

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Jure Taslak
Yonedova lema in njena uporaba

DIPLOMSKO DELO

INTERDISCIPLINARNI UNIVERZITETNI
ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

MENTOR: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2017

COPYRIGHT. Rezultati diplomske naloge so intelektualna lastnina avtorja in Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Za objavo in koriščenje rezultatov diplomske naloge je potrebno pisno privoljenje avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil \LaTeX .

Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Besedilo teme diplomskega dela študent prepíše iz študijskega informacijskega sistema, kamor ga je vnesel mentor. V nekaj stavkih bo opisal, kaj pričakuje od kandidatovega diplomskega dela. Kaj so cilji, kakšne metode uporabiti, morda bo zapisal tudi ključno literaturo.

Na tem mestu zapišite, komu se zahvaljujete za izdelavo diplomske naloge. Pazite, da ne boste koga pozabili. Utegnil vam bo zameriti. Temu se da izogniti tako, da celotno zahvalo izpustite.

Kazalo

Povzetek

Abstract

1	Uvod	1
1.1	Osnovne Definicije	1
1.2	Primeri kategorij	2
1.3	Različni tipi morfizmov	5
1.4	Konstrukcije novih kategorij	7
1.5	Začetni in končni objekti	10
1.6	Posplošeni elementi	11
1.7	Produkti	12
1.8	Dualnost	12
1.9	Funktorji in naravne transformacije	12
2	Pomembne trditve	15
3	Yonedova lema	17
3.1	Yonedova vložitev	17
3.2	Yonedova lema	18
3.3	Posledice Yonedove leme	21

Povzetek

Naslov: Yonedova lema in njena uporaba

Avtor: Jure Taslak

V vzorcu je predstavljen postopek priprave diplomskega dela z uporabo okolja L^AT_EX. Vaš povzetek mora sicer vsebovati približno 100 besed, ta tukaj je odločno prekratek. Dober povzetek vključuje: (1) kratek opis obravnavanega problema, (2) kratek opis vašega pristopa za reševanje tega problema in (3) (najbolj uspešen) rezultat ali prispevek magistrske naloge.

Ključne besede: računalnik, računalnik, računalnik.

Abstract

Title: Naslov EN

Author: Jure Taslak

This sample document presents an approach to typesetting your BSc thesis using \LaTeX . A proper abstract should contain around 100 words which makes this one way too short.

Keywords: computer, computer, computer.

Poglavje 1

Uvod

Kaj je teorija kategorij? Kako se razlikuje od običajnega pogleda na matematiko?

1.1 Osnovne Definicije

Definicija 1.1. *Kategorija* sestoji iz naslednjih stvari:

- *Objektov* : A, B, C, X, Y, \dots
- *Puščic* : f, g, h, \dots
- Za vsako puščico imamo podana dva objekta:

$$\text{dom}(f), \quad \text{cod}(f)$$

ki jima pravimo domena in kodomena puščice f . Pišemo:

$$f: A \rightarrow B$$

kjer sta $A = \text{dom}(f)$ in $B = \text{cod}(f)$. Pravimo da f gre od A do B .

- Za vsaki puščici $f: A \rightarrow B$ in $g: B \rightarrow C$, torej taki da velja $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$, obstaja puščica $g \circ f: A \rightarrow C$, ki ji pravimo *kompozitum* f in g

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$

- Za vsak objekt A obstaja puščica

$$1_A : A \rightarrow A$$

ki ji pravimo *identitetna puščica* na A .

Za vse te podatke morata veljati naslednja dva pravila:

- Asociativnost: Za vsake $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ velja

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- Enota: Za vsak $f : A \rightarrow B$ velja

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Kategorija je karkoli, kar zadošča tem pogojem

1.2 Primeri kategorij

Primer 1.2.1. Bazični primer kategorije in tak h katerem se lahko vedno sklicujemo je kategorija množic in funkcij med njimi. Označimo ga z **Sets**. Za kategorijo se vedno prvo vprašamo: kaj so objekti in kaj so puščice. Pri **Sets** so objekti množice in puščice funkcije. Izpolnjena morata biti pogoja asociativnosti in enote. Kompozitum puščic je kompozitum funkcij, ki je asociativen, kar vemo iz teorije množic. Vlogo identitetne puščice igra identitetna funkcija, ki jo lahko vedno definiramo in zanjo velja $f \circ id_A = f = id_B \circ f$ za vsako funkcijo $f : A \rightarrow B$, kjer je $id_A : A \rightarrow A$ def. kot $id_A(x) = x$ za vsak element $x \in A$.

Primer 1.2.2. Še en primer, ki ga v bistvu že poznamo je podkategorija kategorije **Sets**, in sicer **Sets_{fin}**, kategorija končnih množic in funkcij med njimi. Zakaj je to res kategorija? Objekti so očitno končne množice, kaj so pa puščice. To bi morale biti funkcije med končnimi množicami in kompozitum takih funkcij je seveda tudi funkcija takega tipa, torej iz končne množice v končno množico. Razmisliti moramo še ali imamo identitetno puščico. To seveda imamo, saj bo to podedovana identitetna funkcija iz **Sets**, ki bo v tem primeru funkcija iz končne množice v končno, torej res puščica v tej kategoriji. Tu imamo tudi primer kategorije, katere objekti so množice z dodatno strukturo ter so morfizmi objektov funkcije, ki ohranjajo strukturo teh množic.

Primer 1.2.3. Kaj bi bil primer "majhne" kategorije? Kategorije z majhnim številom objektov ali morfizmov. Ker mora za vsak objekt obstajati identitetni morfizem mora vsaka kategorija imeti najmanj toliko morfizmov kolikor je objektov. Najmanjše število objektov, ki jih lahko imamo je 0. Ali je kategorija z 0 objekti in 0 puščicami res kategorija? Za vsak objekt (ki jih ni) obstaja identitetni morfizem in za vsaka dva kompatibilna morfizma (ki ju ni) obstaja njun kompozitum. To torej je kategorija. Kaj pa kategorija z enim objektom. Imeti mora torej najmanj en objekt in en identitetni morfizem. Tej kategoriji pravimo tudi kategorija **1**. Kategoriji z dvema objektom in eno neidentitetno puščico med objektoma pravimo **2**. Te dve kategoriji izgledata takole.

$$\bullet \curvearrowright \quad \quad \quad \curvearrowright \bullet \longrightarrow \bullet \curvearrowright \quad (1.1)$$

Identitetnih morfizmov se ponavadi ne riše. Kategorija **3** bi izgledala takole.

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \bullet \end{array} \quad (1.2)$$

Primer 1.2.4. Delno urejena množica ali poset je množica opremljena z relacijo, ki se jo ponavadi označuje z \leq in je:

- Refleksivna
- Antisimetrična
- Tranzitivna

Morfizem delno urejenih množic P in Q je *monotona* funkcija

$$m : P \rightarrow Q$$

kar pomeni, da za vsaka $x, y \in P$ za katera je $x \leq y$, potem velja $m(x) \leq m(y)$. Ali je to kategorija? Izpolnjevati mora aksiome za kategorij, torej ali imamo identitetne morfizme za vsako delno urejeno množico P ? Naravni kandidat je identitetna funkcija $1_P : P \rightarrow P$, ki je monotona, saj iz $x \leq y$ sledi $x \leq y$. Kompozitum dveh monotonih funkcij $m : P \rightarrow Q$ in $n : P \rightarrow Q$ je tudi monotona funkcija, saj za $x \leq y$ zaradi monotonosti m velja $m(x) \leq m(y)$ in zaradi monotonosti n velja $n(m(x)) \leq n(m(y))$. Imamo torej kategorijo, ki jo označujemo s **Pos**, delno urejenih množic in monotonih funkcij.

Primer 1.2.5. Monoid (M, \bullet) je množica opremljena z binarno operacijo množenja, za katero drži

- Zaprtost: $\forall x, y \in M : x \bullet y \in M$
- Asociativnost: $\forall x, y, z \in M : x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
- Obstoj enote: obstaja tak $e \in M$ tako da $\forall x \in M : e \bullet x = x \bullet e = x$

Homomorfizmi monoidov so funkcije $f : M \rightarrow N$ za katere velja

1. $f(e_M) = e_N$
2. $f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y)$

Identitetni homomorfizem $1_M : M \rightarrow M$ bo predstavljal identitetni morfizem v tej kategoriji. Kompozitum dveh homomorfizmov je spet homomorfizem, torej imamo novo kategorijo monoidov in homomorfizmov med njimi, ki jo označujemo s **Mon**.

Primer 1.2.6. Naj bo (P, \leq) delno urejena množica. Ali je to tudi kategorija? Najprej se moramo vprašati, kaj so objekti v tej kategoriji in kaj so puščice. Imamo množico elementov $p, q \in P$ med katerimi lahko imamo relacijo $p \leq q$, ki je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Dobimo idejo, da za objekte vzamemo elemente P in podamo puščico med p in q natanko takrat ko v P velja $p \leq q$. Torej:

- **Objekti:** Elementi množice P
- **Puščice:** Puščica $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \leq q$

Potrebno je preveriti, če so izpolnjeni aksiomi za kategorijo.

- (a) Za vsak objekt $p \in P$ potrebujemo puščico $1_p : p \rightarrow p$. Ali obstaja taka puščica? Seveda, saj za vsak p velja $p \leq p$, kar nam da želeno identitetno puščico.
- (b) Za vsaki dve puščici $p \rightarrow q$ in $q \rightarrow r$ mora obstajati kompozitum $p \rightarrow r$. Ali obstaja ta kompozitum? Seveda, saj je relacija \leq tranzitivna in iz $p \leq q$ in $q \leq r$ sledi $p \leq r$, kar nam da želeni kompozitum.

Vsaka delno urejena množica je torej svoja kategorija in v bistvu so kategorije v nekem smislu splošene delno urejene množice.

Primer 1.2.7. Še en primer, ki ga bralec najverjetneje že pričakuje. Objekti naj bodo topološki prostori in morfizmi naj bodo zvezne funkcije med njimi. Zveznim funkcijam, kot tudi učasim drugim funkcijam, ki ohranjajo strukturo, bomo pravili preslikave. Identitetni morfizem za nek topološki prostor (X, \mathcal{T}) je identiteta preslikava $1_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$, ki je seveda zvezna. Kompozitum dveh preslikav je spet preslikava. Torej topološki prostori res tvorijo kategorijo. Označujemo jo s **Top**.

1.3 Različni tipi morfizmov

Uvedemo prvo abstraktno definicijo v jeziku teorije kategorij, nečesa kar je že poznano iz drugih področij matematike.

Definicija 1.2. Naj bo \mathbf{C} poljubna kategorija. Puščici $f : A \rightarrow B$ pravimo *izomorfizem* (ali *izo* na kratko), če obstaja taka puščica $g : B \rightarrow A$, da velja

$$g \circ f = 1_A \text{ in } f \circ g = 1_B$$

Puščici g pravimo *inverz* puščice f

Velja:

Trditev 1.0.1. *Inverzi, ko obstajajo, so enolični.*

Dokaz. Naj bo $f : A \rightarrow B$ izomorfizem in naj bosta $g, h : B \rightarrow A$ njegova inverza. Potem velja $g = 1_A \circ g = h \circ f \circ g = h \circ 1_B = h$ \square

Zaradi česar za inverz od f pišemo f^{-1}

Primer. Izomorfizmi v kategoriji **Sets** ustrezajo ravno bijektivnim preslikavam, saj kot vemo iz teorije množic, ima funkcija inverz, ravno kadar ostaja enoličen inverz te funkcije, ki se komponira v identitetno funkcijo.

Primer. Vsaka identitetni morfizem je izomorfizem, nima pa nujno kategorija drugih morfizmov kot identitetnega. Na primer kategorija **2** ima samo en neidentitetni morfizem, ki pa nima inverza torej ni izomorfizem.

Primer z funkcijami nam pa naravno porodi novo vprašanje, saj kot vemo, je funkcija bijektivna ravno takrat, ko je surjektivna ter injektivna. Vprašamo se, kaj bi pa bili karakterizaciji teh dveh lastnosti v jeziku teorije kategorij. Izkaže se, da pridemo do malenkost bolj splošnih pojmov, ki jih predstavimo v naslednjih dveh definicijah.

Definicija 1.3. Epimorfizem je tak morfizem $e : E \rightarrow A$, da za vsaka morfizma $f, g : A \rightarrow B$ iz $f \circ e = g \circ e$ sledi $f = g$. Epimorfizmu rečemo tudi epi na kratko.

Definicija 1.4. Monomorfizem je tak morfizem $m : B \rightarrow M$, da za vsaka morfizma $f, g : A \rightarrow B$ iz $m \circ f = m \circ g$ sledi $f = g$. Monomorfizmu rečemo tudi mono na kratko.

Primer 1.3.1. Preverimo, da mono in epi morfizmi v **Sets** ustrezajo ravno injektivnim in surjektivnim funkcijam. Naj bo torej najprej $f : A \rightarrow B$ injektivna funkcija. Potem za vsaka $x, y \in A$ velja, da it $f(x) = f(y)$ sledi

$x = y$. Naj bosta sedaj $g, h : C \rightarrow A$ taki funkciji, da velja $f \circ g = f \circ h$. Torej za vsak $x \in C$ velja $f(g(x)) = f(h(x))$ iz česar iz injektivnosti f sledi $g(x) = h(x)$ za vsak x , torej $g = h$. Privzemimo sedaj, da je f monomorfizem. Velja torej $f \circ g = f \circ h \implies g = h$. Naj bo $1 = \{\star\}$ in naj bosta $x, y : 1 \rightarrow A$. Funkcije iz množice 1 v A predstavljajo ravno elemente množice A . Ker pa velja $f \circ x = f \circ y \implies x = y$ velja tudi, da za vsaka $x, y \in A$ velja $f(x) = f(y) \implies x = y$ in je f res injektivna. Naj bo sedaj $f : A \rightarrow B$ surjektivna funkcija. Velja torej, da $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. Naj bosta sedaj $g, h : B \rightarrow C$ taki funkciji, da velja $g \circ f = h \circ f$. Torej za vsak $y \in B$ velja $g(y) = h(y)$ saj vsak tak y lahko zapišemo kot $f(x)$ za nek $x \in A$. Torej je f res epi. Naj bo sedaj f epimorfizem in naj bosta $g, h : B \rightarrow 2$ definirani z naslednjima predpisoma

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \text{Im} f \\ 0 & ; \quad x \notin \text{Im} f \end{cases}$$

$$h(x) = 1 \quad \forall x \in B$$

Poglejmo sedaj kompozituma $g \circ f$ in $h \circ f$. Velja $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1$ za vsak $x \in A$, saj je $f(x) \in \text{Im} f$. Po drugi strani pa je tudi $h \circ f(x) = h(f(x)) = 1$. Torej je za vsak $x \in A$, $g \circ f(x) = h \circ f(x)$, oziroma $g \circ f = h \circ f$ in ker je f epimorfizem sledi $g = h$, kar pa pomeni, da je za vsak $y \in B$ nek tak $x \in A$, da z f lahko pridemo do njega, kar pa pomeni ravno, da je f surjektivna.

Ta primer bi nam dal misliti, da so epi in mono-morfizmi vedno, kadar imamo opravka z objekti, ki predstavljajo množice, ravno surjektivne ter injektivne funkcije. Naslednji primer pokaže, da temu ni vedno tako.

Primer 1.3.2. Naj bo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ homomorfizem monoidov, definiran s predpisom $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Naj bosta sedaj $g, h : \mathbb{Z} \rightarrow M$ taka homomorfizma monoidov, da velja $g \circ f = h \circ f$. Veljajo torej zveze

$$g \circ f(1) = h \circ f(1) \implies g(1) = h(1)$$

$$g(n) = g(1 + \dots + 1) = g(1) + \dots + g(1) = ng(1) = nh(1) = h(n)$$

$$g(-n) = -g(n) = -h(n) = h(-n)$$

Če vse to pogledamo skupaj, vidimo da velja

$$g(k) = h(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

kar pa pomeni $g = h$. Torej je f epimorfizem. Način kako smo prišli do tega primera nam da misliti, da mogoče kar je potrebno, za to da je homomorfizem monoidov epi, da je surjektiven na generatorje kodomena. Algebrائيčno gledano, to da je nek morfizem e epi, pomeni natanko to, da ga lahko pri kompoziciji krajšamo z desne: $fe = ge \implies f = g$. Obratno, če je morfizem m mono, pomeni, da ga lahko krajšamo z leve: $mf = mg \implies f = g$.

1.4 Konstrukcije novih kategorij

Primer 1.4.1. Naj bosta \mathbf{C} in \mathbf{D} kategoriji. *Produkt* kategorij $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ je prav tako kategorija, z objekti oblike (C, D) , kjer sta $C \in \mathbf{C}$ in $D \in \mathbf{D}$ in morfizmi oblike $(f, g) : (C, D) \rightarrow (C', D')$, kjer je $f : C \rightarrow C'$ morfizem v \mathbf{C} ter $g : D \rightarrow D'$ morfizem v \mathbf{D} . Identitene morfizme ter kompozitume definiramo po komponentah, torej

$$1_{(C,D)} = (1_C, 1_D)$$

$$(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$$

za $C \in \mathbf{C}$, $D \in \mathbf{D}$ ter f, f' puščici v \mathbf{C} in g, g' puščici v \mathbf{D} . Za produkt $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ imamo dva *projekcijska funktorja*

$$\mathbf{C} \xleftarrow{\pi_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{D}}} \mathbf{D}$$

definirana kot $\pi_{\mathbf{C}}(C, D) = C$ in $\pi_{\mathbf{D}}(C, D) = D$ ter na morfizmih $\pi_{\mathbf{C}}(f, g) = f$ in $\pi_{\mathbf{D}}(f, g) = g$.

Primer 1.4.2. *Obratna* ali *dualna* kategorija \mathbf{C}^{op} kategorije \mathbf{C} je kategorija z istimi objekti kot \mathbf{C} kjer vsem morfizmom zamenjamo domeno in kodomeno. To pomeni, da za morfizem $f : A \rightarrow B$ v \mathbf{C} imamo morfizem $f : B \rightarrow A$ v \mathbf{C}^{op} . Konceptualno je to kategorija, kjer so vse puščice obrnjene. Poglejmo si, da je to res tudi kategorija. Identitetni morfizmi ostanejo isti, kaj se pa zgodi z kompozitumi. Objekte in morfizme v obratni kategoriji se ponavadi označuje kar z enakimi oznakami, a da bodo stvari bolj jasne uvedimo za trenutek naslednje oznake: Za morfizem $f : A \rightarrow B$ v \mathbf{C} pišimo $f^* : B^* \rightarrow A^*$ v \mathbf{C}^{op} . Tako dobimo zvezo med operacijami v \mathbf{C} in \mathbf{C}^{op} .

$$\begin{aligned} (1_C)^* &= 1_{C^*} \\ (g \circ f)^* &= f^* \circ g^* \end{aligned}$$

Torej diagram v \mathbf{C}

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$

v \mathbf{C}^{op} zgleda kot

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xleftarrow{f^*} & B^* \\ & \nwarrow f^* \circ g^* & \uparrow g^* \\ & & C^* \end{array}$$

Dualna kategorija nam predstavi pojem dualnosti, ki se izkaže za zelo pomembnega v študiju teorije kategorij, saj nam omogoča, da razne konstrukcije prenesemo v njihovo dualno obliko in tako iz eno konstrukcije dobimo dve.

Primer. Tako dualnost smo že srečali, ko smo upeljali pojma epimorfizma ter monomorfizma. Naj bosta $e : E \rightarrow A$ epimorfizem in $m : D \rightarrow M$ monomorfizem v kategoriji \mathbf{C} . Če postavimo njuna diagrama enega ob drugega

$$E \xrightarrow{e} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f'} \end{array} B \qquad C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{g'} \end{array} D \xrightarrow{m} M$$

postane jasno, da je en samo dualna verzija drugega, ali z drugimi besedami, epimorfizem je monomorfizem v dualni kategoriji. Ta ideja

Primer 1.4.3. Kategorija morfizmov \mathbf{C}^{\rightarrow} kategorije \mathbf{C} je kategorija dobljena iz kategorije \mathbf{C} tako, da za objekte vzamemo morfizme iz kategorije \mathbf{C} , na primer $f : A \rightarrow B$ in $g : C \rightarrow D$ kar bi lahko izgledalo nekako takole

$$\begin{array}{ccc} A & & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & & B' \end{array}$$

Kako bi sedaj prešli iz f v g ? Naravna ideja, ki se nam porodi, je da povežemo obe stranici navideznega kvadrata z morfizmi v \mathbf{C} .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1} & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{g_2} & B' \end{array}$$

Morfizem $f \rightarrow g$ je torej par morfizmov (h_1, h_2) iz \mathbf{C} . Identitetni morfizem je par $(1_A, 1_B)$. Kar mora še veljati, da bi to bila kategorija, je da lahko take morfizme komponiramo med seboj. Kar mora še veljati je, da sta obe poti po kvadratu enaki, torej $g \circ h_1 = h_2 \circ f$, čemur rečemo, da *kvadrat komutira* (zakaj je to pomembno brez motivacije s strani naravnih transformacij?). Preveriti moramo, da ta pogoj ohranja komponiranje, ali z drugimi besedami, če komponiramo da komutirajoča kvadrata, ali dobimo nov komutirajoč kvadrat. Recimo, da imamo naslednjo situacijo

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{g_1} & A' & \xrightarrow{h_1} & A'' \\ f \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\ B & \xrightarrow{g_2} & B' & \xrightarrow{h_2} & B'' \end{array}$$

kjer so f, f', f'' objekti v \mathbf{C}^\rightarrow , $(g_1, g_2), (h_1, h_2)$ pa morfizmi v \mathbf{C}^\rightarrow . Kaj bi bil kompozitum morfizmov $(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2)$. Očitna izbira, ki se tudi izkaže za pravilno, je komponiranje po komponentah, oziroma $(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2) = (h_1 \circ g_1, h_2 \circ g_2)$. Preveritmi moramo komutativnostni pogoj.

$$\begin{aligned} f'' \circ (h_1 \circ g_1) &= (f'' \circ h_1) \circ g_1 = \\ (h_2 \circ f') \circ g_1 &= h_2 \circ (f' \circ g_1) = \\ h_2 \circ (g_2 \circ f) &= (h_2 \circ g_2) \circ f \end{aligned}$$

Primer 1.4.4. *Rezinska kategorija \mathbf{C}/C kategorije \mathbf{C} preko objekta $C \in \mathbf{C}$.* Ideja te kategorije je podobna kategoriji puščic, a da v tem primeru gledamo morfizme v \mathbf{C} , ki imajo kodomeno, torej kažejo v, objekt C . Na primer

$$\begin{array}{ccc} A & & A' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & C & \end{array}$$

Ostale stvari delujejo podobno kot v kategoriji puščic. Morfizmi so ravno tako morfizmi v \mathbf{C} a z eno zahtevo manj, saj sedaj ne bo potrebno poslati kodomene prvega morfizma v kodomeno drugega. Tako, bi bil v našem primeru morfizem $f \rightarrow f'$ morfizem $g : A \rightarrow A'$ v \mathbf{C} , tako da sledeči trikotnik komutira

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & C & \end{array}$$

oziroma z enačbo

$$f' \circ g = f$$

Identitetni morfizem se podeduje iz \mathbf{C} , kompozitum pa deluje ravno tako kot v kategoriji puščic. Če pogledamo malo bolj natančno, lahko vidimo, da ta konstrukcija izgleda kot neka "podkonstrukcija" kategorije puščic, če iz vseh objektov kategorije \mathbf{C}^{\rightarrow} vzamemo le tiste s kodomeno C . Potem so morfizmi oblike $(g, 1_C)$ in vidimo, da komutativnostni kvadrati ustrezajo ravno komutativnostnim trikotnikom v \mathbf{C}/C .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ C & \xrightarrow{1_C} & C \end{array}$$

Imamo tudi *korezinsko* kategorijo C/\mathbf{C} kjer za objekte vzamemo morfizme v \mathbf{C} , ki kažejo iz C , oziroma tiste z domeno C . Ostale stvari potekajo podobno kot v rezinski kategoriji.

1.5 Začetni in končni objekti

V kategoriji **Set** množic in funkcij med njimi poznamo posebne tipe množic, kot na primer prazna množica in eno-elementna množica. Poglejmo si abstraktizacijo teh dveh posebnih primerov v jezik teorije kategorij. Definicijo podamo s tako imenovano *univerzalno lastnostjo*, ki nam pove kako so med seboj povezani morfizmi, ki so relevantni v tej konstrukciji (boljši način za to povedati).

Definicija 1.5. V poljubni kategoriji \mathbf{C} je objekt

0 *začetni*, če za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ obstaja enoličen morfizem

$$0 \rightarrow C$$

1 *končni*, če za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ obstaja enoličen morfizem

$$C \rightarrow 1$$

Končni objekt je ravno začetni objekt v dualni kategoriji \mathbf{C}^{op} . Ker sta definiciji začetnega in končnega objekta podani z univerzalno lastnostjo lahko pričakujemo, da bodo objekti podani do izomorfizma natančno. To pove naslednja trditev.

Trditev 1.0.2. *Začetni in končni objekti so enolično določeni, do izomorfizma natančno*

Dokaz. Naj bosta 0 in $\hat{0}$ začetna objekta v kategoriji \mathbf{C} in naj bo $C \in \mathbf{C}$ poljuben objekt. Potem obstaja enoličen $f : 0 \rightarrow C$ in enoličen $\hat{f} : \hat{0} \rightarrow C$, prav tako pa obstajata enolična $g : 0 \rightarrow \hat{0}$ ter $\hat{g} : \hat{0} \rightarrow 0$. Torej je $\hat{g} \circ g$ enoličen morfizem od 0 do 0 . To pa pomeni, da mora biti identitetni morfizem (saj ta vedno obstaja in je enoličen), kar pa pomeni, da je g izomorfizem. Naj bosta sedaj 1 in $\hat{1}$ končna objekta in naj bo $A \in \mathbf{C}$ poljuben. Potem obstaja natanko en morfizem $f : A \rightarrow 1$ in natanko en morfizem $\hat{f} : A \rightarrow \hat{1}$, prav tako pa obstajata enolična $g : 1 \rightarrow \hat{1}$ in $\hat{g} : \hat{1} \rightarrow 1$, in je kompozitum $\hat{g} \circ g$ enoličen morfizem $1 \rightarrow \hat{1}$, torej identiteta. Torej je g izomorfizem. \square

Vidimo lahko, da sta dokaza za začetni in končni objekt potekala praktično enako. Gre seveda za delo dualnosti, ki jo bomo tudi formalno predstavili.

Primer 1.5.1. V kategoriji **Set** je začetni objekt prazna množica, saj za vsako množico A obstaja natanko ena funkcija $! : \emptyset \rightarrow A$, ki nobenega elementa ne slika nikamor. Končni objekt v **Set** je množica z enim elementom $1 = \{*\}$. Za vsako množico A obstaja natanko ena funkcija $f : A \rightarrow 1$, ki slika vse elemente iz A v $*$. Tukaj lahko vidimo, da je končni objekt določen "le" do izomorfizma natančno, saj je množica $\{*\}$ izomorfna vsaki drugi enoelementni množici s funkcijo $f : \{*\} \rightarrow a$, $f(*) = a$. Ta funkcija je očitno bijekcija, torej izomorfizem v kategoriji **Set**.

Primer 1.5.2. Kaj bi bil končni objekt v kategoriji **Pos** delno urejenih množic in monotonih funkcij.

1.6 Posplošeni elementi

Za razumevanje tega, kaj je neka množica potrebujemo natanko poznavanje vseh njenih elementov. To nam pove vse, kar lahko vemo o tej množici. Elemente neke množice A pa lahko identificiramo s funkcijami $1 \rightarrow A$, saj vsako funkcijo $f : 1 \rightarrow A$ identificiramo s tem kam pošlje edini element, z drugimi besedami, množica A je izomorfna množici vseh funkcij iz 1 v A . To množico označujemo z $\text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(1, A)$ in ji pravimo hom-set (boljši izraz?). Takšne množice bodo ključnega pomena pri Yonedovi lemi. Za kako drugo matematično strukturo to lahko ni dovolj. Na primer za poznavanje topološkega prostora moramo poznati še okolice točk tega prostora in nam poznavanje samo točk prostora ne pove ničesar o lastnostih tega prostora. Kateri morfizmi pa so potrebni za poznavanje nekega objekta. To vprašanje nas privede do naslednje definicije

Definicija 1.6. Naj bo T nek objekt v kategoriji \mathbf{C} , Pravimo mu *testni objekt*. Naj bo A poljuben objekt v \mathbf{C} . *Posplošeni element* je morfizem $t : T \rightarrow A$ iz testnega objekta v A .

1.7 Produkti

Kot smo to že storili, poskusimo znano konstrukcijo iz teorije množic posplošiti na poljubno kategorijo. V \mathbf{Set} poznamo za množici A in B njun kartezični produkt $A \times B$, ki je definiran kot množica vseh parov

$$A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

Imamo tudi dve koordinatni projekciji $\pi_A : A \times B \rightarrow A$ in $\pi_B : A \times B \rightarrow B$ definirani kot $\pi_A(a, b) = a$ in $\pi_B(a, b) = b$.

1.8 Dualnost

1.9 Funktorji in naravne transformacije

1.9.1 Morfizmi med kategorijami

Primer 1.9.1. Neuradni moto teorije kategorij bi se lahko glasil *puščice so bistvene* kar bi pomenilo, da nas ponavadi ne zanima toliko kaj točno so objekti v neki specifični kategoriji temveč kaj se dogaja s puščicami med njimi.

Sedaj imamo nekaj definicij, ki veljajo v splošnih kategorijah, a apliciramo jih lahko samo na vsaki posamezni. Kar bi radi storili, je da prehajamo iz ene kategorije v drugo in pogledamo, če je kak problem lažje rešljiv v kaki drugi kategoriji in to rešitev bi potem prevedli na kategorijo, kjer nas problem bolj zanima. Zato uvedemo naslednjo definicijo.

Definicija 1.7. Naj bosta \mathbf{C} in \mathbf{D} poljubni kategoriji. *Funktor* $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ med kategorijama \mathbf{C} in \mathbf{D} je par morfizmov

$$F_0 : \mathbf{C}_0 \rightarrow \mathbf{D}_0$$

med objekti in

$$F_1 : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{D}_1$$

med puščicami, tako da veljajo naslednje lastnosti:

1. $F(f : A \rightarrow B) = F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$
2. $F(1_A) = 1_{F(A)}$
3. Za puščici $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ mora veljati:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

1.9.2 Morfizmi med funktorji

Radi bi nadaljevali temo posploševanja morfizmov in ker smo nazadnje definirali morfizme med kategorijami, se naravno pojavi vprašanje, ali lahko definiramo morfizme med temi morfizmi. Odgovor je pozitiven in pridemo do naslednje definicije.

Definicija 1.8. Naj bosta \mathbf{C} in \mathbf{D} poljubni kategoriji in naj bosta $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ funktorja med tema kategorijama.

Naravna transformacija $\vartheta : F \Rightarrow G$ iz F v G , je družina puščic

$$(\vartheta_C : FC \rightarrow GC)_{C \in \mathbf{C}}$$

tako, da za vsako puščico $f : C \rightarrow D$ naslednji diagram:

$$\begin{array}{ccc} FC & \xrightarrow{\vartheta_C} & GC \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ FD & \xrightarrow{\vartheta_D} & GD \end{array} \quad (1.3)$$

komutira

Poglavje 2

Pomembne trditve

Lema 2.1. Če je funktor G poln in zvest, potem ohranja vse limite.

Dokaz.

□

Trditev 2.1.1. Predstavljivi funktor $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ ohranja vse limite.

Dokaz. Naj bo $D : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ diagram oblike D v \mathbf{C} in naj bo

$$\varprojlim_{j \in \mathbf{J}} D_j$$

limita za D , oz $\text{Hom}(C, \varprojlim D_j)$ je limita za $\text{Hom}(C, -) \circ D$

kjer je $\text{Hom}(C, -) \circ D : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Sets}$

□

Definicija 2.1. Naj bo \mathbf{C} definicija. *Klasifikator podobjekta* je objekt Ω z puščico $true : 1 \rightarrow \Omega$

Poglavje 3

Yonedova lema

3.1 Yonedova vložitev

Naj bo \mathbf{C} lokalno majhna kategorija. Potem vemo, da za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ obstaja kovariantni predstavljeni funktor

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

Ker lahko ta objekt C izbiramo poljubno imamo v resnici funktor

$$k(C) = \text{Hom}(C, -)$$

Opravka imamo v bistvu z kontravariantnim funktorjem

$$k : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}}$$

Saj za

Definicija 3.1. *Yonedova vložitev* je funktor $y : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ za $C \in \mathbf{C}$ je

$$y(C) := \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, C) : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

in za puščice $f : C \rightarrow D$

$$y(f) := \text{Hom}(-, f) : \text{Hom}(-, C) \rightarrow \text{Hom}(-, D)$$

Kasneje bomo pokazali, da je funktor y res vložitev. Funktorju pravimo *vložitev*, če je zvest poln in injektiven na objektih.

3.2 Yonedova lema

Izrek 3.1 (Yonedova lema). *Naj bo \mathbf{C} lokalno majhna kategorija. Potem za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ in funktor $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ velja*

$$\text{Hom}(yC, F) \cong FC$$

In ta izomorfizem je naraven tako v C kot v F , kar pomeni, da za $f : C \rightarrow D$ naslednji diagram

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(yC, F) & \xrightarrow{\cong} & FC \\ \text{Hom}(yf, F) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Hom}(yD, F) & \xrightarrow{\cong} & FD \end{array} \quad (3.1)$$

komutira ter za naravno transformacijo $\varphi : F \Rightarrow G$ naslednji diagram

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(yC, F) & \xrightarrow{\cong} & FC \\ \text{Hom}(yC, \varphi) \downarrow & & \downarrow \varphi_C \\ \text{Hom}(yC, G) & \xrightarrow{\cong} & GC \end{array} \quad (3.2)$$

komutira.

Opomba: $\text{Hom}(yC, F)$ je množica naravnih transformacij med funktorjema $yC, F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$, oz. $\text{Hom}(yC, F) = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(yC, F) = \text{Nat}(yC, F)$.

Dokaz. Poglejmo, kaj mora veljati za neko naravno transformacijo $\vartheta : yC \Rightarrow F$, ki je v bistvu družina puščic $(\vartheta_D : yC(D) \rightarrow F(D))_{D \in \mathbf{C}}$. Te puščice morajo izpolnjevati naturalnostni pogoj, da za vsako puščico $f : D \rightarrow C$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(C, C) & \xrightarrow{\vartheta_C} & FC \\ \text{Hom}(f, C) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Hom}(D, C) & \xrightarrow{\vartheta_D} & FD \end{array}$$

komutira. Torej mora veljati

$$(F(f) \circ \vartheta_C)(g) = (\vartheta_D \circ \text{Hom}(f, C))(g)$$

za vsak $g \in \text{Hom}(C, C)$. En tak g je identitetna puščica na C , oz. $1_C : C \rightarrow C$. Torej mora veljati enakost:

$$\begin{aligned} \underline{F(f) \circ \vartheta_C(1_C)} &= \vartheta_D \circ \text{Hom}(f, C)(1_C) = \\ \vartheta_D \circ \text{Hom}(f, C)(1_C) &= \vartheta_D \circ (- \circ f)(1_C) = \vartheta_D \circ (1_C \circ f) = \underline{\vartheta_D(f)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Torej vidimo, da je vrednost komponente za ϑ v D določena že s tem, kam slika ϑ_C puščico 1_C .

Naj bo $\alpha_{C,F} : \text{Hom}(yC, F) \rightarrow FC$ označen zeleni izomorfizem.

Definiramo torej za naravno transformacijo $\vartheta \in \text{Hom}(yC, F)$

$$\alpha_{C,F}(\vartheta) := \vartheta_C(1_C) \quad (3.4)$$

Označimo:

$$\boxed{\alpha_{C,F}(\vartheta) = \widehat{\vartheta}} \quad (3.5)$$

In za vsak element $a \in FC$ definirajmo naravno transformacijo $\vartheta_a \in \text{Hom}(yC, F)$ po komponentah, in sicer:

$$(\vartheta_a)_D : yC(D) \rightarrow F(D) \quad (3.6)$$

$$(\vartheta_a)_D(f : D \rightarrow C) := F(f)(a) \quad (3.7)$$

Označimo:

$$\boxed{\alpha_{C,F}^{-1}(a) = \widehat{a}} \quad (3.8)$$

Sedaj je potrebno preveriti, da tako definirana preslikava res ustreza pojemu izreka.

Najprej preverimo, da sta si predpisa vzajemno inverzna.

Torej, da za vsak $\vartheta \in \text{Hom}(yC, F)$ velja:

$$\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \vartheta$$

in za vsak $a \in FC$ velja

$$\widehat{\widehat{a}} = a$$

1.) $\widehat{\vartheta} = \vartheta_C(1_C) \in FC$.

Potem je $\widehat{\widehat{\vartheta}} = \eta_{\widehat{\vartheta}} \in \text{Hom}(yC, F)$. Poglejmo kako ta naravna transformacija deluje na puščicah. Naj bo $f : D \rightarrow C$

$$\begin{aligned} (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D : yC(D) &\rightarrow FD \\ f &\xrightarrow{\text{def}} Ff(\widehat{\vartheta}) \end{aligned}$$

In velja

$$\begin{aligned}
Ff(\widehat{\vartheta}) &= Ff(\vartheta_C(1_C)) = \vartheta_D(f) \\
\implies \forall f \in \mathbf{C}_1 : (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D(f) &= \vartheta_D(f) \\
\implies \forall D \in \mathbf{C} : (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D &= \vartheta_D \\
\implies \eta_{\widehat{\vartheta}} = \vartheta &\implies \underline{\underline{\widetilde{\vartheta} = \vartheta}}
\end{aligned}$$

2.)

$$\widetilde{a} = \vartheta_a : yC \Rightarrow F$$

In velja

$$\begin{aligned}
(\vartheta_a)_D : yC(D) &\rightarrow FD \\
f &\mapsto F(f)(a)
\end{aligned}$$

Torej

$$\widehat{a} = (\vartheta_a)_C(1_C) = F(1_C)(a) = 1_{F(C)}(a) = a$$

Sedaj moramo še pokazati, da sta zadoščena naturalnostna pogoja:

Naj bo $f : C \rightarrow D$ in naj bo $\vartheta \in \text{Hom}(yC, F)$.

Pokazali bi radi:

$$Ff \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \alpha_{D,F} \circ \text{Hom}(yf, F)(\vartheta) \quad (3.9)$$

Velja pa:

$$Ff \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \underline{\underline{Ff(\vartheta_C(1_C))}}$$

In po drugi strani:

$$\begin{aligned}
\alpha_{D,F} \circ \text{Hom}(yf, F)(\vartheta) &= \alpha_{D,F}(\vartheta \circ yf) = \\
(\vartheta \circ yf)_D(1_D) &= \vartheta_D \circ yf_D(1_D) = \\
\vartheta_D(f \circ 1_D) &= \underline{\underline{\vartheta_D(f)}}
\end{aligned}$$

Enakost 3.3 pa nam pove ravno da je $Ff(\vartheta_C(1_C)) = \vartheta_D(f)$ To pa pomeni ravno, da diagram 3.1 komutira.

Kaj pa drugi diagram. Naj bo $\varphi : F \Rightarrow G$ naravna transformacija med funktorjema $F, G : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$.

Veljati mora enakost:

$$\varphi_C \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \alpha_{C,G} \circ \text{Hom}(yC, \varphi)(\vartheta)$$

Imamo:

$$\varphi_C \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \underline{\varphi_C(\vartheta_C(1_C))}$$

In za desno stran:

$$\alpha_{C,G} \circ \text{Hom}(yC, \varphi)(\vartheta) = \alpha_{C,G}(\varphi \circ \vartheta) = (\varphi \circ \vartheta)_C(1_C) = \varphi_C \circ \vartheta_C(1_C) = \underline{\varphi_C(\vartheta_C(1_C))}$$

Torej diagram 3.2 tudi komutira.

□

3.3 Posledice Yonedove leme

Takoj dobimo posledico, ki upraviči poimenovanje funktorja y vložitev

Trditev 3.1.1. *Funktor $y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ je poln in zvest.*

Dokaz.

□