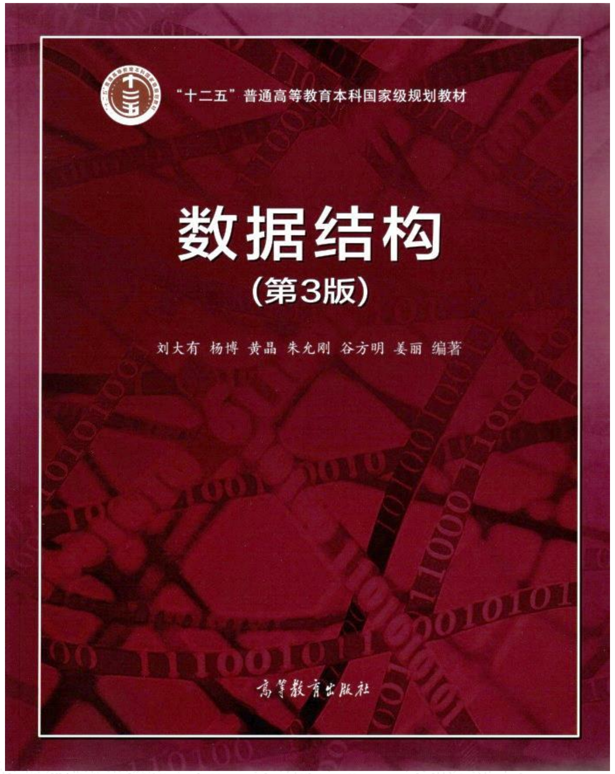


散列查找

- 散列定义
- 散列函数
- 冲突处理方法
- 散列表的删除
- 性能分析与其他应用

数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2023.12

zhuyungang@jlu.edu.cn

大学期间我主要在做三件事情：
一是写代码，因为我是搞技术的；
二是看书，看了很多很多书；
三是帮人修电脑，这让我交到很多朋友。

——张一鸣

南开大学学士

字节跳动创始人

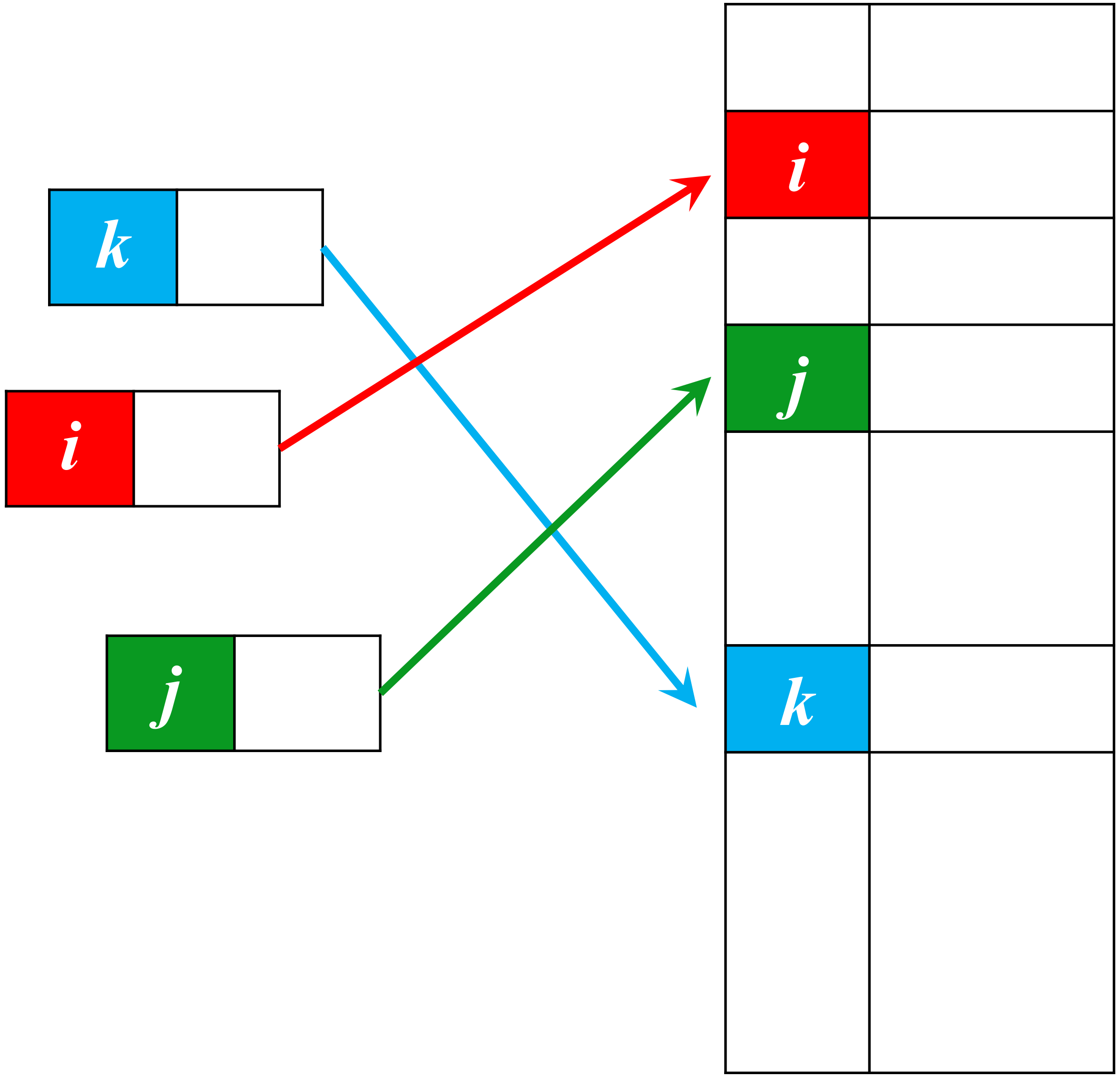
动机

- 前面所介绍的查找方法都是基于关键词的比较，在找到想要的的元素之前，需要检查若干数目的元素。
- 当数据规模n很大时，上述方法的时间效率仍可能使得用户无法忍受。
- **理想的情况：**根据给定关键词，直接定位到元素的存储地址，而不需要与各元素逐个比较。

散列方法提出者

Hans Peter Luhn
（1896-1964）
IBM公司研究员

散列表




```
struct Student{
    int id;
    char name[100];
    char gender;
    int age;
    double score;
};
```

散列（Hash, 亦称哈希、杂凑）

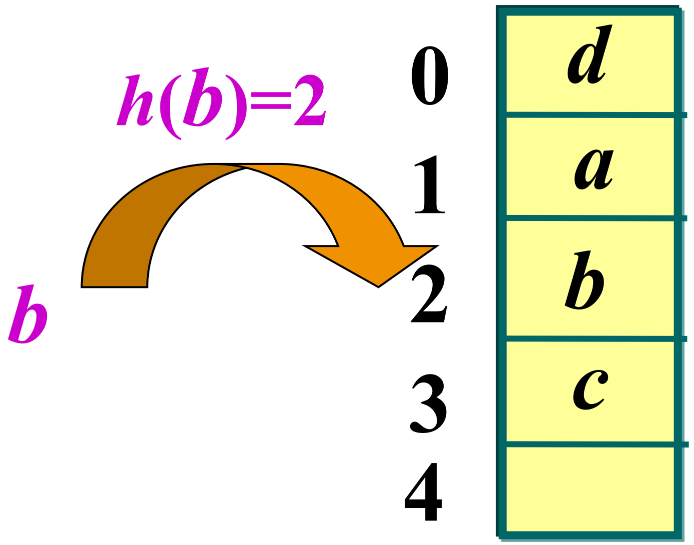
散列函数

$h('a')=1$

$h('b')=2$

$h('c')=3$

$h('d')=0$



散列表(Hash Table)通常是一个一维数组，散列地址即数组的下标

散列函数h
- ✓ 自变量K：关键词
- ✓ 函数值$h(K)$：元素在散列表中的存储地址（亦称散列地址）
- ✓ 作用：把关键词值映射到散列地址

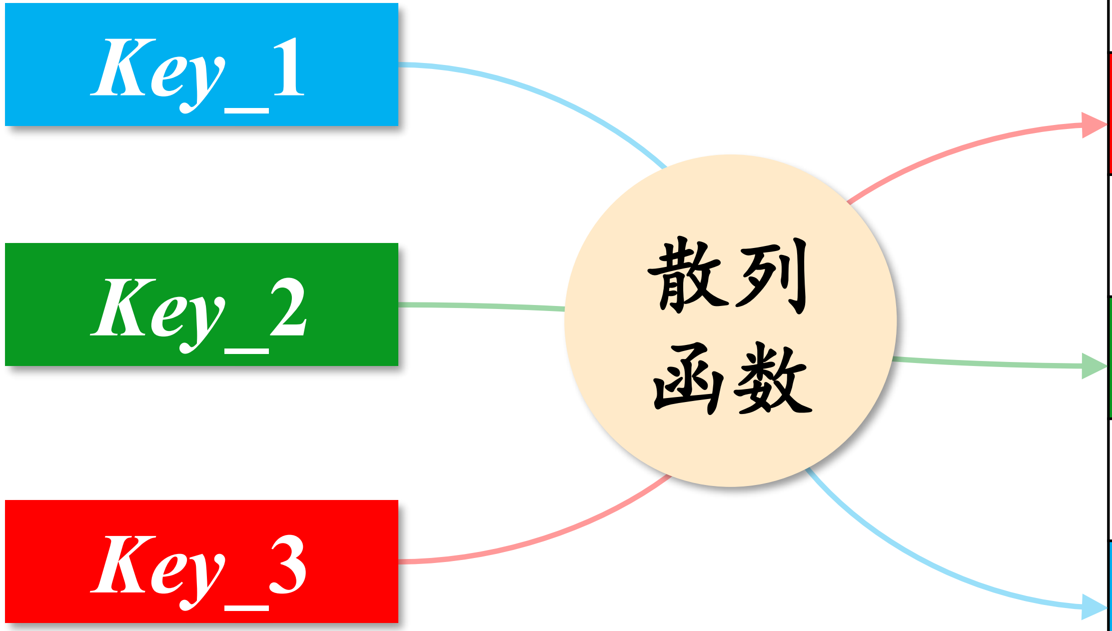
$h('e')=1$ 怎么办？

冲突：多个不同的关键词具有相同的散列函数值，即$K_1 \neq K_2$，$h(K_1)=h(K_2)$

散列方法的核心问题

散列函数设计

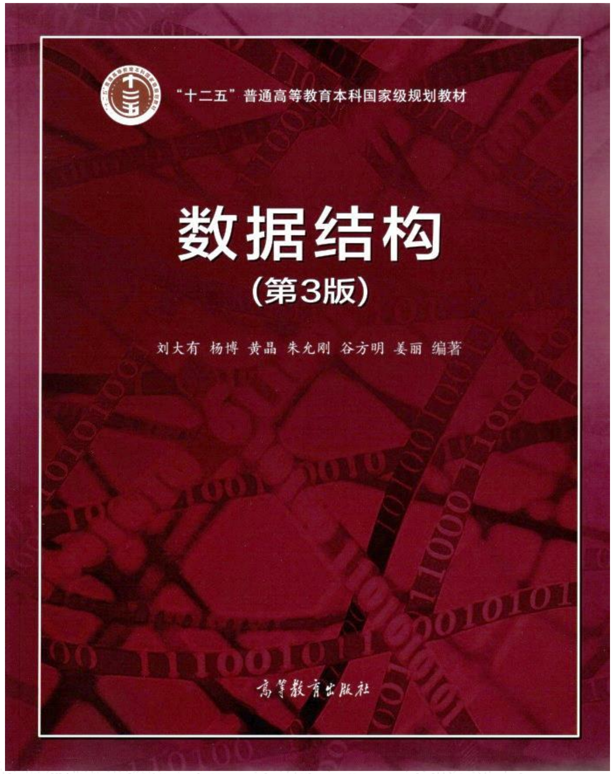
冲突处理方法



index	Value
0	Value_3
1	
2	Value_2
3	
4	Value_1
5	

散列查找

- 散列定义
- **散列函数**
- 冲突处理方法
- 散列表的删除
- 性能分析与其他应用



数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2023.12

zhuyungang@jlu.edu.cn

散列函数定义及原则

- 散列函数：把关键词值映射到散列地址，通常用*h*来表示。
- $h(Key)$ ＝Address of Hash Table
- 散列函数的选取原则
  - ✓便于快速计算
  - ✓极少出现冲突：不同关键词的散列函数值尽可能不同
    - 函数值域在散列表长范围内，即$0 \le h(K) < M$， M为散列表长度。
    - 关键词映射到散列表各位置的概率尽量相等，使散列函数值在区间 $[0, M\text{-}1]$ 内均匀分布。

除法取余（除余法）

A

- $h(K) = K\%M$。其中M为散列表长度， %为取余运算，也表示为mod。
- 对于理想随机的序列，M取值无关紧要。
- 实际应用中的数据序列远非理想随机，一般来说M为素数时，数据对散列表的覆盖最充分、分布最均匀。
- 例如：对于序列$a+d, a+2d, a+3d, \ldots$（公差为d的等差数列）当$GCD(d, M)=1$时，$(a+xd)\%M$均匀分布在$[0, M-1]$区间内。

K	1	7	13	19	25	31	37
$h(K), M=9$	1	7	4	1	7	4	1
$h(K), M=7$	1	0	6	5	4	3	2

- M取值的进一步建议：https://planetmath.org/goodhashtableprimes

MAD法（Multiply-Add-Divide）

C

- $h(K) = (a \times K + b) \% M$
- M为素数，$a > 1, b > 0, M \nmid a$

乘法散列函数

- 给定一个实数θ，$0<\theta<1$，乘法散列函数为：

$$h(K)=\lfloor M(K\theta \bmod 1)\rfloor$$

其中mod 1指取小数部分，M为散列表长。

- Knuth指出，一般来说当$\theta = 0.6180339887$或$\theta = 0.3819660113$（黄金分割点）时散列函数值能均匀地分布在区间[0, M-1]上。

平方取中法

A

- 取K^2的中间若干位作为$h(K)$的值。

关键词	平方	取中间三位
123	1 $\boxed{512}$ 9	512
1234567	15241$\boxed{556}$77489	556

压缩法

压缩法是把关键词或其二进制串分割成等宽的子串，然后按某种方式把子串合并，作为散列函数值。

- **位异或：对各子串进行异或操作得到地址**

$h(356) = h(101\ 100\ 100) = 101 \text{ XOR } 100 \text{ XOR } 100 = (101)_2 = 5$

$h(\text{THE}) = 10100 \text{ XOR } 01000 \text{ XOR } 00101 = (11001)_2 = 25$

缺点：异或运算满足交换律，即 $a \text{ XOR } b = b \text{ XOR } a$，即有同样字母的单词有相同的散列地址。如 $h(\text{THE}) = h(\text{HTE}) = h(\text{ETH}) = h(\text{TEH})$

- **折叠法：对各子串进行求和操作得到地址**

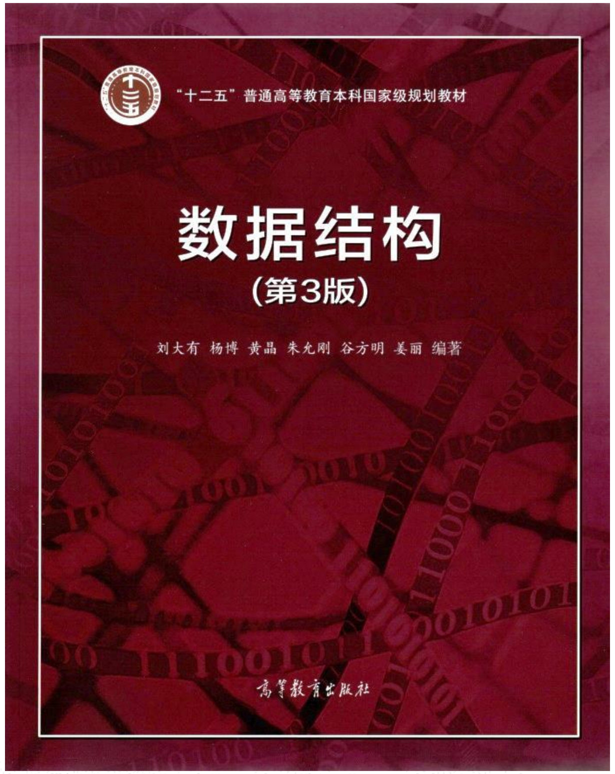
$h(123456789)=123+456+789=1368$ //自左向右，加法也满足交换律

$h(123456789)=123+654+789=1566$ //往复折返

抽取（数字分析）法

- 抽取关键词中的某几位，构成地址。例如
  h(1234567)=1357 //取十进制的奇数位
  h(THE)=h(1010001000000101)=$(101)_2$=5 //取二进制的第3位和后2位

- 函数值仅依赖关键词的部分位，而不是依赖整个关键词，容易出现冲突，如h(THE)=h(FROM)=h(ONE)=h(WE) =$(101)_2$= 5， h(1234567)= h(1639527)= h(1536517)=1357



散列查找

- 散列定义
- 散列函数
- **冲突处理方法**
- 散列表的删除
- 性能分析与应用

数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2023.12

zhuyungang@jlu.edu.cn

冲突处理方法

冲突处理方法

开散列法 —— 拉链法

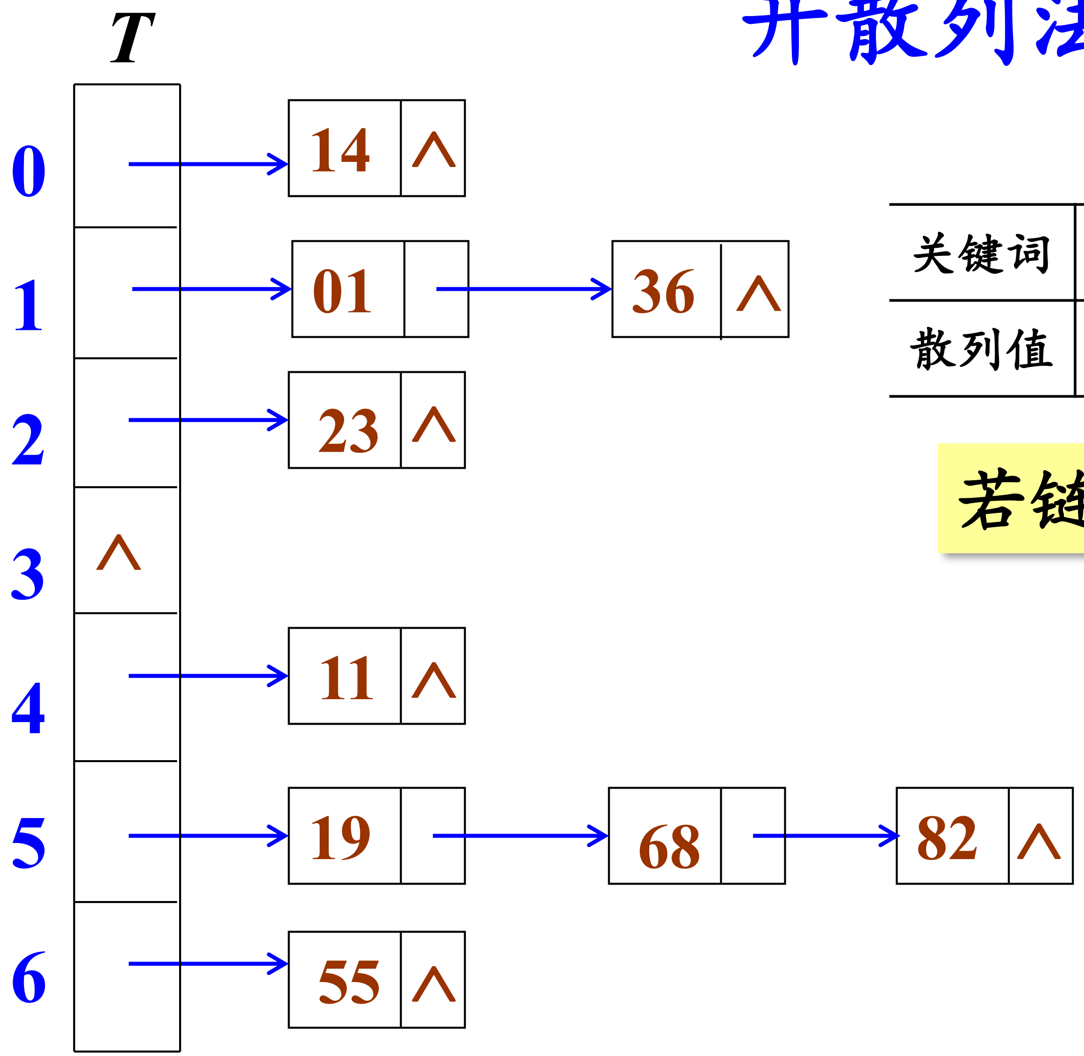
闭散列法（开放地址法）

线性探查

二次探查

双重探查

开散列法——拉链法



散列函数$h(K)=K \% 7$

关键词	19	01	23	14	55	68	11	82	36
散列值	5	1	2	0	6	5	4	5	1

若链表很长，可将其替代为跳表或查找树

✓ C++ STL: unordered_map
✓ Java: HashMap
链表长度大于8时转化为红黑树

拉链就是令散列地址等于*i*的记录组成一个链表，且指针T[*i*]是该单链表的头指针。

冲突处理方法

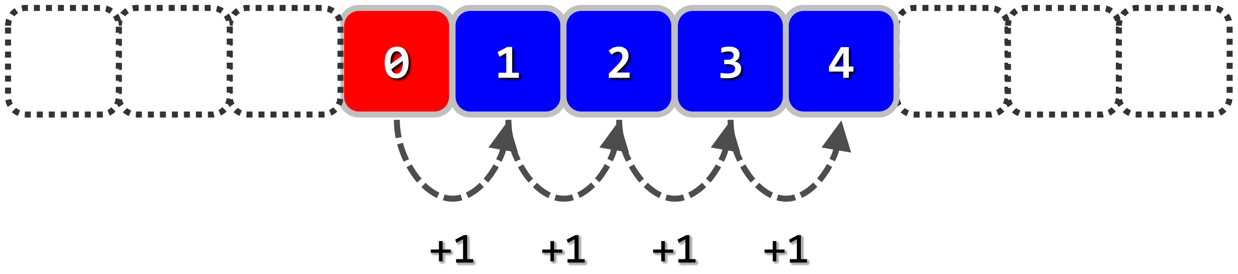
冲突处理方法

- 开散列法 —— 拉链法
- 闭散列法（开放地址法）
  - 线性探查
  - 二次探查
  - 双重探查

线性探查（测）

- 当发生冲突时，以固定的次序查找表中的记录，直到找到一个关键词为K的结点或者找到一个空位置。
- 其循环探查路径： $h_i = (\, h(K) + i\,)\ \%\ M$

  $h(K),\ h(K)+1,\ h(K)+2,\ h(K)+3,\ \ldots,\ M\text{-}1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ h(K)\text{-}1$
- 检查相邻元素，缓存命中率高。



线性探查：循环探查路径$h(K), h(K)+1, \ldots, M-1, 0, 1, \ldots, h(K)-1$

A

散列函数：$h(K)=K \% 10$

关键词 (K)	20	17	2	23	32	66	6	1
散列地址 $h(K)$	0	7	2	3	2	6	6	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1	2	23	32		66	17	6	

装载因子

$\alpha=8/10=0.8$

缺点：聚集现象，即很多元素连成一片，使探查次数增加。如查找31

设散列表空间大小为M，填入表中的元素个数是N，则称$\alpha= N / M$为散列表的“装载（填）因子（Load Factor）”。

- 实际应用时，常将散列表大小设计为 $\alpha=0.5\sim0.8$为宜。
- Java HashMap的α=0.75，超过此值将自动进行表扩容。
- C++ STL unordered map的α默认值1.0，可人为修改。

线性探查——平均查找长度（平均探测次数）

A

散列函数：$h(k)=K \% 10$

关键词 (K)	20	17	2	23	32	66	6	1
散列地址 $h(K)$	0	7	2	3	2	6	6	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1	2	23	32		66	17	6	

查找成功：查找的元素在散列表中。

- 输入种数等于表中实际元素个数，即8种。
- 第一种输入：查找的元素K等于20，元素比较1次
- 第二种输入：查找的元素K等于1，元素比较1次

…

$$ASL_{成功}=\frac{1}{8}(1+1+1+1+3+1+1+3)$$

虽然散列在关键词与记录存储位置之间建立了直接映射，但由于“冲突”的存在，仍有必要以平均查找长度来衡量散列表查找效率

线性探查——平均查找长度（平均探测次数）

散列函数：$h(k)=K\ \%\ 10$

关键词 (K)	20	17	2	23	32	66	6	1
散列地址 $h(K)$	0	7	2	3	2	6	6	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1	2	23	32		66	17	6	

查找不成功：查找的元素不在散列表中。

- 输入数据经散列函数计算后只可能映射到0..9的位置，故可能的输入有10种（散列函数值域）。
- 第一种输入：输入的K满足$h(K)=0$，探测6次
- 第二种输入：输入的K满足$h(K)=1$，探测5次

…

$$ASL_{不成功}=\frac{1}{10}(6+5+4+3+2+1+4+3+2+1)$$

A

课下练习

现有长度为7、初始为空的散列表HT，散列函数H(*K*)=*K*%7，用线性探查法解决冲突，将关键词22、43、15依次插入HT后，查找成功的平均查找长度是________。【2018年考研题全国卷】

$\frac{1}{3}(1+2+3)$

0	1	2	3	4	5	6
	22	43	15			

A

课下练习

0 ~ 6

现有长度为11且初始为空的散列表HT，散列函数是H(*K*)= $\boxed{K\%7}$，采用线性探查法解决冲突。将关键词序列87, 40, 30, 6, 11, 22, 98, 20依次插入HT后，HT查找失败的平均查找长度是__C__。【2019年考研题全国卷】

A 4 **B 5.25** **C 6** **D 6.29**

$\frac{1}{7}(9+8+7+6+5+4+3)$

24

30

39

42

关键词	87	40	30	6	11	22	98	20
散列值	3	5	2	6	4	1	0	6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98	22	30	87	11	40	6	20			

二次探查

C

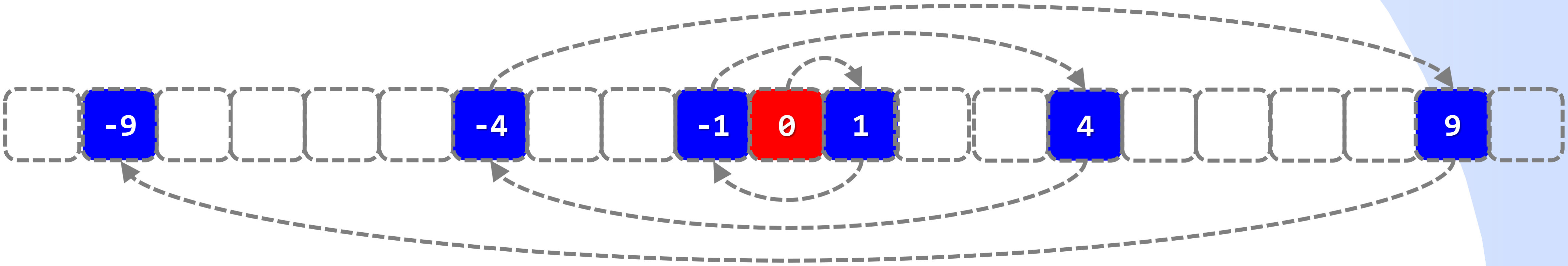
探测序列：$h_i = (h(K) \pm i^2)$ % M，其中i=1, 2, …, (M-1)/2, M为散列表长

其具体循环探查路径：

$h(K)$, $h(K)+1^2$, $h(K)-1^2$, $h(K)+2^2$, $h(K)-2^2$, $h(K)+3^2$, $h(K)-3^2$, …

以上各值均在 % M意义下

特点：一旦冲突，能更快的跳离“是非之地”，避免聚集



二次探查

散列函数：$h(k)=K \% 11$

关键词 (K)	19	1	23	14	55	68	11	82	36
散列值 $h(K)$	8	1	1	3	0	2	0	5	3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
55	1	23	14	36	82	68		19		11

其具体循环探查路径：

$h(K), h(K)+1^2, h(K)-1^2, h(K)+2^2, h(K)-2^2, h(K)+3^2, h(K)-3^2, \ldots$

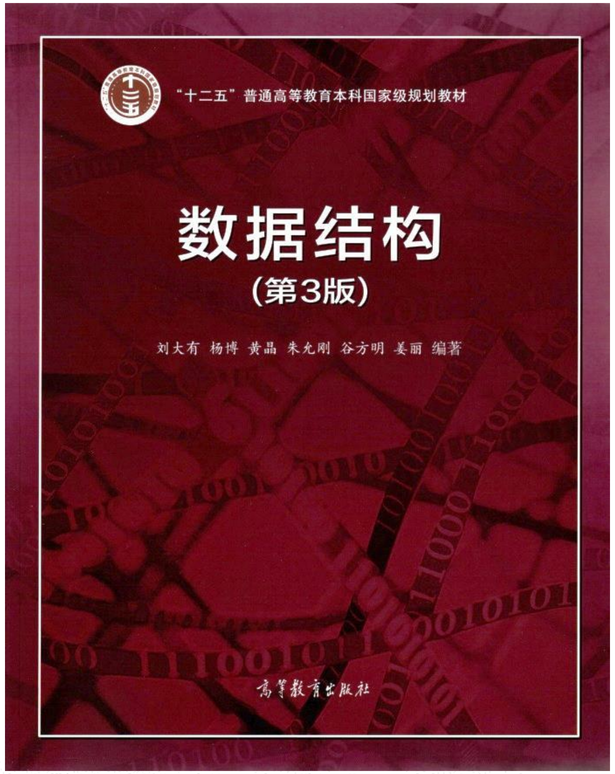
以上各值均在 $\% M$ 意义下

双重探查

- 从$h(K)$开始，寻找空地址时，所前进的步长不是固定的，而与K有关，即用$\delta(K)$代替线性探查的前进步长1 ($1\leq \delta(K) < M$) 。
- 循环探查路径：

  $h(K), h(K)+ \delta(K), h(K)+ 2\delta(K), \ldots$

  以上各值均在 % M意义下
- 为了确保表中的每一个地址都能探查到，要求$\delta(K)$和M互质，因此M应选作素数。



散列查找

- 散列定义
- 散列函数
- 冲突处理方法
- **散列表的删除**
- 性能分析与其他应用

数据之法
结构之美
算法之道

zhuyungang@jlu.edu.cn

散列表的删除

A

- 拉链法：链表删除。
- 闭散列法：以线性探查法为例，讨论散列表的删除过程。

散列函数：$h(k)=K \% 10$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	**21**	**31**	**51**					

- 元素不能直接删除，因为相应的位置可能引起过冲突，数据记录绕过该位置存在了别处，删除该位置将阻断查找其他元素的路径。例如对从上表删除1，把位置1清空，将导致查找21、31、51失败。

散列表的删除——方案1：懒惰删除

C

懒惰删除（Lazy Deletion）：并不真正的删除元素，而是将删除的位置做一个标记，其状态置为“已删除”，散列表中每个位置有3种状态：空的、已占用的、已删除的。

① 当查找一个关键词时，将跳过“已删除”的位置，就像它们是“已占用”的一样。

② 插入关键词时，则可被插入到“已删除”或者“空的”位置中。

散列函数：$h(k)=K \% 10$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	21	31	51					

散列表的删除——方案1

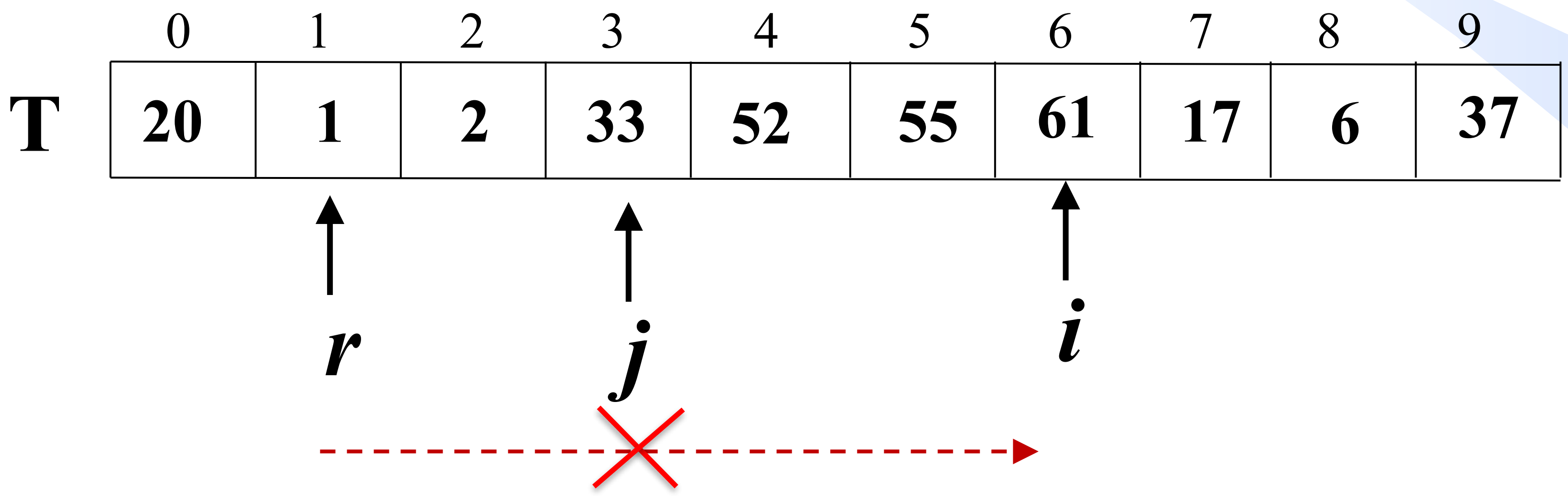
- **缺点：** 删除操作并不能把某位置真正变为空，在进行大量删除和插入操作后，“空的”位置将越来越少，每次不成功的查找将花费更长的查找长度，甚至为表长M。
- 例如对于下表，删除33后，再查找31。

散列函数：$h(k)=K \% 10$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1	21	33	54	65	66	17	6	37

散列表的删除——方案2：实时删除

情况1



删除T[j]= 33

$r \leftarrow h(\mathrm{T}[i])$

解决方案：T[j]←T[i]

该种情况：位置j清空后，会阻断r到i的探查路径

散列表的删除——方案2：实时删除

A

情况2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	**20**	**1**	**2**	**33**	**52**	**55**	**63**	**17**	**6**	**37**
		↑ j		↑ r			↑ i			

$r \rightarrow i$

删除T[j]= 1　　　$r \leftarrow h(\mathrm{T}[i])$　　　T[j]←T[i]？不需要

该种情况：r沿着探查方向先遇到i，$j < r \le i$
位置j清空后，不会影响由r探查到i

散列表的删除——方案2：实时删除

情况3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	20	1	2	31	52	55	6	17	6	37

$r \longrightarrow i$ $\qquad j$

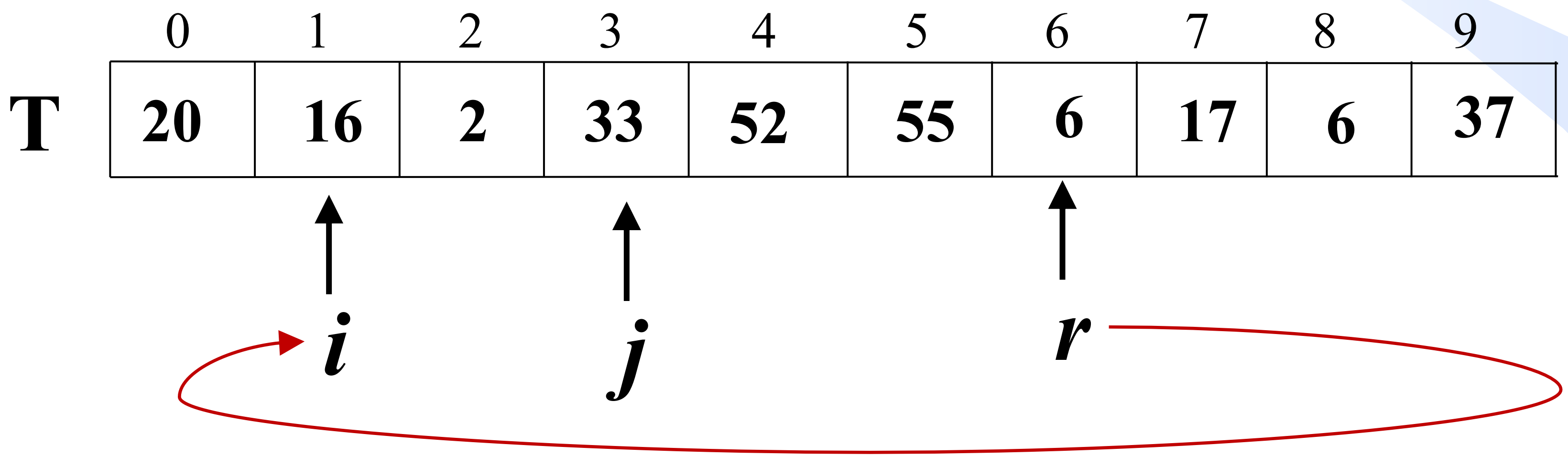
删除T[j]=6 $\qquad r \leftarrow h(\mathrm{T}[i])$ $\qquad$ T[j]←T[i]？不需要

该种情况：r沿着探查方向先遇到i，$r \le i < j$
位置j清空后，不会影响由r探查到i

散列表的删除——方案2：实时删除

A

情况4



删除T[*j*]= 33 $r \leftarrow h(\mathrm{T}[i])$ T[*j*]←T[*i*]？不需要

该种情况：*r*沿着探查方向先遇到*i*， $i < j < r$
位置*j*清空后，不会影响由*r*探查到*i*

散列表的删除——方案2总结

A

删除T[*j*]：将位置*j*清空，然后考察位置*j*+1到下一个空位前的每一个位置*i*，看将位置*j*清空后，是否阻碍查找T[*i*]的探查路径，若是则将T[*i*]前移至空位。

```
void HashRemove( ){ //伪代码
    T[j]置为空;
    //循环考查位置j+1到下一个空位前的每一个位置
    for(i=j+1; T[i]!=空; i=(i+1)%M){
       r=h(T[i]);
       if(r到i的探查路径被阻断) {
          T[j]=T[i]; T[i]置空; j=i; //T[i]前移且位置i变空
       }
    }
}
```

散列表的删除——方案2——练习

A

给定长度为13、初始为空的散列表HT[0..12]，散列函数$h(K)=K\%13$。在散列表中实时删除关键词9，写出删除过程依次移动了哪些关键词，并画出删除9后的散列表。【2020级期末考试题】

65	92	35	40	15	70				22	62	9	38
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

散列表的删除——方案2——练习

A

散列函数：$h(k)=K \% 13$

65	92	35	40	15	70				22	62		38
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

清空9

65	92		40	15	70				22	62	35	38
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

移动35

65	92	40		15	70				22	62	35	38
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

移动40

65	92	40	15		70				22	62	35	38
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

移动15

散列表的删除——方案2总结

B

- 最坏情况可能会遍历整个散列表，最坏时间O(n)。
- 可以证明[1,2,3]，当装填因子$\alpha \leq 2/3$，平均时间复杂度为O(1)。

[1] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein. Introduction to Algorithms (4th Edition). MIT Press, 2022.

[2] A. Pagh, R. Pagh, M. Ruzic. Linear probing with constant independence. Proceedings of the 39th annual ACM symposium on Theory of computing(STOC), 2007, 318-327.

[3] Mikkel Thorup. Linear probing with 5-independent hashing. http://arxiv.org/abs/1509.04549, 2015.

散列表的删除——方案3：延迟删除

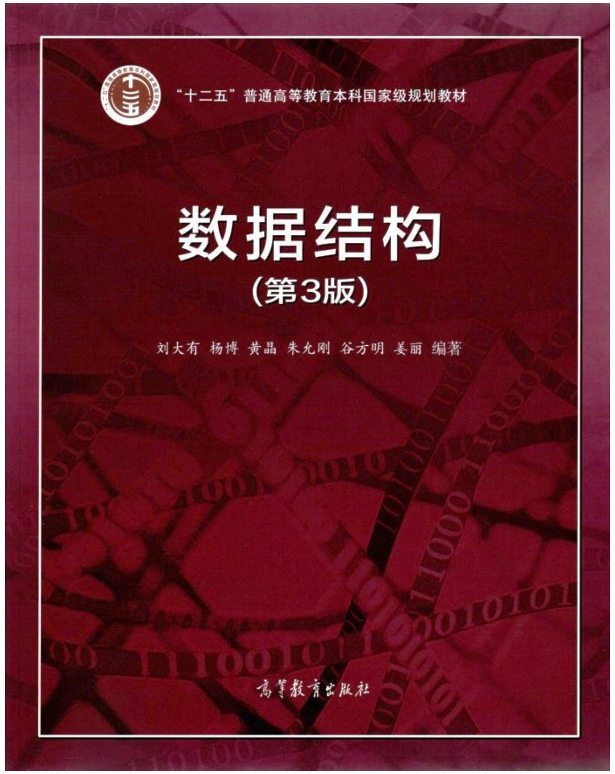
C

平时采用Lazy Deletion，每隔一段时间定期执行一次真正删除，把标记为“已删除”的结点真正清空：

✓可以保存每一个元素的访问次数。

✓将标记为“已删除”的位置清空，然后把元素按访问次数递减的顺序依次重新插入散列表，使被频繁访问的元素存储在接近其散列函数值的位置，有利于减少平均查找长度。

散列查找



- 散列定义
- 散列函数
- 冲突处理方法
- 散列表的删除
- **性能分析与其他应用**

数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2023.12

zhuyungang@jlu.edu.cn

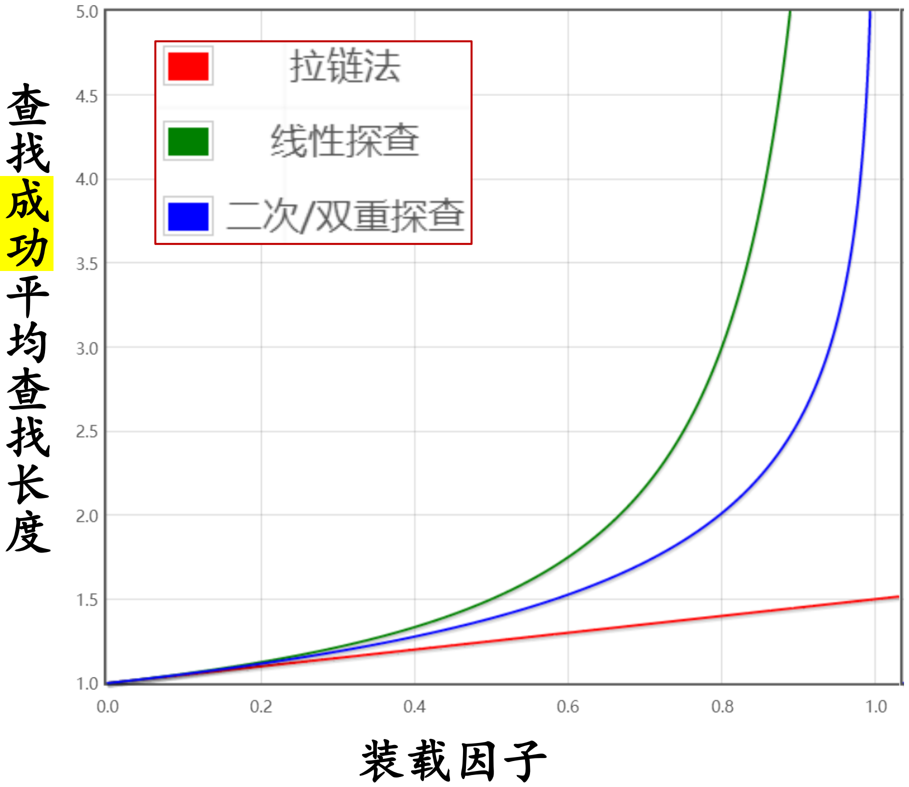
散列表的性能分析

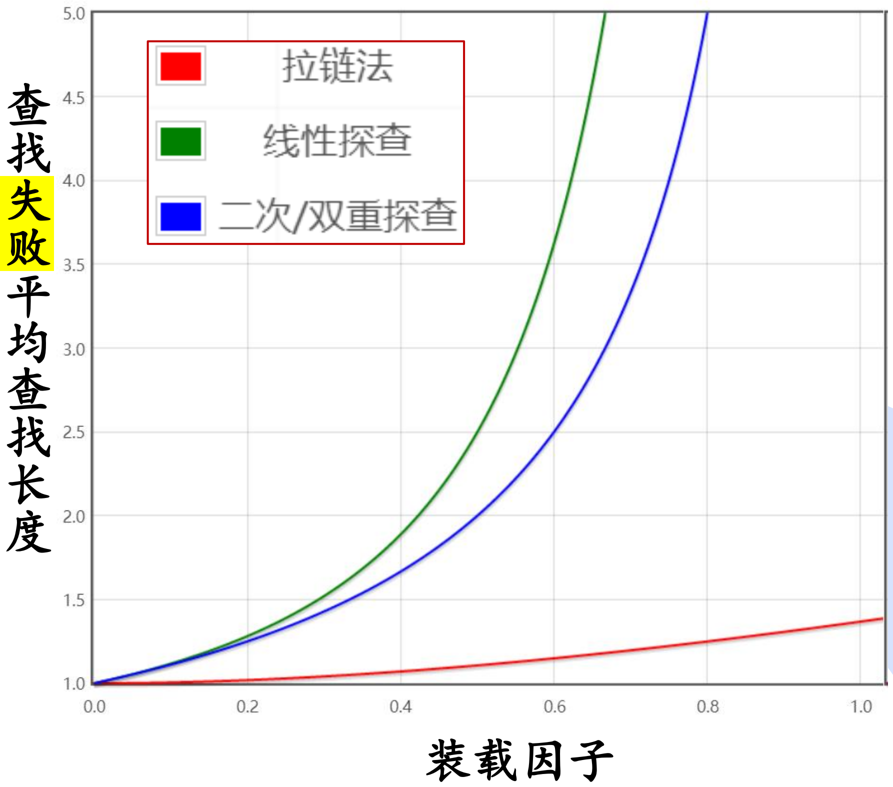
解决冲突的策略	平均查找长度	
	查找成功	查找不成功
拉链法	$1+\frac{\alpha}{2}$	$\alpha+e^{-\alpha}$
线性探查	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1-\alpha}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$
二次探查 双重探查	$\frac{1}{\alpha}ln\frac{1}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$

当装载因子α = 0.5时

- **对线性探查法，每次成功的查找操作平均需要1.5次探查，每次不成功的查找和插入平均需要2.5次探查。**
- **对二次探查和双重探查法，每次成功的查找操作平均需要1.39次探查，每次不成功的查找和插入平均需要2次探查。**

散列表的性能分析





- 装载因子越大，平均探测次数越多。
- 装载因子超过0.5时，散列表的性能急剧下降。
- 拉链法效率最高，实际系统中使用的散列大多采用拉链法，而且该方法易于实现，不会产生聚集现象，删除也方便。
- 线性探查法的数据访问具有很好的空间局部性，缓存命中率高

散列表 vs 线性表查找和树形查找

B

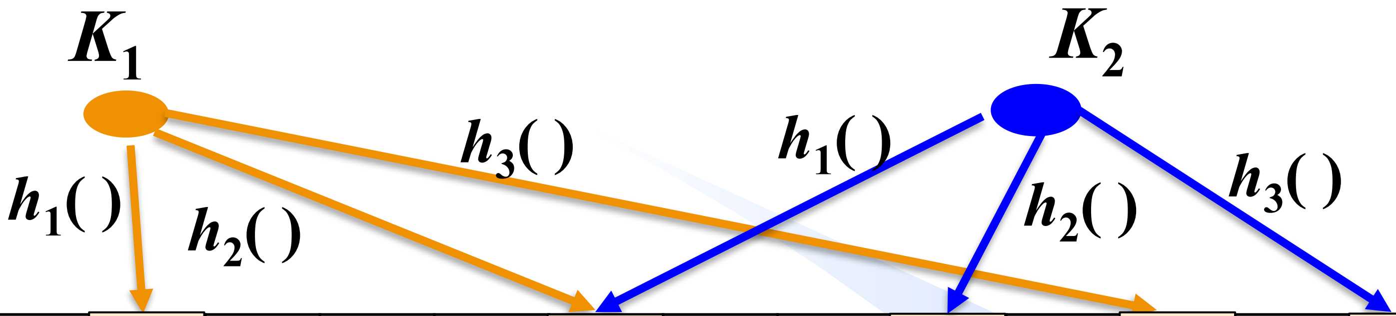
- 前面介绍的查找算法时间为O(log$n$)，而散列查找的时间理论上为O(1)，为什么有如此高效的查找方法还不放弃低效率的查找方法？
- 平均情况下，散列表时间更快。
- 但O(1)只是散列表理想情况下的性能，实际应用中时间性能随数据量、数据分布情况的变化而变化，最坏情况下时间可达O(n)。
- 散列表占空间大。需要控制装载因子（保证散列表中有一定的空闲单元），是以牺牲空间来换取时间。
- 在散列表中，查找失败后，仅能知道所找的关键词K不在表中。而以比较为基础的查找方法还能得到更多额外信息，如小于等于K的最大关键词和/或大于等于K的最小关键词，这在很多应用中是重要的。
- 查找树能更好的维护数据的“序”信息，如在BST中找最小元素/第k小元素只需O(log$n$)时间，而在散列表中则需要O(n)时间。

散列表的其他应用——浏览器恶意URL识别

D

将恶意网站的URL存入散列表，当用户准备访问某网址时，在哈希表里查找该网址?
缺点：恶意URL很多，散列表占较大内存。
希望：散列表无需存储关键词或数据元素。

布隆过滤器（Bloom Filter）



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0

- 查找成功：哈希值对应位都为1。查找失败：有1位为0。
- 存在误判：若查找结果是某个元素在表中，可能误判。若查找结果是某个元素不在表中，不会误判。
- 不能删除：因为某位可能多个关键词共用。
- Chrome浏览器：当用户访问某网址时，在本地Bloom过滤器查找该网址，若不在表中（不存在误判）则网址安全。若在表中（可能误判），则连接远程服务器做进一步检查。

课下思考

编写程序实现一个散列表。【某年腾讯校园招聘笔试最后一道大题】