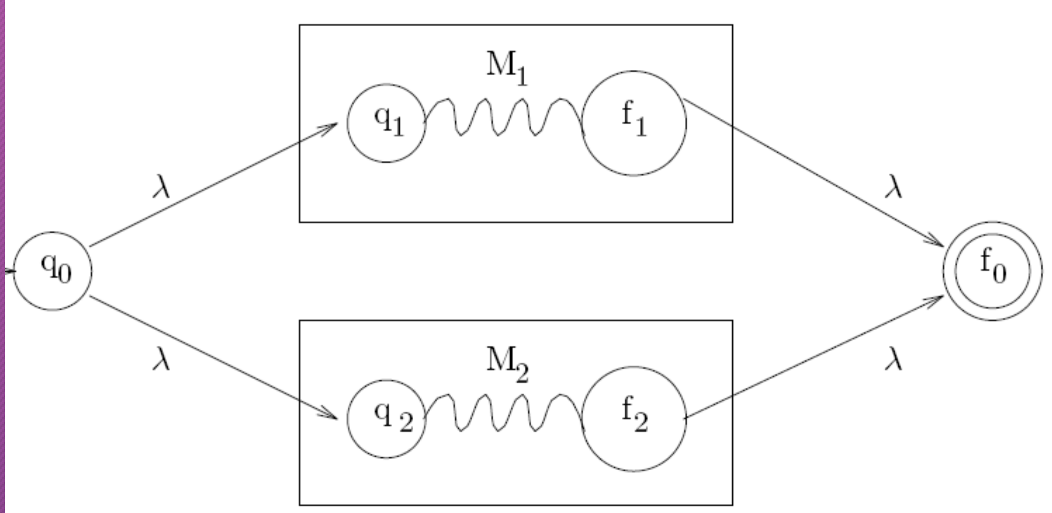
$M = \langle \{q_0, q_f\}, \Sigma, q_0, \delta, \{q_f\} \rangle$, ya que $L(M) = \{a_1\}$

Conversión de expresión regular a autómata finito.(cont.)

PASO INDUCTIVO: Suponemos que el teorema es verdadero para las subexpresiones inmediatas de una ER dada.

1. La expresión regular R = R1+R2. Se cumple el teorema, y M1 es el AFN-λ que existe para R1 y M2 es el el AFN-λ que existe para R2. L(M)=L(R1)U L(R2) para el M de la figura:{

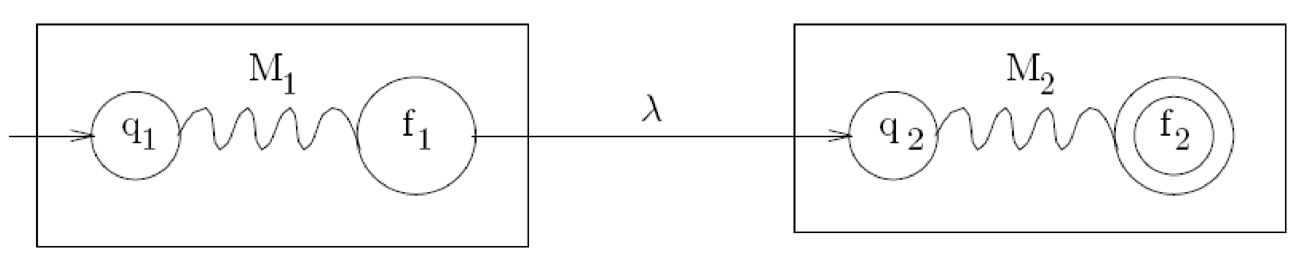
$$M =< Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, f_0\}, \Sigma, \delta, q_0, \{f_0\} >$$
$$\delta(q_0, \lambda) = q_1$$
$$\delta(q_0, \lambda) = q_2$$
$$\forall q_i \in \ F_1 \cup \ F_2 \colon \delta(q_i, \lambda) = f_0$$



Conversión de expresión regular a autómata finito.(cont.)

2. La expresión regular R = R1.R2. Se cumple el teorema, y M1 es el AFN-λ que existe para R1 y M2 es el el AFN-λ que existe para R2. L(M)=L(R1). L(R2) para el M de la figura:

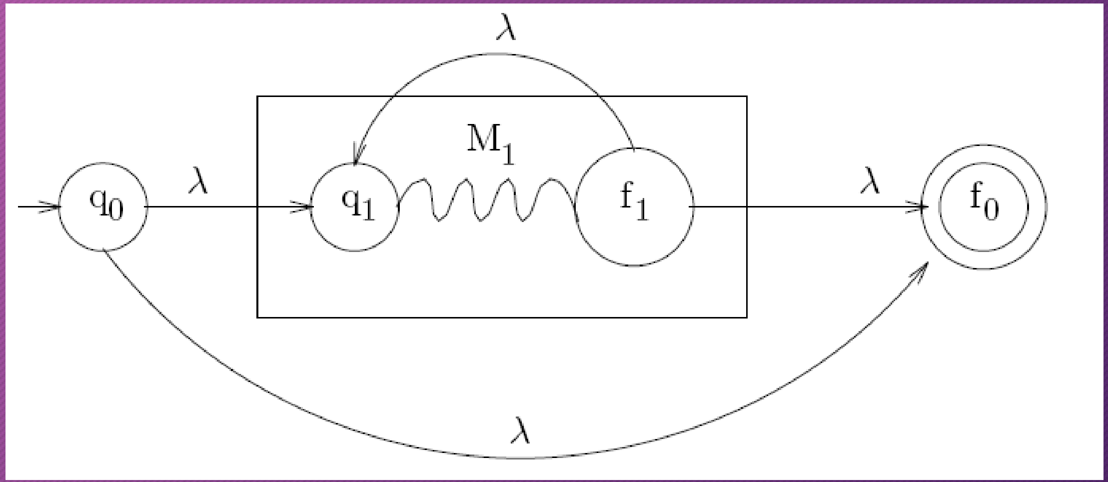
$$M =< Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, q_1, \{f_2\} >$$
$$\delta(f_1, \lambda) = q_2$$



Conversión de expresión regular a autómata finito.(cont.)

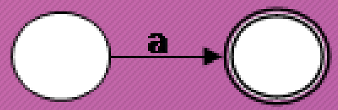
3. La expresión regular R = R1*. Se cumple el teorema, y M1 es el AFN-λ que existe para R1. L(M)=L(R1)* para el M de la figura:

$$M =< Q_1 \cup \{q_0, f_0\}, \Sigma, \delta, q_0, \{f_0\} >$$
$$\delta(q_0, \lambda) = q_1$$
$$\delta(q_0, \lambda) = f_0$$
$$\delta(f_1, \lambda) = q_1$$

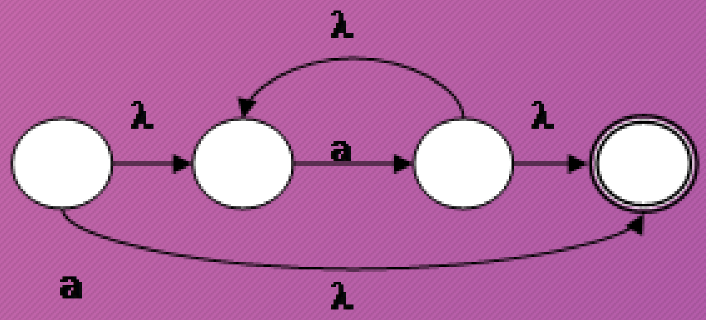


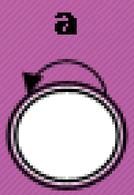
Ejemplo:

- ER=a .a*.b+b
- a

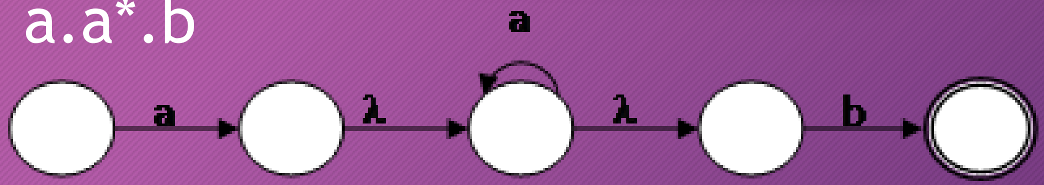


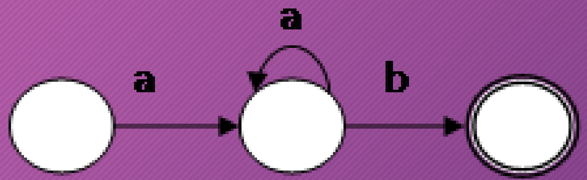
- a*



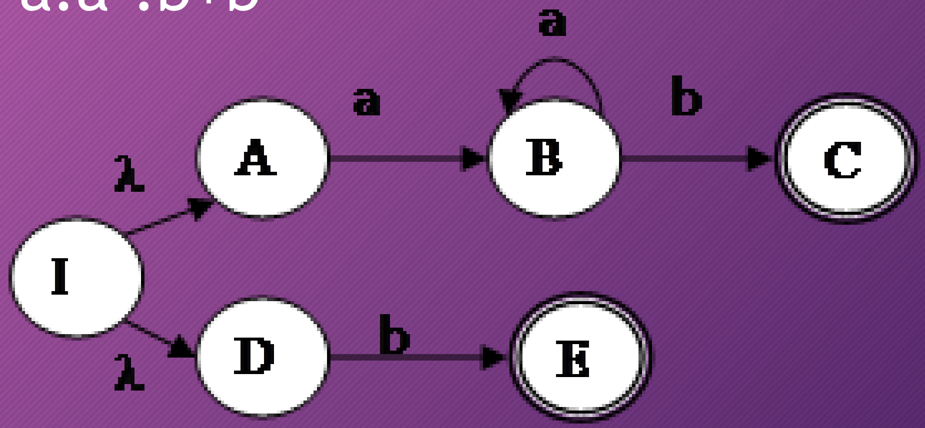


- a.a*.b



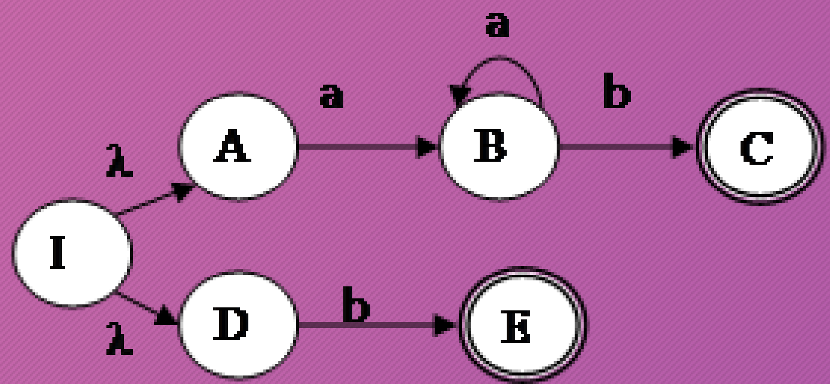


- a.a*.b+b



Ejemplo (cont.)

- ER=a.a*.b+b

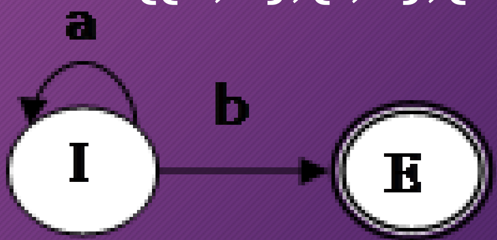


δ	a	b
I	{B}	{E}
A	{B}	{ }
B	{B}	{C}
*C	{ }	{ }
D	{ }	{E}
*E	{ }	{ }

δ	a	b
I	B	*E
B	B	*C
*E	{ }	{ }
*C	{ }	{ }
{ }	{ }	{ }

- Q/E0= {{E,C},{I,B,T}}
- Q/E1= {{E,C},{I,B},{T}}
- Q/E2= {{E,C},{I,B},{T}}

- ER=a.a*.b+b



Ejemplo:

- ER=a.a*.b+b
- Por distributiva: ER=(a.a*+λ).b
- Por propiedad (7) y conmutativa: ER= a*.b