Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Jure Taslak

Yonedova lema in njena uporaba

DIPLOMSKO DELO

INTERDISCIPLINARNI UNIVERZITETNI
ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2017

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Besedilo teme diplomskega dela študent prepiše iz študijskega informacijskega sistema, kamor ga je vnesel mentor. V nekaj stavkih bo opisal, kaj pričakuje od kandidatovega diplomskega dela. Kaj so cilji, kakšne metode uporabiti, morda bo zapisal tudi ključno literaturo.

Na tem mestu zapišite, komu se zahvaljujete za izdelavo diplomske naloge. Pazite, da ne boste koga pozabili. Utegnil vam bo zameriti. Temu se da izogniti tako, da celotno zahvalo izpustite.

Pozdrav

Kazalo

Povzetek

Abstract

1 Uvod **1**
1.1 Osnovne Definicije 1
1.2 Primeri kategorij 2
1.3 Različni tipi morfizmov 5
1.4 Konstrukcije novih kategorij 7
1.5 Začetni in končni objekti 10
1.6 Posplošeni elementi 12
1.7 Produkti 14
1.8 Dualnost 15
1.9 Hom-sets 16
1.10 Zožki in kozožki 17
1.11 Povleki in potiski 20
1.12 Limite, kolimite in eksponenti 21
1.13 Funktorji in naravne transformacije 25

2 Pomembne trditve **27**

3 Yonedova lema **29**
3.1 Yonedova vložitev 29
3.2 Yonedova lema 30
3.3 Posledice Yonedove leme 33

Povzetek

Naslov: Yonedova lema in njena uporaba

Avtor: Jure Taslak

V vzorcu je predstavljen postopek priprave diplomskega dela z uporabo okolja LaTeX. Vaš povzetek mora sicer vsebovati približno 100 besed, ta tukaj je odločno prekratek. Dober povzetek vključuje: (1) kratek opis obravnavanega problema, (2) kratek opis vašega pristopa za reševanje tega problema in (3) (najbolj uspešen) rezultat ali prispevek magistrske naloge.

Ključne besede: računalnik, računalnik, računalnik.

Abstract

Title: Naslov EN

Author: Jure Taslak

This sample document presents an approach to typesetting your BSc thesis using LaTeX. A proper abstract should contain around 100 words which makes this one way too short.

Keywords: computer, computer, computer.

Poglavje 1

Uvod

Kaj je teorija kategorij? Kako se razlikuje od običajnega pogleda na matematiko?

1.1 Osnovne Definicije

Definicija 1.1. $Kategorija$ sestoji iz naslednjih stvari:

- *Objektov* : A,B,C,X,Y,...
- *Puščic* : f,g,h,...
- Za vsako puščico imamo podana dva objekta:

  $$dom(f), \quad cod(f)$$

  ki jima pravimo domena in kodomena puščice f. Pišemo:

  $$f\colon A \to B$$

  kjer sta A = dom(f) in B = cod(f). Pravimo da f gre od A do B.

- Za vsaki puščici $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$, torej taki da velja cod(f) = dom(g), obstaja puščica $g \circ A \to C$, ki ji pravimo *kompozitum* f in g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

- Za vsak objekt A obstaja puščica

$$1_A : A \to A$$

ki ji pravimo *identitetna puščica* na A.

Za vse te podatke morata veljati naslednja dva pravila:

- Asociativnost: Za vsake $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ velja

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- Enota: Za vsak $f : A \to B$ velja

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Kategorija je karkoli, kar zadošča tem pogojem. Objekte kategorije všasih označujemo z $Obj(\mathbf{C})$ in morfizme z $Arr(\mathbf{C})$.

1.2 Primeri kategorij

Primer 1.2.1. Bazični primer kategorije in tak h katerem se lahko vedno sklicujemo je kategorija množic in funkcij med njimi. Označimo ga z **Sets**. Za kategorijo se vedno prvo vprašamo: kaj so objekti in kaj so puščice. Pri **Sets** so objekti množice in puščice funkcije. Izpolnjena morata biti pogoja asociativnosti in enote. Kompozitum puščic je kompozitum funkcij, ki je asociativen, kar vemo iz teorije množic. Vlogo identitetne puščice igra identitetna funkcija, ki jo lahko vedno definiramo in zanjo velja $f \circ id_A = f = id_B \circ f$ za vsako funkcijo $f : A \to B$, kjer je $id_A : A \to A$ def. kot $id_A(x) = x$ za vsak element $x \in A$.

Primer 1.2.2. Še en primer, ki ga v bistvu že poznamo je podkategorija kategorije **Sets**, in sicer $\mathbf{Sets}_{fin}$, kategorija končnih množic in funkcij med njimi. Zakaj je to res kategorija? Objekti so očitno končne množice, kaj so pa puščice. To bi morale biti funkcije med končnimi množicami in kompozitum takih funkcij je seveda tudi funkcija takega tipa, torej iz končne množice v končno množico. Razmisliti moramo še ali imamo identitetno puščico. To seveda imamo, saj bo to podedovana identitetna funkcija iz **Sets**, ki bo v tem primeru funkcija iz končne množice v končno, torej res puščica v tej kategoriji. Tu imamo tudi primer kategorije, katere objekti so množice z dodatno strukturo ter so morfizmi objektov funkcije, ki ohranjajo strukturo teh množic.

Primer 1.2.3. Kaj bi bil primer "majhne"kategorije? Kategorije z majhnim številom objektov ali morfizmov. Ker mora za vsak objekt obstajati identitetni morfizem mora vsaka kategorija imeti najmanj toliko morfizmov kolikor je objektov. Najmanjše število objektov, ki jih lahko imamo je 0. Ali je kategorija z 0 objekti in 0 puščicami res kategorija? Za vsak objekt (ki jih ni) obstaja identitetni morfizem in za vsaka dva kompatibilna morfizma (ki ju ni) obstaja njun kompozitum. To torej je kategorija. Kaj pa kategorija z enim objektom. Imeti mora torej najmanj en objekt in en identitetni morfizem. Tej kateogriji pravimo tudi kategorija **1**. Kategoriji z dvema objektom in eno neidentitetno puščico med objektoma pravimo **2**. Te dve kategoriji izgledata takole.

$$\bullet \circlearrowleft \qquad\qquad \circlearrowright \bullet \longrightarrow \bullet \circlearrowleft \tag{1.1}$$

Identitetnih morfizmov se ponavadi ne riše. Kategorija **3** bi izgledala takole.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Primer 1.2.4. Delno urejena množica ali poset je množica opremljena z relacijo, ki se jo ponavadi označuje z $\leq$ in je:

- Refleksivna
- Antisimetrična
- Tranzitivna

Morfizem delno urejenih množic P in Q je *monotona* funkcija

$$m : P \to Q$$

kar pomeni, da za vsaka $x, y \in P$ za katera je $x \leq y$, potem velja $m(x) \leq m(y)$. Ali je to kategorija? Izpolnjevati mora aksiome za kategorij, torej ali imamo identitetne morfizme za vsako delno urejeno množico P? Naravni kandidat je identitetna funkcija $1_P : P \to P$, ki je monotona, say iz $x \leq y$ sledi $x \leq y$. Kompozitum dveh monotonih funkcij $m : P \to Q$ in $n : P \to Q$ je tudi monotona funkcija, saj za $x \leq y$ zaradi monotonosti m velja $m(x) \leq m(y)$ in zaradi monotonosti n velja $n(m(x)) \leq n(m(y))$. Imamo torej kategorijo, ki jo označujemo s **Pos**, delno urejenih množic in monotonih funkcij.

Primer 1.2.5. Monoid $(M, \bullet)$ je množica opremljena z binarno operacijo množenja, za katero drži

- Zaprtost: $\forall x, y \in M : x \bullet y \in M$
- Asociativnost: $\forall x, y, z \in M : x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
- Obstoj enote: obstaja tak $e \in M$ tako da $\forall x \in M : e \bullet x = x \bullet e = x$

Homomorfizmi monoidov so funkcije $f : M \to N$ za katere velja

1. $f(e_M) = e_N$
2. $f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y)$

Identitetni homorfizem $1_M : M \to M$ bo predstavljal identitetni morfizem v tej kategoriji. Kompozitum dveh homorfizmov je spet homomorfizem, torej imamo novo kategorijo monoidov in homorfizmov med njimi, ki jo označujemo s **Mon**.

Primer 1.2.6. Naj bo $(P, \leq)$ delno urejena množica. Ali je to tudi kategorija? Najprej se moramo vprašati, kaj so objekti v tej kategoriji in kaj so puščice. Imamo možio elementov $p, q \in P$ med katerimi lahko imamo relacijo $p \leq q$, ki je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Dobimo idejo, da za objekte vzamemo elemente P in podamo puščico med p in q natanko takrat ko v P velja $p \leq q$. Torej:

- **Objekti:** Elementi množice P
- **Puščice:** Puščica $p \to q \Leftrightarrow p \leq q$

Potrebno je preveriti, če so izpolnjeni aksiomi za kategorijo.

(a) Za vsak objekt $p \in P$ potrebujemo puščico $1_p : p \to p$. Ali obstaja taka puščica? Seveda, saj za vsak p velja $p \leq p$, kar nam da želeno identitetno puščico.

(b) Za vsaki dve puščici $p \to q$ in $q \to r$ mora obstajati kompozitum $p \to r$. Ali obstaja ta kompozitum? Seveda, saj je relacija $\leq$ tranzitivna in iz $p \leq q$ in $q \leq r$ sledi $p \leq r$, kar nam da željeni kompozitum.

Vsaka delno urejena množica je torej svoja kategorija in v bistvu so kategorije v nekem smislu posplošene delno urejene množice.

Primer 1.2.7. Še en primer, ki ga bralec najverjetneje že pričakuje. Objekti naj bodo topološki prostori in morfizmi naj bodo zvezne funkcije med njimi. Zveznim funkcijam, kot tudi učasih drugim funkcijam, ki ohranjajo struktuo, bomo pravili preslikave. Identitetni morfizem za nek topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je identietna preslikava $1_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$, ki je seveda zvezna. Kompozitum dveh preslikav je spet preslikava. Torej topološki prostori res tvorijo kategorijo. Označujemo jo s **Top**.

1.3 Različni tipi morfizmov

Uvedemo prvo abstraktno definicijo v jeziku teorije kategorij, nečesa kar je že poznano iz drugih področij matematike.

Definicija 1.2. Naj bo **C** poljubna kategorija. Puščici $f : A \to B$ pravimo *izomorfizem* (ali izo na kratko), če obstaja taka puščica $g : B \to A$, da velja

$$g \circ f = 1_A \; in \; f \circ g = 1_B$$

Puščici g pravimo *inverz* puščice f

Velja:

Trditev 1.0.1. *Inverzi, ko obstajajo, so enolični.*

Dokaz. Naj bo $f : A \to B$ izomorfizem in naj bosta $g, h : B \to A$ njegova inveza. Potem velja $g = 1_A \circ g = h \circ f \circ g = h \circ 1_B = h$ □

Zaradi česar za inverz od f pišemo f^{-1}

Primer. Izomorfizmi v kategoriji **Sets** ustrezajo ravno bijektivnim preslikavam, saj kot vemo iz teorije množic, ima funkcija inverz, ravno kadar ostaja enoličen inverz te funkcije, ki se komponira v identitetno funkcijo.

Primer. Vsaka identitetni morfizem je izomorfizem, nima pa nujno kategorija drugih morfizmov kot identitetnega. Na primer kategorija **2** ima samo en neidentitetni morfizem, ki pa nima inverza torej ni izomorfizem.

Primer z funkcijami nam pa naravno porodi novo vprašanje, saj kot vemo, je funkcija bijektivna ravno takrat, ko je surjektivna ter injektivna. Vprašamo se, kaj bi pa bili karakterizaciji teh dveh lastnosti v jeziku teorije kategorij. Izkaže se, da pridemo do malenkost bolj splošnih pojmov, ki jih predstavimo v naslednjih dveh definicijah.

Definicija 1.3. Epimorfizem je tak morfizem $e : E \to A$, da za vsaka morfizma $f, g : A \to B$ iz $f \circ e = g \circ e$ sledi $f = g$. Epimorfizmu rečemo tudi epi na kratko.

Definicija 1.4. Monomorfizem je tak morfizem $m : B \to M$, da za vsaka morfizma $f, g : A \to B$ iz $m \circ f = m \circ g$ sledi $f = g$. Monomorfizmu rečemo tudi mono na kratko.

Primer 1.3.1. Preverimo, da mono in epi morfizmi v **Sets** ustrezajo ravno injektivnim in surjektivnim funkcijam. Naj bo torej najprej $f : A \to B$ injektivna funkcija. Potem za vsaka $x, y \in A$ velja, da it $f(x) = f(y)$ sledi $x = y$. Naj bosta sedaj $g, h : C \to A$ taki funkciji, da velja $f \circ g = f \circ h$. Torej za vsak $x \in C$ velja $f(g(x)) = f(h(x))$ iz čeasr iz injektivnosti f sledi $g(x) = h(x)$ za vsak x, torej g = h. Privzemimo sedaj, da je f monomorfizem. Velja torej $f \circ g = f \circ h \implies g = h$. Naj bo $1 = \{\star\}$ in naj bosta $x, y : 1 \to A$. Funkcije iz množice 1 v A predstavljajo ravno elemente množice A. Ker pa velja $f \circ x = f \circ y \implies x = y$ velja tudi, da za vsaka $x, y \in A$ velja $f(x) = f(y) \implies x = y$ in je f res injektivna. Naj bo sedaj $f : A- > B$ surjektivna funkcija. Velja torej, da $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$. Naj bosta sedaj $g, h : B \to C$ taki funkciji, da velja $g \circ f = h \circ f$. Torej za vsak $y \in B$ velja $g(y) = h(y)$ saj vsak tak y lahko zapišemo kot $f(x)$ za nek $x \in A$. Torej je f res epi. Naj bo sedaj f epimorfizem in naj bosta $g, h : B \to 2$ definirani z naslednjima predpisoma

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathrm{Im} f \\ 0 & ; \quad x \notin \mathrm{Im} f \end{cases}$$

$$h(x) = 1 \quad \forall x \in B$$

Poglejmo sedaj kompozituma $g \circ f$ in $h \circ f$. Velja $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1$ za vsak $x \in A$, saj je $f(x) \in \mathrm{Im} f$. Po drugi strani pa je tudi $h \circ f(x) = h(f(x)) = 1$. Torej je za vsak $x \in A$, $g \circ f(x) = h \circ f(x)$, oziroma $g \circ f = h \circ f$ in ker je f epimorfizem sledi $g = h$, kar pa pomeni, da je za vsak $y \in B$ nek tak $x \in A$, da z f lahko pridemo do njega, kar pa pomeni ravno, da je f surjektivna.

Ta primer bi nam dal misliti, da so epi in mono-morfizmi vedno, kadar imamo opravka z objekti, ki predstavljajo množice, ravno surjektivne ter injektivne funkcije. Naslednji primer pokaže, da temu ni vedno tako.

Primer 1.3.2. Naj bo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ homomorfizem monoidov, definiran s predpisom $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Naj bosta sedaj $g, h : \mathbb{Z} \to M$ taka homomorfizma monoidov, da velja $g \circ f = h \circ f$. Veljajo torej zveze

$$g \circ f(1) = h \circ f(1) \implies g(1) = h(1)$$

$$g(n) = g(1 + \ldots + 1) = g(1) + \ldots + g(1) = ng(1) = nh(1) = h(n)$$

$$g(-n) = -g(n) = -h(n) = h(-n)$$

Če vse to pogledamo skupaj, vidimo da velja

$$g(k) = h(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

kar pa pomeni $g = h$. Torej je f epimorfizem. Način kako smo prišli do tega primera nam da misliti, da mogoče kar je potrebno, za to da je homorfizem monoidov epi, da je surjektiven na generatorje kodomene. Algebraično gledano, to da je nek morfizem e epi, pomeni natanko to, da ga lahko pri kompoziciji krajšamo z desne: $fe = ge \implies f = g$. Obratno, če je morfizem m mono, pomeni, da ga lahko krajšamo z leve: $mf = mg \implies f = g$.

1.4 Konstrukcije novih kategorij

Primer 1.4.1. Naj bosta $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ kategoriji. *Produkt* kategorij $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ je prav tako kategorija, z objekti oblike (C, D), kjer sta $C \in \mathbf{C}$ in $D \in \mathbf{D}$ in morfizmi oblike $(f, g) : (C, D) \to (C', D')$, kjer je $f : C \to C'$ morfizem v $\mathbf{C}$ ter $g : D \to D'$ morfizem v $\mathbf{D}$. Identitene morfizme ter kompozitume definiramo po komponentah, torej

$$1_{(C,D)} = (1_C, 1_D)$$

$$(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$$

za $C \in \mathbf{C}$, $D \in \mathbf{D}$ ter f, f' puščici v $\mathbf{C}$ in g, g' puščici v $\mathbf{D}$. Za produkt $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ imamo dva *projekcijska funktorja*

$$\mathbf{C} \xleftarrow{\pi_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{D}}} \mathbf{D}$$

definirana kot $\pi_{\mathbf{C}}(C, D) = C$ in $\pi_{\mathbf{D}}(C, D) = D$ ter na morfizmih $\pi_{\mathbf{C}}(f, g) = f$ in $\pi_{\mathbf{D}}(f, g) = g$.

Primer 1.4.2. *Obratna* ali *dualna* kategorija $\mathbf{C}^{op}$ kategorije $\mathbf{C}$ je kategorija z istimi objekti kot $\mathbf{C}$ kjer vsem morfizmom zamenjamo domeno in kodomeno. To pomeni, da za morfizem $f : A \to B$ v $\mathbf{C}$ imamo morfizem $f : B \to A$ v $\mathbf{C}^{op}$. Konceptualno je to kategorija, kjer so vse puščice obrnjene. Poglejmo si, da je to res tudi kategorija. Identitetni morfizmi ostanejo isti, kaj se pa zgodi z kompozitumi. Objekte in morfizme v obratni kategoriji se ponavadi označuje kar z enakimi oznakami, a da bodo stvari bolj jasne uvedimo za trenutek naslednje oznake: Za morfizem $f : A \to B$ v $\mathbf{C}$ pišimo $f^* : B^* \to A^*$ v $\mathbf{C}^{op}$. Tako dobimo zvezo med operacijami v $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}^{op}$.

$$(1_C)^* = 1_{C^*}$$
$$(g \circ f)* = f^* \circ g^*$$

Torej diagram v $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

v $\mathbf{C}^{op}$ zgleda kot

$$\begin{tikzcd} A^* & B^* \arrow[l, "f^*"'] \\ & C^* \arrow[u, "g^*"'] \arrow[ul, "f^* \circ g^*"] \end{tikzcd}$$

Dualna kategorija nam predstavi pojem dualnosti, ki se izkaže za zelo pomembnega v študiju teorije kategorij, saj nam omogoča, da razne konstrukcije prenesemo v njihovo dualno obliko in tako iz eno konstrukcije dobimo dve.

Primer. Tako dualnost smo že srečali, ko smo upeljali pojma epimorfizma ter monomorfizma. Naj bosta $e : E \to A$ epimorfizem in $m : D \to M$ monomorfizem v kategoriji $\mathbf{C}$. Če postavimo njuna diagrama enega ob drugega

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & D \arrow[r, "m"] & M \end{tikzcd}$$

postane jasno, da je en samo dualna verzija drugega, ali z drugimi besedami, epimorfizem je monomorfizem v dualni kategoriji. Ta ideja

Primer 1.4.3. *Kategorija morfizmov* $\mathbf{C}^{\to}$ kategorije $\mathbf{C}$ je kategorija dobljena iz kategorije $\mathbf{C}$ tako, da za objekte vzamemo morfizme iz kategorije $\mathbf{C}$, na primer $f : A \to B$ in $g : C \to D$ kar bi lahko izgledalo nekako takole

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B & B' \end{tikzcd}$$

Kako bi sedaj prešli iz f v g? Naravna ideja, ki se nam porodi, je da povežemo obe stranici navideznega kvadrata z morfizmi v $\mathbf{C}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "g_2"'] & B' \end{tikzcd}$$

Morfizem $f \to g$ je torej par morfizmov (h_1, h_2) iz $\mathbf{C}$. Identitetni morfizem je par $(1_A, 1_B)$. Kar mora še veljati, da bi to bila kategorija, je da lahko take morfizme komponiramo med seboj. Kar mora še veljati je, da sta obe poti po kvadratu enaki, torej $g \circ h_1 = h_2 \circ f$, čemur rečemo, da *kvadrat komutira* (zakaj je to pomembno brez motivacije s strani naravnih transformacij?). Preveriti moramo, da ta pogoj ohranja komponiranje, ali z drugimi besedami, če komponiramo da komutirajoča kvadrata, ali dobimo nov komutirajoč kvadrat. Recimo, da imamo naslednjo situacijo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f'"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\ B \arrow[r, "g_2"'] & B' \arrow[r, "h_2"'] & B'' \end{tikzcd}$$

kjer so f, f', f'' objekti v $\mathbf{C}^{\to}$, $(g_1, g_2), (h_1, h_2)$ pa morfizmi v $\mathbf{C}^{\to}$. Kaj bi bil kompozitum morfizmov $(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2)$. Očitna izbira, ki se tudi izkaže za pravilno, je komponiranje po komponentah, oziroma $(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2) = (h_1 \circ g_1, h_2 \circ g_2)$. Preveritmi moramo komutativnostni pogoj.

$$f'' \circ (h_1 \circ g_1) = (f'' \circ h_1) \circ g_1 =$$
$$(h_2 \circ f') \circ g_1 = h_2 \circ (f' \circ g1) =$$
$$h_2 \circ (g_2 \circ f) = (h_2 \circ g_2) \circ f$$

Primer 1.4.4. *Rezinska kategorija* $\mathbf{C}/C$ kategorije $\mathbf{C}$ preko objekta $C \in \mathbf{C}$. Ideja te kategorije je podobna kategoriji puščic, a da v tem primeru gledamo morfizme v $\mathbf{C}$, ki imajo kodomeno, torej kažejo v, objekt C. Na primer

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"'] & & A' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Ostale stvari delujejo podobno kot v kategoriji puščic. Morfizmi so ravno tako morfizmi v $\mathbf{C}$ a z eno zahtevo manj, saj sedaj ne bo potrebno poslati kodomene prvega morfizma v kodomeno drugega. Tako, bi bil v našem primeru morfizem $f \to f'$ morfizem $g : A \to A'$ v $\mathbf{C}$, tako da sledeči trikotnik komutira

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & A' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

oziroma z enačbo

$$f' \circ g = f$$

Identitetni morfizem se podeduje iz $\mathbf{C}$, kompozitum pa deluje ravno tako kot v kategoriji puščic. Če pogledamo malo bolj natančno, lahko vidimo, da ta konstrukcija izgleda kot neka "podkonstrukcija"kategorije puščic, če iz vseh objektov kategorije $\mathbf{C}^{\to}$ vzamemo le tiste s kodomeno C. Potem so morfizmi oblike $(g, 1_C)$ in vidimo, da komutativnostni kvadrati ustrezajo ravno komutativnostnim trikotnikom v $\mathbf{C}/C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ C \arrow[r, "1_C"'] & C \end{tikzcd}$$

Imamo tudi *korezinsko* kategorijo $C/\mathbf{C}$ kjer za objekte vzamemo morfizme v $\mathbf{C}$, ki kažejo iz C, oziroma tiste z domeno C. Ostale stvari potekajo podobno kot v rezinski kategoriji.

1.5 Začetni in končni objekti

V kategoriji **Set** množic in funkcij med njimi poznamo posebne tipe množic, kot na primer prazna množic in eno-elementa množica. Poglejmo si abstraktizacijo teh dveh posebnih primerov v jezik teorije kategorij. Definicijo podamo s tako imenovano *univerzalno lastnostjo*, ki nam pove kako so med seboj povezani morfizmi, ki so relevantni v tej konstrukciji (boljši način za to povedat).

Definicija 1.5. V poljubni kategoriji $\mathbf{C}$ je objekt

0 *začetni*, če za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ obstaja enoličen morfizem

$$0 \to C$$

1 *končni*, če za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ obstaja enoličen morfizem

$$C \to 1$$

Končni objekt je ravno začetni objekt v dualni kategoriji $\mathbf{C}^{op}$. Ker sta definiciji začetnega in končnega objekta podani z univerzalno lastnostjo lahko pričakujemo, da bodo objekti podani do izomorfizma natančno. To pove naslednja trditev.

Trditev 1.0.2. *Začetni in končni objekti so enolično določeni, do izomorfizma natančno*

Dokaz. Naj bosta 0 in $\hat{0}$ začetna objekta v kategoriji $\mathbf{C}$ in naj bo $C \in \mathbf{C}$ poljuben objekt. Potem obstaja enoličen $f : 0 \to C$ in enoličen $\hat{f} : \hat{0} \to C$, prav tako pa obstajata enolična $g : 0 \to \hat{0}$ ter $\hat{g} : \hat{0} \to 0$. Torej je $\hat{g} \circ g$ enoličen morfizem od 0 do 0. To pa pomeni, da mora biti identitetni morfizem (saj ta vedno obstaja in je enoličen), kar pa pomeni, da je g izomorfizem. Naj bosta sedaj 1 in $\hat{1}$ končna objekta in naj bo $A \in \mathbf{C}$ poljuben. Potem obstaja natanko en morfizem $f : A \to 1$ in natanko en morfizem $\hat{f} : A \to \hat{1}$, prav tako pa obstajata enolična $g : 1 \to \hat{1}$ in $\hat{g} : \hat{1} \to 1$, in je kompozitum $\hat{g} \circ g$ enoličen morfizem $1 \to \hat{1}$, torej identiteta. Torej je g izomorfizem. □
Vidimo lahko, da sta dokaza za začetni in končni objekt potekala praktično enako. Gre seveda za delo dualnosti, ki jo bomo tudi formalno predstavili.

Primer 1.5.1. V kategoriji **Set** je začetni objekt prazna množica, saj za vsako množico A obstaja natanko ena funkcija $! : \emptyset \to A$, ki nobenega elementa ne slika nikamor. Končni objekt v **Set** je množica z enim elementom $1 = \{*\}$. Za vsako množico A obstaja natanko ena funkcija $f : A \to 1$, ki slika vse elemente iz A v *. Tukaj lahko vidimo, da je končni objekt določen "le"do izomorfizma natančno, saj je množica $\{*\}$ izomorfna vsaki drugi enoelementni množici s funkcijo $f : \{*\} \to a$, $f(*) = a$. Ta funkcija je očitno bijekcija, torej izomorfizem v ketegoriji **Set**.

Primer 1.5.2. Kaj bi bil končni objekt v kategoriji **Pos** delno urejenih množic in monotonih funkcij.

1.6 Posplošeni elementi

Za razumevanje tega, kaj je neka množica potrebujemo natanko poznavanje vseh njenih elementov. To nam pove vse, kar lahko vemo o tej množici. Elemente neke množice A pa lahko identificiramo s funkcijami $1 \to A$, saj vsako funkcijo $f : 1 \to A$ identificiramo s tem kam pošlje edini element, z drugimi besedami, množica A je izomorfna množici vseh funkcij iz 1 v A. To množico označujemo z $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(1, A)$ in ji pravimo hom-set (boljši izraz ?). Takšne množice bodo ključnega pomena pri Yonedovi lemi. Za kako drugo matematično strukturo to lahko ni dovolj. Na primer za poznavanje topološkega prostora moramo poznati še okolice točk tega prostora in nam poznavanje samo točk prostora ne pove ničesar o lastnostih tega prostora. Kateri morfizmi pa so potrebni za poznavanje nekega objekta. To vprašanje nas privede do naslednje definicije

Definicija 1.6. *Posplošeni element* objekta $A \in \mathbf{C}$ je poljuben morfizem

$$t : T \to A$$

iz nekega testnega objekta T v A.

Kot je bilo že omenjeno, nam opsplošeni elementi razkrijejo dodatno strukturo, kot ponazori naslednji primer

Primer 1.6.1. Recimo, da imamo dve delno urejeni množici X in A z naslednjo ureditvijo:

$$X = \{ x \leq y, x \leq z \}$$
$$A = \{ a \leq b \leq c \}$$

Obe množici imata po 3 elemente, a vidimo, da nimata identične strukture. Torej med njima imamo monotono bijektivno funkcijo $f : X \to A$ definirano kot

$$f(x) = a, \quad f(y) = b, \quad f(z) = c$$

a ta funkcija **ni** izomorfizem v **Pos**. Ti dve strukturi v resnici nista izomorfni, a kako to pokazati. En način je z tako imenovanimi *invariantami*, to so lastnosti neke strukture, ki se ohranjajo z izomorfizmi, oz. jih imajo enake vse izomorfne strukture. Invariante se da definirati na lep način z posplošenimi elementi. V našem primeru vidimo, da je invarianta število elementov enaka za obe množici, kar ustreza temu, da morfizmi iz enoelementne delno urejene množice **1** ne ločujejo med njima. Poglejmo si namesto tega "**2**-elemente" teh množic. To so morfizmi iz množice $\mathbf{2} = \{0 \leq 1\}$ v naši množici. Takih morfizmov v množico X je 5, in sicer trije morfizmi, ki slikajo oba elementa v isti element, na primer oba v x ter še dva dodatna morfizma

$$0 \mapsto x, 1 \mapsto y \qquad 0 \mapsto x, 1 \mapsto z$$

medtem, ko imamo za morfizme $\mathbf{2} \to A$, tri dodatne morfizme poleg "točkovnih"(takih, ki slikaj vse elemente v eno točko.

$$0 \mapsto a, 1 \mapsto b \qquad 0 \mapsto b, 1 \mapsto c \qquad 0 \mapsto a, 1 \mapsto c$$

kjer zadnji morfizem dobimo zaradi tranzitivnosti. Tako je invarianta, ki jo lahko poimenujemo kar "število morfizmov iz **2**za množico X enaka 5, za množico A pa 6, torej lahko sklepamo, da množici nista izomorfni v **Pos**.

Posplošeni elementi so uporabni tudi za "testiranje"določenih lastnosti. Poglejmo si na primer diagrame naslednje oblike

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "x'"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Tukaj je morfizem f mono, natanko takrat, ko za vsaka morfizma x, x' iz $fx = fx'$ sledi $x = x'$, ali z drugimi besedami, f je "injektiven na posplošenih elementih"če želimo.
Podobno, da lahko za diagram oblike

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ D \arrow[r, "\beta"'] & D \end{tikzcd}$$

povemo, da komutira, mora le veljati, da je

$$\alpha f x = \beta g x$$

za vsak posplošen element $x : X \to A$, kajti potem velja tudi za posplošen element $1_A : A \to A$. Posplošeni elementi so posebej koristni za testiranje takih in podobnih kategoričnih lastnosti.

1.7 Produkti

Kot smo to že storili, poskusimo znano konstrukcijo iz teorije množic posplošiti na poljubno kategorijo. V **Set** poznamo za množici A in B njun kartezični produkt $A \times B$, ki je definiran kot množica vseh parov

$$A \times B := \{\, (a, b) \mid a \in A, b \in B \,\}$$

Imamo tudi dve koordinatni projekciji $\pi_A : A \times B \to A$ in $\pi_B : A \times B \to B$ definirani kot $\pi_A(a, b) = a$ in $\pi_B(a, b) = b$. Za vsak element $x \in A \times B$ velja $x = (\pi_A(x), \pi_B(x))$. Ker vemo, da lahko elemente množice $A \times B$ predstavimo kot morfizme $1 \to A \times B$ nam to da diagram naslednje oblike

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, dashed, "\text{(a,b)}"] \arrow[dr, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Če 1 zamenjamo z posplošenim elementom, dobimo naslednjo definicijo

Definicija 1.7. Produkt objektov $A, B \in \mathbf{C}$ je objekt P, skupaj z projekcijama

$$A \xleftarrow{p_A} P \xrightarrow{p_A} B$$

z naslednjo univerzalno lastnostjo. Za vsak objekt X iz $\mathbf{C}$ in morfizma $x_A : X \to A$, $x_B : X \to B$ obstaja natanko en morfizem $u : X \to P$, tako da naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "x_A"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "x_B"] & \\
A & P \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B
\end{tikzcd}$$

ali z enačbami

$$x_A = p_A \circ u \quad x_B = p_B \circ u$$

Morfizmoma p_A in p_B pravimo (koordinatni) *projekciji.*

Kot vedno z univerzalnimi lastnostmi podanimi na tak način, bo veljala naslednja trditev

Trditev 1.0.3. *Produkti so enolični do izomorfizma natančno*

Dokaz. Naj bosta P in R oba produkt objektov A in B z produktnima projekcijama p_A, p_B ter r_A, r_B respectively. Ker je P produkt A in B obstaja enoličen morfizem $u : R \to P$, da velja $r_A = p_A u, r_B = p_B u$. Obratno ker je R produkt A in B obstaja enoličen $v : P \to R$, da veljata zvezi $p_A = r_A u, p_B = r_B u$. Stanje prikažemo v diagramu

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl, "r_A"'] \arrow[dr, "r_B"] \arrow[dd, dashed, bend right, "u"'] & \\
A & & B \\
& P \arrow[ul, "p_A"] \arrow[ur, "p_B"'] \arrow[uu, dashed, bend right, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Morfizem $u \circ v$ je torej enolični morfizem iz P v P. To pa pomeni, da mora biti identitetni morfizem. Enako velja za $v \circ u$, torej sta si inverza in sta P in R izomorfna. □

Zaradi tega lahko produkt A in B upravičeno označujemo z $A \times B$.

Primer 1.7.1. Preverimo, da naš motivacijski zgled z kartezičnim produktom množic res ustreza univerzalni lastnosti.

1.8 Dualnost

Povejmo (za trenutek še brez dokaza) dve trditvi, ki nam opišeta in utemeljia pojem dualnosti v kategoriji.

Trditev 1.0.4. *(Formalna dualnost). Za vsak stavek Σ v jeziku teorije kategorij, če Σ sledi iz aksiomov kategorij, potem sledi tudi njegov dualni stavek Σ^*.*

Trditev 1.0.5. *(Konceptualna dualnost). Za vsako trditev Σ o kategorijah, če Σ drži za vse kategorije, potem drži tudi dualna trditev Σ^*.*

Kar lahko vzamemo iz teh dveh trditev je, da za vsako trditev, ki jo dokažemo za poljubno kategorijo, žastonj”dobimo še njeno dualno trditev, brez dodatnega dela. Tako bi lahko na primer pri dokazu, da so začetni in končni objekti določeni do izomorfizma natančno uporabili dejstvo, da je končni objekt dualni pojem začetnega objekta in naredili dokaz le za enega izmed njiju. Ta ideja nam pove, da smo z obravnavanjem neke konstrukcije v teoriji kategorij, na primer univerzalne lastnosti produkta, hkrati obravnavali tudi njen dual. V tem primeru dualni konstrukciji dodamo predpono "ko-". Tako pridemo do naslednje definicije

1.8.1 Koprodukti

Definicija 1.8. Naj bosta A in B objekta v kategorji **C**. *Koprodukt* A-ja in B-ja je objekt Q skupaj z dvema morfizmoma $q_A : A \to Q$, $q_B : B \to Q$. Z naslednjo univerzalno lastnostjo. Za vsak objekt X in morfizmoma $x_A : A \to X$, $x_B : B \to X$ obstaja enoličen morfizem $u : Q \to X$, za katerega naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "x_A"] \arrow[r, "q_A"'] & Q \arrow[u, dashed, "v"'] & B \arrow[ul, "x_B"'] \arrow[l, "q_B"] \end{tikzcd}$$

z enačbami

$$x_A = vq_A \quad x_B = vq_B$$

Kot za produkte velja naslednja trditev.

Trditev 1.0.6. *Koprodukti so enolično določeni do izomorfizma natančno.*

Dokaz. Uporabimo dejstvo, da to velja za produkte in da je koprodukt dual produkta. □

Koprodukt A in B zato označujemo z $A + B$.

Primer 1.8.1. Ali lahko najdemo koprodukte v kategoriji **Set**? Veljati mora univerzalna lastnost koprodukta. Poskusimo z množico $A + B := \{ (a, 1) \mid a \in A \} \cup \{ (b, 2) \mid b \in B \}$ in funkcijama $i_A : A \to A + B$, $i_A(a) = (a, 1)$ in $i_B : B \to A + B$, $i_B(b) = (b, 2)$. Tej množici pravimo tudi disjunktna unija A in B.

1.9 Hom-sets

Ustavimo se na kratko pri tej zelo pomembni temi, ki smo jo že srečali in bo postala ključnega pomena kasneje. Naj bo **C** taka kategorija, da je za vsaka dva objekta $A, B \in \mathbf{C}$ morfizmov med njima toliko, da jih lahko spravimo v množico. Kategoriji kjer velja ta pogoj pravimo *lokalno majhna kategorija.* To množico označujemo kot

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) := \{\, f \in Arr(\mathbf{C}) \mid dom(f) = A, cod(f) = B \,\}$$

1.10 Zožki in kozožki

1.10.1 Zožki

Ideja zožkov je sledeča, zamislimo si, da imamo dve funkciji

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Radi bi zožali domeno A na takšno podmnožico, da se f in g na njej ujemata. Torej $\{\, x \in A \mid f(x) = g(x) \,\} \subseteq A$. Označimo to množico z E in inkluzijo E v A z e, torej $\forall x \in E \;\; e(x) = x$. To, da je nek $x \in A$ v E lahko ekvivalentno povemo, kot da obstaja nek morfizem $\hat{x} : 1 \to A$ za katerega je $f \circ \hat{x} = g \circ \hat{x}$. Kar pa ravno tako pomeni, da obstaja nek $\hat{x}' : 1 \to E$, da je $\hat{x} = e \circ \hat{x}' = \hat{x}'$, kajti taki so ravno vsi elementi iz E. Situacijo lahko ponazorimo z naslednjim diagramom.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ 1 \arrow[u, dashed, "\hat{x}'"] \arrow[ur, "\hat{x}"'] & & \end{tikzcd}$$

Uporabimo isto idejo kot prej in množico 1 zamenjamo s posplošenim elementom in dobimo naslednjo definicijo.

Definicija 1.9. *Zožek* dveh morfizmov $f, g : A \to B$ je par objekta E in morfizma $e : E \to A$, da velja $f \circ e = g \circ r$, z univerzalno lastnostjo, da za vsak objekt X in morfizem $x : X \to A$, za katerega velja $f \circ x = g \circ x$, obstaja enoličen morfizem $x' : X \to E$, da lahko x razdelimo na e in x' (pravilna terminologija?), oziroma $x = ex'$. Slika, ki jo lahko imamo v mislih je

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[u, dashed, "x'"] \arrow[ur, "x"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Primer 1.10.1. Preverimo, da naš motivacijski zgled res ustreza definiciji zožka. Naj bosta E in e definirana kot zgoraj ter naj bosta X in $h : X \to A$ taka, da velja $f \circ h = g \circ h$, kar pomeni, da je $f \circ h(x) = g \circ h(x)\ \forall x \in X$. To je seveda ekvivalentno temu, da je $h(x) \in E\ \forall x \in X$. Kar pa pomeni, da bo naša funkcija $h' : X \to E$ definirana kot $h'(x) = h(x)\ \forall x \in X$. Lahko se je prepričati, da je to edina funkcija, ki ustreza temu pogoju (bolj podrobna zadnji stavek?).

Velja naslednja trditev

Trditev 1.0.7. *Če je $e : E \to A$ del zožka, je e monomorfizem.*

<u>Dokaz.</u> Naj bosta $x, y : X \to E$ takšni, da velja $ex = ey$, recimo temu $z = ex = ey$. Potem po definiciji e velja $fex = gex$. Sledi, da obstaja enoličen $\hat{z} : X \to E$, da je $z = e\hat{z} = ex = ey$. To pa pomeni, da je $x = y$.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[u, bend left=40, dashed, "\hat{z}"] \arrow[u, shift left, "x"] \arrow[u, shift right, "y"'] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}
$$

□

1.10.2 Kozožki

Kozožki so dualni koncept zožkov, zato lahko kar napišemo definicijo

Definicija 1.10. *Kozožek* morfizmov $f, g : A \to B$ je objekt Q in morfizem $q : B \to Q$ za katega je $q \circ f = q \circ g$, z naslednjo univezalno lastnostjo. Za vsak objekt Z in morfizem $z : B \to Z$ za katerega velja $z \circ f = z \circ g$, obstaja enoličen morfizem $z' : Q \to Z$, da velja $z = z' \circ q$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "z"'] & Q \arrow[d, dashed, "z'"] \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Slednja trditev sledi iz dualnosti.

Trditev 1.0.8. *Če je $q : B \to Q$ del kozožka, je q epimorfizem.*

Primer 1.10.2. Kozožki so posplošitev pojma kvocientne množice definirane z ekvivalenčno relacijo. Naj bo torej A poljubna množica ter R ekvivalenčna relacija na A, kar pomeni $R \subseteq A \times A$, z naslednjimi lastnostmi

- Refleksivnost: $xRx \ \ \forall x \in A$
- Simetričnost: $xRy \Rightarrow yRx \ \ \forall x, y \in A$
- Tranzitivnost: $xRy \ \ \& \ \ yRz \Rightarrow xRZ \ \ \forall x, y, z \in A$

Potem imamo dve koordinatni projekciji $r_1 : R \to A$, $r_2 : R \to A$ inkluzije R v $A \times A$.

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "r_2"] & \\
A & A \times A \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & A
\end{tikzcd}$$

definirani kot $r_1(x, y) = x$ in $r_2(x, y) = y$. Potem je kvocientna projekcija $\pi : A \to A/R$ kozožek r_1 in r_2. Veljati mora $\forall (x, y) \in R : \pi r_1(x, y) = \pi r_2(x, y) \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$. Denimo nato, da je f tak, da $fr_1 = fr_2$, oz. $fr_1(x, y) = fr_2(x, y)$, kar pa pomeni, da f slika ekvivalentna elementa iz A v isti element, ker pa π ravno tako slika ekvivalentna elementa v isti element, lahko $\hat{f}$ definiramo kot $\hat{f}(\pi(x))) = f(x) = f(y) = \hat{f}(\pi(y))$ (mogoče boljša notacija $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$?). Torej je $\hat{f}$ dobro definirana. Ali je ta funkcija $\hat{f}$ edina taka? Recimo, da obstaja že neka druga $g : A/R \to X$, da zanjo velja $f = g\pi$. Potem je za xRy, $g\pi(x) = f(x) = f(y) = g\pi(y)$. Ker pa je $\hat{f}(\pi(x)) = f(x) = g\pi(x)$, je $g = \hat{f}$. (Bolj razširiti argument?)

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & A/R \arrow[d, dashed, "\hat{f}"] \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Primer 1.10.3. V topoloških prostorih tudi pogosto naletimo na situacijo kjer identificiramo neke točke med seboj in generiramo ekvivalenčno relacijo po kateri ustvarimo kvocientni prostor. Tudi to in podobni primeri lepljenja so primer kozožka. Naj bo torej X nek topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X.

O kozožku si lahko mislimo, da zoži B z identifikacijo vseh parov $f(a) = f(b)$. To naredi na "najboljši"način, tako, da vsako drugo zožanje f in g lahko speljemo skozi Q.

1.11 Povleki in potiski

1.11.1 Povlek

Definicija 1.11. Naj bosta $f : A \to C$ in $g : B \to C$ morfizma v kategoriji **C**. *Povlek* f in g je objekt P z morfizmoma $p_1 : P \to A$, $p_2 : P \to B$, tako da tako imenovani "pullback kvadrat"(ustrezna terminologija?) komutira. Torej $fp_1 = gp_2$. Pri tem je P univerzalen tak objekt, kar pomeni, da za vsake X, $x_1 : X \to A$, $x_2 : X \to B$ za katere velja $fx_1 = gx_2$ obstaja enoličen morfizem $u : X \to P$ za katerega se x_1 in x_2 delita z p_1 in p_2.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "x_2"] \arrow[ddr, bend right, "x_1"'] & & \\
 & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Z enačbami

$$x_1 = p_1 u \quad x_2 = p_2 u$$

Na prvi pogled povlek deluje podobno kot produkt A in B, a imamo še dva dodatna morfizma f in g. Ta podobnost ni slučajna.

Primer 1.11.1. Poglejmo si kako bi lahko izgledal povlek v kategoriji **Set**. Denimo, da imamo dve funkciji $f : A \to C$ in $g : B \to C$. Potrebujemo tako množico P, skupaj s funkcijama $p_1 : P \to A$, $p_2 : P \to B$. Za prvi približek vzamimo množico $A \times B$ skupaj s koordinatnima projekcijama in poglejmo kako bi jo morali popraviti, da bi izpolnjevala pogoj $fp_1 = gr_2$. Veljati bi moralo $fp_1(x, y) = gp_2(x, y) \Leftrightarrow f(x) = g(y)$. Torej v P moramo imeti samo vse pare (x, y) za katere je $f(x) = g(y)$. Definiramo $P := \{ (x, y) \in A \times B \mid f(x) = g(y) \}$, z pododovanima projekcijama, ki ju tudi poimenujemo p_1 in p_2. Preverimo če res izpolnjuje univerzalno lastnost. Denimo, da sta še $z_1 : Z \to A$ in $z_2 : Z \to B$ taki, da $fz_1 = gz_2$. Situacija je takšna

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "z_2"] \arrow[ddr, bend right, "z_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Definirajmo $u : Z \to P$ kot $u(z) = (z_1(z), z_2(z))$

1.11.2 Potiski

1.12 Limite, kolimite in eksponenti

1.12.1 Limite

Konstrukcije, ki smo jih do sedaj videli imajo med seboj nekaj skupnega, in sicer pri vseh imamo neko posebno konfiguracijo objektov in morfizmov in proizvedemo nek objekt, ki je povezan s to konfiguracijo z neko univerzalno lastnostjo. Je "najboljši"tak objekt, ki ustreza pogojem komutativnosti, ki jih ta konstrukcija predstavlja. Do sedaj smo to konfiguracijo poimenovali diagram. Pa definirajmo pojem diagrama bolj točno.

Definicija 1.12. *Diagram oblike* **J** v kategoriji **C** je funktor $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$. Kjer **J** pravimo tudi *indeksna* kategorija. Objekte v indeksni kategoriji označujemo z $i, j, \ldots$ in vrednosti funktorja $D_i, D_j, \ldots$
Stožec nad diagramom D je objekt C v **C** skupaj z družino morfizmov

$c_i : C \to D_i$ iz $\mathbf{C}$ za vsak objekt $i \in \mathbf{J}$, tako da za vsak morfizem $\alpha : i \to j$ v $\mathbf{J}$ naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_i"'] \arrow[dr, "c_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_j \end{tikzcd}$$

ali z enačbami

$$c_j = D_\alpha \circ c_i$$

Morfizem stožcev $\vartheta : (C, c_i) \to (C', c'_i)$ je morfizem $\vartheta : C \to C'$ v $\mathbf{C}$, tako, da za vsak $i \in \mathbf{J}$ naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "c_i"'] & C' \arrow[d, "c'_i"] \\ & D_i \end{tikzcd}$$

oz.

$$c_i = c'_i \vartheta$$

Tako dobimo novo kategorijo $\mathbf{Cone}(D)$ stožcev na D.

Diagrame D si lahko predstavljamo kot šlike oblike $\mathbf{J}$ v $\mathbf{C}$. Poglejmo si to na majhnem primeru. Kaj se zgodi na primer, če za $\mathbf{J}$ vzamemo na primer diskretno kategorijo z dvemi elementi $\mathbf{J} = \{1, 2\}$. Stožec nad diagramom $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ sestoji iz objekta C in dveh morfizmov $c_1 : C \to D_1$, $c_2 : C \to D_2$.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\ D_1 & & D_2 \end{tikzcd}$$

Morfizem stožcev $\vartheta : (C, c_i) \to (C', c'_i)$ zgleda kot

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "c'_1"'] \arrow[d, "\vartheta"] \arrow[dr, "c'_2"] & \\ D_1 & C \arrow[l, "c_1"] \arrow[r, "c_2"'] & D_2 \end{tikzcd}$$

da trikotnika komutirata, ali $c_1' = c_1\vartheta$, $c_2' = c_2\vartheta$.

Definicija 1.13. *Limita* nad diagramom $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ je končni objekt v kategoriji stožcev nad D $\mathbf{Cone}(D)$. Limito diagrama označujemo kot

$$\lim_{i \in \mathbf{J}} D_i$$

(mogoče rajši samo $\lim D$) z morfizmi $p_i : \lim D \to D_i$.

Če v celoti napišemo univerzalno lastnost, ki jo ima limita nad D, pravi, da za vsak drug stožec (C, c_i) v $\mathbf{Cone}(D)$ obstaja enoličen morfizem $u : C \to \lim D$, tako da za vse $i \in \mathbf{J}$ velja $c_i = p_i \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, dashed, "u"] \arrow[dr, "c_i"'] \arrow[drrr, "c_j"] & & \lim D \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
& D_i \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_j
\end{tikzcd}$$

Limito si lahko torej predstavljamo kot ”najbližjištožec diagramu D, kajti vsi drugi stožci morajo ”iti skozi”limito. Limita nekega diagrama ne obstaja nujno. Če obstaja limita za vsak diagram $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ za neko indeksno kategorijo $\mathbf{J}$ pravimo, da $\mathbf{C}$ *ima limite tipa* $\mathbf{J}$.

Primer 1.12.1. Nadaljujmo s primerom za diagrame iz diskretne kategorije na dveh objektih, ki jo poimenujmo kot zgoraj z $\mathbf{J}$. Kaj je limita nad $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$. To je tak objekt $\lim D$ z morfizmi $p_1 : \lim D \to D_1$, $p_2 : \lim D \to D_2$, da za vsak objekt X opremljen z morfizmoma $x_1 : X \to D_1$, $x_2 : X \to D_2$, obstaja enoličen morfizem $u : X \to \lim D$, da naslednja trikotnika komutirata

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\
D_1 & \lim D \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

V tem diagramu pa lahko spoznamo ravno univerzalno lastnost produkta objektov D_1 in D_2. Torej kategorija $\mathbf{C}$ ima limite tipa $\mathbf{J}$ natanko takrat, ko ima binarne produkte.

Primer 1.12.2. Poskusimo še z bolj enostavno indeksno kategorijo. Naj bo $\mathbf{J}$ prazna kategorija brez objektov in brez puščic. Potem obstaja natanko en diagram $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$, ki nobenega objekta ne pošlje nikamor. Limita $\lim D$ nad tem diagramom je objekt, brez dodatnih morfizmov, da za vsak drug objekt C obstaja natanko en morfizem $u : C \to \lim D$, da nič dodatnega ne komutira. Ta limita je torej natanko *končni objekt* v $\mathbf{C}$.

Primer 1.12.3. Naj bo $\mathbf{J}$ enaka kategoriji $\mathbf{1} = \{*\}$ z enim objektom in enim morfizmom. Stožec nad diagramom $D : \mathbf{1} \to \mathbf{C}$ je objekt C skupaj z morfizmom $c : C \to D$ (abuse notacije, dovolj razumljivo ?). Limita nad D je objekt $\lim D$ z morfizmom $p : \lim D \to D$, da za vsak drug stožec (C, c) obstaja enoličen morfizem $u : C \to \lim D$, da trikotnik

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, dashed, "u"] \arrow[dr, "c"'] & & \lim D \arrow[dl, "p"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

komutira. V tej situaciji lahko razpoznamo rezinsko kategorijo $\mathbf{C}/D$ nad objektom $D = D(*)$. Limita $\lim D$ je končni objekt v tej kategoriji.

Primer 1.12.4. Poglejmo kako ta abstraktna karakterizacija limit ustreza znanemu pojmu limite v analizi. Limita zaporedja na primer realnih števia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je tako realno število $L \in \mathbb{R}$, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_n : |a_n - L| < \epsilon$. (Za ta primer nam manjka definicija filtra v topološkem prostoru za to pa nam manjka definicija topološke mreže

1.12.2 Kolimite

1.12.3 Eksponenti

Definicija 1.14. Naj ima kategorija $\mathbf{C}$ binarne produkte. *Eksponent* objektov B in C sestoji iz objekta

$$C^B$$

in morfizma

$$\epsilon : C^B \times B \to C$$

imenovanega *evaluacija*, takega, da za vsak objekt A in morfizem

$$f : A \times B \to C$$

obstaja enoličen morfizem

$$\widetilde{f} : A \to C^B$$

tako da velja

$$\epsilon \circ (\widetilde{f} \times 1_B) = f$$

kar lahko vidimo v spodnjem diagramu.

$$\begin{tikzcd}
C^B & C^B \times B \arrow[r, "\epsilon"] & C \\
A \arrow[u, dashed, "\widetilde{f}"] & A \times B \arrow[u, "\widetilde{f} \times 1_B"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

1.13 Funktorji in naravne transformacije

1.13.1 Morfizmi med kategorijami

Primer 1.13.1. Neuradni moto teorije kategorij bi se lahko glasil *puščice so bistvene*, kar bi pomenilo, da nas ponavadi ne zanima toliko kaj točno so objekti v neki specifični kategoriji temveč kaj se dogaja s puščicami med njimi.

Sedaj imamo nekaj definicij, ki veljajo v splošnih kategorijah, a apliciramo jih lahko samo na vsaki posamezni. Kar bi radi storili, je da prehajamo iz ene kategorije v drugo in pogledamo, če je kak problem lažje rešljiv v kaki drugi kategoriji in to rešitev bi potem prevedli na kategorijo, kjer nas problem bolj zanima. Zato uvedemo naslednjo definicijo.

Definicija 1.15. Naj bosta $\mathbf{C}$ *in* $\mathbf{D}$ poljubni kategoriji. *Funktor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ med kategorijama $\mathbf{C}$ *in* $\mathbf{D}$ je par morfizmov

$$F_0 : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{D}_0$$

med objekti in

$$F_1 : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{D}_1$$

med puščicami, tako da veljajo naslednje lastnosti:

1. $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$
2. $F(1_A) = 1_{F(A)}$
3. Za puščici $f : A \to B,\ g : B \to C$ mora veljati:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

1.13.2 Morfizmi med funktorji

Radi bi nadaljevali temo posploševanja morfizmov in ker smo nazadnje definirali morfizme med kategorijami, se naravno pojavi vprašanje, ali lahko definiramo morfizme med temi morfizmi. Odgovor je pozitiven in pridemo do naslednje definicije.

Definicija 1.16. Naj bosta $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ poljubni kategoriji in naj bosta $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funktorja med tema kategorijama.
Naravna transformacija $\vartheta : F \Rightarrow G$ iz F v G, je družina puščic

$$(\vartheta_C : FC \to GC)_{C \in \mathbf{C}}$$

tako, da za vsako puščico $f : C \to D$ naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\vartheta_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & GC \arrow[d, "G(f)"] \\ FD \arrow[r, "\vartheta_D"'] & GD \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

komutira

Poglavje 2

Pomembne trditve

Trditev 2.0.1. *Kategorija ime vse končne limite natanko takrat, ko ima vse končne produkte in zožke.*

To da ima kategorija končne limite pomeni, da ima vsak končni diagram $D : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{C}$ *limito v* $\boldsymbol{C}$.

Dokaz.

$\square$

Trditev 2.0.2. *Predstavljivi funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$ *ohranja vse limite.*

Dokaz. Naj bo $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ diagram oblike D v $\mathbf{C}$ in naj bo

$$\varprojlim_{j \in \mathbf{J}} D_j$$

limita za D, oz $\mathrm{Hom}(C, limD_j)$ je limita za $\mathrm{Hom}(C, -) \circ D$

kjer je $Hom(C, -) \circ D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ diagram v **Sets** $\square$

Definicija 2.1. Naj bo **C** definicja. *Klasifikator podobjekta* je objekt Ω z puščico $true : 1 \to \Omega$

Poglavje 3

Yonedova lema

3.1 Yonedova vložitev

Naj bo $\mathbf{C}$ lokalno majhna kategorija. Potem vemo, da za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ obstaja kovariantni predstavljivi funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$$

Ker lahko ta objekt C izbiramo poljubno imamo v resnici funktor

$$k(C) = \mathrm{Hom}(C, \_)$$

Opravka imamo v bistvu z kontravariantnim funktorjem

$$k : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}}$$

Saj za

Definicija 3.1. *Yonedova vložitev* je funktor $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ za $C \in \mathbf{C}$ je

$$y(C) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, C) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Sets}$$

in za puščice $f : C \to D$

$$y(f) := \mathrm{Hom}(-, f) : \mathrm{Hom}(-, C) \to \mathrm{Hom}(-, D)$$

Kasneje bomo pokazali, da je funktor y res vložitev. Funktorju pravimo *vložitev*, če je zvest poln in injektiven na objektih.

3.2 Yonedova lema

Izrek 3.1 (Yonedova lema)**.** *Naj bo* $\mathbf{C}$ *lokalno majhna kategorija. Potem za vsak objekt* $C \in \mathbf{C}$ *in funktor* $F : \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Sets}$ *velja*

$$\mathrm{Hom}(yC, F) \cong FC$$

In ta izomorfizem je naraven tako v C *kot v* F*, kar pomeni, da za* $f : C \to D$ *naslednji diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(yC,F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(yf,F)"'] & FC \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Hom}(yD,F) \arrow[r, "\cong"'] & FD \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

komutira ter za naravno transformacijo $\varphi : F \Rightarrow G$ *naslednji diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(yC,F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(yC{,}\varphi)"'] & FC \arrow[d, "\varphi_C"] \\ \mathrm{Hom}(yC,G) \arrow[r, "\cong"'] & GC \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

komutira.
Opomba: $\mathrm{Hom}(yC, F)$ *je množica naravnih transformacij med funktorjema* $yC, F : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$*, oz.* $\mathrm{Hom}(yC, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{C^{op}}}(yC, F) = Nat(yC, F)$*.*

Dokaz. Poglejmo, kaj mora veljati za neko naravno transformacijo $\vartheta : yC \Rightarrow F$, ki je v bistvu družina puščic $(\vartheta_D : yC(D) \to F(D))_{D\in\mathbf{C}}$. Te puščice morajo izpolnjevati naturalnostni pogoj, da za vsako puščico $f : D \to C$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(C,C) \arrow[r, "\vartheta_C"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f,C)"'] & FC \arrow[d, "\mathrm{F(f)}"] \\ \mathrm{Hom}(D,C) \arrow[r, "\vartheta_D"] & FD \end{tikzcd}$$

komutira. Torej mora veljati

$$(F(f) \circ \vartheta_C)(g) = (\vartheta_D \circ \mathrm{Hom}(f, C))(g)$$

za vsak $g \in \mathrm{Hom}(C,C)$. En tak g je identitetna puščica na C, oz. $1_C : C \to C$. Torej mora veljati enakost:

$$\begin{gathered}\underline{F(f) \circ \vartheta_C(1_C)} = \vartheta_D \circ \mathrm{Hom}(f,C)(1_C) = \\ \vartheta_D \circ \mathrm{Hom}(f,C)(1_C) = \vartheta_D \circ ({}_{-} \circ f)(1_C) = \vartheta_D \circ (1_C \circ f) = \underline{\vartheta_D(f)}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Torej vidimo, da je vrednost komponente za ϑ v D določena že s tem, kam slika ϑ_C puščico 1_C.
Naj bo z $\alpha_{C,F} : \mathrm{Hom}(yC,F) \to FC$ označen želeni izomorfizem.
Definiramo torej za naravno transformacijo $\vartheta \in \mathrm{Hom}(yC,F)$

$$\alpha_{C,F}(\vartheta) := \vartheta_C(1_C) \tag{3.4}$$

Označimo:

$$\boxed{\alpha_{C,F}(\vartheta) = \widehat{\vartheta}} \tag{3.5}$$

In za vsak element $a \in FC$ definirajmo naravno transformacijo $\vartheta_a \in \mathrm{Hom}(yC,F)$ po komponentah, in sicer:

$$(\vartheta_a)_D : yC(D) \to F(D) \tag{3.6}$$

$$(\vartheta_a)_D(f : D \to C) := F(f)(a) \tag{3.7}$$

Označimo:

$$\boxed{\alpha^{-1}_{C,F}(a) = \widetilde{a}} \tag{3.8}$$

Sedaj je potrebno preveriti, da tako definirana preslikava res ustreza pogojem izreka.

Najprej preverimo, da sta si predpisa vzajemno inverzna.
Torej, da za vsak $\vartheta \in \mathrm{Hom}(yC,F)$ velja:

$$\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \vartheta$$

in za vsak $a \in FC$ velja

$$\widehat{\widetilde{a}} = a$$

1.) $\widehat{\vartheta} = \vartheta_C(1_C) \in FC$.
Potem je $\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \eta_{\widehat{\vartheta}} \in \mathrm{Hom}(yC,F)$. Poglejmo kako ta naravna transformacija deluje na puščicah. Naj bo $f : D \to C$

$$\begin{aligned}(\eta_{\widehat{\vartheta}})_D : yC(D) &\to FD \\ f &\overset{def}{\longmapsto} Ff(\widehat{\vartheta})\end{aligned}$$

In velja

$$
\begin{aligned}
&Ff(\widehat{\vartheta}) = Ff(\vartheta_C(1_C)) = \vartheta_D(f) \\
\Longrightarrow\ &\forall f \in \mathbf{C}_1 : (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D(f) = \vartheta_D(f) \\
\Longrightarrow\ &\forall D \in \mathbf{C} : (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D = \vartheta_D \\
\Longrightarrow\ &\eta_{\widehat{\vartheta}} = \vartheta \implies \underline{\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \vartheta}
\end{aligned}
$$

2.)

$$\widetilde{a} = \vartheta_a : yC \Rightarrow F$$

In velja

$$
\begin{aligned}
(\vartheta_a)_D : yC(D) &\to FD \\
f &\mapsto F(f)(a)
\end{aligned}
$$

Torej

$$\widehat{\widetilde{a}} = (\vartheta_a)_C(1_C) = F(1_C)(a) = 1_{F(C)}(a) = a$$

Sedaj moramo še pokazati, da sta zadoščena naturalnostna pogoja:
Naj bo $f : C \to D$ in naj bo $\vartheta \in \mathrm{Hom}(yC, F)$.
Pokazali bi radi:

$$Ff \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \alpha_{D,F} \circ Hom(yf, F)(\vartheta) \tag{3.9}$$

Velja pa:

$$Ff \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \underline{Ff(\vartheta_C(1_C))}$$

In po drugi strani:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{D,F} \circ \mathrm{Hom}(yf, F)(\vartheta) = \alpha_{D,F}(\vartheta \circ yf) = \\
(\vartheta \circ yf)_D(1_D) = \vartheta_D \circ yf_D(1_D) = \\
\vartheta_D(f \circ 1_D) = \underline{\vartheta_D(f)}
\end{aligned}
$$

Enakost 3.3 pa nam pove ravno da je $Ff(\vartheta_C(1_C)) = \vartheta_D(f)$ To pa pomeni ravno, da diagram 3.1 komutira.

Kaj pa drugi diagram. Naj bo $\varphi : F \Rightarrow G$ naravna transformacija med funktorjema $F, G : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$.
Veljati mora enakost:

$$\varphi_C \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \alpha_{C,G} \circ \mathrm{Hom}(yC, \varphi)(\vartheta)$$

Imamo:

$$\varphi_C \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \underline{\varphi_C(\vartheta_C(1_C))}$$

In za desno stran:

$$\alpha_{C,G}\circ\mathrm{Hom}(yC,\varphi)(\vartheta) = \alpha_{C,G}(\varphi\circ\vartheta) = (\varphi\circ\vartheta)_C(1_C) = \varphi_C\circ\vartheta_C(1_C) = \underline{\varphi_C(\vartheta_C(1_C)}$$

Torej diagram 3.2 tudi komutira.

□

3.3 Posledice Yonedove leme

Takoj dobimo posledico, ki upraviči poimenovanje funktorja y vložitev

Trditev 3.1.1. *Funktor* $y : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ *je poln in zvest.*

<u>Dokaz.</u>

□