Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Jure Taslak

Yonedova lema in njena uporaba

DIPLOMSKO DELO

INTERDISCIPLINARNI UNIVERZITETNI
ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2017

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Besedilo teme diplomskega dela študent prepiše iz študijskega informacijskega sistema, kamor ga je vnesel mentor. V nekaj stavkih bo opisal, kaj pričakuje od kandidatovega diplomskega dela. Kaj so cilji, kakšne metode uporabiti, morda bo zapisal tudi ključno literaturo.

Na tem mestu zapišite, komu se zahvaljujete za izdelavo diplomske naloge. Pazite, da ne boste koga pozabili. Utegnil vam bo zameriti. Temu se da izogniti tako, da celotno zahvalo izpustite.

Svojim staršem

Kazalo

Povzetek

Naslov: Yonedova lema in njena uporaba

Avtor: Jure Taslak

V vzorcu je predstavljen postopek priprave diplomskega dela z uporabo okolja LaTeX. Vaš povzetek mora sicer vsebovati približno 100 besed, ta tukaj je odločno prekratek. Dober povzetek vključuje: (1) kratek opis obravnavanega problema, (2) kratek opis vašega pristopa za reševanje tega problema in (3) (najbolj uspešen) rezultat ali prispevek magistrske naloge.

Ključne besede: računalnik, računalnik, računalnik.

Abstract

Title: Naslov EN

Author: Jure Taslak

This sample document presents an approach to typesetting your BSc thesis using LaTeX. A proper abstract should contain around 100 words which makes this one way too short.

Keywords: computer, computer, computer.

Poglavje 1

Uvod

Kaj je teorija kategorij? Kako se razlikuje od običajnega pogleda na matematiko? Običajno se v matematiki obravnava in preučuje matematične strukture in preslikave med njimi, ki ohranjajo strukturo. Na primer grupe, kolobarje, topološke prostore. Včasih opazimo, da se v bistvu vse lastnosti, ki jih naši objekti imajo in to kako se obnašajo, da izraziti s tem, kakšne so možne transformacije teh objektov. Teorija kategorij poskuša uporabiti in posplošiti to idejo na vse, kar se obnaša na tak način. Ne zanima nas namreč več zgradba teh struktur, ampak le tiste lastnosti, ki jih lahko razberemo iz transformacij med strukturami. Kaj se dogaja, na primer pri kompozitumu katerih od teh transformacij in kaj lahko povemo s tem. Na neki način teorija kategorij združuje različna področja v matematiki in poskuša nanje pogledati z enotno perspektivo. Ta posplošitev seveda ne more rešiti vseh specifičnih problemov nekega področja, nam pa da neki bolj globalni pogled na stvari in včasih tudi lahko prenese pristop k reševanju nekega problema na povsem drugo področje, če ga le znamo pogledati s pravilno perspektivo.

1.1 Osnovne Definicije

Definicija 1.1. *Kategorija* sestoji iz:

- *objektov* : $A, B, C, X, Y, \dots$
- *morfizmov* : $f, g, h, \dots$
- za vsak morfizem imamo podana dva objekta:

$$dom(f), \quad cod(f).$$

ki jima pravimo *domena* in *kodomena* morfizma f. Pišemo:

$$f \colon A \to B$$

kjer sta $A = dom(f)$ in $B = cod(f)$. Pravimo da f gre od A do B.

- Za vsaka morfizma $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$, torej taka da velja $cod(f) = dom(g)$, obstaja morfizem $g \circ f \to C$, ki mu pravimo *kompozitum* f in g.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

- za vsak objekt A obstaja morfizem

$$1_A : A \to A$$

ki mu pravimo *identiteta* na A.

Za vse te podatke morata veljati naslednji dve pravili:

- asociativnost: Za vsake $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ velja

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- enota: Za vsak $f : A \to B$ velja

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Zbirko objektov kategorije všasih označujemo z $Obj(\mathbf{C})$ in zbirko morfizmov z $Arr(\mathbf{C})$.

1.2 Primeri kategorij

Primer 1.2.1. Osnovni primer kategorije, na katerega se lahko vedno sklicujemo, je kategorija množic in funkcij med njimi. Označimo ga s **Sets**. Za kategorijo se vedno prvo vprašamo: kaj so objekti in kaj so morfizmi? Pri **Sets** so objekti množice in morfizmi funkcije. Izpolnjena morata biti pogoja asociativnosti in enote. Kompozitum morfizmov je kompozitum funkcij, ki je asociativen, kar vemo iz teorije množic. Vlogo identitete igra identitetna funkcija, ki jo lahko vedno definiramo in zanjo velja $f \circ id_A = f = id_B \circ f$ za vsako funkcijo $f : A \to B$, kjer je $id_A : A \to A$ definirana kot $id_A(x) = x$ za vsak element $x \in A$.

Primer 1.2.2. Še ena kategorija, ki jo v bistvu že poznamo, je $\mathbf{Sets}_{fin}$, kategorija končnih množic in funkcij med njimi. Zakaj je to res kategorija? Objekti so očitno končne množice, kaj so pa morfizmi? To bi morale biti funkcije med končnimi množicami in kompozitum takih funkcij je seveda tudi funkcija takega tipa, torej iz končne množice v končno množico. Razmisliti moramo še ali imamo identiteto. To seveda imamo, saj bo to podedovana identitetna funkcija iz **Sets**, ki bo v tem primeru funkcija iz končne množice v končno, torej res morfizem v tej kategoriji. Tu imamo tudi primer kategorije, katere objekti so množice z dodatno strukturo ter so morfizmi objektov funkcije, ki ohranjajo strukturo teh množic.

Primer 1.2.3. Delno urejena množica je množica P, opremljena z relacijo, ki se jo ponavadi označuje z $\leq$ in je:

- refleksivna: $\forall x \in P\ x \leq x$
- antisimetrična: $x \leq y \ \&\ y \leq x \Rightarrow x = y$
- tranzitivna: $x \leq y \ \&\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Morfizem delno urejenih množic P in Q je *monotona* funkcija

$$m : P \to Q$$

kar pomeni, da za vse $x, y \in P$ iz $x \leq y$ sledi $m(x) \leq m(y)$. Ali je to kategorija? Izpolnjevati mora aksiome za kategorij, torej ali imamo identiteto za vsako delno urejeno množico P? Naravni kandidat je identitetna funkcija $1_P : P \to P$, ki je monotona, say iz $x \leq y$ sledi $x \leq y$. Kompozitum dveh monotonih funkcij $m : P \to Q$ in $n : P \to Q$ je tudi monotona funkcija, saj za $x \leq y$ zaradi monotonosti m velja $m(x) \leq m(y)$ in zaradi monotonosti n velja $n(m(x)) \leq n(m(y))$. Imamo torej kategorijo, ki jo označujemo s **Pos**, delno urejenih množic in monotonih funkcij.

Primer 1.2.4. Monoid $(M, \bullet)$ je množica opremljena z binarno operacijo množenja, za katero drži:

- Zaprtost: $\forall x, y \in M : x \bullet y \in M$
- Asociativnost: $\forall x, y, z \in M : x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
- Obstoj enote: obstaja tak $e \in M$ tako da $\forall x \in M : e \bullet x = x \bullet e = x$

Homomorfizmi monoidov so funkcije $f : M \to N$ za katere velja

1. $f(e_M) = e_N$

2. $f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y)$

Identitetni homorfizem $1_M : M \to M$ bo predstavljal identiteto v tej kategoriji. Kompozitum dveh homorfizmov je spet homomorfizem, torej imamo novo kategorijo monoidov in homorfizmov med njimi, ki jo označujemo z **Mon**.

Primer 1.2.5. Objekti kategorije niso nujno strukturirane množice in morfizmi niso nujno funkcije. Kategoriji kjer pa je to res, pravimo *konkretna kategorija*. Vse kategorije, ki smo jih videli do tukaj so primeri konkretnih kategorij. Poglejmo pa si še primer ne-konkretne kategorije. Naj bo **Rel** kategorija, kjer so objekti množice in morfizmi binarne relacije. Torej morfizem $f : A \to B$ je podmnožica kartezičnega produkta $f \subseteq A \times B$. Identiteta je identitetna relacija na množici.

$$1_A = \{\, (a,a) \in A \times A \mid a \in A \,\} \subseteq A \times A$$

Za relaciji $R \subseteq A \times B$ in $S \subseteq B \times C$, definiramo njun kompozitum $S \circ R$ kot

$$(a,c) \in S \circ R \quad \Leftrightarrow \quad \exists b \; (a,b) \in R \;\&\; (b,c) \in S.$$

Najprej mora veljati, da je tako definiran kompozitum res spet morfizem te vrste, kar jasno je, sam je množica elementov kartezičnega produkta, torej binarna relacija. Da pa to res je kategorija je potrebno preveriti še, ali je kompozitum identitete s poljubnim kompatibilnim morfizmom, res nazaj isti morfizem, in ali je kompozitum morfizmov asociativen. Recimo torej, da imamo množico A in morfizem $R \subseteq A \times B$, če zapišemo njun kompozitum po definiciji, je

$$R \circ 1_A = \{\, (a,b) \in A \times B \mid \exists a \in A(a,a) \in A \;\&\; (a,b) \in R \,\} = R.$$

Da bi preverili asociativnost, denimo, da imamo morfizme $Q : A \to B$, $R : B \to C$ in $S : C \to D$. Sedaj velja

$$\begin{aligned}
(a,d) \in S \circ (R \circ Q) &\Leftrightarrow \exists c \in C \; (a,c) \in R \circ Q \;\&\; (c,d) \in S \\
&\Leftrightarrow \exists c \in C \; \exists b \in B \; (a,b) \in Q \;\&\; (b,c) \in R \;\&\; (c,d) \in S \\
&\Leftrightarrow \exists b \in B \; (a,b) \in Q \;\&\; (b,d) \in S \circ R \\
&\Leftrightarrow (a,d) \in (S \circ R) \circ Q.
\end{aligned}$$

Primer 1.2.6. Kaj bi bil primer „minimalistične“ kategorije? Kategorije z majhnim številom objektov ali morfizmov. Ker mora za vsak objekt obstajati identiteta mora vsaka kategorija imeti najmanj toliko morfizmov kolikor je objektov. Najmanjše število objektov, ki jih lahko imamo je 0. Ali je kategorija z 0 objekti in 0 morfizmi res kategorija? Za vsak objekt, ki jih ni, obstaja identiteta in za vsaka dva kompatibilna morfizma ,ki ju ni, obstaja njun kompozitum, to torej je kategorija. Kaj pa kategorija z enim objektom? Imeti mora en objekt in najmanj en morfizem, namreč identiteto na ta objekt. To z samo enim morfizmom pogosto označujemo z **1**, ko je iz konteksta jasno, da gre za kategorijo (je ta del res potreben?). Kategoriji z dvema objektom in enim neidentitetnim morfizmom med objektoma pravimo **2**. Ti dve kategoriji lahko predstavimo z diagramoma:

$$\bullet \circlearrowleft \qquad\qquad\qquad \circlearrowright \bullet \longrightarrow \bullet \circlearrowleft \tag{1.1}$$

Identitetnih morfizmov se ponavadi ne riše. Kategorija **3** bi izgledala takole.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Primer 1.2.7. Naj bo $(P, \leq)$ delno urejena množica. Ali je to tudi kategorija? Najprej se moramo vprašati, kaj so objekti v tej kategoriji in kaj so morfizmi. Imamo množico elementov $p, q \in P$, med katerimi lahko imamo relacijo $p \leq q$, ki je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Dobimo idejo, da za objekte vzamemo elemente P in podamo morfizem med p in q natanko takrat, ko v P velja $p \leq q$. Torej:

- objekti: elementi množice P
- morfizmi: morfizem $p \to q \Leftrightarrow p \leq q$

Potrebno je preveriti, če so izpolnjeni aksiomi za kategorijo:

1. Za vsak objekt $p \in P$ potrebujemo morfizem $1_p : p \to p$. Ali obstaja tak morfizem? Seveda, saj za vsak p velja $p \leq p$, kar nam da želeno identiteto.

2. Za vsaka dva morfizma $p \to q$ in $q \to r$ mora obstajati kompozitum $p \to r$. Ali res obstaja? Seveda, saj je relacija $\leq$ tranzitivna in iz $p \leq q$ in $q \leq r$ sledi $p \leq r$, kar nam da želeni kompozitum.

Vsaka delno urejena množica je torej svoja kategorija in v bistvu so kategorije v nekem smislu posplošene delno urejene množice.

Primer 1.2.8. Vsako množico A lahko obravnavamo kot kategorijo $\mathbf{Dis}(A)$ kjer za objekte vzamemo elemente A, kjer so edini morfizmi identitete na vsakem objektu. Taki kategoriji, kjer so edini morfizmi identitete pravimo *diskretna* kategorija.

Primer 1.2.9. Še en primer, ki ga bralec najverjetneje že pričakuje. Objekti naj bodo topološki prostori in morfizmi naj bodo zvezne funkcije med njimi. Zveznim funkcijam, kot tudi včasih drugim funkcijam, ki ohranjajo struktuo, bomo pravili preslikave. Identiteta za neki topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je identitetna preslikava $1_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$, ki je seveda zvezna. Osnovno dejstvo topologije je, da je kompozitum dveh zveznih funkcij spet zvezna funkcija. Torej topološki prostori res tvorijo kategorijo. Označujemo jo s **Top**.

1.3 Različni tipi morfizmov

Uvedemo prvo abstraktno definicijo v jeziku teorije kategorij, nečesa kar je že poznano iz drugih področij matematike.

Definicija 1.2. Naj bo **C** poljubna kategorija. Morfizmu $f : A \to B$ pravimo *izomorfizem*, če obstaja tak morfizem $g : B \to A$, da velja

$$g \circ f = 1_A \; in \; f \circ g = 1_B$$

Morfizmu g pravimo *inverz* morfizma f

Trditev 1.3. *Inverzi, ko obstajajo, so enolični.*

Dokaz. Naj bo $f : A \to B$ izomorfizem in naj bosta $g, h : B \to A$ njegova inveza. Potem velja $g = 1_A \circ g = h \circ f \circ g = h \circ 1_B = h$ □

Ker so inverzi enolični, lahko inverz morfizma f upravičeno označujemo z f^{-1}.

Primer. Izomorfizmi v kategoriji **Sets** ustrezajo ravno bijektivnim preslikavam, saj kot vemo iz teorije množic, ima funkcija inverz, ravno kadar obstaja enoličen inverz te funkcije, ki se komponira v identitetno funkcijo.

Primer. Vsak identitetni morfizem je izomorfizem, nima pa nujno kategorija drugih morfizmov kot identitetnega. Na primer kategorija **2** ima samo en neidentitetni morfizem, ki pa nima inverza torej ni izomorfizem.

Primer s funkcijami nam pa naravno porodi novo vprašanje, saj kot vemo, je funkcija bijektivna ravno takrat, ko je surjektivna ter injektivna. Vprašamo se, kaj bi pa bili karakterizaciji teh dveh lastnosti v jeziku teorije kategorij. Izkaže se, da pridemo do malenkost bolj splošnih pojmov, ki jih predstavimo v naslednjih dveh definicijah.

Definicija 1.4. *Epimorfizem* je tak morfizem $e : E \to A$, da za vsaka morfizma $f, g : A \to B$ iz $f \circ e = g \circ e$ sledi $f = g$.

Definicija 1.5. *Monomorfizem* je tak morfizem $m : B \to M$, da za vsaka morfizma $f, g : A \to B$ iz $m \circ f = m \circ g$ sledi $f = g$.

Primer 1.3.1. Preverimo, da mono- in epi-morfizmi v **Sets** ustrezajo ravno injektivnim in surjektivnim funkcijam. Naj bo torej najprej $f : A \to B$ injektivna funkcija. Potem za vsaka $x, y \in A$ velja, da iz $f(x) = f(y)$ sledi $x = y$. Naj bosta sedaj $g, h : C \to A$ taki funkciji, da velja $f \circ g = f \circ h$. Torej za vsak $x \in C$ velja $f(g(x)) = f(h(x))$ iz česar iz injektivnosti f sledi $g(x) = h(x)$ za vsak x, torej $g = h$. Privzemimo sedaj, da je f monomorfizem. Naj bo $1 = \{\star\}$ in naj bosta $x, y : 1 \to A$. Funkcije iz množice 1 v A predstavljajo ravno elemente množice A. Ker pa velja $f \circ x = f \circ y \implies x = y$ velja tudi, da za vsaka $x, y \in A$ velja $f(x) = f(y) \implies x = y$ in je f res injektivna. Naj bo sedaj $f : A \to B$ surjektivna funkcija. Velja torej, da $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$. Naj bosta sedaj $g, h : B \to C$ taki funkciji, da velja $g \circ f = h \circ f$. Torej za vsak $y \in B$ velja $g(y) = h(y)$, saj vsak tak y lahko zapišemo kot $f(x)$ za neki $x \in A$. Torej je f res epimorfizem. Naj bo sedaj $f : A \to B$ epimorfizem in naj bosta $g, h : B \to 2$ definirani z naslednjima predpisoma

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathrm{Im}(f) \\ 0 & ; \quad x \notin \mathrm{Im}(f) \end{cases}$$

$$h(x) = 1,$$

kjer je $\mathrm{Im}(f) := \{\, y \in B \mid \exists x \in A\ y = f(x) \,\}$. Poglejmo sedaj kompozituma $g \circ f$ in $h \circ f$. Velja $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1$ za vsak $x \in A$, saj je $f(x) \in \mathrm{Im} f$. Po drugi strani pa je tudi $h \circ f(x) = h(f(x)) = 1$. Torej je za vsak $x \in A$, $(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x)$, oziroma $g \circ f = h \circ f$ in ker je f epimorfizem sledi $g = h$, kar pomeni, da velja $g(y) = h(y) = 1$ za vsak $y \in B$. Iz definicije g sledi, da za vsak $y \in B$ velja $y \in \mathrm{Im}(f)$, torej je f surjektivna.

Ta primer bi nam dal misliti, da so epi- in mono-morfizmi vedno, kadar imamo opravka z objekti, ki predstavljajo množice, ravno surjektivne ter injektivne funkcije. Naslednji primer pokaže, da temu ni vedno tako.

Primer 1.3.2. Naj bo $f : (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ homomorfizem monoidov, definiran s predpisom $f(n) = n$ za vsak n iz $\mathbb{N}$. Naj bosta sedaj $g, h : \mathbb{Z} \to M$ taka homomorfizma monoidov, da velja $g \circ f = h \circ f$. Velja torej

$$g(n) = gf(n) = hf(n) = h(n)$$

Ker sta g, h homomorfizma monoidov velja

$$g(0) = h(0) = 0$$

Zanima nas še vrednosti $g(-n)$ za $n \in \mathbb{N}$. Računamo

$$\begin{aligned} g(0) = g(n-n) &= g(n) + g(-n) \\ \implies g(-n) &= -g(n) \end{aligned}$$

Če vse to pogledamo skupaj, vidimo da velja

$$g(k) = h(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

kar pa pomeni $g = h$. Torej je f epimorfizem. Način kako smo prišli do tega primera nam da misliti, da mogoče kar je potrebno, za to da je homorfizem monoidov epi, da je surjektiven na generatorje kodomene. Algebraično gledano, to da je neki morfizem e epi, pomeni natanko to, da ga lahko pri kompoziciji krajšamo z desne: $fe = ge \implies f = g$. Obratno, če je morfizem m mono, pomeni, da ga lahko krajšamo z leve: $mf = mg \implies f = g$.

1.4 Konstrukcije novih kategorij

Primer 1.4.1. *Obratna* ali *dualna* kategorija $\mathbf{C}^{op}$ kategorije $\mathbf{C}$ je kategorija z istimi objekti kot $\mathbf{C}$ kjer vsem morfizmom zamenjamo domeno in kodomeno. To pomeni, da za morfizem $f : A \to B$ v $\mathbf{C}$ imamo morfizem $f : B \to A$ v $\mathbf{C}^{op}$. Konceptualno je to kategorija, kjer so vse puščice obrnjene. Poglejmo si, da je to res tudi kategorija. Identitete ostanejo iste, kaj se pa zgodi z kompozitumi. Objekte in morfizme v obratni kategoriji se ponavadi označuje kar z enakimi oznakami, a da bodo stvari bolj jasne uvedimo za trenutek naslednje oznake: Za morfizem $f : A \to B$ v $\mathbf{C}$ pišimo $f^* : B^* \to A^*$ v $\mathbf{C}^{op}$. Tako dobimo zvezo med operacijami v $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}^{op}$.

$$\begin{aligned} (1_C)^* &= 1_{C^*} \\ (g \circ f)* &= f^* \circ g^* \end{aligned}$$

Torej diagram v $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

v $\mathbf{C}^{op}$ zgleda kot

$$\begin{tikzcd} A^* & B^* \arrow[l, "f^*"'] \\ & C^* \arrow[u, "g^*"'] \arrow[ul, "f^* \circ g^*"] \end{tikzcd}$$

Dualna kategorija nam predstavi pojem dualnosti, ki se izkaže za zelo pomembnega v študiju teorije kategorij, saj nam omogoča, da razne konstrukcije prenesemo v njihovo dualno obliko in tako iz eno konstrukcije dobimo dve.

Primer. Tako dualnost smo že srečali, ko smo upeljali pojma epimorfizma ter monomorfizma. Naj bosta $e : E \to A$ epimorfizem in $m : D \to M$ monomorfizem v kategoriji $\mathbf{C}$. Če postavimo njuna diagrama enega ob drugega

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & D \arrow[r, "m"] & M \end{tikzcd}$$

postane jasno, da je en samo dualna verzija drugega, ali z drugimi besedami, epimorfizem je monomorfizem v dualni kategoriji.

Primer 1.4.2. *Kategorija morfizmov* $\mathbf{C}^{\to}$ kategorije $\mathbf{C}$ je kategorija dobljena iz kategorije $\mathbf{C}$ tako, da za objekte vzamemo morfizme iz kategorije $\mathbf{C}$, na primer $f : A \to B$ in $g : C \to D$ kar bi lahko izgledalo nekako takole

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B & B' \end{tikzcd}$$

Kako bi sedaj prešli iz f v g? Naravna ideja, ki se nam porodi, je da povežemo obe stranici navideznega kvadrata z morfizmi v $\mathbf{C}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "g_2"'] & B' \end{tikzcd}$$

Morfizem $f \to g$ je torej par morfizmov (h_1, h_2) iz $\mathbf{C}$. Identiteta je par $(1_A, 1_B)$. Kar mora še veljati, da bi to bila kategorija, je da lahko take morfizme komponiramo med seboj. Kar mora še veljati je, da sta obe poti po kvadratu enaki, torej $g \circ h_1 = h_2 \circ f$, čemur rečemo, da *kvadrat komutira* (zakaj je to pomembno brez motivacije s strani naravnih transformacij?). Preveriti moramo, da ta pogoj ohranja komponiranje, ali z drugimi besedami, če komponiramo da komutirajoča kvadrata, ali dobimo nov komutirajoč kvadrat. Recimo, da imamo naslednjo situacijo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f'"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\ B \arrow[r, "g_2"'] & B' \arrow[r, "h_2"'] & B'' \end{tikzcd}$$

kjer so f, f', f'' objekti v $\mathbf{C}^{\rightarrow}$, $(g_1, g_2), (h_1, h_2)$ pa morfizmi v $\mathbf{C}^{\rightarrow}$. Kaj bi bil kompozitum morfizmov $(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2)$. Očitna izbira, ki se tudi izkaže za pravilno, je komponiranje po komponentah, oziroma $(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2) = (h_1 \circ g_1, h_2 \circ g_2)$. Preveritmi moramo komutativnostni pogoj.

$$\begin{aligned} f'' \circ (h_1 \circ g_1) = (f'' \circ h_1) \circ g_1 = \\ (h_2 \circ f') \circ g_1 = h_2 \circ (f' \circ g1) = \\ h_2 \circ (g_2 \circ f) = (h_2 \circ g_2) \circ f \end{aligned}$$

Primer 1.4.3. *Rezine* $\mathbf{C}/C$ kategorije $\mathbf{C}$ nad objektom $C \in \mathbf{C}$. Ideja te kategorije je podobna kategoriji puščic, a da v tem primeru gledamo morfizme v $\mathbf{C}$, ki imajo kodomeno, torej kažejo v, objekt C. Na primer

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"'] & & A' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Ostale stvari delujejo podobno kot v kategoriji puščic. Morfizmi so ravno tako morfizmi v $\mathbf{C}$ a z eno zahtevo manj, saj sedaj ne bo potrebno poslati kodomene prvega morfizma v kodomeno drugega. Tako, bi bil v našem primeru morfizem $f \to f'$ morfizem $g : A \to A'$ v $\mathbf{C}$, tako da sledeči trikotnik komutira.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & A' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

oziroma z enačbo

$$f' \circ g = f.$$

Identiteta se podeduje iz $\mathbf{C}$, kompozitum pa deluje ravno tako kot v kategoriji puščic. Če pogledamo malo bolj natančno, lahko vidimo, da ta konstrukcija izgleda kot neka "podkonstrukcija" kategorije puščic, če iz vseh objektov kategorije $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ vzamemo le tiste s kodomeno C. Potem so morfizmi oblike $(g, 1_C)$ in vidimo, da komutativnostni kvadrati ustrezajo ravno komutativnostnim trikotnikom v $\mathbf{C}/C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ C \arrow[r, "1_C"'] & C \end{tikzcd}$$

Imamo tudi *korezine* $C/\mathbf{C}$, kjer za objekte vzamemo morfizme v $\mathbf{C}$, ki kažejo iz C, oziroma tiste z domeno C. Ostale stvari potekajo podobno kot pri rezinah. Poglejmo kako bi iz rezin dobili rezine, kajti ideji sta povezani z dualnostjo. Diagrama za $\mathbf{C}/C$ ter $C/\mathbf{C}$ izgledata kot

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] & & B \\ & C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Če naredimo rezine po dualni kategorij $\mathbf{C}^{op}$ nad objektom C dobimo diagram

$$\begin{tikzcd} A & & B \arrow[ll, "\alpha"'] \\ & C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

1.5 Funktorji

V teoriji kategorij spoznamo abstraktne karakterizacije in konstrukcije, ki delujejo v neki kategoriji. Radi bi seveda konstrukcijo, ki smo jo spoznali v eni kategoriji prenesli na druge kategorije, mogoče celo v upanju, da je neke probleme lažje rešiti v drugi kategoriji in da bomo znali rešitev prenesti nazaj v originalno kategorijio kjer nas zanima rešitev problema. V ta namen uvedemo definicijo, ki je na neki način ključna za uporabo teorije kategorij.

Definicija 1.6. Naj bosta $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ kategoriji. *Funktor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ med kategorijama $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ je par morfizmov

$$F_0 : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{D}_0$$

med objekti in

$$F_1 : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{D}_1$$

med morfizmi, tako da veljajo naslednje lastnosti.

1. $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$
2. $F(1_A) = 1_{F(A)}$
3. Za puščici $f : A \to B,\ g : B \to C$ mora veljati:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Funktorji so torej posebni morfizmi med kategorijami.

Primer 1.5.1. Za vsako kategorijo $\mathbf{C}$ imamo na voljo identitetni funktor, ki deluje na pričakovan način. Kompozitum funktorjev je spet funktor, saj za funktorja $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ in $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ in morfizem $f : A \to B$ velja

$$G(F(f : A \to B)) = G(F(f) : F(A) \to F(B)) = G(F(f)) : G(F(A)) \to G(F(B))$$

ter

$$G(F(1_A)) = G(1_{F(A)}) = 1_{G(F(A))}$$

in še

$$G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f))$$

za $g : B \to C$. Imamo torej kategorijo, kjer so objekti kategorije in morfizmi med njimi so funktorji. To kategorijo ponavadi označujemo z **Cat**

Primer 1.5.2. Za neko delno urejeno množico P v kategoriji **Pos** lahko „pozabimo" strukturo urejenosti in vzamemo samo množico. Tej ideji pravimo *pozabljivi funktor* $U : \mathbf{Pos} \to \mathbf{Sets}$. Ta ideja je tudi bolj splošna, saj lahko za vsako kategorijo, kjer so objektni množice ter morfizmi funkcije med njimi definiramo pozabljivi funktor, tako da vzamemo za vsak objekt samo množico, ki jo predstavlja.

Primer 1.5.3. V rezinah $\mathbf{C}/C$ nad objektom C obstaja funktor $U : \mathbf{C}/C \to C$, ki tudi pozabi na gledani objekt C, torej objekte slika v objekte in morfizme v morfizme v $\mathbf{C}$. Za vsak morfizem $g : C \to D$ lahko definiramo funktor $g_* : \mathbf{C}/C \to \mathbf{C}/D$, s predpisom $g_*(f) = g \circ f$,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\
C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

Primer 1.5.4. Naj bo $(M, \cdot)$ monoid. Na monoid lahko gledamo kot na kategorijo z enim samim objektom. Morfizmi v tej kategoriji so elementi monoida, ki imajo vsi za domeno ter kodomeno edini objekt iz te kategorije. Identiteta na tem objektu je enota monoida in kompozitum dveh morfizmov je produkt elementov, ki ju predstavljata. Torej, če sta $m, n \in M$ je njun kompozitum enak $m \cdot n$. Zaradi zaprtosti operacije množenja obstaja kompozitum vsakih dveh elementov in asociativnost kompozituma sledi iz asociativnosti množenja.

Lahko se vprašamo, ali imamo v tej kategoriji kake izomorfizme. Kaj bi to pomenilo? Radi bi dva morfizma m, n, tako da je njun kompozitum enak identiteti, ali povedano drugače radi bi dva elementa monoida, katerih produkt je enota. To je pa ravno definicija inverza. Torej, v monoidu (gledano kot kategorija) je morfizem izomorfizem natanko takrat, ko ima ta element monoida multiplikativni inverz. Ta razmislek nam pove tudi, da je grupa ravno kategorija z enim objektom, kjer je vsak morfizem izomorfizem.

Naj bosta sedaj M in N monoida in $f : M \to N$ homomorfizem monoidov. Vemo že, da je f morfizem v kategoriji monoidov **Mon**, a velja tudi, da je f funktor med M in N če ju gledamo kot kategoriji. Ta funktor slika edini objekt v edini objekt (boljši način za to povedat?) in morfizme usklajeno s tem kam slika elemente monoida. Za f velja še, da slika enoto v enoto ter produkt v produkt, kar so ravno pogoji da je to funktor. Funktorji so v tem smislu kot neki posplošeni homomorfizmi.

1.6 Začetni in končni objekti

V kategoriji **Set** množic in funkcij med njimi poznamo posebne tipe množic, kot na primer prazna množic in eno-elementa množica. Poglejmo si abstraktizacijo teh dveh posebnih primerov v jezik teorije kategorij. Definicijo podamo s tako imenovano *univerzalno lastnostjo*, ki nam pove kako so med seboj povezani morfizmi, ki so relevantni v tej konstrukciji (boljši način za to povedat).

Definicija 1.7. V poljubni kategoriji $\mathbf{C}$ je objekt

- 0 *začetni*, če za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ obstaja enoličen morfizem

$$0 \to C$$

- 1 *končni*, če za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ obstaja enoličen morfizem

$$C \to 1$$

Končni objekt je ravno začetni objekt v dualni kategoriji $\mathbf{C}^{op}$. Ker sta definiciji začetnega in končnega objekta podani z univerzalno lastnostjo lahko pričakujemo, da bodo objekti podani do izomorfizma natančno. To pove naslednja trditev.

Trditev 1.8. *Začetni in končni objekti so enolično določeni, do izomorfizma natančno*

Dokaz. Naj bosta 0 in $\hat{0}$ začetna objekta v kategoriji $\mathbf{C}$. Potem obstajata enolična $g : 0 \to \hat{0}$ ter $\hat{g} : \hat{0} \to 0$. Torej je $\hat{g} \circ g$ enoličen morfizem od 0 do 0. To pa pomeni, da mora biti identitetni morfizem (saj ta vedno obstaja in je enoličen), kar pa pomeni, da je g izomorfizem.

Naj bosta sedaj 1 in $\hat{1}$ končna objekta in naj bo $A \in \mathbf{C}$ poljuben. Potem obstajata enolična $g : 1 \to \hat{1}$ in $\hat{g} : \hat{1} \to 1$, in je kompozitum $\hat{g} \circ g$ enoličen morfizem $1 \to \hat{1}$, torej identiteta. Torej je g izomorfizem. □

Vidimo lahko, da sta dokaza za začetni in končni objekt potekala praktično enako. Gre seveda za delo dualnosti, ki jo bomo tudi formalno predstavili.

Primer 1.6.1. V kategoriji **Set** je začetni objekt prazna množica, saj za vsako množico A obstaja natanko ena funkcija $! : \emptyset \to A$, ki nobenega elementa ne slika nikamor.

Končni objekt v **Set** je enojec $1 = \{ * \}$. Za vsako množico A obstaja natanko ena funkcija $f : A \to 1$, ki slika vse elemente iz A v $*$. Tukaj lahko vidimo, da je končni objekt določen „le“ do izomorfizma natančno, saj je množica $\{ * \}$ izomorfna vsakemu drugemu enojcu s funkcijo $f : \{ * \} \to \{ a \}$, $f(*) = a$. Ta funkcija je očitno bijekcija, torej izomorfizem v kategoriji **Set**.

Primer 1.6.2. Kaj bi bil končni objekt v kategoriji **Pos** delno urejenih množic in monotonih funkcij.

1.7 Posplošeni elementi

Za razumevanje tega, kaj je neka množica potrebujemo natanko poznavanje vseh njenih elementov. To nam pove vse, kar lahko vemo o tej množici. Elemente neke množice A pa lahko identificiramo s funkcijami $1 \to A$, saj vsako funkcijo $f : 1 \to A$ identificiramo s tem kam pošlje edini element, z drugimi besedami, množica A je izomorfna množici vseh funkcij iz 1 v A. To množico označujemo z $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(1, A)$ in ji pravimo hom-set (boljši izraz ?). Takšne množice bodo ključnega pomena pri Yonedovi lemi. Za kako drugo matematično strukturo to lahko ni dovolj. Na primer za poznavanje topološkega prostora moramo poznati še okolice točk tega prostora in nam poznavanje samo točk prostora ne pove ničesar o lastnostih tega prostora. Kateri morfizmi pa so potrebni za poznavanje nekega objekta. To vprašanje nas privede do naslednje definicije

Definicija 1.9. *Posplošeni element* objekta $A \in \mathbf{C}$ je poljuben morfizem

$$t : T \to A$$

iz nekega testnega objekta T v A.

Kot je bilo že omenjeno, nam opsplošeni elementi razkrijejo dodatno strukturo, kot ponazori naslednji primer

Primer 1.7.1. Recimo, da imamo dve delno urejeni množici X in A z naslednjo ureditvijo:

$$\begin{aligned} X &= \{\, x \leq y, x \leq z \,\} \\ A &= \{\, a \leq b \leq c \,\} \end{aligned}$$

Obe množici imata po 3 elemente, a vidimo, da nimata identične strukture. Torej med njima imamo monotono bijektivno funkcijo $f : X \to A$ definirano kot

$$f(x) = a, \quad f(y) = b, \quad f(z) = c$$

a ta funkcija **ni** izomorfizem v **Pos**. Ti dve strukturi v resnici nista izomorfni, a kako to pokazati. En način je z tako imenovanimi *invariantami*, to so lastnosti neke strukture, ki se ohranjajo z izomorfizmi, oz. jih imajo enake vse izomorfne strukture. Invariante se da definirati na lep način z posplošenimi elementi. V našem primeru vidimo, da je invarianta število elementov enaka za obe množici, kar ustreza temu, da morfizmi iz enoelementne delno urejene množice **1** ne ločujejo med njima. Poglejmo si namesto tega „**2**-elemente“

teh množic. To so morfizmi iz množice $\mathbf{2} = \{\, 0 \leq 1 \,\}$ v naši množici. Takih morfizmov v množico X je 5, in sicer trije morfizmi, ki slikajo oba elementa v isti element, na primer oba v x ter še dva dodatna morfizma

$$0 \mapsto x, 1 \mapsto y \qquad 0 \mapsto x, 1 \mapsto z$$

medtem, ko imamo za morfizme $\mathbf{2} \to A$, tri dodatne morfizme poleg „točkovnih“ (takih, ki slikaj vse elemente v eno točko.

$$0 \mapsto a, 1 \mapsto b \qquad 0 \mapsto b, 1 \mapsto c \qquad 0 \mapsto a, 1 \mapsto c$$

kjer zadnji morfizem dobimo zaradi tranzitivnosti. Tako je invarianta, ki jo lahko poimenujemo kar „število morfizmov iz $\mathbf{2}$“ za množico X enaka 5, za množico A pa 6, torej lahko sklepamo, da množici nista izomorfni v **Pos**.

Posplošeni elementi so uporabni tudi za „testiranje“ določenih lastnosti. Poglejmo si na primer diagrame naslednje oblike

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "x'"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Tukaj je f monomorfizem, natanko takrat, ko za vsaka morfizma x, x' iz $fx = fx'$ sledi $x = x'$, ali z drugimi besedami, f je „injektiven na posplošenih elementih“ če želimo.

Podobno, da lahko za diagram oblike

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ D \arrow[r, "\beta"'] & D \end{tikzcd}$$

povemo, da komutira, mora le veljati, da je

$$\alpha f x = \beta g x$$

za vsak posplošen element $x : X \to A$, kajti potem velja tudi za posplošen element $1_A : A \to A$. Posplošeni elementi so posebej koristni za testiranje takih in podobnih kategoričnih lastnosti.

1.8 Produkti

Kot smo to že storili, poskusimo znano konstrukcijo iz teorije množic posplošiti na poljubno kategorijo. V **Set** poznamo za množici A in B njun kartezični produkt $A \times B$, ki je definiran kot množica vseh parov

$$A \times B := \{\, (a,b) \mid a \in A, b \in B \,\}$$

Imamo tudi dve koordinatni projekciji $\pi_A : A \times B \to A$ in $\pi_B : A \times B \to B$ definirani kot $\pi_A(a,b) = a$ in $\pi_B(a,b) = b$. Za vsak element $x \in A \times B$ velja $x = (\pi_A(x), \pi_B(x))$. Ker vemo, da lahko elemente množice $A \times B$ predstavimo kot morfizme $1 \to A \times B$ nam to da diagram naslednje oblike

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, dashed, "\text{(a,b)}"] \arrow[dr, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Če 1 zamenjamo z posplošenim elementom, dobimo naslednjo definicijo

Definicija 1.10. Produkt objektov $A, B \in \mathbf{C}$ je objekt P, skupaj s projekcijama

$$A \xleftarrow{p_A} P \xrightarrow{p_A} B$$

z naslednjo univerzalno lastnostjo. Za vsak objekt X iz $\mathbf{C}$ in morfizma $f : X \to A$, $g : X \to B$ obstaja natanko en morfizem $u : X \to P$, tako da naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

ali z enačbami

$$f = p_A \circ u \quad g = p_B \circ u.$$

Morfizmoma p_A in p_B pravimo (koordinatni) *projekciji*. Enolični morfizem u ponavadi označujemo z $\langle f, g \rangle$.

Če v kategoriji obstaja produkt za vsaka dva objekta pravimo, da ta kategorija *ima binarne produkte.*

Kot ponavadi z univerzalnimi lastnostmi podanimi na tak način, bo veljala naslednja trditev

Trditev 1.11. *Produkti so enolični do izomorfizma natančno*

Dokaz. Naj bosta P in R oba produkt objektov A in B z produktnima projekcijama p_A, p_B za P ter r_A, r_B za R. Ker je P produkt A in B obstaja enoličen morfizem $u : R \to P$, da velja $r_A = p_A u, r_B = p_B u$. Obratno ker je R produkt A in B obstaja enoličen $v : P \to R$, da veljata zvezi $p_A = r_A u, p_B = r_B u$. Stanje prikažemo v diagramu

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl, "r_A"'] \arrow[dr, "r_B"] \arrow[dd, dashed, bend right, "u"'] & \\
A & & B \\
& P \arrow[ul, "p_A"] \arrow[ur, "p_B"'] \arrow[uu, dashed, bend right, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Morfizem $u \circ v$ je torej enolični morfizem iz P v P. To pa pomeni, da mora biti identitetni morfizem. Enako velja za $v \circ u$, torej sta si inverza in sta P in R izomorfna. □

Zaradi tega lahko produkt A in B upravičeno označujemo z $A \times B$.

Primer 1.8.1. Preverimo, da naš motivacijski zgled z kartezičnim produktom množic res ustreza univerzalni lastnosti. Naj bosta $A \times B$ kartezični produkt množic A in B z koordinatnima projekcijama π_A in π_B, ki delujeta na očiten način, npr. $\pi_A(a, b) = a$, za $(a, b) \in A \times B$. Denimo, da obstaja množica X s funkcijama $f : X \to A$, $g : X \to B$. Definirajmo funkcijo $\langle f, g\rangle : X \to A \times B$ kot $\langle f, g\rangle(x) = (f(x), g(x))$. Velja

$$\pi_A \circ \langle f, g\rangle(x) = \pi_A(f(x), g(x)) = f(x)$$

in

$$\pi_B \circ \langle f, g\rangle(x) = \pi_B(f(x), g(x)) = g(x)$$

Naj bo sedaj neki $h : X \to A \times B$, tak da velja

$$\pi_A \circ h = f,\ \pi_B \circ h = g.$$

Ker h slika v kartezični produkt, ga lahko zapišemo kot

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x)).$$

Iz te in zgornje enakost sledi

$$h_1(x) = f(x)$$

in

$$h_2(x) = g(x)$$

torej je res $h = \langle f, g \rangle$.

Ravno tako kot produkt dveh objektov, lahko definiramo produkt treh ali večih objektov. Naj bo na primer $(C_i)_{i \in I}$ družina objektov indeksirana po neki indeksni množici I (lahko neskončni). Produkt družine $(C_i)_{i \in I}$ je objekt

$$\prod_{i \in I} C_i$$

skupaj z družino morfizmov $(p_j : \prod_{i \in I} C_i \to C_j)_{j \in I}$, z univerzalno lastnostjo, da za vsak objekt X z morfizmi $(x_i : X \to C_i)_{i \in I}$ obstaja natanko en morfizem $u : X \to \prod_{i \in I} C_i$, tako da velja

$$x_j = p_j \circ u$$

za vsak $j \in I$, oziroma da diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "x_j"] & \\ \prod_{i \in I} C_i \arrow[r, "p_j"'] & C_j \end{tikzcd}$$

komutira.

Če za vsaka dva objekta v kategoriji $\mathbf{C}$ obstaja njun produkt pravimo, da $\mathbf{C}$ *ima dvojiške produkte.*

Definiramo lahko tudi eniški produkt. Eniški produkt objekta je objekt sam, brez dodatnih morfizmov. Ničelni produkt v kategoriji je končni objekt te kategorije, saj za vsak objekt obstaja natanko en morfizem v končni objekt, da nič dodatnega ne komutira. Če v kategoriji $\mathbf{C}$ obstaja produkt poljubne končne družine objektov pravimo, da $\mathbf{C}$ *ima končne produkte.*

Primer 1.8.2. Naj bosta $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ kategoriji. *Produkt* kategorij $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ je prav tako kategorija, z objekti oblike (C, D), kjer sta $C \in \mathbf{C}$ in $D \in \mathbf{D}$ in morfizmi oblike $(f, g) : (C, D) \to (C', D')$, kjer je $f : C \to C'$ morfizem v $\mathbf{C}$ ter $g : D \to D'$ morfizem v $\mathbf{D}$. Identitete ter kompozitume definiramo po komponentah, torej

$$1_{(C,D)} = (1_C, 1_D)$$
$$(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$$

za $C \in \mathbf{C}$, $D \in \mathbf{D}$ ter f, f' puščici v $\mathbf{C}$ in g, g' puščici v $\mathbf{D}$. Za produkt $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ imamo dva *projekcijska funktorja*

$$\mathbf{C} \xleftarrow{\pi_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{D}}} \mathbf{D}$$

definirana kot $\pi_{\mathbf{C}}(C, D) = C$ in $\pi_{\mathbf{D}}(C, D) = D$ ter na morfizmih $\pi_{\mathbf{C}}(f, g) = f$ in $\pi_{\mathbf{D}}(f, g) = g$.

1.9 Dualnost

Povejmo (za trenutek še brez dokaza) dve trditvi, ki nam opišeta in utemeljia pojem dualnosti v kategoriji.

Trditev 1.12. *(Formalna dualnost). Za vsak stavek Σ v jeziku teorije kategorij, če Σ sledi iz aksiomov kategorij, potem sledi tudi njegov dualni stavek Σ^*.*

Trditev 1.13. *(Konceptualna dualnost). Za vsako trditev Σ o kategorijah, če Σ drži za vse kategorije, potem drži tudi dualna trditev Σ^*.*

Kar lahko vzamemo iz teh dveh trditev je, da za vsako trditev, ki jo dokažemo za poljubno kategorijo, „zastonj“ dobimo še njeno dualno trditev, brez dodatnega dela. Tako bi lahko na primer pri dokazu, da so začetni in končni objekti določeni do izomorfizma natančno uporabili dejstvo, da je končni objekt dualni pojem začetnega objekta in naredili dokaz le za enega izmed njiju. Ta ideja nam pove, da smo z obravnavanjem neke konstrukcije v teoriji kategorij, na primer univerzalne lastnosti produkta, hkrati obravnavali tudi njen dual. V tem primeru dualni konstrukciji dodamo predpono „ko-“. Tako pridemo do naslednje definicije

1.9.1 Koprodukti

Definicija 1.14. Naj bosta A in B objekta v kategorji $\mathbf{C}$. *Koprodukt* A-ja in B-ja je objekt Q skupaj z dvema morfizmoma $q_A : A \to Q$, $q_B : B \to Q$.

Z naslednjo univerzalno lastnostjo. Za vsak objekt X in morfizmoma $x_A : A \to X$, $x_B : B \to X$ obstaja enoličen morfizem $u : Q \to X$, za katerega naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
A \arrow[ur, "x_A"] \arrow[r, "q_A"'] & Q \arrow[u, dashed, "v"'] & B \arrow[ul, "x_B"'] \arrow[l, "q_B"]
\end{tikzcd}$$

z enačbami

$$x_A = vq_A \quad x_B = vq_B$$

Kot za produkte velja naslednja trditev.

Trditev 1.15. *Koprodukti so enolično določeni do izomorfizma natančno.*

Dokaz. Uporabimo dejstvo, da to velja za produkte in da je koprodukt dual produkta. □

Koprodukt A in B zato označujemo z $A + B$.

Primer 1.9.1. Ali lahko najdemo koprodukte v kategoriji **Set**? Veljati mora univerzalna lastnost koprodukta. Poskusimo z množico $A + B := \{ (a, 1) \mid a \in A \} \cup \{ (b, 2) \mid b \in B \}$ in funkcijama $i_A : A \to A + B$, $i_A(a) = (a, 1)$ in $i_B : B \to A + B$, $i_B(b) = (b, 2)$. Tej množici pravimo tudi disjunktna unija A in B.

Primer 1.9.2. Tako kot za produkte, lahko za poljubni kategorji $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ definiramo njun koprodukt $\mathbf{C} + \mathbf{D}$, z inkluzijskima funktorjema $\iota_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} + \mathbf{D}$, $\iota_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} + \mathbf{D}$

1.10 Hom-sets

Ustavimo se na kratko pri tej zelo pomembni temi, ki smo jo že srečali in bo postala ključnega pomena kasneje. Naj bo $\mathbf{C}$ taka kategorija, da je za vsaka dva objekta $A, B \in \mathbf{C}$ morfizmov med njima toliko, da jih lahko spravimo v množico. Kategoriji kjer velja ta pogoj pravimo *lokalno majhna kategorija.* To množico označujemo kot

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) := \{ f \in Arr(\mathbf{C}) \mid dom(f) = A, cod(f) = B \}$$

Ker lahko to definiramo za vsaka dva objekta v $\mathbf{C}$ nam to za vsak objekt $A \in \mathbf{C}$ poda funktor

$$\mathrm{Hom}(A, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets},$$

ki se ga imenuje *(kovariantni) predstavljivi funktor*. Njegovor delovanje na objektih in morfizmih je definirano kot

$$\mathrm{Hom}(A, -)(B) = \mathrm{Hom}(A, B)$$

ter

$$\begin{aligned}(A, -)(f : B \to C) = \mathrm{Hom}(A, f) : \mathrm{Hom}(A, B) &\to \mathrm{Hom}(A, C) \\ g &\mapsto f \circ g\end{aligned}$$

Za diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

v $\mathbf{C}$. To je res funktor, saj je $\mathrm{Hom}(A, 1_B)(f : A \to B) = 1_B \circ f = f$. In za diagram

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] & \\ B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

velja

$$\mathrm{Hom}(A, h \circ g)(f) = h \circ g \circ f = \mathrm{Hom}(A, h)(g \circ f) = \mathrm{Hom}(A, h) \circ \mathrm{Hom}(A, g)(f).$$

Ravno tako lahko definiramo funktor

$$\mathrm{Hom}(-, A) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets},$$

ki mu pravimo *(kontravariantni) predstavljivi funktor*, kjer pa gledamo vse morfizme v objekt A. Funktorji tega tipa (iz dualne kategorije v **Sets**) nas bodo kasneje še posebej zanimali.

1.11 Zožki in kozožki

1.11.1 Zožki

Ideja zožkov je sledeča, zamislimo si, da imamo dve funkciji

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Radi bi zožali domeno A na takšno podmnožico, da se f in g na njej ujemata. Torej $\{ x \in A \mid f(x) = g(x) \} \subseteq A$. Označimo to množico z E in inkluzijo E v A z e, torej $\forall x \in E \;\; e(x) = x$. To, da je neki $x \in A$ v E lahko ekvivalentno povemo, kot da obstaja neki morfizem $\hat{x} : 1 \to A$ za katerega je $f \circ \hat{x} = g \circ \hat{x}$. Kar pa ravno tako pomeni, da obstaja neki $\hat{x}' : 1 \to E$, da je $\hat{x} = e \circ \hat{x}' = \hat{x}'$, kajti taki so ravno vsi elementi iz E. Situacijo lahko ponazorimo z naslednjim diagramom.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ 1 \arrow[u, dashed, "\hat{x}'"] \arrow[ur, "\hat{x}"'] & & \end{tikzcd}$$

Uporabimo isto idejo kot prej in množico 1 zamenjamo s posplošenim elementom in dobimo naslednjo definicijo.

Definicija 1.16. *Zožek* dveh morfizmov $f, g : A \to B$ je par objekta E in morfizma $e : E \to A$, da velja $f \circ e = g \circ r$, z univerzalno lastnostjo, da za vsak objekt X in morfizem $x : X \to A$, za katerega velja $f \circ x = g \circ x$, obstaja enoličen morfizem $x' : X \to E$, da lahko x razdelimo na e in x', oziroma $x = ex'$. Slika, ki jo lahko imamo v mislih je

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[u, dashed, "x'"] \arrow[ur, "x"'] & & \end{tikzcd}$$

Primer 1.11.1. Preverimo, da naš motivacijski zgled res ustreza definiciji zožka. Naj bosta E in e definirana kot zgoraj ter naj bosta X in $h : X \to A$ taka, da velja $f \circ h = g \circ h$, kar pomeni, da je $f \circ h(x) = g \circ h(x) \;\; \forall x \in X$.

To je seveda ekvivalentno temu, da je $h(x) \in E\ \forall x \in X$. Kar pa pomeni, da bo naša funkcija $h' : X \to E$ definirana kot $h'(x) = h(x)\ \forall x \in X$. Lahko se je prepričati, da je to edina funkcija, ki ustreza temu pogoju (bolj podrobna zadnji stavek?).

Velja naslednja trditev

Trditev 1.17. *Če je $e : E \to A$ del zožka, je e monomorfizem.*

Dokaz. Naj bosta $x, y : X \to E$ takšni, da velja $ex = ey$, recimo temu $z = ex = ey$. Potem po definiciji e velja $fex = gex$. Sledi, da obstaja enoličen $\hat{z} : X \to E$, da je $z = e\hat{z} = ex = ey$. To pa pomeni, da je $x = y$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[u, shift left, "x"] \arrow[u, shift right, "y"'] \arrow[u, dashed, bend left, "\hat{z}"] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

1.11.2 Kozožki

Kozožki so dualni koncept zožkov, zato lahko kar napišemo definicijo

Definicija 1.18. *Kozožek* morfizmov $f, g : A \to B$ je objekt Q in morfizem $q : B \to Q$ za katega je $q \circ f = q \circ g$, z naslednjo univezalno lastnostjo. Za vsak objekt Z in morfizem $z : B \to Z$ za kateregа velja $z \circ f = z \circ g$, obstaja enoličen morfizem $z' : Q \to Z$, da velja $z = z' \circ q$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "z"'] & Q \arrow[d, dashed, "z'"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Slednja trditev sledi iz dualnosti.

Trditev 1.19. *Če je $q : B \to Q$ del kozožka, je q epimorfizem.*

Primer 1.11.2. Kozožki so posplošitev pojma kvocientne množice definirane z ekvivalenčno relacijo. Naj bo torej A poljubna množica ter R ekvivalenčna relacija na A, kar pomeni $R \subseteq A \times A$, z naslednjimi lastnostmi

- Refleksivnost: $xRx \ \forall x \in A$
- Simetričnost: $xRy \Rightarrow yRx \ \forall x, y \in A$
- Tranzitivnost: $xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRZ \ \forall x, y, z \in A$

Potem imamo dve koordinatni projekciji $r_1 : R \to A$, $r_2 : R \to A$ inkluzije R v $A \times A$.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "r_2"] & \\ A & A \times A \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & A \end{tikzcd}$$

definirani kot $r_1(x, y) = x$ in $r_2(x, y) = y$. Potem je kvocientna projekcija $\pi : A \to A/R$ kozožek r_1 in r_2. Veljati mora $\forall (x, y) \in R : \pi r_1(x, y) = \pi r_2(x, y) \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$. Denimo nato, da je f tak, da $fr_1 = fr_2$, oz. $fr_1(x, y) = fr_2(x, y)$, kar pa pomeni, da f slika ekvivalentna elementa iz A v isti element, ker pa π ravno tako slika ekvivalentna elementa v isti element, lahko $\hat{f}$ definiramo kot $\hat{f}(\pi(x))) = f(x) = f(y) = \hat{f}(\pi(y))$. Torej je $\hat{f}$ dobro definirana. Ali je ta funkcija $\hat{f}$ edina taka? Recimo, da obstaja že neka druga $g : A/R \to X$, da zanjo velja $f = g\pi$. Potem je za xRy, $g\pi(x) = f(x) = f(y) = g\pi(y)$. Ker pa je $\hat{f}(\pi(x)) = f(x) = g\pi(x)$, je $g = \hat{f}$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & A/R \arrow[d, dashed, "\hat{f}"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

Primer 1.11.3. V topoloških prostorih tudi pogosto naletimo na situacijo kjer identificiramo neke točke med seboj in generiramo ekvivalenčno relacijo po kateri ustvarimo kvocientni prostor. Tudi to in podobni primeri lepljenja so primer kozožka. Naj bo torej X neki topološki prostor in R ekvivalenčna relacija na X. Definiramo funkcijo

$$q : X \to X/R,$$

ki jo imenujemo *kvocientna projekcija* in slika točko $x \in C$ v njen ekvivalenčni razred. Od topologije X/R zahtevamo vsaj to, da je kvocientna projekcija zvezna, kar pomeni, da smejo biti med odprtimi množicami v X/R le take množice $V \subseteq X/R$, da je $q^{-1}(V)$ odprta v X. Za definicijo kvocientne topologije vzamemo kar vse take množice. Torej velja

$$V \text{ je odprta v } X/R \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad q^{-1}(V) \text{ odprta v } X.$$

Trdimo, da je q kozožek koordinatnih projekcij r_1, r_2 ekvivalenčne relacije R. Naj bo torej $f : X \to Y$ zvezna funkcija. Potem za vsako odprto množico $U \subseteq Y$ velja $f^{-1}(U)$ je odprta v X. Iščemo tako zvezno funkcijo $\overline{f} : X/R \to Y$, da bo veljalo $f(x) = \overline{f}(q(x))$ za vsak $x \in X$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & X/R \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Da bo $\overline{f}$ zvezna mora veljati za vsako odprto $U \subseteq Y$, $\overline{f}^{-1}(U)$ odprta v X/R, iz česar sledi, da je $q^{-1}(\overline{f}-1(U))$ odprta v X. Recimo, da obstaja še neka $h : X/R \to Y$, za katero velja $f(x) = h(q(x))$. Elementi X/R so ravno ekvivalenčni razredi točk v X oz. $q(x)$ za $x \in X$. Ker velja $\overline{f}(q(x)) = h(q(x))$ za vse x, velja torej za vse elemente iz X/R, ker pa pomeni, da je $h = \overline{f}$. Funkcija q je torej res kozožek r_1 in r_2.

O kozožku si lahko mislimo, da zoži B z identifikacijo vseh parov $f(a) = f(b)$. To naredi na „najboljši“ način, tako, da vsako drugo zožanje f in g lahko speljemo skozi Q.

1.12 Povleki in potiski

1.12.1 Povlek

Definicija 1.20. Naj bosta $f : A \to C$ in $g : B \to C$ morfizma v kategoriji $\mathbf{C}$. *Povlek* f in g je objekt P z morfizmoma $p_1 : P \to A$, $p_2 : P \to B$, tako da tako imenovani „pullback kvadrat" (ustrezna terminologija?) komutira. Torej $fp_1 = gp_2$. Pri tem je P univerzalen tak objekt, kar pomeni, da za vsake X, $x_1 : X \to A$, $x_2 : X \to B$ za katere velja $fx_1 = gx_2$ obstaja enoličen morfizem $u : X \to P$ za katerega se x_1 in x_2 delita z p_1 in p_2.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "x_2"] \arrow[ddr, bend right, "x_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Z enačbami

$$x_1 = p_1 u \quad x_2 = p_2 u$$

Na prvi pogled povlek deluje podobno kot produkt A in B, a imamo še dva dodatna morfizma f in g. Ta podobnost ni slučajna.

Primer 1.12.1. Poglejmo si kako bi lahko izgledal povlek v kategoriji **Set**. Denimo, da imamo dve funkciji $f : A \to C$ in $g : B \to C$. Potrebujemo tako množico P, skupaj s funkcijama $p_1 : P \to A$, $p_2 : P \to B$. Za prvi približek vzamimo množico $A \times B$ skupaj s koordinatnima projekcijama in poglejmo kako bi jo morali popraviti, da bi izpolnjevala pogoj $fp_1 = gr_2$. Veljati bi moralo $fp_1(x, y) = gp_2(x, y) \Leftrightarrow f(x) = g(y)$. Torej v P moramo imeti samo vse pare (x, y) za katere je $f(x) = g(y)$. Definiramo $P := \{ (x, y) \in A \times B \mid f(x) = g(y) \}$, z pododovanima projekcijama, ki ju tudi poimenujemo p_1 in p_2. Preverimo če res izpolnjuje univerzalno lastnost. Denimo, da sta še $z_1 : Z \to A$ in $z_2 : Z \to B$ taki, da $fz_1 = gz_2$. Definirajmo $u : Z \to P$ kot $u(z) = (z_1(z), z_2(z))$ Situacija je takšna

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "z_2"] \arrow[ddr, bend right, "z_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Potem velja $p_1u(z) = p_1(z_1(z), z_2(z)) = z_1(z)$ in $p_2u(z) = p_2(z_1(z), z_2(z)) = z_2(z)$ za vsak $z \in Z$. Denimo sedaj, da obstaja še neka druga funkcija

$v : Z \to P$, za katero je $z_1 = p_1 v$, $z_2 = p_2 v$. Poglejmo, kaj mora veljati za funkcijo v. Naj bo $v(z) = (a, b) \in P$ za neki $z \in Z$. Veljati mora $z_1(z) = p_1 v(z) = p_1(x, y) = x$. Po drugi strani pa $z_2(z) = p_2 v(z) = p_2(x, y) = y$. Torej je $v(z) = (x, y) = (z_1(z), z_2(z))$, oziroma $v = u$.

Trditev 1.21. *Naj bo* $\boldsymbol{C}$ *kategorija z končnimi produkti in zožki. Potem* $\boldsymbol{C}$ *ima povleke.*

Dokaz. Naj bosta $f : A \to C$, $g : B \to C$ morfizma v kategoriji $\mathbf{C}$. Za prvi približek vzamemo produkt objektov A in B, ki pride opremljen z morfizmoma $\pi_1 : A \times B \to A$, $\pi_2 : A \times B \to B$. Sedaj vzemimo zožek morfizmov $f\pi_1$ in $g\pi_2$, ki ga poimenujemo $e : E \to A \times B$. Situacija je sledeča.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "e"] & & \\
& A \times B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

oziroma v skrčeni (pullback) obliki

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e\pi_2"] \arrow[d, "e\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Velja: $f\pi_1 e = g\pi_2 e$, oziroma ta kvadrat komutira. Recimo sedaj, da je X opremljen z morfizmoma $x_1 : X \to A$, $x_2 : X \to B$, tak da velja $fx_1 = gx_2$. Par morfizmov x_1, x_2 je v bistvu morfizem

$$\langle x_1, x_2 \rangle : X \to A \times B$$

za katerega velja

$$f\pi_1 \langle x_1, x_2 \rangle = g\pi_2 \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Ker pa je e zožek $f\pi_1$ in $g\pi_2$, obstaja enoličen morfizem $u : X \to E$, da velja

$$\langle x_1, x_2 \rangle = eu$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "x_2"] \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[ddr, bend right, "x_1"'] & & \\
& E \arrow[r, "e\pi_2"] \arrow[d, "e\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Ali napisano drugače

$$x_1 = \pi_1 eu, \quad x_2 = \pi_2 eu$$

Kar pa pomeni ravno, da je E, skupaj z morfizmoma $e\pi_1$, $e\pi_2$ ravno povlek f in g. □

Iz trditve vidimo, da je v povleku zakodirana vsa informacija, ki jo imata produkt ter zožek. Kot bomo videli, so vsi trije konstrukti primeri splošnejšega pojma, ki mu pravimo limita.

1.12.2 Potiski

Definicja potiska je seveda dualna definiciji povleka in jo lahko kar napišemo.

Definicija 1.22. Naj bosta $f : C \to A$ in $g : C \to B$ morfizma v kategoriji **C**. *Potisk* f in g je objekt Q skupaj z morfizmoma $q_1 : A \to Q$, $q_2 : B \to Q$, tako da diagram

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "q_2"] \\
A \arrow[r, "q_1"'] & Q
\end{tikzcd}$$

komutira. Ta konstrukcija ima univerzalno lastnost, da za vsak objekt Z z morfizmoma $z_1 : A \to Z$, $z_2 : B \to Z$ za katera velja

$$z_1 f = z_2 g$$

obstaja enolično določen morfizem $v : Q \to Z$, da naslednji diagram komutira.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "q_2"] \arrow[ddr, bend left, "z_2"] & \\
A \arrow[r, "q_1"'] \arrow[drr, bend right, "z_1"'] & Q \arrow[dr, dashed, "v"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

ali z enačbami

$$z_1 = vq_1, \quad z_2 = vq_2.$$

Naravna ideja kako se potisk udejanja v kategoriji **Set** je, da je tako povezan s koprodukti in kozožki, kot je povlek povezan s produkti in zožki.

Primer 1.12.2. Recimo, da imamo dve funkciji v **Sets**

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\
B &
\end{tikzcd}$$

Naj bo $B + C$ koprodukt B in C. Sedaj identificiramo tiste elemente $b \in B$ in $c \in C$, za katere obstaja neki ta $a \in A$, da velja

$$f(a) = b \quad \text{in} \quad g(a) = c.$$

To nam generira ekvivalenčno relacijo $\sim$ na $B+C$ glede na pogoj $f(a) \sim g(a)$ za vse $a \in A$. Če vzamemo kvocientno množico glede na to ekvivalenčno relacijo $B + C/\sim$, dobimo potisk $B +_A C$. Ta konstrukcija je v veliki meri dualna tisti za povleke v **Sets**, kar pa niti ni presenetljivo.

1.13 Limite, kolimite in eksponenti

1.13.1 Limite

Konstrukcije, ki smo jih do sedaj videli imajo med seboj nekaj skupnega, in sicer pri vseh imamo neko posebno konfiguracijo objektov in morfizmov in proizvedemo neki objekt, ki je povezan s to konfiguracijo z neko univerzalno lastnostjo. Je „najboljši“ tak objekt, ki ustreza pogojem komutativnosti, ki jih ta konstrukcija predstavlja. Do sedaj smo to konfiguracijo poimenovali diagram. Pa definirajmo pojem diagrama bolj točno.

Definicija 1.23. *Diagram oblike* $\mathbf{J}$ v kategoriji $\mathbf{C}$ je funktor $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$. Kjer $\mathbf{J}$ pravimo tudi *indeksna* kategorija. Objekte v indeksni kategoriji označujemo z $i, j, \dots$ in vrednosti funktorja $D_i, D_j, \dots$
Stožec nad diagramom D je objekt C v $\mathbf{C}$ skupaj z družino morfizmov $c_i : C \to D_i$ iz $\mathbf{C}$ za vsak objekt $i \in \mathbf{J}$, tako da za vsak morfizem $\alpha : i \to j$ v $\mathbf{J}$ naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_i"'] \arrow[dr, "c_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_j \end{tikzcd}$$

ali z enačbami

$$c_j = D_\alpha \circ c_i$$

Morfizem stožcev $\vartheta : (C, c_i) \to (C', c'_i)$ je morfizem $\vartheta : C \to C'$ v $\mathbf{C}$, tako, da za vsak $i \in \mathbf{J}$ naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "c_i"'] & C' \arrow[d, "c'_i"] \\ & D_i \end{tikzcd}$$

oz.

$$c_i = c'_i \vartheta$$

Tako dobimo novo kategorijo $\mathbf{Cone}(D)$ stožcev na D.

Diagrame D si lahko predstavljamo kot „slike oblike $\mathbf{J}$“ v $\mathbf{C}$. Poglejmo si to na majhnem primeru. Kaj se zgodi na primer, če za $\mathbf{J}$ vzamemo na primer diskretno kategorijo z dvemi elementi $\mathbf{J} = \{1, 2\}$. Stožec nad diagramom $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ sestoji iz objekta C in dveh morfizmov $c_1 : C \to D_1$, $c_2 : C \to D_2$.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\ D_1 & & D_2 \end{tikzcd}$$

Morfizem stožcev $\vartheta : (C, c_i) \to (C', c_i')$ zgleda kot

$$\begin{tikzcd}
 & C' \arrow[dl, "c_1'"'] \arrow[d, "\vartheta"] \arrow[dr, "c_2'"] & \\
D_1 & C \arrow[l, "c_1"] \arrow[r, "c_2"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

da trikotnika komutirata, ali $c_1' = c_1\vartheta$, $c_2' = c_2\vartheta$.

Definicija 1.24. *Limita* nad diagramom $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ je končni objekt v kategoriji stožcev nad D $\mathbf{Cone}(D)$. Limito diagrama označujemo kot

$$\lim_{i \in \mathbf{J}} D_i$$

(mogoče rajši samo $\lim D$) z morfizmi $p_i : \lim D \to D_i$.

Če v celoti napišemo univerzalno lastnost, ki jo ima limita nad D, pravi, da za vsak drug stožec (C, c_i) v $\mathbf{Cone}(D)$ obstaja enoličen morfizem $u : C \to \lim D$, tako da za vse $i \in \mathbf{J}$ velja $c_i = p_i \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, dashed, "u"] \arrow[dr, "c_i"'] \arrow[drrr, "c_j"] & & \lim D \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
 & D_i \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_j
\end{tikzcd}$$

Limito si lahko torej predstavljamo kot „najbližji“ stožec diagramu D, kajti vsi drugi stožci morajo „iti skozi“ limito. Limita nekega diagrama ne obstaja nujno. Če obstaja limita za vsak diagram $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ za neko indeksno kategorijo $\mathbf{J}$ pravimo, da $\mathbf{C}$ *ima limite tipa* $\mathbf{J}$.

Primer 1.13.1. Nadaljujmo s primerom za diagrame iz diskretne kategorije na dveh objektih, ki jo poimenujmo kot zgoraj z $\mathbf{J}$. Kaj je limita nad $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$. To je tak objekt $\lim D$ z morfizmi $p_1 : \lim D \to D_1$, $p_2 : \lim D \to D_2$, da za vsak objekt X opremljen z morfizmoma $x_1 : X \to D_1$, $x_2 : X \to D_2$, obstaja enoličen morfizem $u : X \to \lim D$, da naslednja trikotnika komutirata

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\ D_1 & \lim D \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & D_2 \end{tikzcd}$$

V tem diagramu pa lahko spoznamo ravno univerzalno lastnost produkta objektov D_1 in D_2. Torej kategorija $\mathbf{C}$ ima limite tipa $\mathbf{J}$ natanko takrat, ko ima binarne produkte.

Primer 1.13.2. Poskusimo še z bolj enostavno indeksno kategorijo. Naj bo $\mathbf{J}$ prazna kategorija brez objektov in brez puščic. Potem obstaja natanko en diagram $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$, ki nobenega objekta ne pošlje nikamor. Limita $\lim D$ nad tem diagramom je objekt, brez dodatnih morfizmov, da za vsak drug objekt C obstaja natanko en morfizem $u : C \to \lim D$, da nič dodatnega ne komutira. Ta limita je torej natanko *končni objekt* v $\mathbf{C}$.

Primer 1.13.3. Naj bo $\mathbf{J}$ enaka kategoriji $\mathbf{1} = \{*\}$ z enim objektom in enim morfizmom. Stožec nad diagramom $D : \mathbf{1} \to \mathbf{C}$ je objekt C skupaj z morfizmom $c : C \to D$ (abuse notacije, dovolj razumljivo ?). Limita nad D je objekt $\lim D$ z morfizmom $p : \lim D \to D$, da za vsak drug stožec (C, c) obstaja enoličen morfizem $u : C \to \lim D$, da trikotnik

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, dashed, "u"] \arrow[dr, "c"'] & & \lim D \arrow[dl, "p"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

komutira. V tej situaciji lahko razpoznamo rezinsko kategorijo $\mathbf{C}/D$ nad objektom $D = D(*)$. Limita $\lim D$ je končni objekt v tej kategoriji.

Kot pri vseh primerih limiti, ki smo jih spoznali do sedaj velja trditev o enoličnosti, ki nam pove, da ko smo enkrat našli limito, smo že našli „ta pravo“, saj je vsaka druga izomorfna tej.

Trditev 1.25. *Limite so enolične do izomorfizma natančno.*

Dokaz. Naj bosta L in I limiti za diagram $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$, za neko indeksno kategorijo $\mathbf{J}$. Ker je L limita na D je tudi stožec nad D, kar pomeni, da obstaja enoličen morfizem $v : I \to L$. Obratno ker je I stožec nad D obstaja enoličen morfizem $u : L \to I$. To pa pomeni, da je $v \circ u$ enoličen morfizem $L \to L$, kar pomeni, da sta u in v izomorfizma in sta L in I izomorfna objekta. □

Definicija 1.26. Za kategorijo $\mathbf{C}$ pravimo, da je *kompletna*, če ima vse majhne limite, kar pomeni, da za vsako majhno indeksno kategorijo $\mathbf{J}$ in diagram $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ obstaja limita $\lim_{j\in J} D_j$ v $\mathbf{C}$.

1.13.2 Kolimite

Kot smo tega že vajeni, so limite dualen pojem limit. In tako kot limite posplošijo konstrukcije produktov, zožkov, povlekov,... Ravno tako kolimite posplošijo konstrukcije koproduktov, kozožkov, potiskov.

Definicija 1.27. (Direktna definicija)
Kolimita nad diagramom $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ je začetni objekt v kategoriji kostožcev nad D.

Primeri kolimit so torej pričakovani in dualni primerom limit. Na primer za diskretno indeksno kategorijo z dvemi objekti je kolimita nad diagramom iz te kategorije enaka koproduktu slikama objektov. Kolimita iz indeksne kategorije z enim objektom in enim morfizmom je začetni objekt.

Definicija 1.28. Dualno kot za limite, za kolimite poznamo pojem *kokompletnosti*, kar pomeni, da ima za poljubno majhno indeksno kategorijo J, vsak diagram $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ kolimito $\mathrm{colim}_{j\in J} D_j$ v $\mathbf{C}$.

1.13.3 Eksponenti

Definicija 1.29. Naj ima kategorija $\mathbf{C}$ binarne produkte. *Eksponent* objektov B in C sestoji iz objekta

$$C^B$$

in morfizma

$$\epsilon : C^B \times B \to C$$

imenovanega *evaluacija*, takega, da za vsak objekt A in morfizem

$$f : A \times B \to C$$

obstaja enoličen morfizem

$$\widetilde{f} : A \to C^B$$

tako da velja

$$\epsilon \circ (\widetilde{f} \times 1_B) = f$$

kar lahko vidimo v spodnjem diagramu.

$$\begin{tikzcd}
C^B & C^B \times B \arrow[r, "\epsilon"] & C \\
A \arrow[u, dashed, "\widetilde{f}"] & A \times B \arrow[u, "\widetilde{f} \times 1_B"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Tu morfizmu $\widetilde{f}$ pravimo *transponiranka* od f.

Za vsak morfizem

$$g : A \to B^C$$

pišemo

$$\overline{g} := \epsilon \circ (g \times 1_B) : A \times B \to C$$

in morfizem $\overline{g}$ tudi imenujemo *transponiranka* od g. Po enoličnosti iz definicije potem velja

$$\widetilde{\overline{g}} = g$$

Velja pa tudi

$$\overline{\widetilde{f}} = f$$

za vsak $f : A \times B \to C$.

Primer 1.13.4. Naj bosta množici v **Sets**. Definirajmo množico $D^C := \{ g : C \to D \}$ vseh funkcij od C do D. Definirajmo tudi funkcijo $\epsilon : D^C \times C \to D$ s predpisom $\epsilon(g, c) = g(c)$.

Naj bo sedaj A poljubna množica in $f : A \times C \to D$ poljubna funkcija. Da bo množica D^C res eksponent množic C in D mora obstajati taka enolična funkcija $\widetilde{f} : A \to D^C$, da velja enakost $f = \epsilon \circ (\widetilde{f} \times 1_C)$, kar pomeni, da je

$$f(a, c) = \epsilon \circ (\widetilde{f} \times 1_C)(a, c) = \epsilon(\widetilde{f}(a), c) = \widetilde{f}(a)(c)$$

za vsak $(a, c) \in A \times C$. Preverimo še, da je tako definiran $\widetilde{f}$ res enolična izbira. Denimo, da obstaja še ena taka funkcija h, da velja $f = \epsilon \circ (h \times 1_C)$. Veljati mora

$$\epsilon \circ (h \times 1_C)(a, c) = \epsilon(h(a), c) = h(a)(c) = \widetilde{f}(a)(c).$$

Ker pa to velja za poljuben $(a, c) \in A \times C$, sta si funkciji $\widetilde{f}$ in h enaki.

Eksponentni objekt dveh množic je torej ravno množica vseh morfizmov med njima. Ta pojem smo že srečali pod imenom Hom-sets. Eksponente v neki kategoriji si lahko torej predstavljamo kot neke vrste posplošeno množico vseh funkcij med dvema objektoma.

1.14 Funktorji in naravne transformacije

1.14.1 Morfizmi med kategorijami

Neuradni moto teorije kategorij bi se lahko glasil *puščice so bistvene*, kar bi pomenilo, da nas ponavadi ne zanima toliko kaj točno so objekti v neki specifični kategoriji temveč kaj se dogaja s puščicami med njimi.

Funktorji kot vemo so morfizmi v kategoriji **Cat** in kot taki so lahko monomorfizmi ali epimorfizmi. Ker lahko na monomorfizme gledamo kot na posplošene podmnožice, pravimo monomorfizmu v **Cat** *podkategorija*. Za funktorje pa poznamo tudi druge klasifikacije, ki so pogosto uporabne

Definicija 1.30. Za funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ pravimo, da je

- *Injektiven na objektih*, če je morfizem objektov $F_0 : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{D}_0$ injektivna, oziroma, da je *surjektiven na objektih*, če je F_0 surjektivna.
- *Injektiven/surjektiven na morfizmih*, če je F_1 injektive/asurjektivna.
- *Poln*, če je za vsaka objekta $A, B \in \mathbf{C}$
$$F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$$
surjektivna.
- *Zvest*, če je za vsaka $A, B \in \mathbf{C}$
$$F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$$
injektivna.

Primer 1.14.1. Poglejmo si zakaj tej pojmi niso med seboj ekvivalentni. Naj bo $\mathbf{C}$ kategorija in naj bo $\nabla : \mathbf{C} + \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ kodiagonalni funktor, torej tak, ki obe „kopiji“ pošlje v „original“.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "1_C"'] & C + C \arrow[d, "\nabla"] & C \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "1_C"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Pokažimo, da je ta funktor zvest, ni pa injektiven na morfizmih. Za vsak morfizem $f : A \to B$ v $\mathbf{C}$ obstajata v $\mathbf{C} + \mathbf{C}$ dva distinktna morfizma $\iota_1(f)$ in $\iota_2(f)$, ki ju ∇ oba slika v isti morfizem, torej očitno ni injektiven na morfizmih. Obratno, za vsaka dva objekta A, B v $\mathbf{C} + \mathbf{C}$ med njima obstaja morfizem, le če sta objekta v isti kopiji kategorije $\mathbf{C}$ in obstaja tak morfzem že v $\mathbf{C}$. V tem primeru ga ∇ slika v „isti“ morfizem.

1.14.2 Morfizmi med funktorji

Radi bi nadaljevali temo posploševanja morfizmov in ker smo nazadnje definirali morfizme med kategorijami, se naravno pojavi vprašanje, ali lahko definiramo morfizme med temi morfizmi. Odgovor je pozitiven in nas pripelje do naslednje definicije.

Definicija 1.31. Naj bosta $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ poljubni kategoriji in naj bosta $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funktorja med tema kategorijama.
Naravna transformacija $\vartheta : F \Rightarrow G$ iz F v G, je družina puščic

$$(\vartheta_C : FC \to GC)_{C \in \mathbf{C}}$$

tako, da za vsako puščico $f : C \to D$ naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\vartheta_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & GC \arrow[d, "G(f)"] \\ FD \arrow[r, "\vartheta_D"'] & GD \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

komutira

Pogosta situacija kjer srečamo naravne transformacije je sledeča. Recimo, da imamo neko „konstrukcijo“ v neki kategoriji $\mathbf{C}$ in še neko drugo „konstrukcijo“ in ti dve „konstrukciji“ sta povezani na način, ki je neodvisen od specifičnih objektov in morfizmov v tej kategorji. Povezava je v resnici med „konstrukcijama“.

Primer 1.14.2. Na primer denimo, da ima $\mathbf{C}$ produkte in za neke objekte $A, B, C \in \mathbf{C}$ poglejmo produkta

$$(A \times B) \times C \quad \text{in} \quad A \times (B \times C)$$

Ne glede na izbiro objektov A, B, C obstaja izomorfizem

$$h : (A \times B) \times C \xrightarrow{\sim} A \times (B \times C)$$

Kaj pa pomeni, da je ta izomorfizem neodvisen od izbranih objektov ? Za neki morfizem $f : A \to A'$ dobimo komutativen kvadrat

$$\begin{tikzcd}
(A \times B) \times C \arrow[r, "h_A"] \arrow[d] & A \times (B \times C) \arrow[d] \\
(A' \times B) \times C \arrow[r, "h'_A"'] & A' \times (B \times C)
\end{tikzcd}$$

Torej v resnici imamo izomorfizem med konstrukcijama

$$(- \times B) \times C \cong - \times (B \times C)$$

Ti konstrukciji pa sta v resnici samo funktorja $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ in naš izomorfizem med konstrukcijama je v resnici torej naravna transformacija med tema funktorjema. Seveda lahko ta dva funktorja razširimo do funktorjev v vseh treh argumentih

$$(- \times -) \times - : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$$

in

$$- \times (- \times -) : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$$

med katerima tudi obstaja naravna transformacija.

Primer 1.14.3. Naj bo $\mathbf{C}$ kategorija s produkti. Poglejmo si funktorja

$$\times : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$$
$$\bar{\times} : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$$

kjer je $\times$ običajen produkt in je $\bar{\times}$ definiran na objektih kot

$$A \bar{\times} B = B \times A$$

in na morfizmih

$$\alpha \bar{\times} \beta = \beta \times \alpha$$

Definiramo naravno transformacijo $t : \times \to \bar{\times}$ kot

$$t_{(A,B)} \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$$

za posplošene elemente $\langle a, b \rangle : Z \to A \times B$. Da kvadrat

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "t_{(A,B)}"] \arrow[d, "\alpha \times \beta"'] & B \times A \arrow[d, "\beta \times \alpha"] \\
A' \times B' \arrow[r, "t_{(A',B')}"'] & B' \times A'
\end{tikzcd}$$

komutira pa mora za vsak posplošen element $\langle a, b\rangle$ veljati

$$\begin{aligned}(\beta \times \alpha)(t_{(A,B)}\langle a, b\rangle) &= (\beta \times \alpha)\langle b, a\rangle \\ &= \langle \beta b, \alpha a\rangle \\ &= t_{(A',B')}\langle \alpha a, \beta b\rangle \\ &= t_{(A',B')}(\alpha \times \beta)\langle a, b\rangle\end{aligned}$$

ker pa velja po definiciji t. Torej je to res naravna transformacija.

Definicija 1.32. *Funktorska kategorija* $\mathrm{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ ima za

- **Objekte**: Funktorje $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$
- **Morfizme**: Naravne transformacije $\vartheta : F \to G$

Za vsak objekt F ima naravna transformacija 1_F komponente

$$(1_F)_C = 1_F C : FC \to FC$$

in kompozitum naravnih transformacij $F \xrightarrow{\vartheta} G \xrightarrow{\varphi} H$ ima za komponente

$$(\varphi \circ \vartheta)_C = \varphi_C \circ \vartheta_C$$

Primer 1.14.4. Naj bo S stožec za diagram $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$. V resnici je to samo objekt, za stožec so potrebni še morfizmi $s_i : S \to D_i$ za vsak $i \in \mathbf{J}$. Imamo torej družino morfizmov za vsak objekt v neki kategoriji, tako da vse kar mora komutira. To zelo spominja na definicijo naravne transformacije, le da imamo tu opravka z komutirajočimi trikotniki.

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "s_i"'] \arrow[dr, "s_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_j \end{tikzcd}$$

Ampak, vsak tak trikotnik lahko razširimo do kvadrata

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "1_S"] \arrow[d, "s_i"'] & S \arrow[d, "s_j"] \\ D_i \arrow[r, "D_\alpha"'] & D_j \end{tikzcd}$$

Gre torej za naravno transformacijo iz konstantnega funktorja, ki pošlje vse objekte v S in vse morfizme v 1_S.

Poglavje 2

Pomembne trditve in definicije

Najprej predstavimo definicijo, ki nam bo omogočala definirati razred kategorij, s katerimi se bomo ukvarjali v povezavi z Yonedovo lemo in v njih veljajo neke posebej lepe stvari.

Definicija 2.1. Kategorija $\mathbf{C}$ je *majhna*, če sta tako kolekcija objektov, kot kolekcija morfizmov množici.

Definicija 2.2. Kategorija $\mathbf{C}$ je *lokalno majhna*, če je kolekcija morfizmov med vsakima dvema objektoma množica.

Opomba. To torej pomeni, da imamo definiran funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to$ **Sets**, za vsaka dva objekta iz $\mathbf{C}$.

Trditev 2.3. *Kategorija ime vse končne limite natanko takrat, ko ima vse končne produkte in zožke.*

To da ima kategorija končne limite pomeni, da ima vsak končni diagram $D : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{C}$ limito v $\boldsymbol{C}$.

Dokaz. Če ima kategorija vse limite, potem ima očitno tudi produkte in zožke, saj sta to posebna primera limit. Bolj zanimiv del te trditve je njen obrat.

Naj bo $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ diagram v $\mathbf{C}$. Iščemo objekt v $\mathbf{C}$, ki ima morfizme do vsakega izmed D_i. Kot prva ideja je to produkt

$$\prod_{i \in \mathbf{J}} D_i,$$

ki ima projekcije do vsakega D_i. Na žalost tej morfizmi ne komutirajo glede na morfizme v $\mathbf{J}$. Radi bi še da za vsak $\alpha : j \to k$ v $\mathbf{J}$ diagram

$$
\begin{tikzcd}
& \prod_{i\in\mathbf{J}} D_i \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_k"] & \\
D_j \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_k
\end{tikzcd}
$$

komutira. Za to pogledamo še produkt

$$\prod_{\alpha\in Arr(\mathbf{J})} D_{cod(\alpha)}$$

po vseh morfizmih v $\mathbf{J}$ in dva morfizma

$$\prod_i D_i \overset{\phi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_\alpha D_{cod(\alpha)}$$

ki ju definiramo glede na njun kompozitum s projekcijami π_α iz drugega produkta, specifično

$$\pi_\alpha \circ \phi = \phi_\alpha = \pi_{cod(\alpha)}$$
$$\pi_\alpha \circ \psi = \psi_\alpha = D_\alpha \circ \pi_{dom(\alpha)}$$

Da dobimo limito, vzamemo zožek teh dveh morfizmov

$$E \xrightarrow{e} \prod_i D_i \overset{\phi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_\alpha D_{cod(\alpha)}$$

in definiramo $e_i = \pi_i \circ r$. Da pokažemo da je to res limita, vzamemo poljuben morfizem $c : C \to \prod_i D_i$ in pišemo $c = \langle c_i \rangle$ za $c_i = \pi_i \circ c$. Družina morfimov $(c_i : C \to D_i)_{i\in\mathbf{J}}$ je stožec nad D natanko takrat ko velja $\psi \circ c = \phi \circ c$, kajti

$$\phi\langle c_i \rangle = \psi\langle c_i \rangle$$

natanko tedaj, ko je za vsak α

$$\pi_\alpha\phi\langle c_i \rangle = \pi_\alpha\psi\langle c_i \rangle$$

Velja pa,

$$\pi_\alpha\phi\langle c_i \rangle = \phi_\alpha\langle c_i \rangle = \pi_{cod(\alpha)}\langle c_i \rangle = c_{cod(\alpha)}$$

ter

$$\pi_\alpha\psi\langle c_i \rangle = \psi_\alpha\langle c_i \rangle = D_\alpha \circ \pi_{dom(\alpha)}\langle c_i \rangle = D_\alpha \circ c_{dom(\alpha)}$$

Sledi, da je (E, e_i) res stožec in da vsak stožec $(c_i : C \to D_i)$ porodi morfizem $\langle c_i \rangle : C \to \prod_i D_i$ da velja $\phi\langle c_i \rangle = \psi\langle c_i \rangle$, torej obstaja enolična faktorizacija $\langle c_i \rangle$ skozi E.

□

Posledica 2.3.1. *Kateogrija ima vse končne kolimite natanko takrat, ko ima vse končne koprodukt in kozožke*

Dokaz. Dualnost. □

Posledica 2.3.2. *Kategorija **Sets** je kompletna in kokompletna*

Dokaz. Sledi iz dejstva, da ima **Sets** produkte, koprodukte, zožke in kozožke, katerih obstoj je bil dokazan s konstrukcijo skozi primere. □

Trditev 2.4. *Predstavljivi funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$ *ohranja vse limite.*

Dokaz. Po trditvi 2.3 je potrebno pokazati le, da Hom funktor ohranja produkte in zožke.

- Za končni objekt 1 v $\mathbf{C}$ je $\mathrm{Hom}(C, 1) \cong \{*\} \cong 1$ tudi končni objekt v **Sets**
- Za binarni produkt $X \times Y$ v $\mathbf{C}$ definiramo morfizem

  $$h : \mathrm{Hom}(C, X \times Y) \to \mathrm{Hom}(C, X) \times \mathrm{Hom}(C, Y)$$

  kot $h(f : C \to X \times Y) = \langle \pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f \rangle$, ki po univerzalni lastnosti produkta določa enoličen izomorfizem.
- Podobno kot za binarne produkte naredimo za splošne produkte

  $$\mathrm{Hom}(C, \prod_i X_i) \cong \prod_i \mathrm{Hom}(C, X_i)$$

- Naj bo sedaj

  $$E \xrightarrow{e} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

  zožek v $\mathbf{C}$, ki nam poda diagram

  $$\mathrm{Hom}(C, E) \xrightarrow{e_*} \mathrm{Hom}(C, X) \underset{g_*}{\overset{f_*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(C, Y)$$

  v **Sets**. Da pokažemo, da je to zožek, vzemimo neki $h \in \mathrm{Hom}(C, X)$ z $f_* h = g_* h$. Potem velja $fh = gh$, torej obstaja enoličen $u : C \to E$, tako da je $eu = h$. Imamo torej enoličen $u \in \mathrm{Hom}(C, E)$ z $e_* u = eu = h$. Torej je $e_* : \mathrm{Hom}(C, E) \to \mathrm{Hom}(C, X)$ res zožek f_* in g_*.

□

Posledica 2.4.1. *Kontravariantni predstavljivi funktor* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(-, C) : \boldsymbol{C}^{op} \to$ ***Sets*** *ohranja vse kolimite*

Trditev 2.5. $\mathrm{Hom}(A, C^B) \cong \mathrm{Hom}(A \times B, C)$

Dokaz. Sledi iz definicije eksponenta in transponiranja. □

Poglavje 3

Yonedova lema

V glavni temi diplomske bomo govorili o lemi, ki nam za vsako (dovolj lepo) kategorijo $\mathbf{C}$ poda vložitev v kategorijo predsnopov $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$, ki je v nekem smislu precej lepa kateogrija, kajti kot bomo videli je ta kategorija kartezično zaprta ima vse kolimite. Podamo lahko analogijo z vložitvijo realnih števil $\mathbb{R}$, kjer obstajajo polinomi, ki nimajo rešitve v tej množici, n primer polinom $p(x) = x^2 + 1$ v kompleksna števila $\mathbb{C}$, kjer pa ima vsak polinom rešitev. To v tem primeru storimo na najbolj ekonomičen, oziroma naraven način. Ravno tako bomo videli, da je vložitev kategorije $\mathbf{C}$ v funktorsko kategorijo $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ naravna.

3.1 Yonedova vložitev

Naj bo $\mathbf{C}$ lokalno majhna kategorija. Potem vemo, da imamo za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ definiran kontravariantni funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, C) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$$

Ker lahko ta objekt C izbiramo poljubno imamo v resnici funktor, ki ga označimo z y

$$y(C) = \mathrm{Hom}(-, C)$$

Opravka imamo z kovariantnim funktorjem

$$y : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$$

saj imamo v resnici opravka z transponiranim bifunktorjem

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$$

Definicija 3.1. *Yonedova vložitev* je funktor $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ za $C \in \mathbf{C}$ je

$$y(C) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, C) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Sets}$$

in za puščice $f : C \to D$

$$y(f) := \mathrm{Hom}(-, f) : \mathrm{Hom}(-, C) \to \mathrm{Hom}(-, D)$$

Kasneje bomo pokazali, da je funktor y res vložitev. Funktorju pravimo *vložitev*, če je zvest poln in injektiven na objektih.

3.2 Yonedova lema

Prof. Yoneda was born on 28 March, 1930. He studied mathematics in the University of Tokyo

Profesor Nobuo Yoneda se je rodil 28 marca, leta 1930. Matematiko je študiral na univerzi v Tokiu. V času njegovega študija je Tokijško univerzo obiskal prof. Samuel Eilenberg in Yoneda je z njim potoval po Japonski kot vodič in prevajalec. Kasneje je pridobil Fulbrightovo štipendijo in obiskal Princeton kjer je študiral pod Eilenbergom. Kmalu po tem ko je Yoneda prispel v Princeton je Eilenberg odpotoval v Francijo, kar je po enem letu storil tudi Yoneda. V tem času je Saunders Mac Lane obiskoval ljudi v povezavi s knjigo, ki jo je pisal o teoriji kategorij in na ta način spoznal mladega Yonedo. Njun intervju se je začel v Caf'e at Gare du Nord in trajal vse do odhoda Yonedovega vlaka. Vsebino tega pogovora je Mac Lane poimenoval kot Yonedova lema.

Glavna ideja Yonedove leme je v tem, da je za opis kontravariantnih funktorjev v **Sets** dovolj poznati le delovanje predstavljivih funktorjev, saj lahko z njimi izrazimo poljuben drug funktor, na naraven način. Poglejmo točno formulacijo.

Izrek 3.2 (Yonedova lema)**.** *Naj bo* $\boldsymbol{C}$ *lokalno majhna kategorija. Potem za vsak objekt* $C \in \mathbf{C}$ *in funktor* $F : \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Sets}$ *velja*

$$\mathrm{Hom}(yC, F) \cong FC$$

In ta izomorfizem je naraven tako v C kot v F, kar pomeni, da za $f : C \to D$

naslednji diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(yC, F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(yf,F)"'] & FC \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Hom}(yD, F) \arrow[r, "\cong"'] & FD
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

komutira ter za naravno transformacijo $\varphi : F \Rightarrow G$ *naslednji diagram*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(yC, F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(yC,\varphi)"'] & FC \arrow[d, "\varphi_C"] \\
\mathrm{Hom}(yC, G) \arrow[r, "\cong"'] & GC
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

komutira.
Opomba: $\mathrm{Hom}(yC, F)$ *je množica naravnih transformacij med funktorjema* $yC, F : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$, *oz.* $\mathrm{Hom}(yC, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(yC, F) = Nat(yC, F)$.

Dokaz. Poglejmo, kaj mora veljati za neko naravno transformacijo $\vartheta : yC \Rightarrow F$, ki je v bistvu družina puščic $(\vartheta_D : yC(D) \to F(D))_{D \in \mathbf{C}}$. Te puščice morajo izpolnjevati naturalnostni pogoj, da za vsako puščico $f : D \to C$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(C, C) \arrow[r, "\vartheta_C"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f,C)"'] & FC \arrow[d, "\mathrm{F(f)}"] \\
\mathrm{Hom}(D, C) \arrow[r, "\vartheta_D"] & FD
\end{tikzcd}$$

komutira. Torej mora veljati

$$(F(f) \circ \vartheta_C)(g) = (\vartheta_D \circ \mathrm{Hom}(f, C))(g)$$

za vsak $g \in \mathrm{Hom}(C, C)$. En tak g je identitetna puščica na C, oz. $1_C : C \to C$. Torej mora veljati enakost:

$$\begin{aligned}
\underline{F(f) \circ \vartheta_C(1_C)} &= \vartheta_D \circ \mathrm{Hom}(f, C)(1_C) = \\
\vartheta_D \circ \mathrm{Hom}(f, C)(1_C) &= \vartheta_D \circ ({}_{-} \circ f)(1_C) = \vartheta_D \circ (1_C \circ f) = \underline{\vartheta_D(f)}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Torej vidimo, da je vrednost komponente za ϑ v D določena že s tem, kam slika ϑ_C puščico 1_C.
Naj bo z $\alpha_{C,F} : \mathrm{Hom}(yC, F) \to FC$ označen želeni izomorfizem.
Definiramo torej za naravno transformacijo $\vartheta \in \mathrm{Hom}(yC, F)$

$$\alpha_{C,F}(\vartheta) := \vartheta_C(1_C) \tag{3.4}$$

Označimo:

$$\boxed{\alpha_{C,F}(\vartheta) = \widehat{\vartheta}} \tag{3.5}$$

In za vsak element $a \in FC$ definirajmo naravno transformacijo $\vartheta_a \in \mathrm{Hom}(yC, F)$ po komponentah, in sicer:

$$(\vartheta_a)_D : yC(D) \to F(D) \tag{3.6}$$

$$(\vartheta_a)_D(f : D \to C) := F(f)(a) \tag{3.7}$$

Označimo:

$$\boxed{\alpha^{-1}_{C,F}(a) = \widetilde{a}} \tag{3.8}$$

Sedaj je potrebno preveriti, da tako definirana preslikava res ustreza pogojem izreka.

Najprej preverimo, da sta si predpisa vzajemno inverzna.
Torej, da za vsak $\vartheta \in \mathrm{Hom}(yC, F)$ velja:

$$\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \vartheta$$

in za vsak $a \in FC$ velja

$$\widehat{\widetilde{a}} = a$$

1.) $\widehat{\vartheta} = \vartheta_C(1_C) \in FC$.
Potem je $\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \eta_{\widehat{\vartheta}} \in \mathrm{Hom}(yC, F)$. Poglejmo kako ta naravna transformacija deluje na puščicah. Naj bo $f : D \to C$

$$\begin{aligned} (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D : yC(D) &\to FD \\ f &\xmapsto{def} Ff(\widehat{\vartheta}) \end{aligned}$$

In velja

$$\begin{aligned} Ff(\widehat{\vartheta}) &= Ff(\vartheta_C(1_C)) = \vartheta_D(f) \\ \Longrightarrow &\forall f \in \mathbf{C}_1 : (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D(f) = \vartheta_D(f) \\ \Longrightarrow &\forall D \in \mathbf{C} : (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D = \vartheta_D \\ \Longrightarrow &\eta_{\widehat{\vartheta}} = \vartheta \implies \underline{\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \vartheta} \end{aligned}$$

2.)

$$\widetilde{a} = \vartheta_a : yC \Rightarrow F$$

In velja

$$\begin{aligned} (\vartheta_a)_D : yC(D) &\to FD \\ f &\mapsto F(f)(a) \end{aligned}$$

Torej

$$\widehat{\widetilde{a}} = (\vartheta_a)_C(1_C) = F(1_C)(a) = 1_{F(C)}(a) = a$$

Sedaj moramo še pokazati, da sta zadoščena naravna pogoja:
Naj bo $f : C \to D$ in naj bo $\vartheta \in \mathrm{Hom}(yC, F)$.
Pokazali bi radi:

$$Ff \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \alpha_{D,F} \circ Hom(yf, F)(\vartheta) \tag{3.9}$$

Velja pa:

$$Ff \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \underline{Ff(\vartheta_C(1_C))}$$

In po drugi strani:

$$\begin{aligned} \alpha_{D,F} \circ \mathrm{Hom}(yf, F)(\vartheta) = \alpha_{D,F}(\vartheta \circ yf) = \\ (\vartheta \circ yf)_D(1_D) = \vartheta_D \circ yf_D(1_D) = \\ \vartheta_D(f \circ 1_D) = \underline{\vartheta_D(f)} \end{aligned}$$

Enakost 3.3 pa nam pove ravno da je $Ff(\vartheta_C(1_C)) = \vartheta_D(f)$ To pa pomeni ravno, da diagram 3.1 komutira.

Kaj pa drugi diagram. Naj bo $\varphi : F \Rightarrow G$ naravna transformacija med funktorjema $F, G : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$.
Veljati mora enakost:

$$\varphi_C \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \alpha_{C,G} \circ \mathrm{Hom}(yC, \varphi)(\vartheta)$$

Imamo:

$$\varphi_C \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \underline{\varphi_C(\vartheta_C(1_C))}$$

In za desno stran:

$$\alpha_{C,G} \circ \mathrm{Hom}(yC, \varphi)(\vartheta) = \alpha_{C,G}(\varphi \circ \vartheta) = (\varphi \circ \vartheta)_C(1_C) = \varphi_C \circ \vartheta_C(1_C) = \underline{\varphi_C(\vartheta_C(1_C)}$$

Torej diagram 3.2 tudi komutira.

□

3.3 Posledice Yonedove leme

Takoj dobimo posledico, ki upraviči poimenovanje funktorja y vložitev

Posledica 3.2.1. *Funktor $y : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ je poln in zvest.*

Dokaz. Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ je zvest, če je za vsaka $A, B \in \mathbf{C}$ funkcija $F_{A,B} : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(FA, FB)$ injektivna in poln, če je surjektivna. V našem primeru imamo za poljubna $A, B \in \mathbf{C}$

$$\mathrm{Hom}(yA, yB) \cong yB(A) \cong \mathrm{Hom}(A, B),$$

kjer prva enakost sledi iz Yonedove leme. Torej je ta inducirana funkcija za vsaka A in B bijekcija, torej je y res zvest in poln. □

Opomba. Opazimo lahko, da je Yonedova vložitev $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ tudi injektivna na objektih, saj za poljubna $A, B \in \mathbf{C}$, za katera velja $yA = yB$, potem v posebnem primeru velja $yA(A) = yA(B)$ in $1_A \in \mathrm{Hom}(A, A) \Rightarrow 1_A \in \mathrm{Hom}(B, A) \Rightarrow B = A$.

Naslednja posledica nam poda način, kako nam Yonedova lema lahko olajša dokazovanje.

Posledica 3.2.2. (Yoneda princip) *Za poljubna objekta A in B v lokalno majhni kategoriji $\boldsymbol{C}$,*

$$\text{iz} \quad yA \cong yB \quad \text{sledi} \quad A \cong B.$$

Dokaz. za $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$ vzamemo kar yB in ker $\mathrm{Hom}(yA, yB) \cong \mathrm{Hom}(A, B)$ in ker bijekcija slika izomorfizem v izomorfizem (y je namreč poln in zvest po prejšnji posledici), res velja $A \cong B$. □

Poglejmo si pogosto uporabo tega principa.

Primer 3.3.1. Radi pokazali, da v poljubni kartezično zaprti kategoriji $\mathbf{C}$ za poljubne $A, B, C \in \mathbf{C}$ velja $(A^B)^C \cong A^{(B\times C)}$. Po Yonedovem principu moramo preveriti le, da velja $y((A^B)^C) \cong y(A^{(B\times C)})$ ter, da je ta izomorfizem naraven. Torej vzamemo poljuben $X \in \mathbf{C}$ in računamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X, (A^B)^C) \cong\, & \mathrm{Hom}(X \times C, A^B) \\ & \mathrm{Hom}(X \times C \times B, A) \\ & \mathrm{Hom}(X, A^{(B\times C)}) \end{aligned}$$

Prevereti je še potrebno, da so tej izomorfizmi naravni v X. Naj bo torej $f : Y \to X$ v $\mathbf{C}$. Situacija v $\mathbf{C}$ je naslednja

$$\begin{tikzcd}
(A^B)^C & (A^B)^C \times C \arrow[r, "\epsilon"] & C \\
X \arrow[u, "g"] & X \times C \arrow[u, "g \times 1_C"] \arrow[ur, "\overline{g}"'] & \\
Y \arrow[u, "f"] & Y \times C \arrow[u, "f \times 1_C"] \arrow[uur, bend right, "\overline{g \circ f}"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

kjer je ϵ evaluacija in $\overline{g}$ transponiranka za g. Po enoličnosti transponiranja je $\overline{g \circ f}$ enolični morfizem, da ta diagram komutira za $(g \circ f) \times 1_C$.

Sedaj si poglejmo v kakem smislu je kategorija predsnopov $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ „lepa“. Nekaj o tem nam pove naslednja trditev.

Trditev 3.3. *Za vsako lokalno majhno kategorijo $\boldsymbol{C}$ je funktorska kategorija $\boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ kompletna. Za vsak objekt $C \in \boldsymbol{C}$, evaluacijski funktor*

$$ev_C : \boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}} \to \boldsymbol{Sets}$$

ohranja vse limite.

Dokaz. Naj bo $\mathbf{J}$ majhna indeksna kategorija in $D : \mathbf{J} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ diagram oblike J. Če naj bi taka limita obstajala, bi to bil objekt v $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$, oziroma funktor

$$(\lim_{j \in J} D_j) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$$

po Yonedovi lemi, pa bi za tak funktor moralo veljati

$$(\lim_{j\in J} D_j)(C) \cong \mathrm{Hom}(yC, \lim D_j),$$

ker pa vemo, da predstavljivi funktorji ohranjajo limite velja

$$\mathrm{Hom}(yC, \lim D_j) \cong \lim_{j\in J} Hom(yC, D_j).$$

Z ponovno uporavo Yonedove leme dobimo

$$\lim_{j\in J} Hom(yC, D_j) \cong \lim_{j\in J} D_j(C).$$

Torej limito v $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ definiramo kar kot $\lim_{j\in J}(D_j(C))$, oz. po točkah. Preostane še poiskati oz. definirati stožec nad tem objektom in pokazati, da je končen med stožci nad D.

□

Povemo pa lahko še več. Naslednji izrek, všasih imenovan tudi *gostotni izrek*, je v nekem smislu dual Yonedove leme.

Trditev 3.4. *Za vsako majhno kategorijo $\boldsymbol{C}$, se vsak objekt P funktorske kategorije $\boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, da izraziti kot kolimito predstavljivih funktorjev iz neke indeksne kategorije J.*

$$P \cong \mathrm{colim}_{j\in J}\, yC_j.$$

Bolj natančno obstaja kanonična izbira indeksne kategorije J in funktorja $\pi : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{C}$, tako da obstaja naravni izomorfizem $\mathrm{colim}\, y \circ \pi \cong P$.

Dokaz. Naj bo torej $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$ element kategorije predsnopov nad $\mathbf{C}$. Za indeksno kategorijo bomo definirali tako imenovano *kategorijo elementov* P, ki se jo označuje z

$$\int_{\mathbf{C}} P,$$

ki ima za

1. *Objekte*: pare (x, C), kjer je $C \in \mathbf{C}$ in $x \in P(C)$.
2. *Morfizme*: trojice $(h, (x', C'), (x, C))$, kjer je $h : C' \to C$ morfizem v $\mathbf{C}$, tako da velja $Ph(x) = x'$. Zaradi priročnosti te morfizme ponavadi označujemo kar z $h : (x', C') \to (x, C)$ in se zavedamo da morajo zadoščati pogoju. Identiteta na (x, C) je kar podedovana identiteta na C, kajti funktor ohranja indetitete. Kompozitum dveh takih morfizmov je spet tak morfizem kajti za $h : (x'', C'') \to (x', C')$ in $k : (x', C') \to (x, C)$ velja $P(k \circ h)(x) = Ph \circ Pk(x) = Ph(x') = x''$.

Definiramo funktor $\pi : \int_{\mathbf{C}} P \to \mathbf{C}$, kot $\pi(x, C) = C$ in trdimo, da velja $\operatorname{colim} y \circ \pi(x, C) \cong P$. Da bo to res kolimita potrebujemo morfizme $y \circ \pi(x, C) \to P$ za vsak $(x, C) \in \int_{\mathbf{C}} P$. Po Yonedovi lemi imamo bijekcijo

$$x \in PC \leftrightsquigarrow x : yC \to P$$

ki je naravna v C, torej za $h : (x', C') \to (x, C)$ naslednji diagram

$$\begin{tikzcd}
yC' \arrow[rr, "yh"] \arrow[dr, "x'"'] & & yC \arrow[dl, "x"] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

komutira. Za komponente kostožca nad $y \circ \pi$ torej vzamemo naravne transformacije $x : yC \to P$. Da je to res kolimita, denimo, da obstaja neki drug stožec $y \circ \pi \to Q$ z komponentami $\vartheta_{(x,C)} : yC \to Q$. Iščemo torej tako enolično naravno transformacijo, da naslednji diagram komutira.

$$\begin{tikzcd}
yC' \arrow[rr, "yh"] \arrow[dr, "x'"'] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta_{(x',C')}"'] & & yC \arrow[dl, "x"] \arrow[ddl, bend left, "\vartheta_{(x,C)}"] \\
& P \arrow[d, dashed, "\vartheta"] & \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Ponovno lahko po Yonedovi lemi identificiramo

$$\vartheta_{(x,C)} : yC \to Q \leftrightsquigarrow \vartheta_{(x,C)} \in QC$$

in za komponente naravne transformacije $\vartheta P \to Q$ vzamemo kar funkcijo, ki jo inducira ta bijekcija, torej

$$\vartheta_C : PC \to QC \quad \vartheta_C(x) = \vartheta_{(x,C)}$$

ker je zgornji izomorfizem naraven v C to implicira komutativnost diagrama. Preveriti je potrebno še enoličnost ϑ. Naj bo torej $\psi : P \to Q$, tak, da stranice trikotnika komutirajo. Potem velja $\psi \circ x = \vartheta_{(x,C)} = \vartheta \circ x$. $\square$

Kako je pa z eksponenti v $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$? Če so X, Q, P funktorji v $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$. Kako bi definirali eksponentni objekt Q^P ? Po Yonedovi lemi bi moralo veljati $Q^P(C) \cong \mathrm{Hom}(yC, Q^P)$. Če pa želimo, da ta objekt izpolnjuje lastnost eksponenta, mora veljati

$$\mathrm{Hom}(yC, Q^P) \cong \mathrm{Hom}(yC \times P, Q). \tag{3.11}$$

po lastnosti transponiranja. Ker pa $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ ima produkte, kajti ima vse končne limite, množica $\mathrm{Hom}(yC \times P, Q)$ obstaja. Na ta način tudi definiramo eksponent.

Trditev 3.5. *Za lokalno majhno kategorijo $\boldsymbol{C}$, za vse X, P, Q v $\boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ obstaja izomorfizem*

$$\mathrm{Hom}(X, Q^P) \cong \mathrm{Hom}(X \times P, Q),$$

ki je naraven v X.

Najprej potrebujemo še dodatno lemo

Lema 3.6. *Za vsako majhno indeksno kateogrijo J, funktor $A : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ in diagram $\boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, obstaja naravni izomorfizem*

$$(\underset{j\in J}{\mathrm{colim}} A_j) \times B \cong \underset{j\in J}{\mathrm{colim}}(A_j \times B) \tag{3.12}$$

Dokaz. Naj bodo

$$(\vartheta_i : A_i \to \underset{j\in J}{\mathrm{colim}} A_j)_{i\in J}$$

komponente kostožca, za kolimito nad A. To komponiramo s funktorjem $- \times B : \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$, da dobimo komponente kostožca

$$- \times B(\vartheta_i) =: \vartheta_i \times B : A_i \times B \to (\underset{j\in J}{\mathrm{colim}} A_j) \times B, \quad i \in J$$

Obstaja torej enoličen morfizem iz kolimite nad diagramom $(- \times B) \circ A$, ki ga označimo z $\vartheta : \underset{j\in J}{\mathrm{colim}}(A_j \times B) \to (\underset{j\in J}{\mathrm{colim}} A_j) \times B$, tako da vse ustrezno v diagramu

$$\begin{tikzcd}
& \underset{j\in J}{\mathrm{colim}}(A_j \times B) \arrow[dd, dashed, "\vartheta"] & \\
A_i \times B \arrow[ur] \arrow[dr, "\vartheta_i \times B"'] & & A_k \times B \arrow[ul] \arrow[dl, "\vartheta_k \times B"] \\
& (\underset{j\in J}{\mathrm{colim}} A_j) \times B &
\end{tikzcd}$$

komutira. Radi bi pokazali, da je ϑ naravni izomorfizem. Zadošča pokazati, da so vse komponente

$$(\vartheta_C : \underset{j\in J}{\operatorname{colim}}(A_j \times B)(C) \to (\underset{j\in J}{\operatorname{colim}} A_j) \times B(C)$$

izomorfizmi v **Sets**, torej zadošča pokazati, da to velja za vse točke, kar pomeni, da lahko pokažemo 3.12, če predpostavimo, da so A_i in B množice. Za poljubno množico X pa velja

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(\operatorname{colim}(A_j \times B), X) &\cong \operatorname{colim}\operatorname{Hom}(A_j \times B, X)\\ &\cong \operatorname{colim}\operatorname{Hom}(A_j, X^B)\\ &\cong \operatorname{Hom}(\operatorname{colim} A_j, X^B)\\ &\cong \operatorname{Hom}((\operatorname{colim} A_j) \times B, X)\end{aligned}$$

tej izomorfizmi so jasno naravni v X, torej lema sledi po Yonedovi lemi. □

Dokaz. [Dokaz trditve] Po 3.4 velja, da obstaja indeksna kategorija J, da je

$$X \cong \underset{j\in J}{\operatorname{colim}}\, yCj,$$

izbrana na kanoničen način. Velja torej

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(X, Q^P) &\cong \operatorname{Hom}(\operatorname{colim} yC_j, Q^P)\\ &\cong \operatorname{colim}\operatorname{Hom}(yC_j, Q^P) && \text{(Hom ohranja kolimite)}\\ &\cong \operatorname{colim} Q^P(C_j) && \text{(Yoneda)}\\ &\cong \operatorname{colim}\operatorname{Hom}(yC_j \times P, Q) && \text{(po 3.11)}\\ &\cong \operatorname{Hom}(\operatorname{colim}(yC_j \times P), Q)\\ &\cong \operatorname{Hom}((\operatorname{colim}(yC_j) \times P, Q) && \text{(po lemi)}\\ &\cong \operatorname{Hom}(X \times P, Q)\end{aligned}$$

Tej izomorfizmi so očitno naravni v X, torej trditev sledi po Yonedovi lemi. □

Dobljeno združimo v izrek.

Izrek 3.7. *Za vsako majhno kategorijo* $\boldsymbol{C}$*, je kategorija predsnopov* $\boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ *kartezično zaprta. Prav tako, Yonedova vložitev*

$$y : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$$

ohranja vse produkte in eksponente v $\boldsymbol{C}$*.*

Dokaz. Po trditvi 3.3 vemo, da ima $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ vse končne produkte in če definiramo eksponente kot zgoraj nam trditev 3.5 pove, da ima tudi eksponente. Pokazati je potrebno še drugi del izreka, torej da Yonedova vložitev ohranja produkte in eksponente. Na to noto denimo, da je $A \times B$ produkt v $\mathbf{C}$. Naj bo $X, Y \in \mathbf{C}$ in $f : Y \to X$. Velja

$$\mathrm{Hom}(X, A \times B) \cong \mathrm{Hom}(X, A) \times \mathrm{Hom}(X, B)$$

ki je seveda naraven v X s postkompozicijo z f. Za eksponente recimo, da imamo v $\mathbf{C}$ eksponent Q^P za objekta $P, Q \in \mathbf{C}$. Po naši definiciji eksponentov v $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ velja

$$\begin{aligned} y(Q)^{y(P)}(C) &\cong \mathrm{Hom}(yC \times yP, yQ) \\ &\cong \mathrm{Hom}(y(C \times P), yQ) \\ &\cong yQ(C \times P) \\ &\cong \mathrm{Hom}(C \times P, Q) \\ &\cong \mathrm{Hom}(C, Q^P) \cong y(Q^P)(C) \end{aligned}$$

in tej izomorfizmi so jasno naravni v C. □

Vidimo torej, da je kategorija $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ lepa kategorija v smislu, da je kartezično zaprta, torej če nas zanima neko dejstvo o neki kategoriji $\mathbf{C}$, lahko to kategorijo vložimo v to kategorijo predsnopov kjer lahko mogoče z njo lažje operiramo, saj lahko poljubno vzamemo produkte, eksponente, etc.

Poglejmo si primer take vložitve

Primer 3.3.2. Naj bo $\mathbf{\Delta}$ kategorija vseh končnih ordinalnih števil. Objekti so množice $[0], [1], [2], \ldots$, kjer je

$$[0] = \emptyset \quad \text{in} \quad [n] = \{ 0, 1, \ldots, n \}$$

in morfizmi so vse monotone funkcije med temi množicami.

Definicija 3.8. *Simplicirana množica* je funktor $\mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Sets}$

Naj bo torej $X : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Sets}$ simplicirana množica. Množico $X([n])$ se standardno označuje z X_n in njene elemente imenuje *n-simpleksi.* Funktorsko kategorijo $\mathbf{\Delta}$ se včasih označuje tudi kot **sSet**

V kategoriji $\mathbf{\Delta}$ imamo posebne morfizme, ki generirajo vse morfizme v tej kategoriji. Za vsak $n \geq 0$ obstaja $n + 1$ injekcij $d^i : [n-1] \to [n]$ imenovani *koobrazi* in $n + 1$ surjekcij $s^i : [n+1] \to [n]$ imenovanih *kodegeneracije*, definiriane na sledeči način.

$$d^i(k) = \begin{cases} k, & k < i \\ k+1, & k \geq i \end{cases}$$

$$s^i(k) = \begin{cases} k, & k \leq i \\ k-1, & k > i \end{cases}$$

Tej morfizmi zadoščajo sledečim relacijam:

$$d^j d^i = d^i d^{j-1}, \quad i < j$$
$$s^j s^i = s^i s^{j+1}, \quad i \leq j$$

$$s^j d^i = \begin{cases} 1, & i = j, j+1 \\ d^i s^{j-1}, & i < j \\ d^{i-1} s^j, & i > j+1 \end{cases}$$

Brez dokaza lahko povemo, da se da vsak morfizem v $\mathbf{\Delta}$ izraziti kot kompozitum koobrazov in kodegeneracij. Če dodamo še dodatne zahteve o vrstnem redu v katerem se lahko pojavijo, je tak zapis tudi enoličen.

Če je X simplicirana množica, označujemo funkcije

$$d_i = X(d^i) : X_n \to X_{n-1} \qquad 0 \leq i \leq n$$
$$s_i = X(s^i) : X_n \to X_{n+1} \qquad 0 \leq i \leq n$$

in jih imenujemo *obrazi* in *degeneracije*. Relacije med d_i in s_i bodo potem dualne kot tiste zgoraj.

Vsakemu $x \in X_n$ degeneracije priredijo $n+1$ $(n+1)$-simpleksov $s_0(x), s_1(x), \ldots, s_n(x)$ iz X_{n+1}. Pravimo, da je simplex $x \in X_n$ *degeneriran*, če je slika kake degeneracije s_i, sicer pravimo, da je *ne-degeneriran*.

Najbolj enostaven primer simplicirane množice so tako imenovani *standardni simpleksi* Δ^n, ki so definirani za vsak objekt $[n] \in \mathbf{\Delta}$, kot

$$\Delta^n := y([n]) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(-, [n]).$$

K-simpleksi v Δ^n so $\Delta^n_k := \mathrm{Hom}([k], [n])$. Obrazi in degeneracije so podani s prekompozicijo v $\mathbf{\Delta}$ z d^i in s^i.

$$d_i : \Delta^n_k \to \Delta^n_{k-1} \qquad\qquad s_i : \Delta^n_k \to \Delta^n_{k+1}$$
$$f \mapsto f \circ d^i \qquad\qquad f \mapsto f \circ s^i$$

Simplicirana množica Δ^n ima enoličen ne-degeneiran n-simples, ki ustreza identiteti na $[n]$. Yonedova lema nam med drugim pove, da so funkcije med standardnimi simpleksi $f : \Delta^n \to \Delta^m$ v bijektivni korespondenci z morfizmi $f : [n] \to [m]$ v $\mathbf{\Delta}$. Yonedova lema nam pa tudi pove, da za vsako simplicirano množico X, obstaja naravna bijekcija med n-simpleksi X ter naravnimi transformacijami $\Delta^n \to X_n$ v **sSet**. Bolj eksplicitno, n-simpleks $x \in X_n$ lahko obravnavamo kot morfizem $x : \Delta^n \to X$, ki pošlje enolični ne-degenerirani n-simplex v Δ^n v x.

Simplicirani množici X lahko konstruiramo asociirano kategorijo elementov $\int_{\mathbf{\Delta}} X$, ki se jo imenuje *kategorija simpleksov.* Po trditvi 3.4 vemo, da lahko vsak tak X izrazimo kot kolimito standardnih simpleksov indeksirano s svojo kategorijo elementov.

$$X \cong \operatorname*{colim}_{x \in X_n} \Delta^n$$

Podajmo sedaj primer simplicirane množice. Naj bo $\mathbf{C}$ poljubna majhna kategorija. Definirajmo *živec kategorije* $\mathbf{C}$ kot simplicirano množico $N\mathbf{C}$, na sledeči način

$$\begin{aligned}
&N\mathbf{C}_0 = \{\, \text{objekti v } \mathbf{C} \,\} \\
&N\mathbf{C}_1 = \{\, \text{morfizmi v } \mathbf{C} \,\} \\
&N\mathbf{C}_2 = \{\, \text{pari morfizmov } \to\to \text{ v } \mathbf{C} \,\} \\
&\vdots \\
&N\mathbf{C}_n = \{\, \text{nizi n morfizmov } \to\to \ldots \to \text{ v } \mathbf{C} \,\}
\end{aligned}$$

Degeneracije $s_i : N\mathbf{C}_n \to N\mathbf{C}_{n+1}$ delujejo tako, da vzamejo niz n morfizmov

$$c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_i \to \ldots \to c_n$$

in na i-tem mestu vstavi identiteto na c_i. Obraz $d_i : N\mathbf{C}_n \to N\mathbf{C}_{n-1}$ komponira i-t in $i+1$ morfizem, če je $0 < i < n$, oziroma izpusti prvi ali zadnji morfizem za $i = 0$ ali n. Potrebno bi bilo preveriti, da na ta način definirane funkcije res zadoščajo relacijam za simplicirano množico. Ker je bil namen tega primera samo ilustracija v kakih situacija lahko nastopa Yonedova lema, tega tukaj ne bomo storili.

Literatura

[1] Steve Awodey (2010) *Category Theory*, Oxford: Oxford University Press.

[2] Emily Riehl *A leisurely introduction to simplicial sets*
`http://www.math.jhu.edu/ eriehl/ssets.pdf`