最优化理论与方法

讲课人：吕茂斌
模式识别与智能系统研究所
北京理工大学自动化学院
lumaobin@bit.edu.cn

基本性质

可行域

定理　线性规划的可行域是凸集

在线性规划中，约束条件均为线性等式及不等式，满足这些条件的点的集合是凸集

最优极点

设可行域的极点为$x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$\ldots x^{(k)}$，极方向为$d^{(1)}$，$d^{(2)}$，$\ldots d^{(k)}$. 根据**表示定理**，任何可行点x可以表示为

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d^{(j)}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, k$$

$$\mu_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, l$$

§2.3 基本性质

得到以λ_j，μ_j为变量的等价的线性规划

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d^{(j)}$$

$$\min \quad \sum_{j=1}^{k} (cx^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (cd^{(j)})\mu_j$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, k \\ & \mu_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, l \end{aligned}$$

如某个$cd^{(j)} < 0$，因为μ_j可→+∞，所以目标函数→-∞，不存在有限最优值

如所有$cd^{(j)} \geq 0$，为极小化目标函数，

令$\mu_j = 0$.

则:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{k} (cx^{(j)}) \lambda_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, k$$

$$令\ cx^{(p)} = \min_{1 \leq j \leq k} cx^{(j)}$$

$$\lambda_p = 1, \lambda_j = 0, j \neq p$$

如所有$cd^{(j)} \geq 0$，为极小化目标函数，

令$\mu_j = 0$. 则:

$$cx = \sum_{j=1}^{k}(cx^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^{l}(cd^{(j)})\mu_j$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k}(cx^{(j)})\lambda_j$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k}(cx^{(p)})\lambda_j = cx^{(p)}$$

极点$x^{(p)}$是最优解

定理 设**线性规划**的可行域非空，
则有以下结论：

1. 存在有限最优解的**充要条件**是所有的$cd^{(j)}$**为非负数**. 其中$d^{(j)}$是可行域的极方向.

2. 若**线性规划**存在有限最优解，则目标函数的最优值可在某个**极点**上达到.

而把无界问题归入不存在最优解的情形

最优基本可行解

极点的代数含义：假设$A=[B,N]$，设矩阵 A 的秩为 m，B是 m 阶可逆矩阵。$x=[x_B,x_N]^T$

$$(B,N)\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}=b \qquad Bx_B+Nx_N=\mathrm{b}$$

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N \rightarrow$$

自由未知量，它们取不同的值就会得到方程组的不同的解

特别地，令x_N=0，则得到解

$$x=\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$$

假设$A=[B,N]$，设矩阵 A 的秩为 m，B是 m 阶可逆矩阵。$x=[x_B,x_N]^T$

定义：

$x=\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$称为方程组$Ax=b$的一个**基本解**；

B称为基矩阵，简称为**基**；

x_B的各分量称为**基变量**；

基变量的全体 $x_{B1},x_{B2},\dots,x_{Bm}$ 称为**一组基**；

x_N的各分量称为**非基变量**。

定义(续)：

又若 $B^{-1}b \geq 0$，则称该解x为约束条件$Ax=b$，$x \geqslant 0$的**基本可行解**

相应地:

- 称B为可行基矩阵
- $x_{B1}, x_{B2}, \ldots, x_{Bm}$为一组可行基
- 若 $B^{-1}\mathrm{b} > 0$，即基变量的取值均为正数，则称基本可行解是**非退化**的
- 如果$B^{-1}b \geq 0$且至少有一个分量是零，则称基本可行解是退化的基本可行解

例 考虑下列不等式定义的多面集：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

引进松弛变量x_3, x_4

$$A=[p_1, p_2, p_3, p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q1.

令 $B = (p_1, p_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

解得基本解：$x^{(1)} = (4,2,0,0)^{\mathrm{T}}$ ⟶ 基本可行解

$$B=(p_1,p_4)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$x^{(2)}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(8,0,0,2)^{\mathrm{T}}$$

$$B=(p_2,p_3)=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$x^{(3)}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(0,2,4,0)^{\mathrm{T}}$$

$$B=(p_2,p_4)=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$x^{(4)}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(0,4,0,-2)^{\mathrm{T}} \longrightarrow \text{基本解}$$

$$B=(p_3,p_4)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$x^{(5)}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(0,0,8,2)^{\mathrm{T}}$$

- 当A是$m \times n$矩阵，且秩为m时，基本可行解的个数不会超过

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

- 基本可行解对应可行域的极点

定理 令$K=\{x|Ax=b, x\geqslant 0\}$，$A$是$m\times n$矩阵，$A$的秩为$m$，则$K$的极点集与$Ax=b$，$x\geqslant 0$的基本可行解集等价

线性规划问题的求解，可归结为求最优基本可行解