

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

«Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский
университет)»

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Кафедра вычислительной физики

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)

Направленность(профиль) подготовки: Вычислительные технологии
математического моделирования

**Исследование компактных схем
повышенного порядка точности для
численного решения линейного
уравнения переноса на нерегулярных
сетках**
(бакалаврская работа)

Студент:

Цицварич Йован

Научный руководитель:

Беклемышева Катерина Алексеевна

Москва

2020

Аннотация.

В данной работе ставится цель реализовать и исследовать сходимость компактных сеточно-характеристических схем для численного линейного уравнения переноса на нерегулярных треугольных сетках. Ожидается путем увеличения порядка интерполяционных полиномов для каждого треугольника сетки получить повышения порядка сходимости данной схемы. Для повышения порядка будут использоваться производные исходной функции, также соответствующие уравнению переноса. Основную проблему в реализации данной схемы составляет решение переопределенной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов интерполяционного полинома. Было использовано два подхода к решению системы линейных уравнений, но ни один из них не дал сходящегося порядка схемы, во всех численных экспериментах порядок колебался. Так же было исследовано два подхода к нахождению производных искомых функции - используя производные полинома второго порядка или отдельно получая полином первого порядка для каждой. Второй метод показал большую абсолютную ошибку, но меньшее колебание величины порядка. Порядок был исследован на нескольких начальных импульсах разного вида, в том числе гладких и с разрывной производной. Так же было проведено исследование консервативности полученных схем, использующих интерполяционных полиномов первого и второго порядка.

Содержание

Введение	3
1 Теоретические сведения.	6
1.1 Уравнение переноса.	6
1.2 Граничные условия.	6
1.3 Сеточно-характеристический метод.	6
1.4 Расчетная сетка.	7
1.5 Определение точки пересечения характеристики с предыдущим временным слоем.	8
1.6 Поиск треугольника.	9
1.6.1 Оптимизация поиска.	10
1.7 Интерполяция.	10
1.7.1 Повышение порядка.	11
1.8 Расчет порядка.	14
2 Результаты численного эксперимента.	14
2.1 Интерполяция полиномом первого порядка.	14
2.2 Интерполяция полиномом второго порядка.	21
2.3 Проверка консервативности получившихся схем.	32
3 Анализ результатов и вывод.	33

Введение.

Объект исследования.

В данной задаче мы занимаемся исследованием компактных схем повышенного порядка точности для численного решения линейного уравнения переноса на нерегулярных сетках. Уравнение переноса в однородной постановке имеет вид:

$$u_t + \lambda u_x = 0, \quad (1)$$

где константа λ представляет собой скорость переноса.

Значимость исследования.

К уравнению переноса путем использования инвариантов Римана сводятся гиперболические системы уравнений [1]. Гиперболической системой уравнений описываются многие динамические процессы в механике твердого тела, акустике и др. [2]. Большое распространение получил сеточно-характеристический метод численного решения уравнения переноса, в [3] разобрано множество задач, для которых данный метод применим.

Сеточно-характеристический метод на нерегулярных тетраэдрических и треугольных расчетных сетках подробно описан в [4], критерием устойчивости в этой работе является Курантовский шаг по времени, рассчитанный по минимальной высоте тетраэдра. При этом, в сетках, основанных на сложной геометрии, в том числе реальных биологических данных, полученных на основе томограмм [5], подобный критерий устойчивости приводит к падению шага по времени на несколько порядков и радикальному увеличению времени расчета. В классических работах А.С. Холодова и К.М. Магомедова был предложен способ конструирования сеточно-характеристических методов на неструктурированных сетках с использованием косых шаблонов. Этот подход подробно описан в [6]. В таких методах интерполяция производится по тому тетраэдру, в который попала характеристика, вне зависимости от того, включает ли этот тетраэдр текущий расчетный узел.

Одной из важных задач является повышение порядка схем. Особенно это актуально для тетраэдрических сеток, так как повышение порядка позволит увеличить средний размер тетраэдров при сохранении качества результата, что существенно снизит время расчета. При этом расширение сеточного шаблона, достаточно очевидное и предсказуемое в случае регулярных сеток, является непростой задачей в случае сложной геометрии. Одним из способов расширить шаблон является использование внутренних точек тетраэдра [7]. Минусом такого подхода является то, что эти внутренние узлы не смещаются сами по себе, а зависят от положения вершин тетраэдра, что приводит к снижению точности. Также, сложность представляет выбор точек для увеличения порядка выше второго.

Схемы повышенного порядка, которые были построены без расширения сеточного шаблона называют компактными [8]. Задача компактных сеточно-характеристических схем уже рассматривалась в [9], где изучалось трехмерное уравнение переноса с расщеплением по координатам и [10], где рассматривалось одномерное уравнение переноса. В данных статьях для повышения порядка использовались производные исходной функции в узлах расчетной сетки.

В мировой практике, для решения задач как статического, так и динамического нагружения наибольшее распространение получил метод конечных элементов [11]. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при решении задач статического и квазистатического нагружения и активно применяется как часть процесса разработки новых конструкций в строительстве, машиностроительной, авиационной и космической промышленности. При этом, его применение для моделирования волновых процессов сопряжено с рядом проблем [12]. Близким по сути методом является разрывный метод Галёркина [13], [14]. Он показывает хорошие результаты, как в плане точности, так и в плане стабильности, при моделировании волновых процессов, что было показано в работе [15]. Его минусом является сравнительно большое время расчета. Практически, для расчета волновых задач на реальных сетках, например, моделирование медицинского ультразвука, требует применения компьютерных

кластеров. Аналогичные расчеты при помощи сеточно-характеристического метода позволяют вести расчет на сравнительно небольшом сервере с шестью ядрами.

Таким образом, рассматриваемая в данной работе проблема является актуальной для активно развивающейся области численных методов. Дальнейшая работа по данному направлению позволит использовать результаты при решении важных задач промышленности и медицины [16], [17], [18], [19].

1 Теоретические сведения.

1.1 Уравнение переноса.

Уравнение переноса является уравнением в частных производных первого порядка, описывающего изменение величины в пространстве с течением времени. Мы будем заниматься однородным уравнением переноса. Для простоты будем рассматривать случай $\lambda > 0$.

1.2 Граничные условия.

В данной постановке мы рассматриваем двумерную задачу Коши с периодическими граничными условиями,

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0, & x \in [0,1], y \in [0,1], t > 0, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & x \in [0,1], y \in [0,1]. \end{cases} \quad (2)$$

Периодичность граничных условий предполагает замкнутость пространства по x , то есть при достижении правой границы $x = 1$ нашей области $[0, 1]$ происходит перемещение на левую границу $x = 0$ с сохранением значения функции и дальнейшим продолжением ее развития согласно решаемому уравнению. Аналитическим решением системы в такой постановке является функция:

$$u(x,y,t) = u(x - \lambda t, y), x \in [0,1], y \in [0,1], t > 0. \quad (3)$$

1.3 Сеточно-характеристический метод.

Классический подход к решению данной задачи предполагает использование разностных схем для аппроксимации частных производных и численного решения уравнения. В данной работе мы используем сеточно-характеристический подход к решению однородного уравнения переноса. Он заключается в сведении дифференциального уравнения первого порядка в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль кривой, называемой

характеристикой данного уравнения, такой что:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda. \quad (4)$$

Вдоль нее уравнение переноса принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Что равносильно:

$$\frac{du}{dt} = 0. \quad (6)$$

То есть вдоль характеристики решение исходного уравнения переноса сохраняется. Используемый нами подход основывается на этом методе – для нахождения значения на $n + 1$ – ом временном слое следует провести характеристику на n – ый слой по времени и перенести с этого временного слоя значение функции на $n + 1$ – ый.

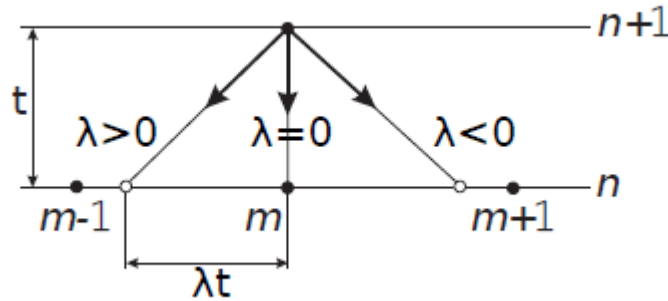


Рис. 1: Схема сеточно-характеристического метода в одномерном случае на регулярной прямоугольной сетке. Источник [20]

1.4 Расчетная сетка.

В данной работе рассматривается двумерная задача на нерегулярных треугольных сетках. Нерегулярная треугольная сетка - это разбиение плоскости на неравномерные треугольники. Такие сетки получили широкое применение

вместе методе конечных элементов. Их преимущество по сравнению с регулярными сетками заключается в их возможности покрывать комплексные формы, так как единственные накладываемые ограничения при их построении - это максимальная площадь треугольника и его минимальные угол.

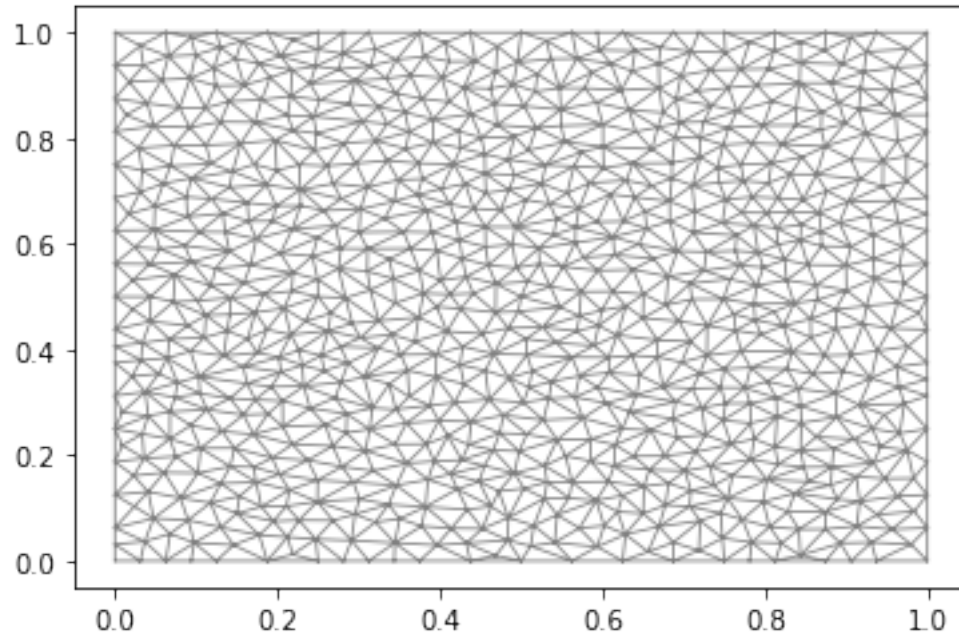


Рис. 2: Пример используемой расчетной сетки

1.5 Определение точки пересечения характеристики с предыдущим временным слоем.

В ходе расчета для каждой характеристики, выпущенной из точки на $n + 1$ — ом временном слое, по углу наклона, равному λ и заданному шагу τ по времени определяем координату пересечения характеристики с предыдущим временным слоем. Здесь и далее рассматриваем уравнение переноса по переменной x , так как для второй переменной все получается аналогичной последовательностью действий. Алгоритм поиска значения исходной функции u в некоторой точке $(x_{current}, y_{current})$, на новом $n + 1$ слое по времени состоит в следующем. Сначала необходимо определить координаты точки пересечения

характеристики с n — ым слоем

$$\begin{aligned} x_{intersection} &= x_{current} - \lambda\tau, \\ y_{intersection} &= y_{current}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отдельно стоит выделить случай выпадения точки за область исследования, то есть случай $x_{intersection} < x_{min}$, где $x_{min} = 0$ в нашей постановке. В следствие использования периодических граничных условия, мы сделаем замену

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{intersection} &= x_{max} - (x_{min} - x_{intersection}), \\ \tilde{y}_{intersection} &= y_{intersection}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $x_{max} = 1$ в нашей задаче.

1.6 Поиск треугольника.

После определения координаты пересечения характеристики и временного слоя предстоит определить треугольник, в который характеристика попала. Для этих целей воспользуемся методом известным как метод относительности. Данный метод заключается в том, что при заданной ориентации движения по вершинам треугольника, для каждой стороны вычисляем уравнение прямой и находим по какую сторону от него находится точка, в случае ориентации по часовой – для всех сторон точка будет справа, в случае ориентации против часовой стрелки - слева. Факт нахождения слева или справа определяется по знаку после подстановки координат точки в уравнение прямой.

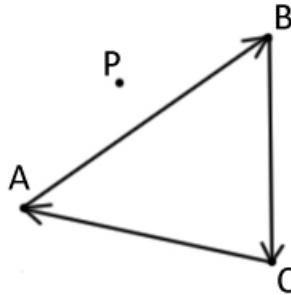


Рис. 3: Ориентация треугольника по часовой.

1.6.1 Оптимизация поиска.

При измельчении сетки количество треугольников быстро увеличивается и затраты на поиск возрастают. Для оптимизации, так как у нас постоянный шаг по времени τ и угол наклона характеристик λ , нам достаточно определить для каждой точки соответствующий ей на предыдущем слое треугольник всего один раз на первом шаге по времени и записать в кэш, далее просто обращаясь к нему по ключу. Так же используется грубый критерий принадлежности треугольнику - треугольник заключается в прямоугольник и по координатам вершин квадрата проводится проверка, попадает точек в данную область или нет. Такой подход помогает избежать многочисленных излишних расчетов и рассчитывать уравнение прямой только для малого количества ближайших треугольников.

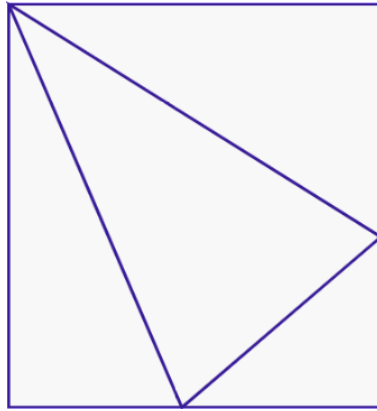


Рис. 4: Пример грубой прямоугольной области для треугольника.

1.7 Интерполяция.

После определения конкретного треугольника на предыдущем слое по времени, в который попала наша характеристика, нам предстоит определить значение функции в точке пересечения. Для этих целей воспользуемся интерполяционным полиномом первого порядка вида:

$$F(x,y) = ax + by + c, \text{ где } a, b, c \in R \quad (9)$$

Коэффициенты будем искать по значениям функции в вершинах данного треугольника. Имеем систему линейных уравнений:

$$Ax = f, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ - координаты вершин исследуемого треугольника, а f_1, f_2, f_3 - значения функции u^n в соответствующих вершинах. Данная система совместна для любого треугольника, а следовательно, имеет единственное решение. Это свойство следует из того, что

$$\det A = x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2, \quad (11)$$

данное выражение не может принимать нулевое значение, так как оно представляет собой подстановку координат вершины (x_1, y_1) в уравнение прямой, связывающей вершины (x_2, y_2) и (x_3, y_3) . Равенство нулю означало бы, что точка (x_1, y_1) принадлежит прямой, что противоречит тому, что все три точки являются вершинами одного треугольника. Таким образом, интерполированное значение функции в точке пересечения

$$u_{interpolated}^n = F(x_{intersection}, y_{intersection}). \quad (12)$$

Данное значение будет вдоль характеристики перенесено на $n + 1$ слой по времени в точку $(x_{current}, y_{current})$, то есть $u_i^{n+1} = u_{interpolated}^n$. По такому алгоритму, проходя по всем точкам сетки, получим значение исходной функции на $n + 1$ слое по времени. Данный метод имеет первый порядок сходимости.

1.7.1 Повышение порядка.

Для сеточно-характеристического метода возможно улучшение, если принять в рассмотрение производные исходной функции u и воспользоваться компактной схемой для повышения порядка. Введем функцию производной по

$x : \nu(x, y, t) = u_x(x, y, t)$. Здесь и далее рассматривается производная по x , случай производной по y полностью аналогичен данному. Продифференцируем уравнение переноса для исходной функции (1) по x и получим для функции производной $\nu(x, y, t)$ аналогичное уравнение:

$$\nu_t + \lambda \nu_x = 0 \quad (13)$$

Таким образом, весь описанный ранее алгоритм с интерполяционным полиномом первой степени можно использовать для решения уравнения переноса производных нашей исходной функции. В данном случае меняется подход к интерполяции значения исходной функции на предыдущем слое по времени в точке $(x_{intersection}, y_{intersection})$. Так как теперь в каждой вершине треугольника помимо значения исходной функции хранятся значения ее градиента. В таком случае для интерполяционного полинома второго порядка ,

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g, \\ a, b, c, d, e, g &\in R. \end{aligned} \quad (14)$$

Для коэффициентов a, b, c, d, e, g имеем систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + g = f_1 \\ ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + ey_2 + g = f_2 \\ ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + g = f_3 \\ 2ax_1 + by_1 + d = f'_{1x} \\ 2ax_2 + by_2 + d = f'_{2x} \\ 2ax_3 + by_3 + d = f'_{3x} \\ bx_1 + 2cy_1 + e = f'_{1y} \\ bx_2 + 2cy_2 + e = f'_{2y} \\ bx_3 + 2cy_3 + e = f'_{3y} \end{array} \right. , \quad (15)$$

где f'_{ix}, f'_{iy} , $i = 1, 2, 3$ – значения производных исходной функции в соответствующих вершинах рассматриваемого треугольника. Первые три уравнения соответствуют значениям функции в вершинах, следующие три значениям

производной по переменной x и последние три производной по переменной y . Ранг матрицы данной системы линейных уравнений меньше количества уравнений, следовательно система переопределена и не существует точного решения. Существуют два подхода к решению данной проблемы. Первый – из 9 выбрать 6 необходимых уравнений и, в случае если система совместна, решить ее, в обратном случае взять другие уравнения, второй – чтобы не терять данные о производных функции, можно попытаться решить ее методом наименьших квадратов. Идея данного метода заключается в минимизации нормы разности $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$, где A – матрица системы линейных уравнений, \vec{x} – вектор искомых коэффициентов интерполяционного полинома и \vec{b} – вектор правых частей нашей системы линейных уравнений. Основным преимуществом такого подхода является гарантированное решение системы линейных уравнений, недостатком же является ограничение на точность накладываемое таким методом, которое может отразиться на точности решения и порядке сходимости. Первый же метод в свою очередь не гарантирует нахождения решения и является намного более ресурсоемким, в худшем случае, при условии, что уравнения на значения исходной функции будут постоянно использоваться в системе, а комбинироваться только уравнения на производные, имеем 20 возможных комбинации, при рассмотрении производных более высокого порядка это число заметно вырастет¹. В тех случаях, когда ни одна из комбинации уравнений не давала совместной системы, происходит переключение на полином первого порядка, который считается как для исходной функции, так и для ее производных. В данной работе будет рассматриваться второй подход. После получения интерполяционного полинома второго порядка остается посчитать значения для производных в точке пересечения. Для этого тоже существует два подхода: первый – взять производные от интерполяционного полинома, второй – отдельно посчитать каждую из производных, используя интерполяционный полином первого порядка, полученный решением системы линейных уравнений (10), где в роли значения функции выступают значения

¹В случае использования вторых производных для нахождения интерполяционного полинома третьей степени будет существовать 3432 возможных комбинации.

производной.

1.8 Расчет порядка.

В работе проводилось численное исследование порядка сходимости по трем нормам L_1 , L_2 и L_∞ , которые задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_i \frac{|u_i^n - U_i^n|}{N}, \\ L_2 &= \sqrt{\sum_i \frac{(u_i^n - U_i^n)^2}{N^2}}, \\ L_\infty &= \max |u_i^n - U_i^n|, \end{aligned} \tag{16}$$

где N – число точек расчетной сетки, U – проекция аналитического решения на нашу сетку, а u_i^n – значения функции в узлах сетки, полученные в ходе численного расчета с использованием исследуемой схемы. Для расчета порядка сходимости использовались следующие формулы:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\ln \frac{L_1(N_2)}{L_1(N_1)}}{\ln \frac{N_1}{N_2}}, \\ p_2 &= \frac{\ln \frac{L_2(N_2)}{L_2(N_1)}}{\ln \frac{N_1}{N_2}}, \\ p_\infty &= \frac{\ln \frac{L_\infty(N_2)}{L_\infty(N_1)}}{\ln \frac{N_1}{N_2}}, \end{aligned} \tag{17}$$

где N_1 и N_2 – число узлов на двух расчетных сетках, при чем $N_1 < N_2$, а $L_1(N_i)$, $L_2(N_i)$ и $L_\infty(N_i)$, $i = 1, 2$ – значения норм на соответствующих сетках.

2 Результаты численного эксперимента.

2.1 Интерполяция полиномом первого порядка.

Расчеты проводились для разных типов начального импульса со значением $\lambda=1$. Исследуем порядок сходимости нашей схемы при использовании

интерполяционных полиномов первого порядка, для которых как было показано ранее всегда существует единственное решение. Используем следующий вид начального импульса:

$$u(x,y,0) = \sin^4(\pi x) \sin^4(\pi y). \quad (18)$$

В таблицах 1, 2 и 3 приведены результаты расчетов для разных сеток в

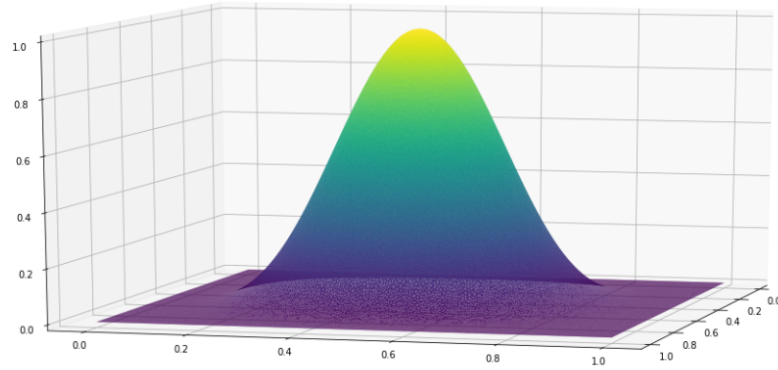


Рис. 5: Вид функции (18) в начальный момент времени.

момент времени $T=1$ и $T=3$ при шаге $\tau = 0.01$ и $T=3$ при шаге $\tau = 0.001$ соответственно.

Таблица 1: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280	0,087239	-	0,008104	-	0,561830	-
336	0,084176	0,196008	0,007179	0,664507	0,552675	0,090111
420	0,078477	0,314160	0,006050	0,766924	0,507142	0,385307
546	0,071616	0,348732	0,004816	0,869755	0,467492	0,310291
833	0,060154	0,412874	0,003341	0,865827	0,406355	0,331795
1620	0,042736	0,513982	0,001743	0,978381	0,299077	0,460837
2012	0,037003	0,664728	0,001356	1,156000	0,269926	0,473252
2691	0,031019	0,606635	0,000990	1,082734	0,227090	0,594256
3164	0,026893	0,881299	0,000791	1,385126	0,198694	0,824954
3959	0,022135	0,868753	0,000594	1,277442	0,174134	0,588620
4553	0,019305	0,978573	0,000483	1,478913	0,149670	1,082966
5266	0,016754	0,974120	0,000388	1,505377	0,129006	1,021248
6347	0,013513	1,151347	0,000287	1,613783	0,104003	1,153835
7905	0,010494	1,152088	0,000200	1,640325	0,083046	1,025142
10478	0,007399	1,240195	0,000124	1,713776	0,059363	1,191396
15686	0,005023	0,959898	6,87E-05	1,455265	0,040293	0,960370
19665	0,004151	0,843547	5,09E-05	1,327608	0,033393	0,830886
31318	0,002681	0,939637	2,60E-05	1,442039	0,021689	0,927303

Таблица 2: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) в момент времени $T=3$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280	0,124177	-	0,011289	-	0,758192	-
336	0,123780	0,017545	0,010378	0,461467	0,762095	-0,028158
420	0,122815	0,035079	0,009206	0,537115	0,740077	0,131382
546	0,119653	0,099439	0,007757	0,653016	0,710606	0,154882
833	0,110048	0,198085	0,005850	0,667990	0,664275	0,159611
1620	0,089724	0,306971	0,003462	0,788643	0,566198	0,240176
2012	0,081123	0,465016	0,002813	0,957313	0,525163	0,347180
2691	0,071354	0,441255	0,002160	0,908072	0,469398	0,386054
3164	0,063759	0,695066	0,001785	1,179794	0,428041	0,569599
3959	0,054593	0,692393	0,001398	1,089100	0,388150	0,436428
4553	0,048725	0,813379	0,001169	1,279554	0,349284	0,754732
5266	0,043212	0,825343	0,000966	1,310050	0,311220	0,793103
6347	0,035855	0,999631	0,000740	1,431530	0,262714	0,907470
7905	0,028516	1,043247	0,000532	1,500048	0,215465	0,903214
10478	0,020668	1,142375	0,000339	1,595503	0,159360	1,070431
15686	0,014362	0,902026	1,94E-04	1,387801	0,112091	0,872032
19665	0,011975	0,804137	1,45E-04	1,281201	0,094143	0,771854

Таблица 3: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) в момент времени $T=3$ при $\tau=0.001$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280	0,125539	-	0,011425	-	0,765283	-
336	0,125780	-0,010523	0,010528	0,448274	0,768981	-0,026442
420	0,125973	-0,006868	0,009415	0,500758	0,751386	0,103731
546	0,124458	0,046105	0,008043	0,600412	0,728038	0,120314
833	0,118458	0,116971	0,006262	0,592555	0,696066	0,106315
1620	0,105671	0,171739	0,004021	0,666080	0,629699	0,150647
2012	0,099776	0,264908	0,003414	0,754396	0,602648	0,202624
2691	0,094210	0,197388	0,002806	0,674784	0,571032	0,185319
3164	0,089194	0,337904	0,002447	0,844367	0,542738	0,313839
3959	0,083494	0,294604	0,002071	0,745108	0,523187	0,163669
4553	0,080038	0,302422	0,001854	0,791496	0,501968	0,296169
5266	0,076739	0,289277	0,001655	0,778807	0,482320	0,274454
6347	0,072495	0,304746	0,001433	0,772534	0,456291	0,297131
7905	0,066935	0,363517	0,001192	0,837687	0,432985	0,238836
10478	0,06037	0,366336	0,000940	0,843923	0,395840	0,318304
15686	0,051561	0,390900	6,64E-04	0,861993	0,345194	0,339301
19665	0,046894	0,419662	5,42E-04	0,900892	0,317237	0,373586

В полученных результатах можно заметить, что порядок сходимости сильно колеблется, одна из предполагаемых причин данного результата может быть особенность треугольной сетки. В следующих таблицах приведены результаты расчетов в момент времени $T=1$ при шаге $\tau = 0.01$, но проводилось усреднение результатов - в первом случае по трем близким сеткам, во втором - по пяти.

Таблица 4: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) с усреднением по трем сеткам в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280,67	0,087004	-	0,008119	-	0,564257	-
337,67	0,084931	0,130451	0,007203	0,647213	0,542017	0,217494
417,00	0,078696	0,361327	0,006117	0,774337	0,509018	0,297659
552,00	0,070055	0,414698	0,004726	0,919789	0,462416	0,342354
831,00	0,060084	0,375316	0,003321	0,862426	0,405557	0,320727
1620,00	0,042505	0,518484	0,001742	0,967007	0,301624	0,443532
2017,67	0,036841	0,651520	0,001358	1,133143	0,268957	0,522194
2673,67	0,030867	0,628502	0,000991	1,120859	0,228014	0,586636
3189,33	0,026857	0,789079	0,000792	1,269254	0,200701	0,723468
4542,33	0,019470	0,909602	0,000486	1,379604	0,149425	0,834277
5282,33	0,016702	1,015741	0,000386	1,524194	0,128056	1,022515
6351,00	0,013538	1,140012	0,000288	1,598672	0,105007	1,077059
7905,00	0,010416	1,197904	0,000199	1,677637	0,082589	1,097166
10517,33	0,007376	1,208484	0,000123	1,679136	0,059359	1,156673
15710,33	0,005030	0,954019	0,000069	1,461708	0,039952	0,986644
19637,67	0,004160	0,851554	0,000051	1,346226	0,033361	0,807956
19635,4	0,004156	0,840542	0,000051	1,341001	0,033315	0,804780

Таблица 5: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) с усреднением по пяти сеткам в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
279,6	0,087344	-	0,008184	-	0,564051	-
337,8	0,084591	0,169375	0,007184	0,689360	0,535931	0,270446
416,4	0,079015	0,325980	0,006154	0,739578	0,510326	0,234019
551,6	0,070695	0,395698	0,004773	0,903919	0,464915	0,331451
830,0	0,059773	0,410718	0,003318	0,890034	0,406939	0,325963
1621,2	0,042415	0,512414	0,001732	0,970793	0,300838	0,451226
2022,8	0,036736	0,649400	0,001353	1,117538	0,268596	0,512214
2666,0	0,030803	0,638020	0,000991	1,125838	0,227518	0,601167
3191,0	0,026830	0,768294	0,000793	1,243695	0,200704	0,697596
3966,2	0,022054	0,901355	0,000587	1,379341	0,169203	0,785066
4542,8	0,019476	0,915915	0,000486	1,399589	0,149133	0,930224
5287,2	0,016665	1,026987	0,000386	1,508776	0,128601	0,976122
6351,2	0,013555	1,126755	0,000288	1,592881	0,105564	1,076610
7895,4	0,010377	1,227542	0,000199	1,714125	0,081532	1,186937
10521,4	0,007362	1,195622	0,000123	1,668186	0,059174	1,116228
15699,6	0,005015	0,958838	0,000068	1,464709	0,039887	0,985561
19635,4	0,004156	0,840542	0,000051	1,341001	0,033315	0,804780

Заметного результата усреднение не дало - порядок сходимости и дальше колеблется. На рисунке 6 можно увидеть вид численного решения на разных сетках.

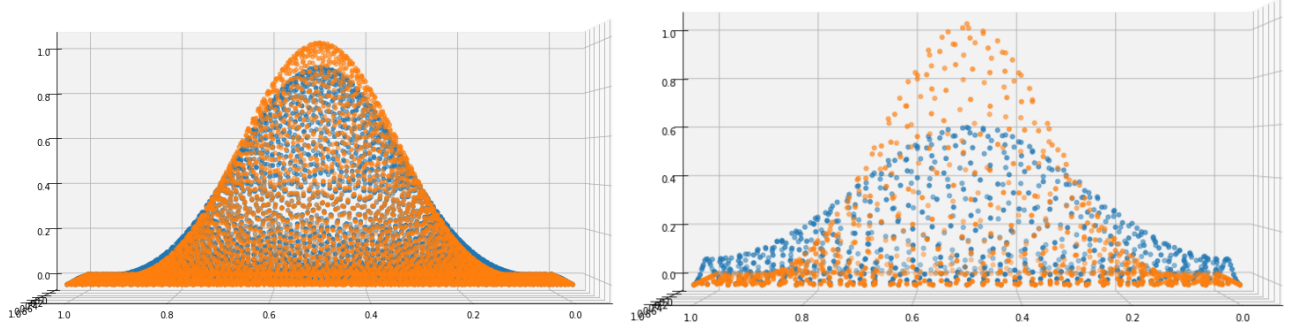


Рис. 6: Результаты расчета на сетках с разным числом расчетных узлов. Слева - 6347 узлов, справа - 833. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

2.2 Интерполяция полиномом второго порядка.

Далее проведем расчеты с использованием производных для повышения порядка полинома, производные считались как производная от интерполяционного полинома второго порядка. Рассмотрим начальный импульс вида:

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \sin^4(\pi x)\sin^4(\pi y), \\ u_x(x,y,0) = 4\pi\sin^3(\pi x)\sin^4(\pi y)\cos(\pi x), \\ u_y(x,y,0) = 4\pi\sin^4(\pi x)\sin^3(\pi y)\cos(\pi y). \end{cases} \quad (19)$$

На рисунке 7 представлены результаты численных расчетов в сравнении с проекцией аналитического решения на расчетную сетку. В таблице 7 представлены усредненные расчеты по трем сеткам с близким количеством узлов.

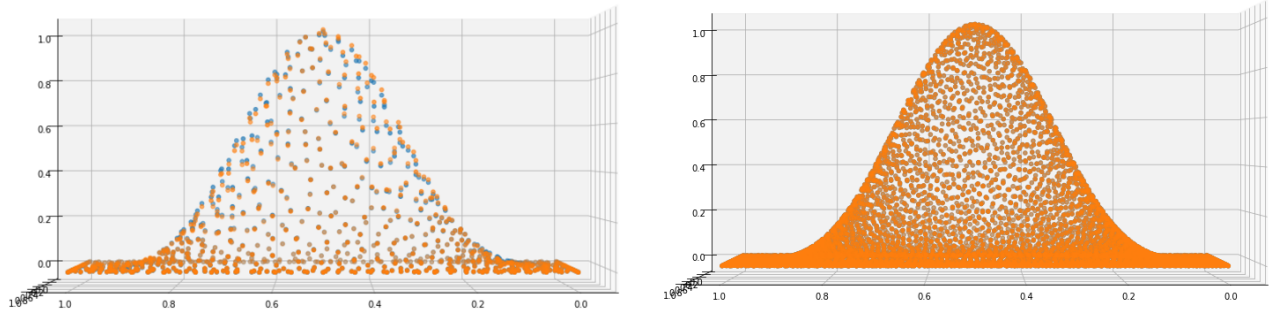


Рис. 7: Результаты расчета с полиномом второго порядка на сетках с разным числом расчетных узлов. Слева - 833 узлов, справа - 6347. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Таблица 6: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (19) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280	0,014964	-	1,512E-03	-	0,097890	-
336	0,012229	1,106800	1,138E-03	1,562403	0,083861	0,848404
420	0,009685	1,045366	7,805E-04	1,688373	0,059121	1,566609
546	0,006429	1,561802	4,697E-04	1,935249	0,041508	1,348090
833	0,003259	1,608495	1,936E-04	2,098861	0,022847	1,413438
1620	0,001042	1,713681	4,271E-05	2,271903	0,006554	1,877473
2012	0,000630	2,321321	2,381E-05	2,696059	0,004532	1,702130
2691	0,000320	2,335319	9,757E-06	3,068269	0,002330	2,288513
3164	0,000182	3,465536	5,015E-06	4,110660	0,001360	3,322698
3959	0,000111	2,202140	2,625E-06	2,887269	0,000675	3,127833
4553	0,000108	0,196558	2,383E-06	0,693333	0,000633	0,457131
5266	0,000112	-0,229490	2,428E-06	-0,130072	0,000750	-1,168079
6347	0,000092	1,062375	1,839E-06	1,489868	0,000574	1,436844
7905	0,000062	1,788875	1,131E-06	2,214683	0,000414	1,488286
10478	0,000021	3,900467	3,119E-07	4,570369	0,000148	3,655011
15686	0,000009	2,053784	1,147E-07	2,479577	0,000071	1,821542
19665	0,000006	1,621655	6,890E-08	2,254299	0,000053	1,315016

Таблица 7: Результаты усреднения расчетов по трем сеткам с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (19) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280,6667	0,014778	-	1,519E-03	-	0,099051	-
337,6667	0,012131	1,067443	1,114E-03	1,676752	0,078014	1,291294
417	0,009278	1,270688	7,566E-04	1,833995	0,056906	1,494970
552	0,006295	1,383038	4,524E-04	1,834084	0,039655	1,287842
831	0,003358	1,536348	1,966E-04	2,037467	0,022470	1,388535
1620	0,001052	1,738829	4,362E-05	2,255085	0,007042	1,738115
2017,667	0,000626	2,363366	2,309E-05	2,897314	0,004329	2,216993
2673,667	0,000315	2,441933	1,002E-05	2,965788	0,002418	2,069100
3189,333	0,000175	3,325044	4,829E-06	4,140053	0,001234	3,813001
3959,333	0,000110	2,145818	2,565E-06	2,925749	0,000655	2,927741
4542,333	0,000107	0,182882	2,390E-06	0,513785	0,000663	-0,091470
5282,333	0,000110	-0,181310	2,381E-06	0,023717	0,000711	-0,461124
6351	0,000093	0,923076	1,867E-06	1,321988	0,000600	0,918882
7905	0,000061	1,897085	1,113E-06	2,363004	0,000408	1,765003
10517,33	0,000019	4,154734	2,863E-07	4,754753	0,000138	3,804645
15710,33	0,000009	1,787046	1,158E-07	2,254658	0,000070	1,668703
19637,67	0,000006	1,576792	7,230E-08	2,112624	0,000055	1,136076

Далее рассмотрим начальный импульс следующего вида:

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \begin{cases} e^{(-\frac{\log(2)}{0.0009}((x-0.5)^2+(y-0.5)^2))}, & x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\ u_x(x,y,0) = \begin{cases} -\frac{(2\log(2))(x-0.5)}{0.0009}e^{(-\frac{\log(2)}{0.0009}((x-0.5)^2+(y-0.5)^2))}, & x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\ u_y(x,y,0) = \begin{cases} -\frac{(2\log(2))(y-0.5)}{0.0009}e^{(-\frac{\log(2)}{0.0009}((x-0.5)^2+(y-0.5)^2))}, & x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, & \text{else} \end{cases} \end{cases} \quad (20)$$

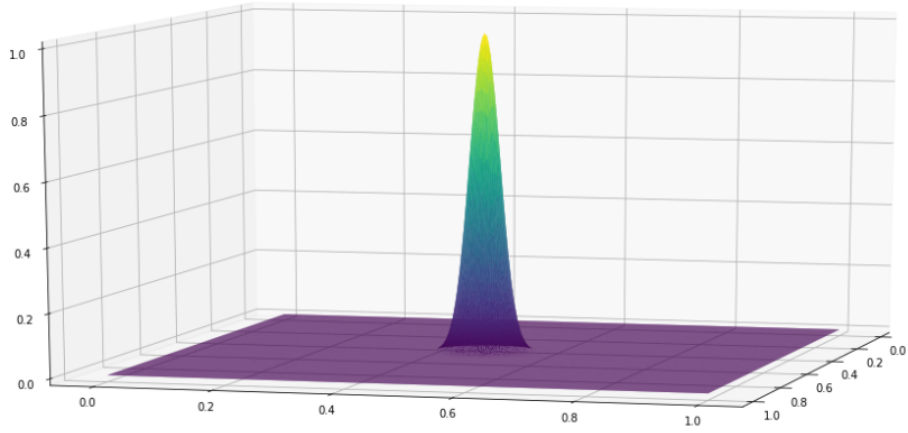


Рис. 8: Вид функции (20) в начальный момент времени.

Таблица 8: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (20) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
2012	0,002626	-	0,000443	-	0,529562	-
2691	0,002088	0,788716	0,000318	1,144763	0,453193	0,535561
3164	0,001693	1,294011	0,000255	1,346539	0,388164	0,956554
3959	0,001297	1,187648	0,000169	1,834000	0,32036	0,856473
4553	0,001026	1,676500	0,000134	1,665734	0,279417	0,978153
5266	0,000880	1,054792	0,000109	1,451264	0,236768	1,138429
6347	0,000752	0,840618	8,51E-05	1,308174	0,178367	1,516991
7905	0,000516	1,721805	5,48E-05	2,000839	0,141398	1,058074
10478	0,000239	2,722528	2,34E-05	3,018906	0,079533	2,042043
15686	0,000128	1,543224	1,10E-05	1,867677	0,044897	1,417150
19665	8,79E-05	1,676751	6,57E-06	2,290663	0,029539	1,851787
22380	6,65E-05	2,157502	4,80E-06	2,425879	0,024512	1,442702
26174	4,95E-05	1,880933	3,21E-06	2,575748	0,019008	1,623802

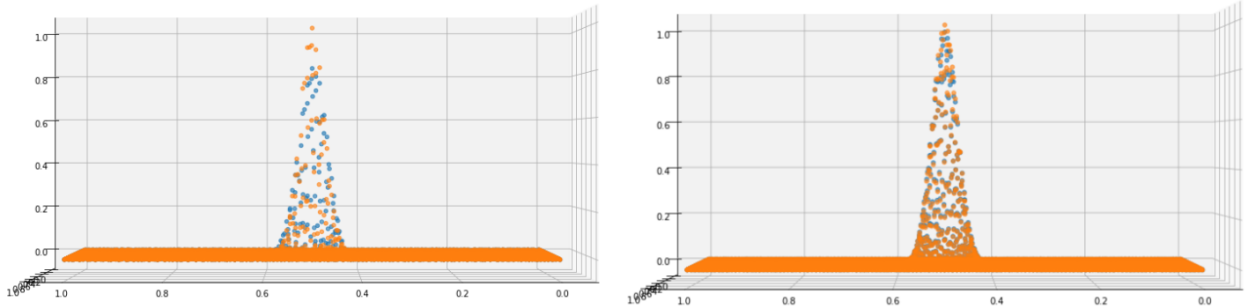


Рис. 9: Результаты расчета на сетках с разным числом расчетных узлов с начальным импульсом вида (20). Слева - 6347 узлов, справа - 19665. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Далее проведем расчеты с начальным импульсом имеющим разрывную

производную. Первый импульс задается следующей формулой:

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \begin{cases} (1 - |10x - 5|)(1 - |10y - 5|), x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \\ u_x(x,y,0) = \begin{cases} -10 \operatorname{sign}(10x - 5)(1 - |10y - 5|), x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \\ u_y(x,y,0) = \begin{cases} -10 \operatorname{sign}(10y - 5)(1 - |10x - 5|), x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \end{cases} \quad (21)$$

В таблице 9 представлены результаты расчетов.

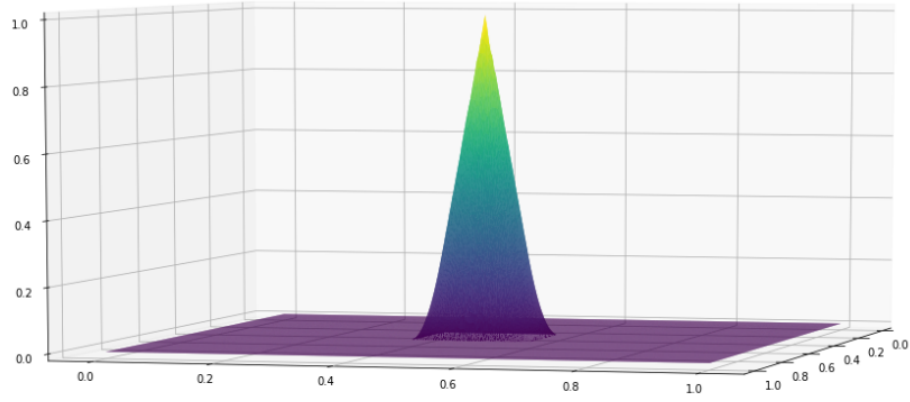


Рис. 10: Вид функции (21) в начальный момент времени.

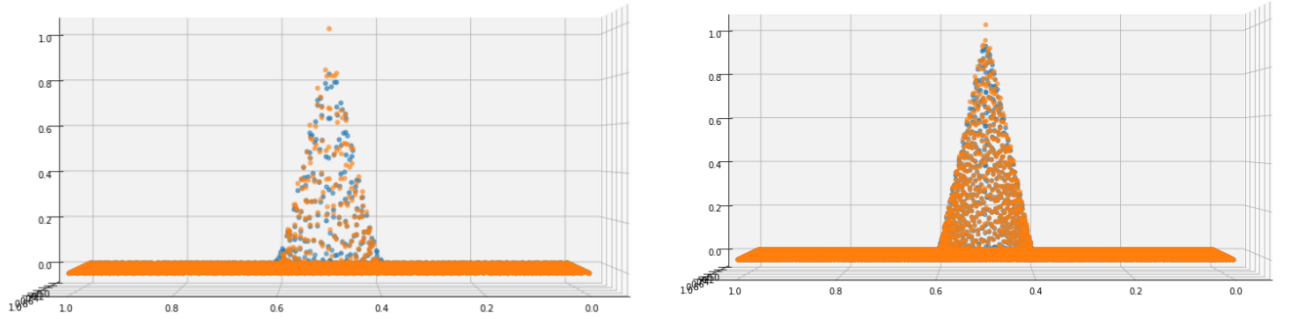


Рис. 11: Результаты расчета на сетках с разным числом расчетных узлов с начальным импульсом вида (21). Слева - 5266 узлов, справа - 22380. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Таблица 9: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (21) в момент времени T=1 при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
1620	0,003061	-	0,00038899	-	0,337755	-
2012	0,002208	1,507353	0,000260	1,863533	0,316565	0,298981
2691	0,001478	1,380171	0,000168	1,500692	0,276830	0,461259
3164	0,001188	1,352051	0,000134	1,409867	0,254661	0,515495
3959	0,000981	0,852915	0,000093	1,603377	0,221722	0,617904
4553	0,000881	0,766639	0,000080	1,117249	0,208590	0,436744
5266	0,000825	0,455388	0,000067	1,174162	0,189846	0,647197
6347	0,000747	0,531459	5,74E-05	0,849228	0,173855	0,471265
7905	0,000578	1,168760	4,10E-05	1,533108	0,158116	0,432303
10478	0,000393	1,367132	2,55E-05	1,688809	0,124131	0,858773
15686	0,000277	0,865455	1,57E-05	1,194628	0,110635	0,285264
19665	2,33E-04	0,770631	1,18E-05	1,283464	0,093044	0,765994
22380	2,05E-04	0,971917	1,01E-05	1,202706	0,092711	0,027715
26174	1,81E-04	0,824269	8,18E-06	1,332931	0,084930	0,559765

Далее рассмотрим начальный импульс следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,y,0) = \begin{cases} \sqrt{(1-100(x-0.5)^2)(1-100(y-0.5)^2)}, x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \\ u_x(x,y,0) = \begin{cases} \frac{-100(-0.5+x)}{\sqrt{-24+100x-100x^2}} \sqrt{1-100(y-0.5)^2}, x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \\ u_y(x,y,0) = \begin{cases} \frac{-100(-0.5+y)}{\sqrt{-24+100y-100y^2}} \sqrt{1-100(x-0.5)^2}, x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \end{array} \right. \quad (22)$$

Его график имеет следующий вид.

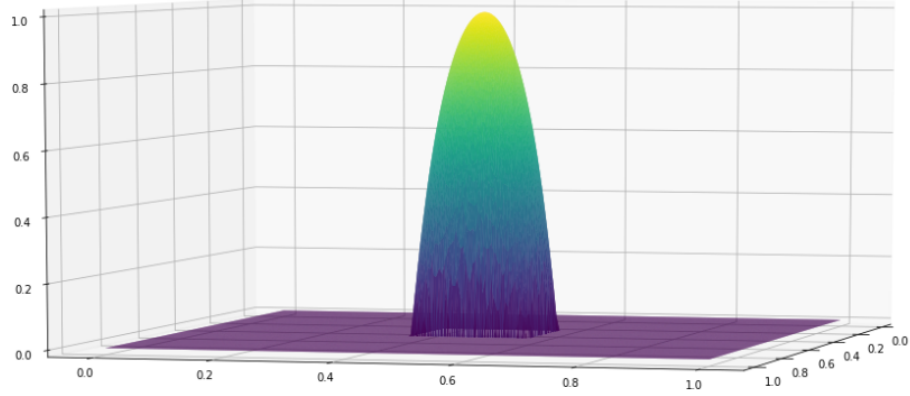


Рис. 12: Вид функции (22) в начальный момент времени.

Таблица 10: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (22) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
2012	0,006143	-	0,000550	-	0,278733	-
2691	0,005035	0,683681	0,000423	0,900226	0,247621	0,407030
3164	0,004513	0,676276	0,000353	1,130162	0,213365	0,919529
3959	0,003701	0,885441	0,000272	1,154586	0,219003	-0,116358
4553	0,003481	0,437916	0,000247	0,690894	0,226536	-0,241927
5266	0,003039	0,931985	0,000201	1,436787	0,202478	0,771713
6347	0,002739	0,556962	1,73E-04	0,787130	0,211663	-0,237605
7905	0,002205	0,988705	1,33E-04	1,189495	0,212489	-0,017744
10478	0,001703	0,915976	9,71E-05	1,125756	0,164233	0,914197
15686	0,001379	0,523247	6,95E-05	0,828312	0,158915	0,081578
19665	1,13E-03	0,880674	5,41E-05	1,113100	0,146964	0,345841
22380	1,00E-03	0,920344	4,52E-05	1,389057	0,131236	0,875240
26174	9,18E-04	0,564304	3,98E-05	0,806586	0,132839	-0,077528

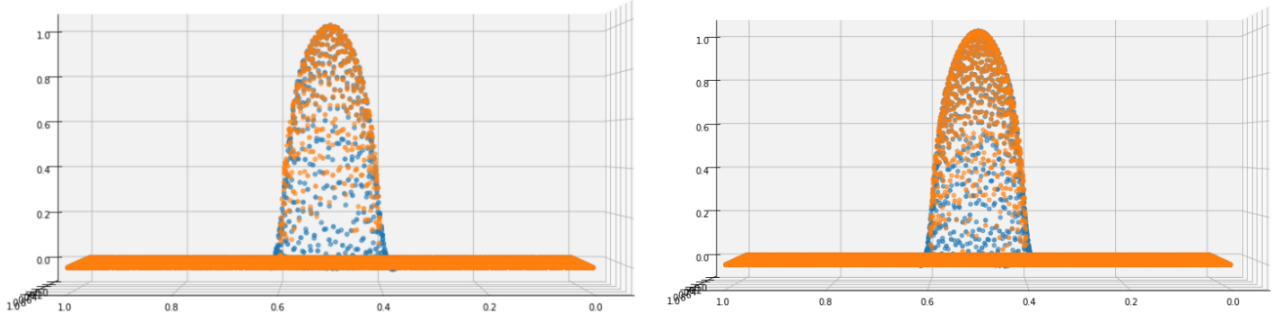


Рис. 13: Результаты расчета на сетках с разным числом расчетных узлов с начальным импульсом вида (21). Слева - 10478 узлов, справа - 9665. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Далее проведем расчеты с начальным импульсом вида (19), но в этот раз для производных будет отдельно находиться интерполяционный полином первого порядка.

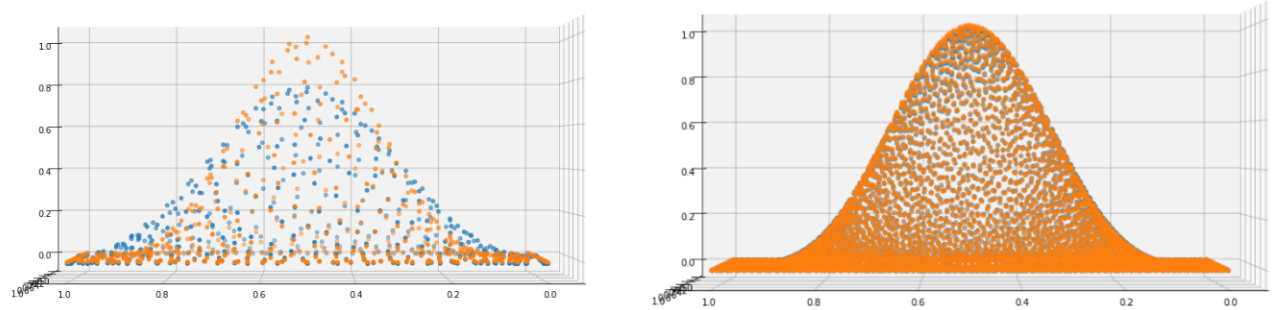


Рис. 14: Результаты расчета с полиномом второго порядка, где подсчет производных производился полиномом первого порядка, на сетках с разным числом расчетных узлов. Слева - 833 узла, справа - 6347. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Таблица 11: Результаты расчетов с полиномом второго порядка, где подсчет производных производился полиномом первого порядка, с начальным импульсом вида (19) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280	0,333336	-	0,047047	-	0,004509	-
336	0,319212	0,237467	0,044405	0,316997	0,003944	0,734162
420	0,278063	0,618476	0,039556	0,518222	0,003165	0,986449
546	0,228650	0,745737	0,031676	0,846823	0,002283	1,244313
833	0,168098	0,728297	0,023946	0,662257	0,001353	1,239454
1620	0,093714	0,878446	0,013356	0,877704	0,000533	1,400584
2012	0,072538	1,182003	0,010085	1,296623	0,000360	1,815271
2691	0,050321	1,257614	0,007276	1,122619	0,000221	1,677961
3164	0,038776	1,609491	0,005615	1,600401	0,000159	2,035197
3959	0,027929	1,463908	0,003875	1,654178	9,71E-05	2,191041
4553	0,022588	1,518254	0,003182	1,410571	7,38E-05	1,971111
5266	0,018989	1,192821	0,002542	1,543563	5,49E-05	2,031483
6347	0,012324	2,315372	0,001679	2,222322	3,22E-05	2,857253
7905	0,006519	2,901104	0,000944	2,621908	1,59E-05	3,223138
10478	0,003794	1,921048	0,000489	2,332073	7,32E-06	2,746303
15686	0,001689	2,006207	0,000206	2,140215	2,53E-06	2,628842
19665	0,001120	1,815497	0,000149	1,441534	1,62E-06	1,969768

По результатам можно заметить, что абсолютная ошибка больше, чем когда мы брали производную от интерполяционного полинома, но зато порядок сходимости ведет себя намного стабильнее.

Для сравнения приведем пример расчетов с начальным импульсом вида (19), но переопределенная система линейных уравнений для нахождения коэффициентов интерполяционного полинома будет решаться не методом наименьших квадратов, а отбрасыванием лишних уравнений и перебором возможных комбинации. Накладывалось ограничение на норму градиента и на

значение функции - оно должно быть меньше либо равно максимуму в вершинах треугольника и больше либо равно минимуму, в противном случае происходит переключение на полином первого порядка.

Таблица 12: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (19) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$. Решение при помощи комбинации.

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280	0,081669	-	0,007856	-	0,559194	-
336	0,080034	0,110917	0,006982	0,646476	0,529461	0,299676
420	0,074413	0,326353	0,005915	0,743002	0,496209	0,290671
546	0,067014	0,399157	0,004631	0,932944	0,451632	0,358775
833	0,055150	0,461265	0,003191	0,881733	0,389717	0,349055
1620	0,038316	0,547540	0,001643	0,998102	0,280003	0,497066
2012	0,033445	0,627419	0,001291	1,111965	0,252258	0,481512
2691	0,028158	0,591730	0,000942	1,082422	0,210113	0,628673
3164	0,024344	0,898752	0,000752	1,396350	0,181566	0,901841
3959	0,019924	0,893920	0,000565	1,272834	0,159523	0,577394
4553	0,017162	1,067596	0,000461	1,462101	0,144060	0,729378
5266	0,014580	1,120449	0,000362	1,664418	0,117455	1,403387
6347	0,012408	0,864257	0,000273	1,509584	0,093779	1,205671
7905	0,010180	0,901682	0,000197	1,492398	0,082294	0,595150
10478	0,007341	1,160222	0,000120	1,765770	0,052418	1,600732
15686	0,004510	1,207303	6,44E-05	1,533823	0,038434	0,769068
19665	0,003617	0,976680	4,72E-05	1,375442	0,028604	1,306549

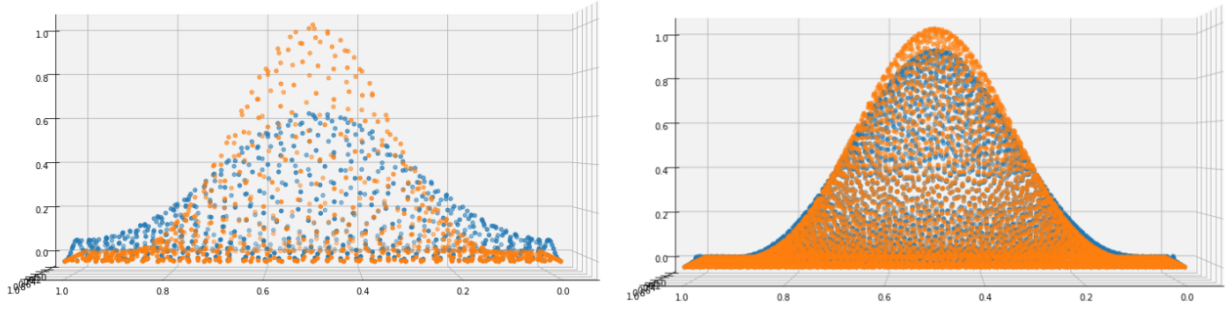


Рис. 15: Результаты расчета с полиномом второго порядка на сетках с разным числом расчетных узлов. Слева - 833 узла, справа - 6347. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

2.3 Проверка консервативности получившихся схем.

Схема называется консервативной, если она отражает на расчетной сетке те же законы сохранения, которые соответствовали исходной дифференциальной задаче [21]. В нашем случае происходит сохранение инвариантов Римана переносимых вдоль характеристик, чтобы убедиться в этом будет достаточно просуммировать значения искомой функции по всем узлам сетки и рассмотреть значение суммы в разные моменты времени. В случае консервативности метода сумма будет сохраняться. Для расчетов будем использовать начальный импульс вида (19).

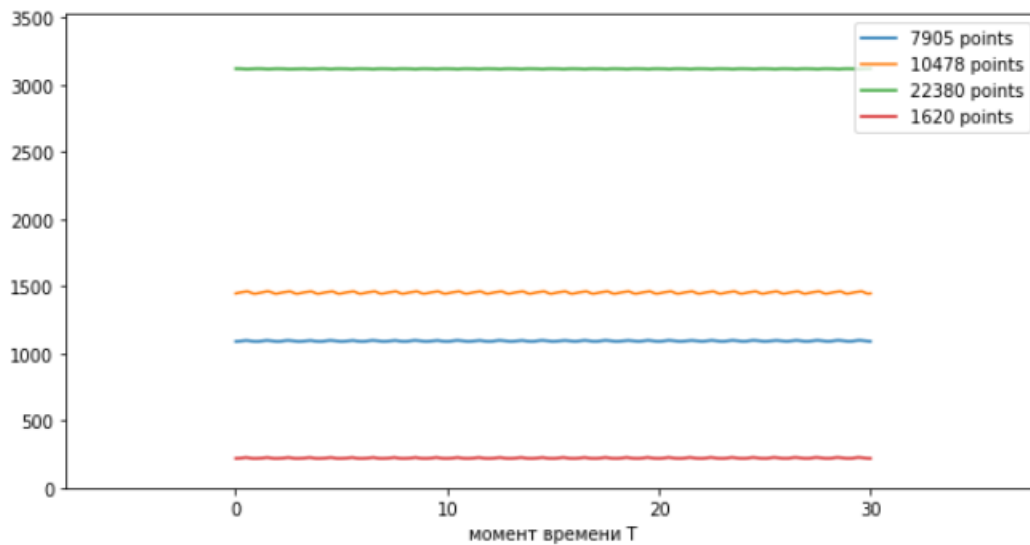


Рис. 16: График изменения суммы значений по всем узлам сетки с течением времени на сетках с различным числом точек для метода использующего интерполяционные полиномы второго порядка

3 Анализ результатов и вывод.

В работе была предпринята попытка реализации компактного сеточно-характеристического метода на нерегулярных треугольных сетках для решения однородного уравнения переноса с периодическими граничными условиями и проведено исследование его сходимости на начальных импульсах разного вида. По полученным результатам можно увидеть, что метод решения переопределенной системы для нахождения коэффициентов интерполяционного полинома более точен, чем метод перебора производных. Для метода перебора были испробованы многие ограничения на норму градиента, на значение интерполяционного полинома в точке пересечения, а также использование полинома третьей степени с отбрасыванием лишних членов, но удовлетворительного результата добиться не удалось. Ни один из двух подходов не дает сходящегося порядка. Так же были исследованы разные способы получения интерполяционного полинома для производных - первый, который подразумевал расчет производных как производных интерполяционного полинома вто-

рого порядка, давал лучший результат, если рассматривать абсолютную величину ошибки, второй же, предполагавший отдельное нахождение для каждой производной своего полинома первой степени, давал большую абсолютную ошибку, но меньшие колебания порядка. Колебания порядка можно связать с тем, что при обоих способах решения системы теряется часть данных о функции - в первом случае мы подходим к ней максимально близко, но все равно существует некая погрешность, связанная с переопределённостью системы, во втором же мы не используем все данные о производных функции, что может приводить к неправильному виду интерполяционной функции и тем самым ошибкам в численном решении. Была исследована консервативность полученных схем - для схемы, использующей полиномы первого порядка, было показано отсутствие консервативности, а для использующей второй порядок - показана консервативность вследствие выполнения законов сохранения.

Список литературы.

1. Golubev, V.I., Khokhlov, N.I., Nikitin, I.S. and Churyakov, M.A.: Application of compact grid-characteristic schemes for acoustic problems. J. Phys.: Conf. Ser. 1479, 012058 (2020).
2. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – С. 519.
3. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы: учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 313 с.;
4. Челноков Ф. Б., Численное моделирование деформационных процессов в средах со сложной структурой, Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук, М., 2005
5. Beklemysheva, K.A., Danilov, A.A., Petrov, I.B., Salamatova, V.Yu., Vassilevski, Yu.V., Vasyukov, A.V: Virtual blunt injury of human thorax: Age-dependent response of vascular system. RJNAMM 30 (5), 259–268 (2015).
6. Vasyukov A. V., Petrov I. B. Grid-characteristic method on tetrahedral unstructured meshes with large topological inhomogeneities //Computational Mathematics and

Mathematical Physics. – 2018. – Т. 58. – №. 8. – С. 1259-1269.

7. Петров И. Б., Фаворская А. В. Библиотека методов интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках // Информационные технологии. – 2011. – №. 9. – С. 30-32.

8. Рогов Б. В., Михайловская М. Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23. – №. 6. – С. 98-110.

9. Голубев В. И., Петров И. Б., Хохлов Н. И. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трёхмерного линейного уравнения переноса // Математическое моделирование. – 2016. – Т. 28. – №. 2. – С. 123-132.

10. Khokhlov N. I., Petrov I. B. On one class of high-order compact grid-characteristic schemes for linear advection // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2016. – Т. 31. – №. 6. – С. 355-368.

11. Сычугова Е. П. Решение уравнения переноса методом конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках // Препринты ИПМ им. МВ Келдыша. – 2013. – №. 85. – С. 24.

12. Hu, N., Zemba, Y., Okabe, T., Yan, C., Fukunaga, H., Elmarakbi, A.: A new cohesive model for simulating delamination propagation in composite laminates under transverse loads. Mech. Mater. 40, 920–935 (2008).

13. Miryaha, V.A., Sannikov, A.V., Petrov, I.B.: Discontinuous Galerkin method for numerical simulation of dynamic processes in solids. Math Models Comput Simul 7, 446–455 (2015).

14. Pelties, C., de la Puente, J., Ampuero, J.-P., Brietzke, G., Käser M.: Three-dimensional dynamic rupture simulation with a high-order discontinuous Galerkin method on un-structured tetrahedral meshes. Journal of Geophysical Research: Solid Earth 117(B2), (2012).

15. Biryukov, V.A., Miryaha, V.A., Petrov, I.B., Khokhlov, N.I.: Simulation of Elastic Wave Propagation in Geological Media: Intercomparison of Three Numerical Methods. Computational Mathematics and Mathematical Physics 56 (6), 1086–1095 (2016).

16. Беклемышева К. А., Васюков А. В., Голубев В. И., Петров И. Б., “Численное моделирование воздействия сейсмической активности на подводный композитный трубопровод”, Матем. моделирование, 31:1 (2019), 103–113
17. Беклемышева К. А., Петров И. Б., “Моделирование разрушения гибридных композитов под действием низкоскоростного удара”, Матем. моделирование, 30:11 (2018), 27–43
18. Vassilevski, Yu., Beklemysheva, K., Grigoriev, G., Kulberg, N., Petrov, I., Vasyukov, A.: Numerical simulation of aberrated medical ultrasound signals. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling 33(5), 277–288 (2018).
19. Миряха В. А., Петров И. Б. Моделирование разрывным методом Галёркина воздействия ледяного поля на вертикальную цилиндрическую опору // Матем. моделирование. – 2018 – Т. № 30(9). – С. 111-134.
20. Васюков А. В. Численное моделирование деформаций и повреждений в сложных конструкциях при действии динамической нагрузки // Москва. – 2012. – С. 0050544ЭУ.
21. Холодов А. С. Численные методы решения уравнений и систем гиперболического типа // Энциклопедия низкотемпературной плазмы (серия «Б»). – 2008. – Т. 1. – №. ч 2. – С. 141-174.