最优化理论与方法

讲课人：吕茂斌

模式识别与智能系统研究所

北京理工大学自动化学院

lumaobin@bit.edu.cn

第二章 线性规划的性质

本章要点

- 2-1 标准形式
- 2-2 图解法
- 2-3 基本性质

20世纪数学的五大指导理论

Five Golden Rules：Great Theories of 20th Century Math and Why They Matter

- 线性规划
- 博弈论
- 非线性规划
- 计算/算法理论
- 组合最优化

线性规划–历史注记

1947年，George B. Dantzig 设计了单纯形法，这是解决线性规划问题的重要工具。单纯形法的影响如此普遍，以至于专家们估计，所有科学计算的10%到25%都用于这种方法。

线性规划-历史注记（Dantzig）

在没有线性规划之前，无法清晰地表示一般的目标，因此目标经常与为求解而设定的规则相混淆。

当我们询问军事指挥官他们的目标是什么的时候，他可能会说：“目标就是赢得战争。”若要求说得更详尽一些，海军指挥官可能会回答：“赢得战争的方法就是制造战舰。”而如果他是一位空军将领，他可能会说：“赢得战争的方法就是建立一支庞大的轰炸机队。”

这样实现目标的手段就变成了目标本身，而这又引出关于如何获得这些手段的基本规则，如怎样最佳地建立轰炸机队。这些手段反过来又混淆了目标。

标准形式

线性规划-食谱问题

我们人体每天需要一定量的两种维生素，V_c 和V_b。假设这些维生素可以分别从牛奶和鸡蛋中得到。

维生素	奶(g)中含	蛋(g)中含	每日需求
V_c (mg)	2	4	40
V_b (mg)	3	2	50
单价 ($)	3	2.5	

需要确定每天喝奶的量 x 和吃蛋的量 y。目标是以最低可能的花费购买这些食物，而满足最低限度的维生素需求量。

线性规划-食谱问题

食谱问题可以写成如下的数学形式：

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\quad & 3x + 2.5y \\
\text{s.t.}\quad & 2x + 4y \geq 40 \\
& 3x + 2y \geq 50 \\
& x, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

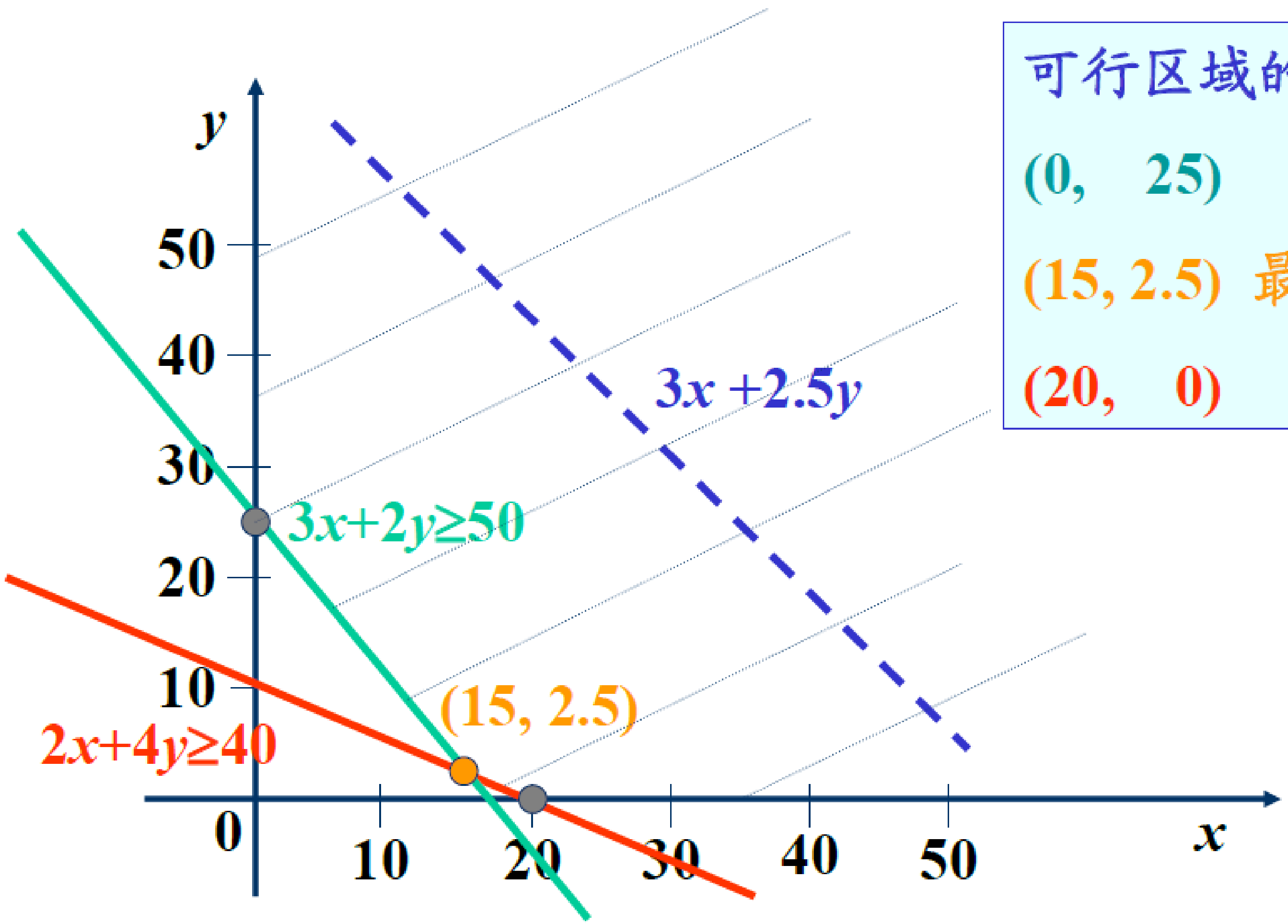
极小化目标函数

可行区域（单纯形）

可行解

关于何时出现最小费用（或者最大利润）的排序，或者计划，早期被标示为programs。求最优安排或计划的问题，称作programming问题。

线性规划-食谱问题



可行区域的极点:

(0, 25)

(15, 2.5) 最优解

(20, 0)

线性规划-标准形式

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

线性规划–矩阵表示

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

矩阵 $A: m \times n$

列向量 $x: n \times 1$

$b: m \times 1$，且假定$b \geqslant 0$

行向量 $c: 1 \times n$

化为标准形式

原因：单纯形法求解问题需要标准形式

- **变量没有非负限制：**

  如 x_j 无非负限制时，

  可令 $x_j = x_j' - x_j''$，$x_j' \geq 0$，$x_j'' \geq 0$

- **变量有上下界：** 如$x_j \geq l$ 时，可令x_j'=$x_j - l$,则$x_j' \geq 0$

  如$x_j \leq u$时，可令x_j'=$u - x_j$,则$x_j' \geq 0$

- $\boldsymbol{b_i \leq 0}$: 令$b_i' = -b_i$

- $\max z$: 令$z' = -z$,则$\min z' = -cx$

化为标准形式

- **引入松弛变量将不等式化为等式:**

如 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$

引入松弛变量 $x_{n+1} \geq 0$，目标函数不变

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

如 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$

引入松弛变量 $x_{n+2} \geq 0$，目标函数不变

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& \dots \dots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

目标函数不变

松弛变量

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
& \dots \dots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
& x_j \ge 0, j = 1,2, \dots, n+m
\end{aligned}
$$

图解法

图解法示例：

$$\min -x_1-3x_2$$
$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1+x_2\le 6, \\ & -x_1+2x_2\le 8, \\ & x_1,x_2\ge 0, \end{aligned}$$