Clase 5. Lenguajes Regulares.

Demostración de que un Lenguaje es Regular.
Demostración de que un Lenguaje NO es Regular.
Propiedades de los Lenguajes Regulares.

Lenguajes Regulares:

- Son lenguajes regulares:
  - Los lenguajes reconocidos por los Autómatas Finitos.
  - Los lenguajes descriptos mediante las Expresiones Regulares.
  - Los lenguajes generados por las Gramáticas Regulares.

¿Cómo demostrar que L es Regular?

- L es Regular si se encuentra:
  - Un Autómata Finito que lo reconozca.

  o:
  - Una Expresión Regular que lo describa.

  o:
  - Una Gramática Regular que lo genere.

Conversión de Autómata Finito a Gramática Regular.

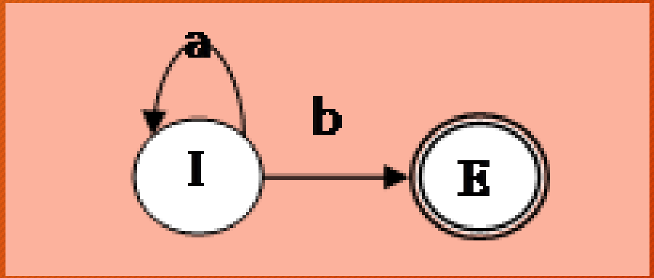
Si L es un lenguaje aceptado por un autómata finito M,

Entonces existe una gramática regular G , tal que L=L(M)=L(G).

<u>Entrada:</u> $\mathrm{M} =< Q, \Sigma, q_0, F, \delta >$

<u>Salida:</u> G=<$Q, \Sigma, q_0, P >$ donde P se obtiene por las reglas:

- Si $\delta(q, a) = p$ añadir a P la regla $q \rightarrow \mathrm{ap}$
- Si $q_f \in F$ añadir a P la regla $q_f \rightarrow \lambda$



$G =< \{I, E\}, \{a, b\}, I, P >$

$P = \{$

$I -> aI \mid bE$

$E -> \lambda$

$\}$

Conversión de Gramática Regular a Autómata Finito.

Si L es un lenguaje generado por una Gramática regular G ,

Entonces existe un Si L es un autómata finito M , tal que L=L(M)=L(G).

<u>Entrada:</u> G= $< V, \Sigma, \mathrm{S}, P >$

<u>Salida:</u> M $=< V \cup \{q_f\}, \Sigma, S, \{q_f\}, \delta >$

donde δ se obtiene por las reglas:

- Si la regla $A \rightarrow \mathrm{aB} \in P \Rightarrow \delta(A, a) = B$
- Si la regla $A \rightarrow a \in P \Rightarrow \delta(A, a) = q_f$
- Si la regla $A \rightarrow \lambda \in P \Rightarrow \delta(A, \lambda) = q_f$

¡La gramática debe ser Lineal Derecha: $A \rightarrow tB$!

¿Cómo demostrar que L NO es Regular?

- Todo lenguaje *finito* es regular.
- Si un lenguaje es ***infinito***, para demostrar que no es regular se usa el lema de bombeo.

Lema de Bombeo para Lenguajes Regulares.

Si L es un **lenguaje regular infinito**

Entonces:

$\exists n / \forall \omega \in L, |\omega| \geq n$, podemos dividir ω en 3 cadenas, $\omega = xyz$ de modo que:

1. $y \neq \lambda$
2. $|xy| \leq n$
3. $\forall k \geq 0: xy^k z \in L$

Demostración del Lema de Bombeo.

Si L es un **lenguaje regular infinito**,

entonces L=L(A) para algún AFD $A =< Q, \Sigma, q_0, \delta, F >$

Donde podría ser $\#Q = n$

Consideremos $\omega \in L, |\omega| \geq n$, por ejemplo $\omega = a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \ (m \geq n)$

Con $a_i \in \Sigma, \forall i$

Para $i = 0,1,2, \ldots n$ definimos el estado p_i como $\hat{\delta}(q_0, a_1 a_2 \ldots a_i) = p_i \ (q_0 = p_0)$

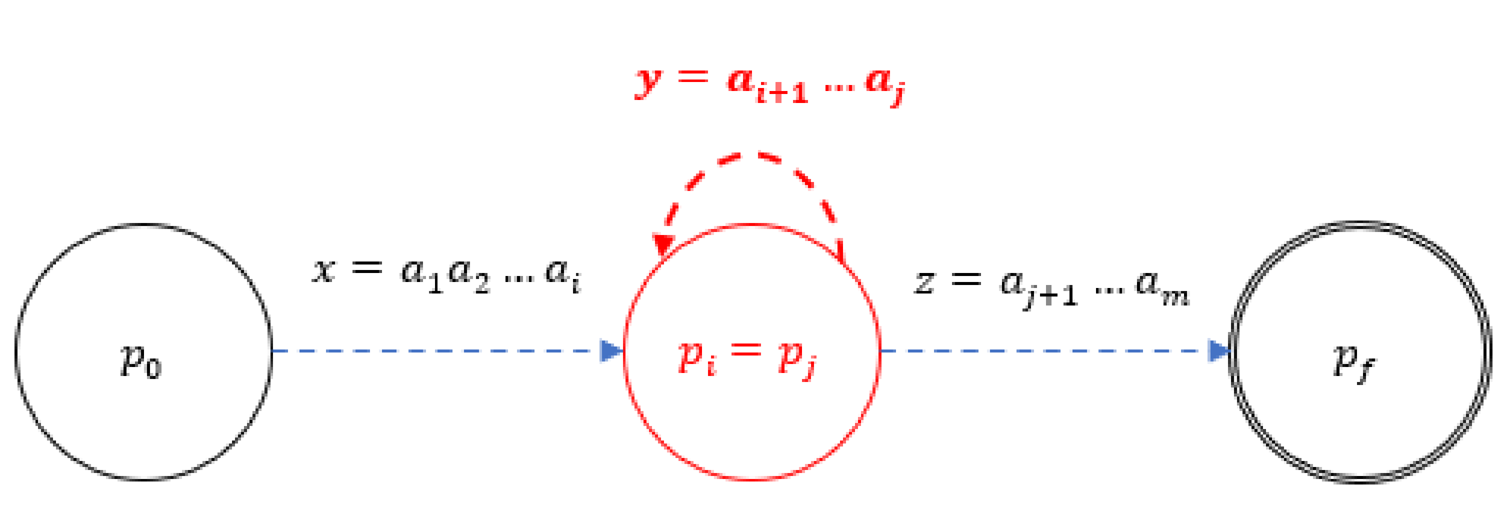
No es posible que todos los $(n+1) p_i$ para $i = 0,1,2, \ldots n$ sean diferentes, pues solo hay n estados distintos.

Por lo tanto, podemos determinar dos enteros distintos i y j, con $0 \leq i < j \leq n$, tales que $p_i = p_j$

Demostración del Lema de Bombeo (cont.)

Podemos entonces descomponer $\omega = xyz$ como sigue:

1. $x = a_1 a_2 \dots a_i$
2. $y = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$
3. $z = a_{j+1} \dots a_m$



Es decir, $\hat{\delta}(q_0, x) = p_i$, $\hat{\delta}(p_i, y) = p_i$ Y z es el resto de la cadena

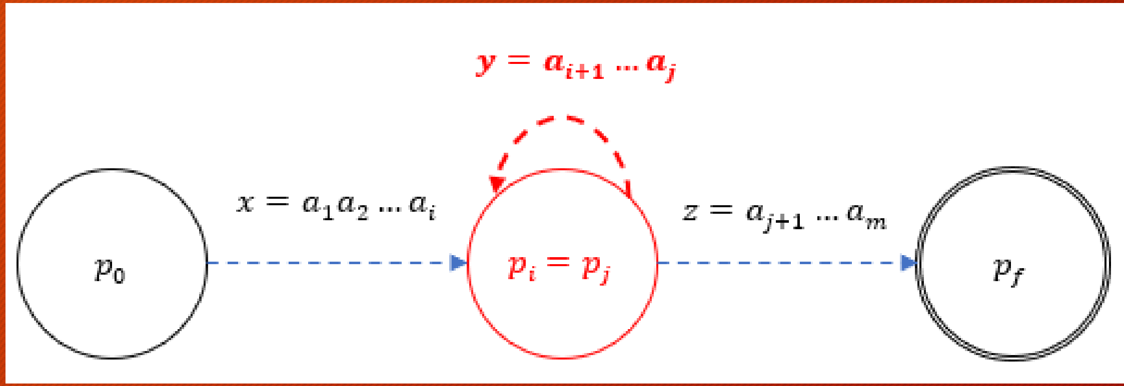
Se observa que x puede estar vacía si $i = 0$, y z puede estarlo si $j = m = n$.

Pero y no puede estar vacía porque $i < j$ (estricto)

Demostración del Lema de Bombeo (cont.2)

¿Qué ocurre si el autómata recibe, para distintos valores de k: xy^kz

Si k = 0,recibe $xz = a_1a_2 \dots a_ia_{j+1} \dots a_m$ y como $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(p_i, z) = p_f$ entonces xz es aceptada por el autómata.



Si k > 0,recibe $xy^kz = a_1a_2 \dots a_ia_{i+1} \dots a_j \dots a_{i+1} \dots a_ja_{j+1} \dots a_m$ y como $\hat{\delta}(q_0, xy \dots yz) = \hat{\delta}(p_i, y \dots yz) = \cdots = \hat{\delta}(p_i, \dots yz) = \hat{\delta}\big(p_i = p_j, z\big) = p_f$ entonces xy^kz es aceptada por el autómata.

Por lo tanto, $\forall k \geq 0, xy^kz \in L(A)$

¿Cómo se usa?

Se supone que el lenguaje es regular y que debe cumplir el lema de bombeo.

El desafío es contradecir el enunciado, mostrando que no se cumple.

Como el enunciado dice: Existe un n, tal que <u>para toda palabra</u> de longitud mayor o igual que n,	Hay que encontrar <u>UNA palabra</u> de longitud mayor o igual que n que no lo cumpla.
<u>existe una</u> partición $\omega = xyz$	Es decir, que pudiendo ser expresada como $\omega = xyz$, de <u>cualquier forma que esa partición</u> se pueda hacer,
1. $y \neq \lambda$ 2. $\|xy\| \leq n$ 3. $xy^kz \in L\ \forall k \geq 0$	1. $y = \lambda$ o bien: 2. $\|xy\| > n$ o bien: 3. $\exists k \geq 0 \| xy^kz \notin L$

Lema de Bombeo

Si L es regular, entonces $\exists \omega \in L\ tal\ que |\omega| \geq N \wedge \exists x, y, z\ tal\ que\ \omega = xyz\ con$:

$$|xy| \leq N$$
$$|y| \geq 1\ (y \neq \lambda)$$
$$xy^i z \in L\ \forall i \geq 0$$

L=$\{\omega \in \{a, b\} / \omega = a^m b^{2m}\}$ no es regular

Supongo que sí lo es, y que cumple lema de bombeo.

Entonces existe una palabra $\omega \in L\ tal\ que |\omega| \geq N,$ por ejemplo $\omega = a^N b^{2N}, cuya\ |\omega| = 3N$

Y $\wedge \exists x, y, z\ tal\ que\ \omega = xyz\ con\ |xy| \leq N, por\ lo\ que\ xy = a^{|xy|} \wedge z = a^{N-|xy|} b^{2N}$

Tiene que comprobarse que: $xy^i z \in L\ \forall i \geq 0$

Por ejemplo para $\mathrm{i} = 0$: $\mathrm{xy}^0 z = a^{|x|} a^{N-|xy|} b^{2N}$

Es decir que $\mathrm{xy}^0 z$= $a^{N-|y|} b^{2N}$ que no puede pertenecer a L ya que $|y| \geq 1$

y por lo tanto la cantidad de b no es el doble de la cantidad de a

Por lo tanto, L no es regular.

Lema de Bombeo (otro ejemplo)

- L=$\{\omega \in \{a\}/\omega = a^m \text{con m} = n^2\}$ no es regular

Supongo que sí lo es, y que cumple lema de bombeo.

Entonces existe una palabra $\omega \in L\ tal\ que |\omega| \geq N,$ por ejemplo $\omega = a^{N^2}, cuya\ |\omega| = N^2$

Y $\exists x, y, z\ tal\ que\ \omega = xyz\ con\ |xy| \leq N, por\ lo\ que\ xy = a^{|xy|} \wedge z = a^{N^2-|xy|}$

Tiene que comprobarse que: $xy^iz \in L\ \forall i \geq 0$

Por ejemplo para $\text{i} = 2$: $\text{x}y^2z = a^{|xy|+|y|}a^{N^2-|xy|} = a^{N^2+|y|}$

Como$|y| \geq 1, N^2 < N^2 + |y|$(a)

Como $|xy| \leq N,\ |y| \leq N \leq 2N < 2N + 1$

Por lo tanto $N^2 + |y| < N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$(b)

por (a) y (b) no es un cuadrado perfecto $N^2 < N^2 + |y| < (N+1)^2$

Es decir que xy^2z= no pertenece a L.

Por lo tanto, L no es regular.

Propiedades de los lenguajes regulares.

Si L y M son lenguajes regulares, entonces también lo es $L \cup M$.

Si L es un lenguaje regular, entonces también lo es L^*.

Si L y M son lenguajes regulares, entonces también lo es $L.M$.

Usando expresiones regulares

Si L es un lenguaje regular, entonces también lo es $\bar{L}$.

Cambiando finales por no finales en el AFD.

Si L y M son lenguajes regulares, entonces también lo es $L \cap M$.

Si L y M son lenguajes regulares, entonces también lo es $L - M$.

Usando la intersección.

Si L es un lenguaje regular, entonces también lo es L^R.

Por inducción

Intersección

Si L y M son lenguajes regulares, entonces también lo es $L \cap M$.

Demostración 1:

Dado que $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$, y ya se vio que la unión y el complemento son regulares.

Demostración 2:

$A_L =< Q_L, \Sigma, \mathrm{q}_L, \delta_L, F_L >$, tal que $L = L(A_L)$ y $A_M =< Q_M, \Sigma, \mathrm{q}_M, \delta_M, F_M >$, tal que $L = L(A_M)$

$A =< Q_L \times Q_M, \Sigma, (q_L, q_M)\, , \delta, F_L \times F_M >$

Con $\delta\big((p,q),a\big) = (\delta_L(p,a), \delta_M(q,a))$, es tal que $L(A)$= $L \cap M$

$\forall\ \omega \in \Sigma^*: \omega \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}\big((q_L, q_M), \omega\big) \in F_L \times F_M$

$\hat{\delta}\big((q_L, q_M), \omega\big) = \Big(\hat{\delta}_L(q_L, \omega), \hat{\delta}_M(q_M, \omega)\Big) \in F_L \times F_M$

Cosa que ocurre si $\hat{\delta}_L(q_L, \omega) \in F_L \wedge \hat{\delta}_M(q_M, \omega) \in F_M$

Es decir: $\omega \in L(A_L) \wedge \omega \in L(A_M) \Leftrightarrow \omega \in L \wedge \omega \in M \Leftrightarrow \omega \in L \cap \mathrm{M}$