Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Jure Taslak

Yonedova lema in njena uporaba

DIPLOMSKO DELO

INTERDISCIPLINARNI UNIVERZITETNI
ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2017

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Besedilo teme diplomskega dela študent prepiše iz študijskega informacijskega sistema, kamor ga je vnesel mentor. V nekaj stavkih bo opisal, kaj pričakuje od kandidatovega diplomskega dela. Kaj so cilji, kakšne metode uporabiti, morda bo zapisal tudi ključno literaturo.

Na tem mestu zapišite, komu se zahvaljujete za izdelavo diplomske naloge. Pazite, da ne boste koga pozabili. Utegnil vam bo zameriti. Temu se da izogniti tako, da celotno zahvalo izpustite.

Kazalo

Povzetek

Naslov: Yonedova lema in njena uporaba

Avtor: Jure Taslak

V vzorcu je predstavljen postopek priprave diplomskega dela z uporabo okolja LaTeX. Vaš povzetek mora sicer vsebovati približno 100 besed, ta tukaj je odločno prekratek. Dober povzetek vključuje: (1) kratek opis obravnavanega problema, (2) kratek opis vašega pristopa za reševanje tega problema in (3) (najbolj uspešen) rezultat ali prispevek magistrske naloge.

Ključne besede: računalnik, računalnik, računalnik.

Abstract

Title: Naslov EN

Author: Jure Taslak

This sample document presents an approach to typesetting your BSc thesis using LaTeX. A proper abstract should contain around 100 words which makes this one way too short.

Keywords: computer, computer, computer.

Poglavje 1

Uvod

Kaj je teorija kategorij? Kako se razlikuje od običajnega pogleda na matematiko?

1.1 Osnovne Definicije

Definicija 1.1. $Kategorija$ sestoji iz naslednjih stvari:

- *Objektov* : A,B,C,X,Y,...
- *Puščic* : f,g,h,...
- Za vsako puščico imamo podana dva objekta:

  $$dom(f), \quad cod(f)$$

  ki jima pravimo domena in kodomena puščice f. Pišemo:

  $$f\colon A \to B$$

  kjer sta A = dom(f) in B = cod(f). Pravimo da f gre od A do B.

- Za vsaki puščici $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$, torej taki da velja cod(f) = dom(g), obstaja puščica $g \circ A \to C$, ki ji pravimo *kompozitum* f in g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

- Za vsak objekt A obstaja puščica

$$1_A : A \to A$$

ki ji pravimo *identitetna puščica* na A.

Za vse te podatke morata veljati naslednja dva pravila:

- Asociativnost: Za vsake $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ velja

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- Enota: Za vsak $f : A \to B$ velja

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Kategorija je karkoli, kar zadošča tem pogojem

1.2 Primeri kategorij

Primer 1.2.1. Bazični primer kategorije in tak h katerem se lahko vedno sklicujemo je kategorija množic in funkcij med njimi. Označimo ga z **Sets**. Za kategorijo se vedno prvo vprašamo: kaj so objekti in kaj so puščice. Pri **Sets** so objekti množice in puščice funkcije. Izpolnjena morata biti pogoja asociativnosti in enote. Kompozitum puščic je kompozitum funkcij, ki je asociativen, kar vemo iz teorije množic. Vlogo identitetne puščice igra identitetna funkcija, ki jo lahko vedno definiramo in zanjo velja $f \circ id_A = f = id_B \circ f$ za vsako funkcijo $f : A \to B$, kjer je $id_A : A \to A$ def. kot $id_A(x) = x$ za vsak element $x \in A$.

Primer 1.2.2. Še en primer, ki ga v bistvu že poznamo je podkategorija kategorije **Sets**, in sicer $\mathbf{Sets}_{fin}$, kategorija končnih množic in funkcij med njimi. Zakaj je to res kategorija? Objekti so očitno končne množice, kaj so pa puščice. To bi morale biti funkcije med končnimi množicami in kompozitum takih funkcij je seveda tudi funkcija takega tipa, torej iz končne množice v končno množico. Razmisliti moramo še ali imamo identitetno puščico. To seveda imamo, saj bo to podedovana identitetna funkcija iz **Sets**, ki bo v tem primeru funkcija iz končne množice v končno, torej res puščica v tej kategoriji. Tu imamo tudi primer kategorije, katere objekti so množice z dodatno strukturo ter so morfizmi objektov funkcije, ki ohranjajo strukturo teh množic.

Primer 1.2.3. Kaj bi bil primer "majhne"kategorije? Kategorije z majhnim številom objektov ali morfizmov. Ker mora za vsak objekt obstajati identitetni morfizem mora vsaka kategorija imeti najmanj toliko morfizmov kolikor je objektov. Najmanjše število objektov, ki jih lahko imamo je 0. Ali je kategorija z 0 objekti in 0 puščicami res kategorija? Za vsak objekt (ki jih ni) obstaja identitetni morfizem in za vsaka dva kompatibilna morfizma (ki ju ni) obstaja njun kompozitum. To torej je kategorija. Kaj pa kategorija z enim objektom. Imeti mora torej najmanj en objekt in en identitetni morfizem. Tej kateogriji pravimo tudi kategorija **1**. Kategoriji z dvema objektom in eno neidentitetno puščico med objektoma pravimo **2**. Te dve kategoriji izgledata takole.

$$\bullet \circlearrowleft \qquad\qquad \circlearrowright \bullet \longrightarrow \bullet \circlearrowleft \tag{1.1}$$

Identitetnih morfizmov se ponavadi ne riše. Kategorija **3** bi izgledala takole.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Primer 1.2.4. Delno urejena množica ali poset je množica opremljena z relacijo, ki se jo ponavadi označuje z $\leq$ in je:

- Refleksivna
- Antisimetrična
- Tranzitivna

Morfizem delno urejenih množic P in Q je *monotona* funkcija

$$m : P \to Q$$

kar pomeni, da za vsaka $x, y \in P$ za katera je $x \leq y$, potem velja $m(x) \leq m(y)$. Ali je to kategorija? Izpolnjevati mora aksiome za kategorij, torej ali imamo identitetne morfizme za vsako delno urejeno množico P? Naravni kandidat je identitetna funkcija $1_P : P \to P$, ki je monotona, say iz $x \leq y$ sledi $x \leq y$. Kompozitum dveh monotonih funkcij $m : P \to Q$ in $n : P \to Q$ je tudi monotona funkcija, saj za $x \leq y$ zaradi monotonosti m velja $m(x) \leq m(y)$ in zaradi monotonosti n velja $n(m(x)) \leq n(m(y))$. Imamo torej kategorijo, ki jo označujemo s **Pos**, delno urejenih množic in monotonih funkcij.

Primer 1.2.5. Monoid $(M, \bullet)$ je množica opremljena z binarno operacijo množenja, za katero drži

- Zaprtost: $\forall x, y \in M : x \bullet y \in M$
- Asociativnost: $\forall x, y, z \in M : x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
- Obstoj enote: obstaja tak $e \in M$ tako da $\forall x \in M : e \bullet x = x \bullet e = x$

Homomorfizmi monoidov so funkcije $f : M \to N$ za katere velja

1. $f(e_M) = e_N$
2. $f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y)$

Identitetni homorfizem $1_M : M \to M$ bo predstavljal identitetni morfizem v tej kategoriji. Kompozitum dveh homorfizmov je spet homomorfizem, torej imamo novo kategorijo monoidov in homorfizmov med njimi, ki jo označujemo s **Mon**.

Primer 1.2.6. Naj bo $(P, \leq)$ delno urejena množica. Ali je to tudi kategorija? Najprej se moramo vprašati, kaj so objekti v tej kategoriji in kaj so puščice. Imamo množio elementov $p, q \in P$ med katerimi lahko imamo relacijo $p \leq q$, ki je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Dobimo idejo, da za objekte vzamemo elemente P in podamo puščico med p in q natanko takrat ko v P velja $p \leq q$. Torej:

- **Objekti:** Elementi množice P
- **Puščice:** Puščica $p \to q \Leftrightarrow p \leq q$

Potrebno je preveriti, če so izpolnjeni aksiomi za kategorijo.

(a) Za vsak objekt $p \in P$ potrebujemo puščico $1_p : p \to p$. Ali obstaja taka puščica? Seveda, saj za vsak p velja $p \leq p$, kar nam da želeno identitetno puščico.

(b) Za vsaki dve puščici $p \to q$ in $q \to r$ mora obstajati kompozitum $p \to r$. Ali obstaja ta kompozitum? Seveda, saj je relacija $\leq$ tranzitivna in iz $p \leq q$ in $q \leq r$ sledi $p \leq r$, kar nam da želeni kompozitum.

Vsaka delno urejena množica je torej svoja kategorija in v bistvu so kategorije v nekem smislu posplošene delno urejene množice.

1.3 Različni tipi morfizmov

Uvedemo prvo abstraktno definicijo v jeziku teorije kategorij, nečesa kar je že poznano iz drugih področij matematike.

Definicija 1.2. Naj bo **C** poljubna kategorija. Puščici $f : A \to B$ pravimo *izomorfizem* (ali izo na kratko), če obstaja taka puščica $g : B \to A$, da velja

$$g \circ f = 1_A \ in \ f \circ g = 1_B$$

Puščici g pravimo *inverz* puščice f

Velja:

Trditev 1.0.1. *Inverzi, ko obstajajo, so enolični.*

Dokaz. Naj bo $f : A \to B$ izomorfizem in naj bosta $g, h : B \to A$ njegova inveza. Potem velja $g = 1_A \circ g = h \circ f \circ g = h \circ 1_B = h$ □

Zaradi česar za inverz od f pišemo f^{-1}

Primer. Izomorfizmi v kategoriji **Sets** ustrezajo ravno bijektivnim preslikavam, saj kot vemo iz teorije množic, ima funkcija inverz, ravno kadar ostaja enoličen inverz te funkcije, ki se komponira v identitetno funkcijo.

Primer. Vsaka identitetni morfizem je izomorfizem, nima pa nujno kategorija drugih morfizmov kot identitetnega. Na primer kategorija **2** ima samo en neidentitetni morfizem, ki pa nima inverza torej ni izomorfizem.

Primer z funkcijami nam pa naravno porodi novo vprašanje, saj kot vemo, je funkcija bijektivna ravno takrat, ko je surjektivna ter injektivna. Vprašamo se, kaj bi pa bili karakterizaciji teh dveh lastnosti v jeziku teorije kategorij. Izkaže se, da pridemo do malenkost bolj splošnih pojmov, ki jih predstavimo v naslednjih dveh definicijah.

Definicija 1.3. Epimorfizem je tak morfizem $e : E \to A$, da za vsaka morfizma $f, g : A \to B$ iz $f \circ e = g \circ e$ sledi $f = g$. Epimorfizmu rečemo tudi epi na kratko.

Definicija 1.4. Monomorfizem je tak morfizem $m : B \to M$, da za vsaka morfizma $f, g : A \to B$ iz $m \circ f = m \circ g$ sledi $f = g$. Monomorfizmu rečemo tudi mono na kratko.

Primer 1.3.1. Preverimo, da mono in epi morfizmi v **Sets** ustrezajo ravno injektivnim in surjektivnim funkcijam. Naj bo torej najprej $f : A \to B$ injektivna funkcija. Potem za vsaka $x, y \in A$ velja, da it $f(x) = f(y)$ sledi

$x = y$. Naj bosta sedaj $g, h : C \to A$ taki funkciji, da velja $f \circ g = f \circ h$. Torej za vsak $x \in C$ velja $f(g(x)) = f(h(x))$ iz čeasr iz injektivnosti f sledi $g(x) = h(x)$ za vsak x, torej g = h. Privzemimo sedaj, da je f monomorfizem. Velja torej $f \circ g = f \circ h \implies g = h$. Naj bo $1 = \{\star\}$ in naj bosta $x, y : 1 \to A$. Funkcije iz množice 1 v A predstavljajo ravno elemente množice A. Ker pa velja $f \circ x = f \circ y \implies x = y$ velja tudi, da za vsaka $x, y \in A$ velja $f(x) = f(y) \implies x = y$ in je f res injektivna. Naj bo sedaj $f : A- > B$ surjektivna funkcija. Velja torej, da $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$. Naj bosta sedaj $g, h : B \to C$ taki funkciji, da velja $g \circ f = h \circ f$. Torej za vsak $y \in B$ velja $g(y) = h(y)$ saj vsak tak y lahko zapišemo kot $f(x)$ za nek $x \in A$. Torej je f res epi. Naj bo sedaj f epimorfizem in naj bosta $g, h : B \to 2$ definirani z naslednjima predpisoma

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathrm{Im} f \\ 0 & ; \quad x \notin \mathrm{Im} f \end{cases}$$

$$h(x) = 1 \quad \forall x \in B$$

Poglejmo sedaj kompozituma $g \circ f$ in $h \circ f$. Velja $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1$ za vsak $x \in A$, saj je $f(x) \in \mathrm{Im} f$. Po drugi strani pa je tudi $h \circ f(x) = h(f(x)) = 1$. Torej je za vsak $x \in A$, $g \circ f(x) = h \circ f(x)$, oziroma $g \circ f = h \circ f$ in ker je f epimorfizem sledi $g = h$, kar pa pomeni, da je za vsak $y \in B$ nek tak $x \in A$, da z f lahko pridemo do njega, kar pa pomeni ravno, da je f surjektivna.

Ta primer bi nam dal misliti, da so epi in mono-morfizmi vedno, kadar imamo opravka z objekti, ki predstavljajo množice, ravno surjektivne ter injektivne funkcije. Naslednji primer pokaže, da temu ni vedno tako.

Primer 1.3.2. Naj bo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ homomorfizem monoidov, definiran s predpisom $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Naj bosta sedaj $g, h : \mathbb{Z} \to M$ taka homomorfizma monoidov, da velja $g \circ f = h \circ f$. Veljajo torej zveze

$$g \circ f(1) = h \circ f(1) \implies g(1) = h(1)$$

$$g(n) = g(1 + \ldots + 1) = g(1) + \ldots + g(1) = ng(1) = nh(1) = h(n)$$

$$g(-n) = -g(n) = -h(n) = h(-n)$$

Če vse to pogledamo skupaj, vidimo da velja

$$g(k) = h(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

kar pa pomeni $g = h$. Torej je f epimorfizem. Način kako smo prišli do tega primera nam da misliti, da mogoče kar je potrebno, za to da je homorfizem monoidov epi, da je surjektiven na generatorje kodomene. Algebraično gledano, to da je nek morfizem e epi, pomeni natanko to, da ga lahko pri kompoziciji krajšamo z desne: $fe = ge \implies f = g$. Obratno, če je morfizem m mono, pomeni, da ga lahko krajšamo z leve: $mf = mg \implies f = g$.

1.4 Konstrukcije novih kategorij

Primer 1.4.1. Naj bosta $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ kategoriji. *Produkt* kategorij $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ je prav tako kategorija, z objekti oblike (C, D), kjer sta $C \in \mathbf{C}$ in $D \in \mathbf{D}$ in morfizmi oblike $(f, g) : (C, D) \to (C', D')$, kjer je $f : C \to C'$ morfizem v $\mathbf{C}$ ter $g : D \to D'$ morfizem v $\mathbf{D}$. Identitene morfizme ter kompozitume definiramo po komponentah, torej

$$1_{(C,D)} = (1_C, 1_D)$$

$$(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$$

za $C \in \mathbf{C}$, $D \in \mathbf{D}$ ter f, f' puščici v $\mathbf{C}$ in g, g' puščici v $\mathbf{D}$. Za produkt $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ imamo dva *projekcijska funktorja*

$$\mathbf{C} \xleftarrow{\pi_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{D}}} \mathbf{D}$$

definirana kot $\pi_{\mathbf{C}}(C, D) = C$ in $\pi_{\mathbf{D}}(C, D) = D$ ter na morfizmih $\pi_{\mathbf{C}}(f, g) = f$ in $\pi_{\mathbf{D}}(f, g) = g$

Primer 1.4.2. *Obratna* ali *obratna* kategorija $\mathbf{C}^{op}$ kategorije $\mathbf{C}$ je kategorija z istimi objekti kot $\mathbf{C}$ kjer vsem morfizmom zamenjamo domeno in kodomeno. To pomeni, da za morfizem $f : C \to D$ v $\mathbf{C}$ imamo morfizem $f : D \to C$ v $\mathbf{C}^{op}$. Konceptualno je to kategorija, kjer so vse puščice obrnjene.

1.5 Funktorji in naravne transformacije

1.5.1 Morfizmi med kategorijami

Primer 1.5.1. Neuradni moto teorije kategorij bi se lahko glasil *puščice so bistvene* kar bi pomenilo, da nas ponavadi ne zanima toliko kaj točno so objekti v neki specifični kategoriji temveč kaj se dogaja s puščicami med njimi.

Sedaj imamo nekaj definicij, ki veljajo v splošnih kategorijah, a apliciramo jih lahko samo na vsaki posamezni. Kar bi radi storili, je da prehajamo iz ene kategorije v drugo in pogledamo, če je kak problem lažje rešljiv v kaki drugi kategoriji in to rešitev bi potem prevedli na kategorijo, kjer nas problem bolj zanima. Zato uvedemo naslednjo definicijo.

Definicija 1.5. Naj bosta $\mathbf{C}$ *in* $\mathbf{D}$ poljubni kategoriji. *Funktor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ med kategorijama $\mathbf{C}$ *in* $\mathbf{D}$ je par morfizmov

$$F_0 : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{D}_0$$

med objekti in

$$F_1 : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{D}_1$$

med puščicami, tako da veljajo naslednje lastnosti:

1. $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$
2. $F(1_A) = 1_{F(A)}$
3. Za puščici $f : A \to B,\ g : B \to C$ mora veljati:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

1.5.2 Morfizmi med funktorji

Radi bi nadaljevali temo posploševanja morfizmov in ker smo nazadnje definirali morfizme med kategorijami, se naravno pojavi vprašanje, ali lahko definiramo morfizme med temi morfizmi. Odgovor je pozitiven in pridemo do naslednje definicije.

Definicija 1.6. Naj bosta $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ poljubni kategoriji in naj bosta $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funktorja med tema kategorijama.
Naravna transformacija $\vartheta : F \Rightarrow G$ iz F v G, je družina puščic

$$(\vartheta_C : FC \to GC)_{C \in \mathbf{C}}$$

tako, da za vsako puščico $f : C \to D$ naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\vartheta_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & GC \arrow[d, "G(f)"] \\ FD \arrow[r, "\vartheta_D"'] & GD \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

komutira

Poglavje 2

Pomembne trditve

Lema 2.1. *Če je funktor G poln in zvest, potem ohranja vse limite.*

Dokaz. $\square$

Trditev 2.1.1. *Predstavljivi funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$ *ohranja vse limite.*

Dokaz. Naj bo $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ diagram oblike D v $\mathbf{C}$ in naj bo

$$\varprojlim_{j \in \mathbf{J}} D_j$$

limita za D, oz $\mathrm{Hom}(C, limD_j)$ je limita za $\mathrm{Hom}(C, -) \circ D$

kjer je $Hom(C, -) \circ D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ diagram v **Sets** $\square$

Definicija 2.1. Naj bo **C** definicja. *Klasifikator podobjekta* je objekt Ω z puščico $true : 1 \to \Omega$

Poglavje 3

Yonedova lema

3.1 Yonedova vložitev

Naj bo $\mathbf{C}$ lokalno majhna kategorija. Potem vemo, da za vsak objekt $C \in \mathbf{C}$ obstaja kovariantni predstavljivi funktor

$$Hom_{\mathbf{C}}(C, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$$

Ker lahko ta objekt C izbiramo poljubno imamo v resnici funktor

$$k(C) = Hom(C, \_)$$

Opravka imamo v bistvu z kontravariantnim funktorjem

$$k : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}}$$

Saj za

Definicija 3.1. *Yonedova vložitev* je funktor $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$
za $C \in \mathbf{C}$ je

$$y(C) := Hom_{\mathbf{C}}(-, C) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Sets}$$

in za puščice $f : C \to D$

$$y(f) := Hom(-, f) : Hom(-, C) \to Hom(-, D)$$

Kasneje bomo pokazali, da je funktor y res vložitev. Funktorju pravimo *vložitev*, če je zvest poln in injektiven na objektih.

3.2 Yonedova lema

Izrek 3.1 (Yonedova lema)**.** *Naj bo* $\mathbf{C}$ *lokalno majhna kategorija. Potem za vsak objekt* $C \in \mathbf{C}$ *in funktor* $F : \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Sets}$ *velja*

$$Hom(yC, F) \cong FC$$

In ta izomorfizem je naraven tako v C *kot v* F*, kar pomeni, da za* $f : C \to D$ *naslednji diagram*

$$\begin{tikzcd} Hom(yC, F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "Hom(yf,F)"'] & FC \arrow[d, "F(f)"] \\ Hom(yD, F) \arrow[r, "\cong"'] & FD \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

komutira ter za naravno transformacijo $\varphi : F \Rightarrow G$ *naslednji diagram*

$$\begin{tikzcd} Hom(yC, F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "Hom(yC,\varphi)"'] & FC \arrow[d, "\varphi_C"] \\ Hom(yC, G) \arrow[r, "\cong"'] & GC \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

komutira.
Opomba: $Hom(yC, F)$ *je množica naravnih transformacij med funktorjema* $yC, F : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$*, oz.* $Hom(yC, F) = Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}}(yC, F) = Nat(yC, F)$*.*

Dokaz. Poglejmo, kaj mora veljati za neko naravno transformacijo $\vartheta : yC \Rightarrow F$, ki je v bistvu družina puščic $(\vartheta_D : yC(D) \to F(D))_{D \in \mathbf{C}}$. Te puščice morajo izpolnjevati naturalnostni pogoj, da za vsako puščico $f : D \to C$

$$\begin{tikzcd} Hom(C, C) \arrow[r, "\vartheta_C"] \arrow[d, "\mathrm{Hom(f,C)}"'] & FC \arrow[d, "\mathrm{F(f)}"] \\ Hom(D, C) \arrow[r, "\vartheta_D"] & FD \end{tikzcd}$$

komutira. Torej mora veljati

$$(F(f) \circ \vartheta_C)(g) = (\vartheta_D \circ Hom(f, C))(g)$$

za vsak $g \in Hom(C,C)$. En tak g je identitetna puščica na C, oz. $1_C : C \to C$. Torej mora veljati enakost:

$$\begin{gathered}\underline{F(f) \circ \vartheta_C(1_C)} = \vartheta_D \circ Hom(f,C)(1_C) = \\ \vartheta_D \circ Hom(f,C)(1_C) = \vartheta_D \circ ({}_{-} \circ f)(1_C) = \vartheta_D \circ (1_C \circ f) = \underline{\vartheta_D(f)}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Torej vidimo, da je vrednost komponente za ϑ v D določena že s tem, kam slika ϑ_C puščico 1_C.
Naj bo z $\alpha_{C,F} : Hom(yC,F) \to FC$ označen želeni izomorfizem.
Definiramo torej za naravno transformacijo $\vartheta \in Hom(yC,F)$

$$\alpha_{C,F}(\vartheta) := \vartheta_C(1_C) \tag{3.4}$$

Označimo:

$$\boxed{\alpha_{C,F}(\vartheta) = \widehat{\vartheta}} \tag{3.5}$$

In za vsak element $a \in FC$ definirajmo naravno transformacijo $\vartheta_a \in Hom(yC,F)$ po komponentah, in sicer:

$$(\vartheta_a)_D : yC(D) \to F(D) \tag{3.6}$$

$$(\vartheta_a)_D(f : D \to C) := F(f)(a) \tag{3.7}$$

Označimo:

$$\boxed{\alpha^{-1}_{C,F}(a) = \widetilde{a}} \tag{3.8}$$

Sedaj je potrebno preveriti, da tako definirana preslikava res ustreza pogojem izreka.

Najprej preverimo, da sta si predpisa vzajemno inverzna.
Torej, da za vsak $\vartheta \in Hom(yC,F)$ velja:

$$\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \vartheta$$

in za vsak $a \in FC$ velja

$$\widehat{\widetilde{a}} = a$$

1.) $\widehat{\vartheta} = \vartheta_C(1_C) \in FC$.
Potem je $\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \eta_{\widehat{\vartheta}} \in Hom(yC,F)$. Poglejmo kako ta naravna transformacija deluje na puščicah. Naj bo $f : D \to C$

$$\begin{aligned}(\eta_{\widehat{\vartheta}})_D : yC(D) &\to FD \\ f &\overset{def}{\longmapsto} Ff(\widehat{\vartheta})\end{aligned}$$

In velja

$$
\begin{aligned}
Ff(\widehat{\vartheta}) &= Ff(\vartheta_C(1_C)) = \vartheta_D(f) \\
\implies \forall f \in \mathbf{C}_1 &: (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D(f) = \vartheta_D(f) \\
\implies \forall D \in \mathbf{C} &: (\eta_{\widehat{\vartheta}})_D = \vartheta_D \\
\implies \eta_{\widehat{\vartheta}} &= \vartheta \implies \underline{\widetilde{\widehat{\vartheta}} = \vartheta}
\end{aligned}
$$

2.)

$$\widetilde{a} = \vartheta_a : yC \Rightarrow F$$

In velja

$$
\begin{aligned}
(\vartheta_a)_D : yC(D) &\to FD \\
f &\mapsto F(f)(a)
\end{aligned}
$$

Torej

$$\widehat{\widetilde{a}} = (\vartheta_a)_C(1_C) = F(1_C)(a) = 1_{F(C)}(a) = a$$

Sedaj moramo še pokazati, da sta zadoščena naturalnostna pogoja:
Naj bo $f : C \to D$ in naj bo $\vartheta \in Hom(yC, F)$.
Pokazali bi radi:

$$Ff \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \alpha_{D,F} \circ Hom(yf, F)(\vartheta) \tag{3.9}$$

Velja pa:

$$Ff \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \underline{Ff(\vartheta_C(1_C))}$$

In po drugi strani:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{D,F} \circ Hom(yf, F)(\vartheta) = \alpha_{D,F}(\vartheta \circ yf) &= \\
(\vartheta \circ yf)_D(1_D) = \vartheta_D \circ yf_D(1_D) &= \\
\vartheta_D(f \circ 1_D) &= \underline{\vartheta_D(f)}
\end{aligned}
$$

Enakost 3.3 pa nam pove ravno da je $Ff(\vartheta_C(1_C)) = \vartheta_D(f)$ To pa pomeni ravno, da diagram 3.1 komutira.

Kaj pa drugi diagram. Naj bo $\varphi : F \Rightarrow G$ naravna transformacija med funktorjema $F, G : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$.
Veljati mora enakost:

$$\varphi_C \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \alpha_{C,G} \circ Hom(yC, \varphi)(\vartheta)$$

Imamo:

$$\varphi_C \circ \alpha_{C,F}(\vartheta) = \underline{\varphi_C(\vartheta_C(1_C))}$$

In za desno stran:

$$\alpha_{C,G} \circ Hom(yC, \varphi)(\vartheta) = \alpha_{C,G}(\varphi \circ \vartheta) = (\varphi \circ \vartheta)_C(1_C) = \varphi_C \circ \vartheta_C(1_C) = \underline{\varphi_C(\vartheta_C(1_C)}$$

Torej diagram 3.2 tudi komutira.

□

3.3 Posledice Yonedove leme

Takoj dobimo posledico, ki upraviči poimenovanje funktorja y vložitev

Trditev 3.1.1. *Funktor* $y : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Sets}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ *je poln in zvest.*

Dokaz.

□