# 最优化理论与方法

讲课人：吕茂斌
模式识别与智能系统研究所
北京理工大学自动化学院
lumaobin@bit.edu.cn

# 第三章 单纯形方法

## 本章要点

- 3-1 单纯形方法原理
- 3-2 两阶段法与大M法
- 3-3 退化情形
- 3-4 修正单纯形法
- 3-5 变量有界的情形

# 单纯形方法

- 线性规划问题的计算方法
- G.B.Dantzig在1947年提出

**基本思想:**

从一个基本可行解出发，求一个使目标函数值有所改善的基本可行解；通过不断改进基本可行解，力图达到最优基本可行解。

# 线性规划–历史注记

我记得我试图用很普通的语言向**冯•诺依曼**描述空军的问题的情形。我根据活动和项目等等条件给出了一个线性规划模型。

冯•诺依曼站起来了，说到：“噢，是这样！”在随后的一个半小时的时间里，他给我做了一个关于**线性规划**数学理论的演讲。

此刻，冯•诺依曼看到我目瞪口呆地坐在那里（因为我已经查过文献而一无所获），他说到：“我不希望你想象我像一个魔术师一样，不假思索地把所有这些东西从我的袖子里倒出来。我最近与**Morgenstern**完成了一本有关**博弈论**的书。我刚刚所叙述的就是猜想这两个问题是等价的。我刚才讲的理论与我们在博弈论中发展的一个理论极其相似。”

# 线性规划-历史注记（续）

在Dantzig刚刚给出了线性规划的单纯法不久，他参加了一次学术会议。在会上他讲解了他的方法。。。

当我讲完以后，会议主席征询意见和评论。死一般的寂静持续了一会儿后，一只手举了起来，那是**Hotelling**。

我需要解释以下， **Hotelling**非常胖。他喜欢在海里游泳。据说，当他在海里游泳时，能见到海平面明显升高。这个巨鲸似的人站在屋子的后面，他富有表情的胖脸上流露出我们所熟悉的那种无所不知的微笑。他说道：“但是我们都知道这个世界是非线性的。”

他对我的模型给予了毁灭性的批评以后，庄严地坐了下来。我，一个无名小卒，疯狂地试图给出一个合适的回应。

# 线性规划-历史注记（续）

突然，听众中另一只手举了起来，这次是**冯•诺依曼**。

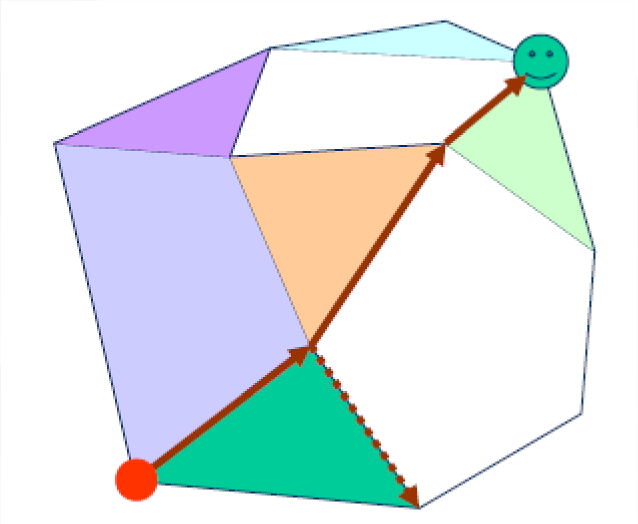
“主席先生，主席先生。” 他说道， “如果演讲者不介意的话，我愿意替他回答。” 我自然同意了。**冯•诺依曼**说道： “演讲人已经将他的演讲题目拟为‘线性规划’，并仔细地讲述了他的公理假设。如果你的问题满足这些公理假设，那么就可以很好地用这个方法。如果它不满足，那么就不用这个方法。” 随后他坐了下来。

当然，在最后的分析中**Hotelling**是正确的。这个世界是高度非线性的。幸运的是，与线性等式系统相比，线性不等式系统使得我们能近似在实际计划中所遇到的大多数线性关系。

# 单纯形方法原理

# 单纯形方法

第一步： 找到一个基本可行解（极点）；
第二步： 计算该点的判据函数；
第三步： 若无法改进，退出；
第四步： **否则选择一条棱，**
找到另一基本可行解（极点）；
回到第二步。



# 一、基本可行解的转换

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) = cx \\
s.t.\ & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

其中：

$A$ 是 $m\times n$ 矩阵，秩为 $m$

$c$ 是 $n$ 维行向量

$x$ 是 $n$ 维列向量

$b\geq 0$ 是 $m$ 维列向量

# 求基本可行解

当我们将矩阵 $A$ 的列进行适当调整以后, 记$A = [B, N]$，其中矩阵 $B$ 是一个 $m \times m$-维的可逆矩阵，而矩阵$N$是一个$m \times (n-m)$-维的矩阵。

则我们得到一个**基本可行解** $x^{(0)} = [B^{-1}b, 0]^T$ 。在$x^{(0)}$处函数值是 $f_0 = cx^{(0)} = (c_B, c_N)\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = c_B B^{-1} b$

$c_B$ ：$c$中与基变量对应的分量组成的$m$维行向量

$c_N$ ：$n$-$m$维行向量

# 求改进的基本可行解

设 $x=\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}$是任一个基本可行解 → $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$

$x_B$ 基变量

在点 $x$ 处的目标函数值

$$f=cx=c_Bx_B+c_Nx_N$$

$$=c_BB^{-1}b-(c_BB^{-1}N-c_N)x_N$$

$A=[B,N]=(p_1,p_2,\dots,p_n)$

$$=f_0-\sum_{j\in R}(c_BB^{-1}p_j-c_j)\,x_j$$

$R=\{m+1,\dots,n\}$非基变量下标集

$$=f_0-\sum_{j\in R}(z_j-c_j)x_j=f_0-\sum_{j\in R}\sigma_jx_j$$

$\sigma_j=z_j-c_j$

$z_j=c_BB^{-1}p_j$

# 求改进的基本可行解

$$f = f_0 - \sum_{j\in R}(z_j - c_j) = f_0 - \sum_{j\in R} \sigma_j x_j$$

如果$\sigma_j > 0$，则令$x_j$ 大于0将使目标函数值减少

选择 $k$ 令$\sigma_k = z_k - c_k = \max_{j\in R} \sigma_j$，$\sigma_j > 0$

由$x_k$零变为正数后，得到方程组$Ax=b$的解

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}p_k x_k = \bar{b} - y_k x_k \geq 0$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$y_k = B^{-1}p_k$$

# 求改进的基本可行解

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_k \leq \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$$

$$x_N = (0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0)^T$$

为使 $x_B \geq 0$ ，令

$$x_k = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \middle| y_{ik} > 0\right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

此时原基变量$x_{Br} = 0$，得到新的基本可行解

$$x = (x_{B1}, \ldots \ldots, x_{Br-1}, 0, x_{Br+1}, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T$$

**$x$一定为基本可行解**

# 求改进的基本可行解

新的基本可行解

$$x=(x_{B1},\dots\dots,x_{Br-1},0,x_{Br+1},\dots,x_k,0,\dots,0)^T$$

回顾： $A=[B,N]=(p_1,p_2,\dots,p_n)$

原来的基 $B=(p_{B1},\dots,p_{Br},\dots,p_{Bm})$ $m$个列线性无关

$$p_k=By_k=\sum_{i=1}^{m}y_{ik}p_{Bi}$$

即$p_k$是B的列向量的线性组合且系数$y_{rk}\neq 0$
因此用$p_k$取代$p_{Br}$后，得到的向量组

$$p_{B1},\dots,p_k,\dots,p_{Bm}$$

也是线性无关的。
因此新的可行解x的正分量对应的列线性无关

# 上述转换

- 非基变量$x_k \longleftrightarrow x_{Br}$基变量
- 在新的基本可行解处，$f$ 减少了 $\sigma_k x_k$
- 重复以上过程，可进一步改进基本可行解
- **直到** $\sigma_j$ **均非正数**，以致任何一个非基变量取正值都不能使目标函数值减少时为止

# 定理

若在**极小化**问题中，对于某个基本可行解，所有 $z_j - c_j \leq 0$，则这个基本可行解是最优解；

若在**极大化**问题中，对于某个基本可行解，所有 $z_j - c_j \geq 0$ ，则这个基本可行解是最优解。

其中

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} p_j - c_j \qquad j = 1, \dots, n$$

称 $z_j - c_j$ 为**判别数或检验数**。

# 二、单纯形方法计算步骤

$$\min \quad f(x) = cx$$
$$s.t.\ Ax = b$$
$$x \geq 0$$

其中：

$A$ 是 $m \times n$ 矩阵，秩为 $m$

$c$ 是 $n$ 维行向量

$x$ 是 $n$ 维列向量

$b \geq 0$ 是 $m$ 维列向量

# 二、单纯形方法计算步骤

**首先要给定一个初始基本可行解。**

**设初始基为$B$，然后执行下列主要步骤：**

1. 解$Bx_B = b$，求得$x_B = B^{-1}b = \bar{b}$，令$x_N = 0$，计算目标函数值$f = c_B x_B$

其中$A = [B, N]$，其中矩阵 $B$ 是一个 $m \times m$-维的可逆矩阵，而矩阵$N$是一个$m \times (n-m)$-维的矩阵。

# 二、单纯形方法计算步骤

2. 求单纯形乘子$w$，解$wB = c_B$，得到$w = c_B B^{-1}$。对于所有非基变量，计算判别数，$z_j - c_j = wp_j - c_j$。令

$$z_k - c_k = \max_{j \in R}(z_j - c_j)$$

若$z_k - c_k \leq 0$，则对于所有非基变量$z_j - c_j \leq 0$，对应基变量的判别数总是零，因此停止计算，现行基本可行解是最优解。否则，进行下一步。

# 二、单纯形方法计算步骤

3.解$By_k = p_k$ ，得到 $y_k = B^{-1}p_k$，若 $y_k \leq 0$，即 $y_k$ 的每个分量均非正数，则停止计算，问题不存在有限最优解。否则，进行4.。

$$A = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$
$$\bar{b} = B^{-1}b$$

4.确定下标$r$，使

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} | y_{ik} > 0\right\}$$

$x_{Br}$ 为离基变量，$x_k$为进基变量。用$p_k$ 替换$p_{Br}$ ，得到新的基矩阵$B$，返回步骤1.。

## 用单纯形方法解下列问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -4x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\
& x_1 - x_2 \le 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

## 用单纯形方法解下列问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -4x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\
& x_1 - x_2 \le 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

松弛变量

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -4x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 3 \\
& x_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, 5
\end{aligned}
$$

系数矩阵 $A = [B, N]$

$$A = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第1次迭代：$B = (p_3, p_4, p_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = c_B x_B = (0,0,0)(4,12,3)^{\mathrm{T}} = 0$$

$$w = c_B B^{-1} = (0,0,0)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = (0,0,0)$$

基变量的判别数均为0

$$z_1 - c_1 = wp_1 - c_1 = (0,0,0)(-1,2,1)^T + 4 = 4$$

非基变量的判别数，选择$k$=1

$$z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = (0,0,0)(2,3,-1)^T + 1 = 1$$

$x_1$为进基变量

计算$y_1 = B^{-1}p_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$

$$\bar{b} = x_B = (4,12,3)^T$$

$x_B$中第3个分量$x_5$为离基变量

确定下标$r$：

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r1}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_2}{y_{21}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{31}} \middle| y_{ik} > 0\right\} = \min\left\{\frac{12}{2}, \frac{3}{1}\right\} = 3 \quad = x_1 \rightarrow r = 3$$

用$p_1$替换 $p_5$，得到新基，进行下一次迭代

第2次迭代：$B=(p_3\ \ p_4\ \ p_1)=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$， $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$x_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\bar{b}_3\end{bmatrix}\qquad x_N=\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$f=-12$$

$$w=c_BB^{-1}=(0,0,-4)\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=(0,0,-4)$$

$$z_2-c_2=wp_2-c_2=(0,0,-4)(2,3,-1)^T+1=5$$

$$z_5-c_5=wp_5-c_5=(0,0,-4)(0,0,1)^T-0=-4$$

# 三、收敛性

令$\sigma_k = \max \sigma_j$

每次迭代必出现下列三种情形之一：

1. $\sigma_k \leq 0$：现行基本可行解就是最优解
2. $\sigma_k > 0$且$y_k \leq 0$：问题属于无界情形
3. $\sigma_k > 0$且$y_k > 0$：可求出新的基本可行解

若 $x_k = \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$ 则经迭代目标函数值下降

**定理:** 对于**非退化**问题，单纯形方法经**有限次迭代**或达到最优基本可行解，或得出无界的结论.

- 经迭代目标函数值减小→各次迭代得到的基本可行解互不相同
- 基本可行解的个数有限

# 四、使用表格形式的单纯形方法

$$\begin{aligned} \min \quad & f = cx \\ s.t. \ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

将问题写成等价形式：

$$\min \quad f$$

$$s.t. \quad f - c_B x_B - c_N x_N = 0 \qquad (1)$$

$$B x_B + N x_N = b \longrightarrow x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0$$

左乘$c_B$，加到（1）式，消去$x_B$项

$$f + 0 \cdot x_B + (c_B B^{-1} N - c_N) x_N = c_B B^{-1} b$$

等价形式

$$\min \quad f$$

$$s.t. \qquad x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$f + 0 \cdot x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0$$

约束方程的系数置于表中，得单纯形表

n-m列

$B^{-1}p_{Ni}$=$y_{Ni}$

| | $f$ | $x_B$ | $x_N$ | 右端 |
|---|---|---|---|---|
| $x_B$ | 0 | $I_m$ | $B^{-1}N$ | $B^{-1}b$=$\bar{b}$ |
| $f$ | 1 | 0 | $c_B B^{-1}N$−$c_N$ | $c_B B^{-1}b$ |

去掉

$\sigma_B$

m维行向量

$\sigma_N$=$z_N - c_N$

n-m维列向量

现解的$f$值

# 3-1 单纯形方法原理

| | $x_{B_1}$ | … | $x_{B_r}$ | … | $x_{B_m}$ | … | $x_j$ | … | $x_k$ | … | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{B_1}$ | 1 | … | 0 | … | 0 | … | $y_{1j}$ | … | $y_{1k}$ | … | $\bar{b}_1$ |
| … | … | | … | | … | | … | | … | | … |
| $x_{B_r}$ | 0 | … | 1 | … | 0 | … | $y_{rj}$ | … | $y_{rk}$ | … | $\bar{b}_r$ |
| … | … | | … | | … | | … | | … | | … |
| $x_{B_m}$ | 0 | … | 0 | … | 1 | … | $y_{mj}$ | … | $y_{mk}$ | … | $\bar{b}_m$ |
| $f$ | 0 | … | 0 | … | 0 | … | $z_j - c_j$ | … | $z_k - c_k$ | … | $\boldsymbol{c}_B\bar{\boldsymbol{b}}$ |

在单纯形表中包含了单纯形方法所需要的全部数据

# 用单纯形表求解线性规划问题:

假设$\bar{b} = B^{-1}\mathrm{b} \geq 0$

单纯形表中包含 $m$ 阶单位矩阵，因此已给出一个基本可行解，即$x_B = \bar{b}, x_N = 0$

若$c_B B^{-1}\mathrm{N} - c_N \leq 0$：现行基本可行解是最优解

若$c_B B^{-1}\mathrm{N} - c_N > 0$：用**主元消去法**求改进的基本可行解：

先选择进基变量。如在表的最后一行中，有$z_k - c_k = \max(z_j - c_j)$，则选择 $x_k$→对应的列为主列

再确定离基变量$x_{Br}$，令$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \middle| y_{ik} > 0\right\}$，第$r$行为主行，主元:$y_{rk}$

# 用单纯形表求解线性规划问题:

## 主元消去→把主列化为单位向量

（用主元 $y_{rk}$ 除第 $r$ 行（主行），再把 $r$ 行的若干倍分别加到各行，使各主列中各元素（$r$ 行除外）化为零）

**经主元消去，实现了基的转换 $x_k \longleftrightarrow x_{Br}$**

基变量的系数矩阵在表中总是单位矩阵，因此右端列b就是新的基变量的取值

# 用单纯形表求解线性规划问题:

## 主元消去前后在两个不同基下

判别数有下列关系：$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - (y_{rj}/y_{rk})(z_k - c_k)$

新基下 旧基下

主行的- $(z_k - c_k)/y_{rk}$ 倍加到最后一行得到的结果

目标函数值：$(c_B B^{-1} b)' = c_B B^{-1} b - (\bar{b}_r/y_{rk})(z_k - c_k)$

新基下 旧基下

主元消去后，最后一行仍然是判别数和目标函数值

## 例: 用单纯形方法解下列问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 10 \\
& 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
& -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 4 \\
& x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, 4
\end{aligned}
$$

**引入松弛变量$x_5$，$x_6$，把上述问题化为标准形式：**

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 10 \\
& 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = 8 \\
& -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_6 = 4 \\
& x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, 6
\end{aligned}
$$

把第2列化为单位向量

初始单纯形表

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 1 | 1 | −2 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $x_5$ | 2 | −1 | 4 | 0 | 1 | 0 | 8 |
| $x_6$ | −1 | $\boxed{2}$ | −4 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| | −1 | 2 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

主元是$y_{32}$

$r=3, x_6$出基　　$k=2, x_2$入基

$$\frac{\bar{b}_3}{y_{32}} = \min\left\{\frac{10}{1}, \frac{4}{2}\right\} = \frac{4}{2}$$

# 新基变量

把第3列化为单位向量

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 8 |
| $x_5$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | $\boxed{2}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 10 |
| $x_2$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $-2$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 |
| | $\boxed{0}$ | 0 | $\boxed{3}$ | 0 | 0 | $\boxed{-1}$ | $-4$ |

$k=3$, $x_3$入基

新$f$值

$$\frac{\bar{b}_2}{y_{23}} = \min\left\{\frac{10}{2}\right\} = \frac{10}{2}$$

$r=2$，$x_5$出基 主元是$y_{23}$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 8 |
| $x_3$ | $\frac{3}{4}$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 5 |
| $x_2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 12 |
| | $-\frac{9}{4}$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{7}{4}$ | $-19$ |

最优

所有判别数$z_j - c_j \leq 0$ →达到最优解

最优解：$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,12,5,8,0,0)$

最优值：$f_{\min} = -19$

例: 用单纯形方法解下列问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \\
& x_1 + 4x_2 - x_3 \le 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

等价于：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - x_2 + x_3 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad\qquad = 6 \\
& x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_5 = 4 \\
& x_j \ge 0 \qquad j = 1, \dots, 5
\end{aligned}
$$

# 3-1 单纯形方法原理

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 6 |
| $x_5$ | $\boxed{1}$ | 4 | $-1$ | 0 | 1 | 4 |
| | $-2$ | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 0 | $-3$ | $\boxed{3}$ | 1 | $-1$ | 2 |
| $x_1$ | 1 | 4 | $-1$ | 0 | 1 | 4 |
| | 0 | 7 | $-1$ | 0 | 2 | 8 |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | $-1$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $x_1$ | 1 | 3 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{14}{3}$ |
| | 0 | 6 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{26}{3}$ |

例：用单纯形方法解下列问题

$$\min \quad -3x_1 + x_2$$

$$s.t. \quad x_1 - x_2 + x_3 \leq 5$$

$$-2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | $\boxed{1}$ | $-1$ | 1 | 1 | 0 | 5 |
| $x_5$ | $-2$ | 1 | $-2$ | 0 | 1 | 10 |
| | 3 | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $-1$ | 1 | 1 | 0 | 5 |
| $x_5$ | 0 | $-1$ | 0 | 2 | 1 | 20 |
| | 0 | 2 | $-3$ | $-3$ | 0 | $-15$ |