Trabajo Práctico Nro. 1
Introducción

Introducción: Alfabetos y lenguajes.

1. Sea Σ={a,b} un alfabeto donde $\#x$ indica la cantidad de elementos del conjunto x.
   a) Hallar:$\Sigma^0, \Sigma^1, \Sigma^+, \Sigma^*$
   b) Hallar:$\#\Sigma^0, \#\Sigma^2$
   c) ¿cuántas palabras de longitud 3 hay en Σ^*? y de longitud k?
   d) si Σ tuviera p símbolos, ¿cuántas palabras de longitud k habría en Σ^*?
2. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y cuál falsa?
   a) $\lambda \in \Sigma$
   b) $\lambda \in \Sigma^*$
   c) $\lambda \in \Sigma^+$
   d) $\{\lambda\} = \Sigma^0$
   e) $\{\lambda, a\} \subseteq \Sigma^1$
   f) $\{a, b\} \subseteq \Sigma^1$
3. Considerando $\Sigma_1 = \{a, b\}$ y $\Sigma_2 = \{b, c\}$, calcular:
   a) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 =$
   b) $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 =$
   c) $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2^+ =$
   d) $(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)^* =$
4. Escribir por lo menos 3 cadenas que pertenezcan a cada uno de los siguientes lenguajes:
   a) $L_1 = \{0^n 1^n / n > 0\}$
   b) $L_2 = \{0^i 1^j / 0 \leq i \leq j\}$
   c) $L_3 = \{x/x \in \Sigma^*, x$ contiene la subcadena ab y no contiene la subcadena $bc\}$, donde $\Sigma = \{a, b, c, d\}$
   d) $L_4 = \{a^n b^m d^{m+n} / n, m \geq 0\}$
5. Describir formalmente los siguientes lenguajes:
   a) el lenguaje formado por $0's$ y $1's$ en el que hay el doble de $0's$ que de $1's$ y todos los $0's$ van delante de los $1's$
   b) el lenguaje formado por palabras que comienzan y terminan en a, teniendo entre medio 3 o más $b's$ seguidas, sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$
6. Sea $L = \{ab, aa, baa\}$, ¿cuáles de las siguientes palabras pertenecen a L^+?
   a) $abaa$
   b) $abab$
   c) $abaabaaabaa$
   d) $baaaabaaaab$

7. Dados los siguientes lenguajes definidos sobre $A = \{a, b, c\}$:
   $L_1 = \{\lambda, a, ab\}$
   $L_2 = \{x/x \in \{a, b, c\}^*$ y x termina en $a\}$
   $L_3 = \{x/x \in \{a, b, c\}^*$ y x termina en $b\}$
   Calcule el lenguaje resultante de las siguientes operaciones:

   a) $L_1^2 \cap L_3 =$
   b) $L_2 \cup L_1 =$
   c) $L_1^R - L_2 =$
   d) $L_1 \cdot L_1^R =$

   Demostraciones por Inducción.

8. Demostrar que el número máximo de nodos que puede haber en un árbol binario de altura n es $2^{n+1} - 1$

9. Dar una definición recursiva del inverso de una cadena.
   Demostrar usando inducción estructural que $(w_1 \cdot w_2)^r = w_2^r \cdot w_1^r$

10. El alfabeto L del sistema axiomático de la lógica proposicional consta de:

    - una cantidad finita de variables proposicionales: $p, q, r, s, ...$ que representan proposiciones simples
    - un conjunto de conectivos lógicos: $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
    - dos signos de puntuación: $\{(,)\}$

    Es decir que $L = \{p, q, r, s, ..., \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$
    La fórmulas proposicionales se construyen de la siguiente manera:

    a) Las variables proposicionales del alfabeto de L son fórmulas bien formadas.
    b) Si ϕ, es una fórmula bien formada de L, entonces $(\neg\phi)$ también lo es.
    c) Si ϕ, y ψ, son fórmulas bien formadas de L, entonces $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$ y $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ también lo son.

    Demostrar que en una fórmula proposicional bien formada la cantidad de paréntesis izquierdos es igual a la cantidad de paréntesis derechos.

11. Un conjunto de conectivos lógicos C es completo si para toda proposición ϕ existe una proposición ϕ' equivalente que sólo contiene conectivos de C. Demostrar, teniendo en cuenta las reglas conocidas de lógica, que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ forman un conjunto completo de conectivos respecto de las fórmulas proposicionales que se construyen mediante las reglas del ejercicio **??**.

12. El conjunto $S \subseteq \{a, b\}^*$ se define de la siguiente manera:

    - $\lambda \in S$
    - si $x \in S \Rightarrow axb \in S$
    - si $x \in S \Rightarrow bxa \in S$
    - si $x \in S, y \in S \Rightarrow xy \in S$

    Demostrar que $S = L$, siendo $L = \{\omega \in \{a, b\}^*/\#_a(\omega) = \#_b(\omega)\}$, es decir en las palabras de L, la cantidad de letras 'a' es igual a la cantidad de letras 'b'.
    Nota 1: Se requiere demostrar que $S \subset L$ y que $L \subset S$
    Nota 2: Para demostrar $L \subset S$ usar inducción completa sobre la cantidad de letras 'a' que hay en la palabra.