# Autómatas, Teoría de Lenguajes y Compiladores (72.39)
## Parcial 1

Lic. Ana María Arias Roig

| Ej 1 | Ej 2 | Ej 3 | Ej 4 | Ej 5 | Nota |
|---|---|---|---|---|---|
| 2,5 | 1,5 | 2 | 2 | 2 | |

**Condición mínima de aprobación: Acumular 6 puntos**
**IMPORTANTE:**

- El examen tiene por objetivo que el alumno demuestre conocimientos adquiridos en la presente asignatura **Autómatas, Teoría de Lenguajes y Compiladores**. Por ello, todos los ejercicios deben resolverse utilizando los algoritmos, conceptos y vocabulario vistos en la clase teórica, en la clase práctica o en la bibliografía.En caso de que un ejercicio no sea resuelto utilizando los algoritmos de la presente asignatura, no será considerado (valdrá **cero**.)
- Se pueden usar propiedades previamente demostradas, pero si no fueron demostradas en clase (o en la práctica) **hay que demostrarlas**.
- Debe usarse la notación y vocabulario propios de la asignatura para justificar o explicar lo realizado. Eso significa que usar un vocabulario coloquial descontará puntos.
- El examen se evalúa por lo que está **escrito**. Por lo tanto, revisar muy bien que las justificaciones y el desarrollo de los ejercicios estén claramente explicados y en el orden correcto.
- Para el caso de tener que obtener un autómata que reconozca el lenguaje asociado a una expresión regular de hasta dos símbolos terminales, se puede escribir directamente. Pero si la expresión regular contiene más de dos símbolos terminales (iguales o distintos) del alfabeto, debe explicar cómo se obtiene el autómata.

**Ejercicios**

1. El conjunto $P_1 \subseteq \Sigma^*$, donde $\Sigma = \{a, b\}$ se define **recursivamente** de la siguiente manera:
   - $\lambda \in P_1$
   - si $x \in P_1 \Rightarrow a(bx)^r \in P_1$
   - si $x \in P_1 \Rightarrow xx \in P_1$

   *a*) **Demostrar** que $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r$, $\forall n \geq 0$.

   *b*) **Demostrar por inducción estructural** que $P_1 \subset L_1 = \{\omega \in \{a,b\}^* / \omega = (ab)^n, n \geq 0\}$

2. Construir el **Autómata Finito Determinístico Mínimo** $M_2$ que acepte el lenguaje $L_2$, tal que $L_2 = \{\omega \in \{0,1,2\}^* / \omega$ NO contiene la subcadena 01 y $\omega$ NO contiene la subcadena 12$\}$.

3. Obtener la **Expresión Regular** correspondiente al autómata $M_3 = \langle\{a,b\}, \{P,Q,R,S\}, \delta, P, \{S\}\rangle$ Con $\delta$ dada por la tabla:

| $\delta$ | $a$ | $b$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|
| $\to P$ | $\{P,Q\}$ | $\{Q\}$ | $\emptyset$ |
| $Q$ | $\{R\}$ | $\{R,Q\}$ | $\{S\}$ |
| $R$ | $\{R\}$ | $\{R\}$ | $\{Q\}$ |
| $*S$ | $\emptyset$ | $\{S\}$ | $\emptyset$ |

4. Obtener el **Autómata Finito Determinístico Mínimo** correspondiente a la expresión regular $R = (ab)^*a + (ba)^*(ba)$

5. **Demostrar** que el lenguaje $L = \{\omega \in \{0,1\}^* / \omega = \alpha\beta, |\alpha| = 2.|\beta| \wedge |\omega|_0 = 2.|\omega|_1\}$ no es regular.

## Ejercicio 1

**a.** Demostrar que $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r$ , $\forall n \geq 0$

Lo vamos a solucionar por induccion en n.

Caso base: $n=0 \Rightarrow (\alpha^r)^0 = \lambda$ y $(\alpha^0)^r = \lambda^r = \lambda \Rightarrow (\alpha^r)^0 = (\alpha^0)^r \Rightarrow$ se cumple

Paso inductivo:

Definimos $P(k): (\alpha^r)^k = (\alpha^k)^r$ , $\forall k \geq 0$

HI) $P(k)$, $k \leq n$

TI) $P(n+1)$

Partiendo de $k = n+1$ tenemos $(\alpha^{n+1})^r = (\alpha^n \alpha)^r = \alpha^r (\alpha^n)^r$

Por HI, $(\alpha^n)^r = (\alpha^r)^n \Rightarrow \alpha^r (\alpha^n)^r = \alpha^r (\alpha^r)^n = (\alpha^r)^{n+1}$.

Conclusion: $\forall n \geq 0$ se cumple $(\alpha^n)^r = (\alpha^r)^n$

Obs: $(\alpha^n \alpha)^r = \alpha^r (\alpha^n)^r$ se hace mediante la propiedad $(\alpha\beta)^r = \beta^r \alpha^r$

**b.** Demostrar por induccion estructural que $P_1 \subset L_1 = \{w \in \{a,b\}^* / w = (ab)^n, n \geq 0\}$.

Caso base: $\lambda \in P_1 \Rightarrow \lambda \in L_1$ pues es el caso en que $n=0 \Rightarrow$ se cumple

Paso inductivo:

Se puede formar una cadena de $P_1$ a partir de otra cadena de $P_1$ de dos formas.

(1) Sea $x \in P_1 \Rightarrow w = a(bx)^r$.

Por HI, $x \in L_1$ y es de la forma $(ab)^n \Rightarrow w = a(b(ab)^n)^r = a((ab)^n)^r b$. Por lo demostrado en el ejercicio anterior, $((ab)^n)^r = ((ab)^r)^n = (ba)^n \Rightarrow w = a(ba)^n b$.

- Si $n = 0 \Rightarrow w = ab \in L_1$ (caso $n = 1$)
- Si $n > 0 \Rightarrow$ tomo el primer b y ultimo a de $(ba)^n \Rightarrow w = ab(ab)^{n-1}ab = (ab)^{n+1} \in L_1$

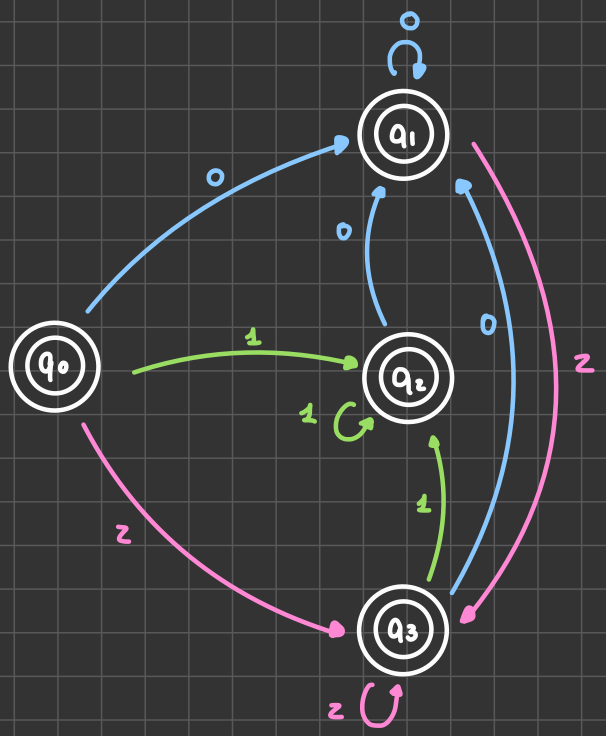
(2) Sea $x \in P_1 \Rightarrow w = xx$.

Por HI, $x \in L_1$ y es de la forma $(ab)^n \Rightarrow w = (ab)^n(ab)^n = (ab)^{2n} \in L_1$.

Conclusion: $\forall w \in P_1$, $w \in L_1 \Rightarrow P_1 \subset L_1$

## Ejercicio 2

$L_2 = \{\omega \in \{0,1,2\}^* / \omega$ NO contiene la subcadena 01 y NO contiene la subcadena 12$\}$




**Veamos si es minimal:** $\Pi_0 = \{G_1 = \{t\},\ G_2 = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}\}$

| $\delta$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $q_1$ | $q_1$ | $t$ | $q_3$ |
| $q_2$ | $q_1$ | $q_2$ | $t$ |
| $q_3$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |

$\Pi_1 = \{G_1 = \{q_1\},\ G_2 = \{q_2\},\ G_3 = \{q_0, q_3\},\ G_4 = \{t\}\}$

Luego, como $\Pi_0 \neq \Pi_1$, seguimos.

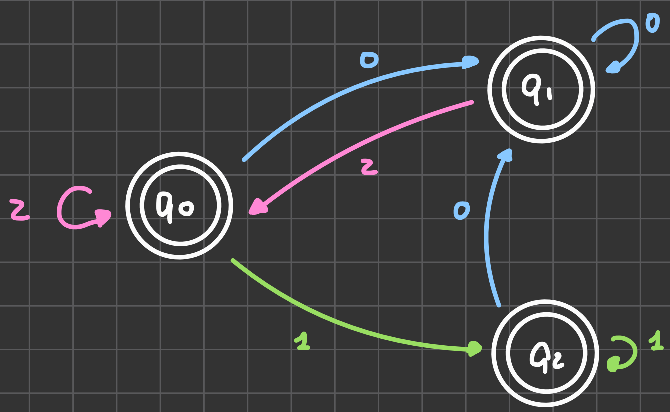
| $\delta$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $q_1$ | $q_1$ | $t$ | $q_3$ |
| $q_2$ | $q_1$ | $q_2$ | $t$ |
| $q_3$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |

$\Pi_2 = \{G_1 = \{q_1\},\ G_2 = \{q_2\},\ G_3 = \{q_0, q_3\},\ G_4 = \{t\}\}$

Luego, como $\Pi_1 = \Pi_2$, terminamos.

**Conclusion:** $M_2 = \langle \{q_0, q_1, q_2\},\ \{0,1,2\},\ q_0,\ \{q_0, q_1, q_2\},\ \delta \rangle$

| $\delta$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_0$ |
| $q_1$ | $q_1$ | $t$ | $q_0$ |
| $q_2$ | $q_1$ | $q_2$ | $t$ |



## Ejercicio 3

**Paso 1: transformar a AFND**

- $C_\lambda(P) = \{P\}$
- $C_\lambda(Q) = \{Q, S\}$
- $C_\lambda(R) = \{R, Q, S\}$
- $C_\lambda(S) = \{S\}$

$\Rightarrow \forall x \in \Sigma,\ \delta(k, x) = C_\lambda(k)$

| $\delta_{AFND}$ | a | b |
|---|---|---|
| P | $\{P, Q, S\}$ | $\{Q, S\}$ |
| Q | $\{R, Q, S\}$ | $\{R, Q, S\}$ |
| R | $\{R, Q, S\}$ | $\{R, Q, S\}$ |
| S | $\varnothing$ | $\{S\}$ |

**Paso 2: transformar a AFD**

| $\delta_{AFD}$ | a | b |
|---|---|---|
| P | PQS | QS |
| PQS * | RQS | RQS |
| QS * | RQS | RQS |
| RQS * | RQS | RQS |

* estados finales

estados nuevos

**Paso 3: minimizar AFD**

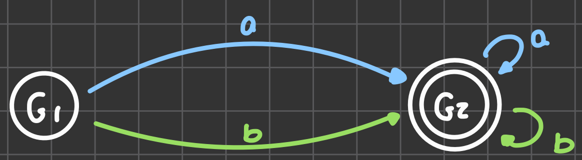
$\Pi_0 = \{ G_1 = \{P\},\ G_2 = \{PQS, RQS, QS\}\}$

| $\delta_{AFD}$ | a | b |
|---|---|---|
| P | PQS | QS |
| PQS * | RQS | RQS |
| QS * | RQS | RQS |
| RQS * | RQS | RQS |

$\Rightarrow \Pi_1 = \{G_1 = \{P\},\ G_2 = \{PQS, RQS, QS\}$

Luego, como $\Pi_0 = \Pi_1$, terminamos.

**AFD minimal:**




- $G_1 = aG_2 + bG_2$
- $G_2 = aG_2 + bG_2 + \lambda$

**Aplico Lema de Arden a $G_2$:** $G_2 = (a+b)^* \lambda = (a+b)^*$

**Reemplazo $G_2$ en $G_1$:** $G_1 = (a+b)G_2 = (a+b)(a+b)^*$

**Conclusion:** ER $= (a+b)(a+b)^*$

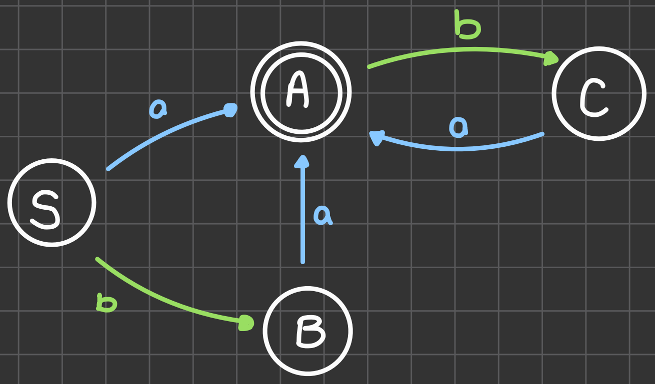
## Ejercicio 4

$R = (ab)^*a + (ba)^*(ba)$

**Por propiedad 14:** $R = a(ba)^* + (ba)^*(ba)$

**Por propiedad 11:** $R = a(ba)^* + (ba)(ba)^*$

**Por propiedad 3:** $R = (a + ba)(ba)^*$




Veamos si es minimal:

| $\delta_{AFD}$ | a | b |
|---|---|---|
| S | A | B |
| A | t | C |
| B | A | t |
| C | A | t |

$\Rightarrow \Pi_0 = \{G_1 = \{S, B, C, t\}, G_2 = \{A\}\}$

| $\delta_{AFD}$ | a | b |
|---|---|---|
| S | A | B |
| A | t | C |
| B | A | t |
| C | A | t |

$\Rightarrow \Pi_1 = \{G_1 = \{S, B, C\}, G_2 = \{A\}, G_3 = \{t\}\}$

Luego, como $\Pi_0 \neq \Pi_1$, seguimos.

| $\delta_{AFD}$ | a | b |
|---|---|---|
| S | A | B |
| A | t | C |
| B | A | t |
| C | A | t |

$\Rightarrow \Pi_2 = \{G_1 = \{S\}, G_2 = \{B, C\}, G_3 = \{A\}, G_4 = \{t\}\}$

Luego, como $\Pi_1 \neq \Pi_2$, seguimos.

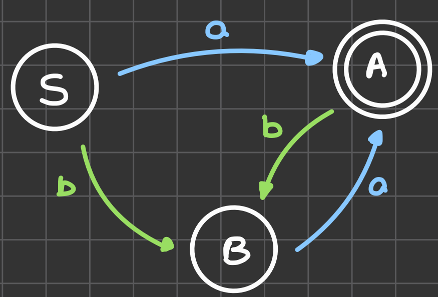
| $\delta_{AFD}$ | a | b |
|---|---|---|
| S | A | B |
| A | t | C |
| B | A | t |
| C | A | t |

$\Rightarrow \Pi_3 = \{G_1 = \{S\}, G_2 = \{B, C\}, G_3 = \{A\}, G_4 = \{t\}\}$

Luego, como $\Pi_2 = \Pi_3$, terminamos

**Conclusion:** $AFD = \langle \{S, A, B\}, \{a, b\}, S, \{A\}, \delta \rangle$

| $\delta$ | a | b |
|---|---|---|
| S | A | B |
| A | t | B |
| B | A | t |



Ejercicio 5

$L = \{w \in \{0,1\}^* \,/\, w = \alpha\beta \,,\, |\alpha| = 2|\beta| \wedge |w|_0 = 2|w|_1\}$

Supongamos que es un lenguaje regular $\Rightarrow$ cumple el lema de bombeo.

Recordemos: El lema de bombeo nos dice que $\forall L$, lenguaje regular sobre un $\Sigma$ y $M = \langle K, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ tal que $L(M) = L$, $\exists p > n$ con $n = |K| \,/\, \forall \alpha \in L,\ |\alpha| \geq p\ (\exists x, y, z \in \Sigma^* / \alpha = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0,\ xy^i z \in L)$.

Sea $w = 1^p 0^{2p}$ $\Rightarrow$ se cumple $|w| = 3p \geq p$ siendo $p$ el numero del Lema de Bombeo. Ahora, expresomos $w$ en terminos de $x, y, z$ $\Rightarrow$ $x = 1^r$, $y = 1^s$ y $z = 1^t 0^{2p}$.

Condiciones cumplidas: $|xy| = r+s \leq p$ $(t \geq 0)$, $s \geq 1$ y $r+s+t = p$

Luego, tomamos $i = 0$ $\Rightarrow$ $xy^i z = 1^r 1^t 0^{2p}$ $\Rightarrow$ $|w|_0 = 2|w|_1 = 2(r+s) < 2p$ ABS!

Obs: $r+s+t \leq p \Rightarrow r+t \leq p-s < p$ pues $s \geq 1 \Rightarrow r+s < p$

Conclusion: Lo absurdo vino de suponer que $L$ es un lenguaje regular, luego no lo es.