Autómatas, Teoría de Lenguajes y Compiladores (72.39)
Parcial 1

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Nota
2,5	1,5	4	2	

Condición mínima de aprobación: Acumular 6 puntos
IMPORTANTE:

- El examen tiene por objetivo que el alumno demuestre conocimientos adquiridos en la presente asignatura **Autómatas, Teoría de Lenguajes y Compiladores**. Por ello, todos los ejercicios deben resolverse utilizando los algoritmos, conceptos y vocabulario vistos en la clase teórica, en la clase práctica o en la bibliografía.En caso de que un ejercicio no sea resuelto utilizando los algoritmos de la presente asignatura, no será considerado (valdrá **cero**.)
- Se pueden usar propiedades previamente demostradas, pero si no fueron demostradas en clase (o en la práctica) hay que demostrarlas.
- Debe usarse la notación y vocabulario propios de la asignatura para justificar o explicar lo realizado. Eso significa que usar un vocabulario coloquial descontará puntos.
- El examen se evalúa por lo que está **escrito**. Por lo tanto, revisar muy bien que las justificaciones y el desarrollo de los ejercicios estén claramente explicados y en el orden correcto.
- Para el caso de tener que obtener un autómata que reconozca el lenguaje asociado a una expresión regular de hasta dos símbolos terminales, se puede escribir directamente. Pero si la expresión regular contiene más de dos símbolos terminales (iguales o distintos) del alfabeto, debe explicar cómo se obtiene el autómata.

Ejercicios

1. El conjunto $P_1 \subseteq \Sigma^*$, donde $\Sigma = \{a, b\}$ se define **recursivamente** de la siguiente manera:
   - $\lambda \in P_1$
   - si $x \in P_1 \Rightarrow ax^r bx \in P_1$

   a) **Demostrar** que $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r$, $\forall n \geq 0$.

   b) **Demostrar por inducción estructural** que $P_1 \subset L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* / \omega = (ab)^n, n \geq 0\}$

2. Construir el **Autómata Finito Determinístico Mínimo** M_2 que acepte el lenguaje L_2, tal que $L_2 = \{\omega \in \{0, 1\}^* / \omega$ contiene la subcadena 00 y NO contiene la subcadena 11$\}$.

3. **Demostrar de dos maneras distintas** que $L(A) = L(R)$ siendo $A = \langle\{a, b\}, \{P, Q, R, S\}, \delta, P, \{R\}\rangle$ Con δ dada por la tabla:

δ	a	b	λ
$\rightarrow P$	$\{P, Q\}$	$\{Q\}$	$\{Q\}$
Q	$\{R\}$	$\{P, S\}$	$\emptyset$
$*R$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{Q\}$
S	$\emptyset$	$\{P, R\}$	$\emptyset$

   y $R = (b^* a)^* b^* (a + bb)$

4. **Demostrar** que el lenguaje $L = \{\omega \in \{0, 1\}^* / \omega = \alpha\beta, |\alpha|_0 = |\beta|_1 \wedge |\alpha|_1 = |\beta|_0\}$ no es regular.

Ejercicio 1

a. Demostrar que $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r$, $\forall n \geq 0$

Lo vamos a solucionar por inducción en n.

Caso base: $n = 0 \Rightarrow (\alpha^r)^0 = \lambda$ y $(\alpha^0)^r = \lambda^r = \lambda \Rightarrow (\alpha^r)^0 = (\alpha^0)^r \Rightarrow$ se cumple

Paso inductivo:

Definimos $P(k): (\alpha^r)^k = (\alpha^k)^r$, $\forall k \geq 0$

HI) $P(k)$, $k \leq n$

TI) $P(n+1)$

Partiendo de $k = n+1$ tenemos $(\alpha^{n+1})^r = (\alpha^n \alpha)^r = \alpha^r (\alpha^n)^r$

Por HI, $(\alpha^n)^r = (\alpha^r)^n \Rightarrow \alpha^r (\alpha^n)^r = \alpha^r (\alpha^r)^n = (\alpha^r)^{n+1}$.

Conclusion: $\forall n \geq 0$ se cumple $(\alpha^n)^r = (\alpha^r)^n$

Obs: $(\alpha^n \alpha)^r = \alpha^r (\alpha^n)^r$ se hace mediante la propiedad $(\alpha\beta)^r = \beta^r \alpha^r$

b. Demostrar que $P_1 \subset L_1 = \{ w \in \{a, b\}^* / w = (ab)^n, n \geq 0 \}$.

Caso base: $\lambda \in P_1 \Rightarrow w = (ab)^0 = \lambda \in L_1 \Rightarrow$ se cumple

Paso inductivo: se puede formar una cadena de P_1 a partir de otra cadena de P_1

Sea $x \in P_1 \Rightarrow w = a x^r b x \in P_1$ y por HI, $x \in L_1$ y es de la forma $(ab)^n$.

Luego, $w = a((ab)^n)^r b (ab)^n = a((ab)^r)^n b (ab)^n = a(ba)^n b (ab)^n$.

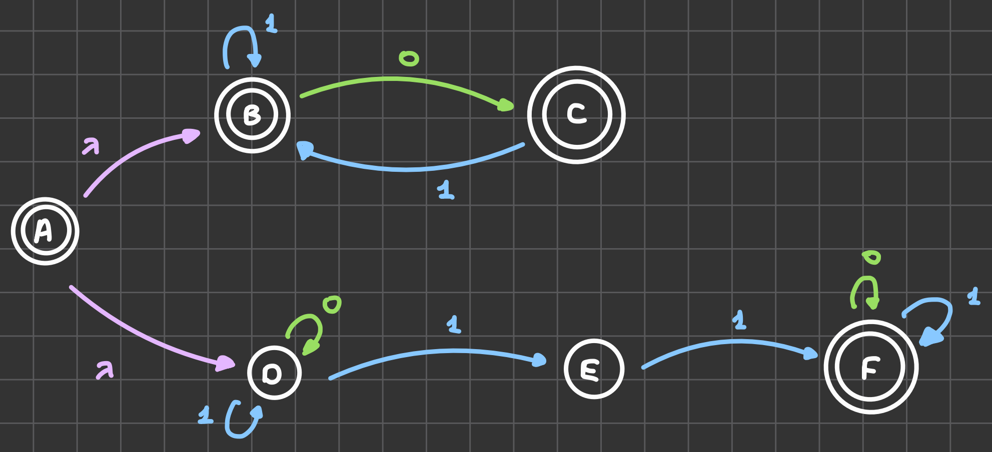
(1) Si $n = 0 \Rightarrow w = ab \in L_1$ pues es el caso $n = 1$.

(2) Si $n \geq 1 \Rightarrow$ sacamos la primera b y ultima a de $(ba)^n \Rightarrow w = ab(ab)^{n-1} ab (ab)^n = (ab)^{2n+1} \in L_1$

Conclusion: $\forall w \in P_1, w \in L_1 \Rightarrow P_1 \subset L_1$

Ejercicio 2

Buscamos el automata $A' = \{w = \{0,1\}^* / w$ no contiene 00 ó w contiene 11$\}$ y sacamos el complemento.



δAFNDλ	0	1	λ
A*	t	t	B,D
B*	C	B	t
C*	t	B	t
D	D	D,E	t
E	t	F	t
F*	F	F	t

- $C\lambda(A) = \{A,B,D\}$
- $C\lambda(B) = \{B\}$
- $C\lambda(C) = \{C\}$
- $C\lambda(D) = \{D\}$
- $C\lambda(E) = \{E\}$
- $C\lambda(F) = \{F\}$

➡

δAFND	0	1
A*	C,D	B,D,E
B*	C	B
C*	t	B
D	D	D,E
E	t	F
F*	F	F

Pasamos a AFD:

δAFD	0	1
A*	CD	BDE
CD*	D	BDE
BDE*	CD	BDEF
D	D	DE
BDEF*	CDF	BDEF
DE	D	DEF
CDF*	DF	BDEF
DEF*	DF	DEF
DF*	DF	DEF

estados nuevos

MINIMIZO AFD: $\Pi_0 = \{G_1 = \{D, DE, t\}, G_2 = \{A, CD, BDE, BDEF, CDF, DEF, DF\}\}$

δ_{AFD}	0	1	Π_1
A*	CD	BDE	G_1
CD*	D	BDE	G_2
BDE*	CD	BDEF	G_1
D	D	DE	G_3
BDEF*	CDF	BDEF	G_1
DE	D	DEF	G_4
CDF*	DF	BDEF	G_1
DEF*	DF	DEF	G_1
DF*	DF	DEF	G_1
t	t	t	G_3

$\Pi_0 \neq \Pi_1$

δ_{AFD}	0	1	Π_2
A*	CD	BDE	G_1
CD*	D	BDE	G_2
BDE*	CD	BDEF	G_1
D	D	DE	G_3
BDEF*	CDF	BDEF	G_4
DE	D	DEF	G_5
CDF*	DF	BDEF	G_4
DEF*	DF	DEF	G_4
DF*	DF	DEF	G_4
t	t	t	G_6

$\Pi_1 \neq \Pi_2$

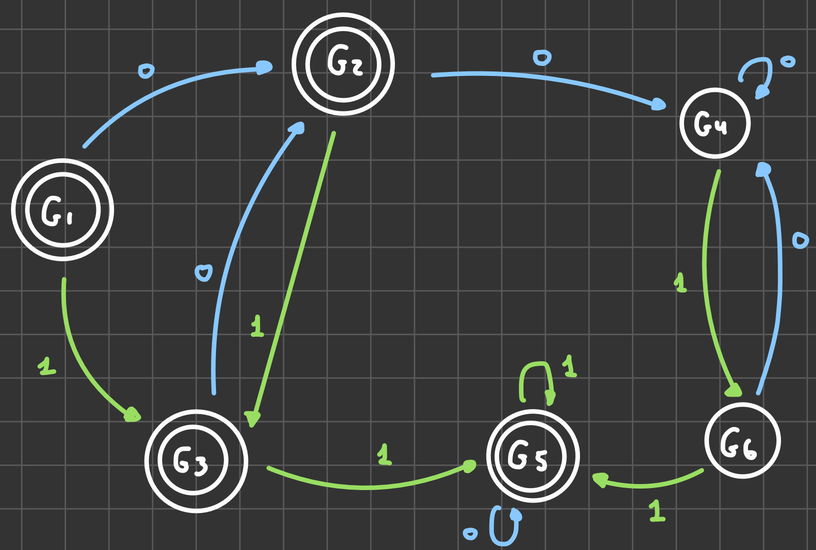
δ_{AFD}	0	1	Π_3
A*	CD	BDE	G_1
CD*	D	BDE	G_2
BDE*	CD	BDEF	G_3
D	D	DE	G_4
BDEF*	CDF	BDEF	G_5
DE	D	DEF	G_6
CDF*	DF	BDEF	G_5
DEF*	DF	DEF	G_5
DF*	DF	DEF	G_5
t	t	t	G_7

$\Pi_2 \neq \Pi_3$

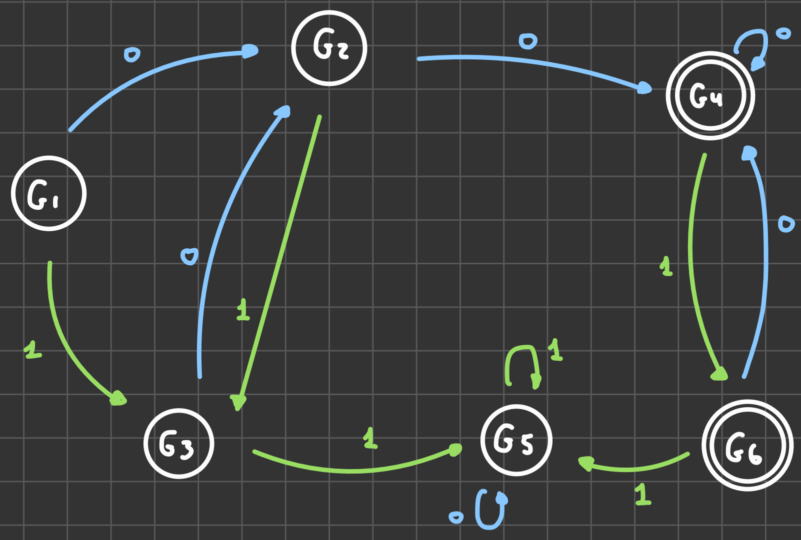
δ_{AFD}	0	1	Π_4
A*	CD	BDE	G_1*
CD*	D	BDE	G_2*
BDE*	CD	BDEF	G_3*
D	D	DE	G_4
BDEF*	CDF	BDEF	G_5*
DE	D	DEF	G_6
CDF*	DF	BDEF	G_5
DEF*	DF	DEF	G_5
DF*	DF	DEF	G_5
t	t	t	G_7

$\Rightarrow A = \langle \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\}, \{0,1\}, G_1, \delta, \{G_1, G_2, G_3, G_5\} \rangle$

δ	0	1
G_1	G_2	G_3
G_2	G_4	G_3
G_3	G_2	G_5
G_4	G_4	G_6
G_5	G_5	G_5
G_6	G_4	G_5

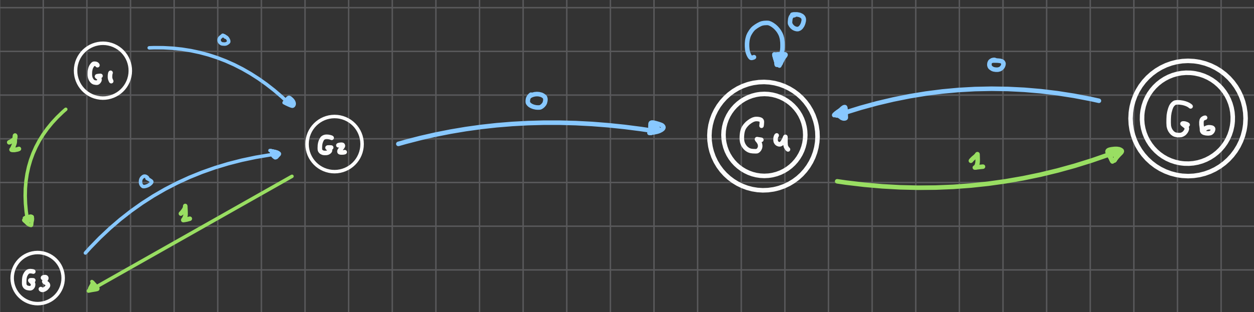


Complemento el automata:



Obs: notemos que G_5 es estado trampa $\Rightarrow$ lo sacamos

Conclusion:



Ejercicio 3

Forma 1: Vamos a pasar del AFND-λ a una ER

δ	a	b	λ
P	P, Q	Q	Q
Q	R	P, S	Ø
R*	Ø	Ø	Q
S	Ø	P, R	Ø

(1) Paso a un AFND

- $C_\lambda(P) = \{P, Q\}$
- $C_\lambda(Q) = \{Q\}$
- $C_\lambda(R) = \{R, Q\}$
- $C_\lambda(S) = \{S\}$

⇒

δ_{AFND}	a	b
P	P, Q, R	P, S, Q
Q	R, Q	P, S, Q
R*	R, Q	P, S, Q
S	Ø	P, R, Q

(2) Paso a AFD

δ_{AFD}	a	b
P	PQR	PSQ
PQR*	PQR	PSQ
PSQ	PQR	PSRQ
PSRQ*	PQR	PSRQ

estados nuevos

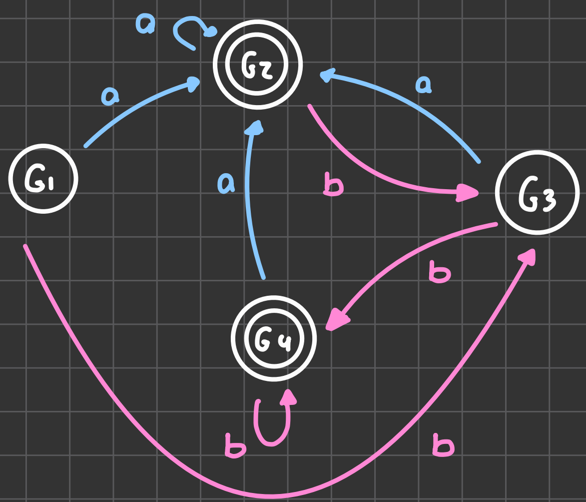
(3) Busco AFD minimal: $\Pi_0 = \{G_1 = \{P, PSQ\}, G_2 = \{PQR, PSQR\}\}$

δ_{AFD}	a	b	π_1
P	PQR	PSQ	G_1
PQR*	PQR	PSQ	G_2
PSQ	PQR	PSRQ	G_3
PSRQ*	PQR	PSRQ	G_4

Obs: $\Pi_0 \neq \Pi_1$ PERO no podemos separar mas

⇒ AFD = $\langle \{G_1, G_2, G_3, G_4\}, \{a, b\}, \delta, G_1, \{G_2, G_4\} \rangle$

δ	a	b
G_1	G_2	G_3
G_2*	G_2	G_3
G_3	G_2	G_4
G_4*	G_2	G_4



(4) Escribimos las ecuaciones asociadas

- $G_1 = aG_2 + bG_3$
- $G_2 = aG_2 + bG_3 + \lambda$
- $G_3 = aG_2 + bG_4$
- $G_4 = bG_4 + aG_2 + \lambda$

(5) Aplicamos el lema de Arden para buscar la ER

- $G_4 = (aG_2 + bG_4) + \lambda = G_3 + \lambda$
- $G_3 = aG_2 + bG_3 + b = b^*(aG_2 + b)$
- $G_1 = aG_2 + bG_3 = aG_2 + bb^*aG_2 + bb^*b$

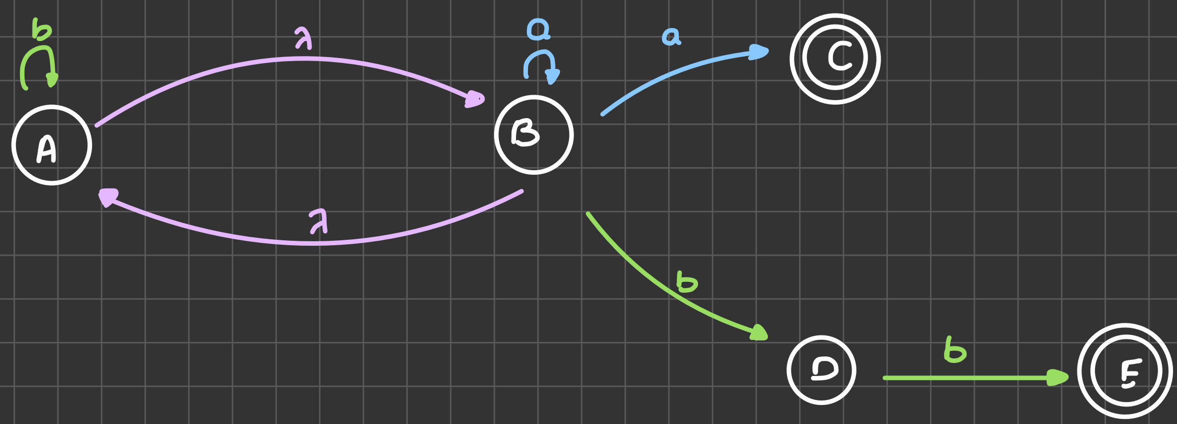
$\Rightarrow$ Por distributiva, $(a + bb^*a)G_2 + bb^*b = (\lambda + bb^*)aG_2 + b^*bb$

$\Rightarrow$ Como $\lambda + aa^* = a^*$, $G_1 = b^*aG_2 + b^*bb$

Luego, notemos que $G_2 = G_1 + \lambda \Rightarrow G_1 = b^*aG_1 + b^*a + b^*bb$

$\Rightarrow$ Por lema de Arden, $G_1 = (b^*a)^* b^*(a + bb) = ER$

Forma 2: Vamos a pasar de la ER a un AFD



δ_{AFDN}	a	b
A	B, C	A, D
B	B, C	A, D, B
C*	t	t
D	t	E
E*	t	t

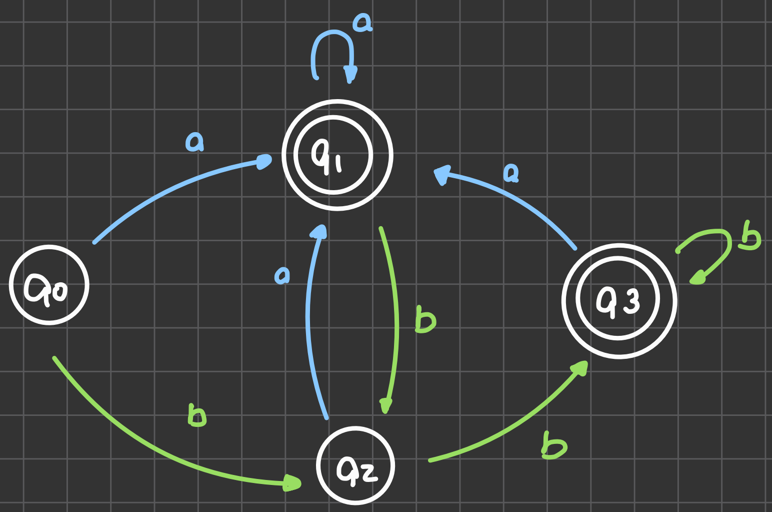
$\Rightarrow$

δ_{AFD}	a	b	π_0
A	BC	AD	q_0
BC*	BC	ADB	q_1
AD	BC	ADE	q_0
ADB	BC	ADBE	q_0
ADE*	BC	ADE	q_1
ADBE*	BC	ADBE	q_1

δ_{AFD}	a	b	π_1
A	BC	AD	q_0
BC*	BC	ADB	q_1
AD	BC	ADE	q_2
ADB	BC	ADBE	q_2
ADE*	BC	ADE	q_3
ADBE*	BC	ADBE	q_3

$\pi_0 \neq \pi_1$

δ_{AFD}	a	b	π_2
A	BC	AD	q_0
BC*	BC	ADB	q_1
AD	BC	ADE	q_2
ADB	BC	ADBE	q_2
ADE*	BC	ADE	q_3
ADBE*	BC	ADBE	q_3



Conclusion: como es el mismo AFD, entonces la ER es equivalente al AFND-λ

Ejercicio 4

$L = \{ \omega \in \{0,1\}^* / \omega = \alpha\beta,\ |\alpha|_0 = |\beta|_1 \wedge |\alpha|_1 = |\beta|_0 \}$

Supongamos que L es lenguaje regular $\Rightarrow$ se debe satisfacer el lema de Bombeo.

Recordemos: El lema de bombeo nos dice que $\forall L$, lenguaje regular sobre un Σ y $M = \langle K, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ tal que $L(M) = L$, $\exists p > n$ con $n = |K| / \forall \alpha \in L,\ |\alpha| \geq p\ (\exists x, y, z \in \Sigma^* / \alpha = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0,\ xy^i z \in L)$.

Sea $\omega = \alpha\beta / \alpha = 0^p 1$ y $\beta = 01^p$ siendo p el numero del lema. Ahora, escribimos ω en terminos de xyz

$\Rightarrow x = 0^r,\ y = 0^s,\ z = 0^t 101^p$ donde se cumple $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ y $r+s+t = p$.

Luego, tomo $i = 2 \Rightarrow xy^i z = 0^r 0^{2s} 0^t 101^p \Rightarrow |\alpha|_0 = r+2s+t = p+s > p$ pues $s \geq 1 \Rightarrow |\alpha|_0 \neq |\beta|_1$ ABS!

Conclusion: lo absurdo vino de suponer L lenguaje regular. Luego, no lo es.