第七章　参数估计

第七章 参数估计

- 点估计
- 估计量的评价标准
- 区间估计
- 正态总体均值与方差的区间估计
- 单侧置信区间

§1 点估计

总体是由总体分布来刻画的。

总体分布类型的判断——在实际问题中，我们根据问题本身的专业知识或以往的经验或适当的统计方法，有时可以判断总体分布的类型。

总体分布的未知参数的估计——总体分布的参数往往是未知的，需要通过样本来估计。通过样本来估计总体的参数。称为**参数估计**，它是统计推断的一种重要形式。

例 (1)为了研究人们的市场消费行为，我们要先搞清楚人们的收入状况。假设某城市人均年收入$X \sim N(\mu, \sigma^2)$。但参数μ 和σ^2的具体值并不知道，需要通过样本来估计。

(2)假定某城市在单位时间(譬如一个月)内交通事故发生次数$X \sim p(\lambda)$。参数λ未知，需要从样本来估计。

§1 点估计

试验 → 数据 → 分析判断

分析判断：
- 参数估计（总体参数）
  - 点估计
  - 区间估计
- 假设检验

例 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

若μ，σ^2未知，通过构造样本的函数，给出它们的 估计值 或 取值范围 就是参数估计的内容。

点估计

估计未知参数的值

区间估计

估计未知参数的取值范围，并使此范围包含未知参数真值的概率为给定的值。

§1 点估计

一、估计值和估计量

定 义

设$X_1, \cdots, X_n$是总体X的一个样本，其分布函数为$F(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$。其中θ为未知参数，Θ为参数空间，$x_1, x_2,\ldots, x_n$是相应的样本值。

点估计问题就是要构造一个适当的统计量。

用其观察值$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots x_n)$来估计未知参数$\theta$，称为$\theta$的估计值

用随机变量$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots X_n)$表示为$\theta$的估计量。

寻求估计量的方法

1. 矩估计法	2. 最大似然法
3. 最小二乘法	4. 贝叶斯方法

§1 点估计

Karl Pearson

- Karl Pearson（1857～1936），生卒于伦敦，公认为统计学之父。
- 1879年毕业于剑桥大学数学系，曾参与激进的政治活动，出版了几本文学作品，并且做了三年的律师实习。
- 1884年进入伦敦大学学院，教授数学与力学，在该校一直待到1933年。
- Weldon 1893年提出“所谓变异，遗传与天择事实上只是‘算术’”的想法。这促使 Pearson 在1893-1912年间写出18篇《在演化论上的数学贡献》的文章，而这门“算术”，也就是今日的统计。
- Pearson与Weldon等人于1901年创立统计的元老期刊《Biometrika》，由 Pearson 主编。但Pearson的主观性强，经常对他本人认为有“争议”的文章删改或退稿，并因此与英国本世纪最有才华的统计学家 Fisher 结下梁子。
- 1906年Weldon死后，Pearson不再注意生物问题，专心致志于将统计发展成一门精确的科学。

Review

二、矩估计法

矩估计法的理论基础：

(1) 样本矩 $A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$ 依概率收敛于相应的总体矩 μ_l， $l=1, 2, \ldots, k$

(2) 样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩的连续函数。

矩估计法

设总体的分布函数中含有 k 个未知参数 $\theta_1,\theta_2, \ldots,\theta_k$。

(1) 写出总体的前 k 阶矩 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$， 一般是这 k 个未知参数的函数，

记为：$\mu_i=\mu_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\quad i=1,2,\cdots,k$

(2) 从这 k 个方程中解出 $\theta_j=\theta_j(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)\quad j=1,2,\cdots,k$

那么用**诸 μ_i 的估计量 A_i** **分别代替**上式中的**诸 μ_i**，**即可得诸 θ_j 的矩估计量：**

$$\hat{\theta}_j=\theta_j(A_1,A_2,\cdots,A_k)\quad j=1,2,\cdots,k$$

二、矩估计法

即
$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \mu_2 = \mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \quad\vdots \\ \mu_k = \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \\ \theta_2 = \theta_2(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \\ \quad\vdots \\ \theta_k = \theta_k(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \end{cases}$$

以A_i分别代替上式的μ_i，i=1, 2, ..., k 表达式为

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X_i) \\ A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2} = E(X_i^{\ 2}) \\ \quad\vdots \\ A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ k} = E(X_i^{\ k}) \end{cases}$$

可得θ_i的**矩估计量**

$$\hat{\theta}_i = \theta_i(A_1, A_2, \cdots, A_k) \quad i = 1,2,\cdots,k.$$

矩估计量的观察值称为**矩估计值**。

二、矩估计法

例 设总体 X 在$[a,b]$上服从均匀分布，a，b 未知。$X_1, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本，试求 a，b 的矩估计量。

解： $\mu_1 = E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ $\quad \mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12} + \dfrac{(a+b)^2}{4}$

即 $$\begin{cases} a+b = 2\mu_1 \\ b-a = \sqrt{12(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \mu_1 - \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \\ b = \mu_1 + \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases}$$

以样本矩A_i分别代替上式的总体矩μ_i，$i=1, 2$，可得 a，b 的矩估计量为

$$\begin{cases} \hat{a} = A_1 - \sqrt{3(A_2 - A_1^2)}, \\ \hat{b} = A_1 + \sqrt{3(A_2 - A_1^2)}. \end{cases}$$

二、矩估计法

例 设总体 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, x>\theta \\ 0, x\le\theta\end{cases}$ 其中$\lambda(\lambda>0)$，θ都是未知参数；$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体X的样本，求θ，λ的矩估计量。

解： 因为 $\begin{cases}\mu_1=E(X)=\int_\theta^\infty x\lambda e^{-\lambda(x-\theta)}dx=\theta+\dfrac{1}{\lambda} \\ \mu_2=E(X^2)=\int_\theta^\infty x^2\lambda e^{-\lambda(x-\theta)}dx=\left(\theta+\dfrac{1}{\lambda}\right)^2+\dfrac{1}{\lambda^2}\end{cases}$

解得 θ，λ 的矩估计值分别为：$\begin{cases}\hat{\theta}=\bar{X}-\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \\ \hat{\lambda}=\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$

二、矩估计法

例 设总体X的均值μ和方差σ^2(>0)都存在且未知。$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自X的样本，试求μ和σ^2的矩估计量。

解：

$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \mu \\ \mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} \mu = \mu_1 \\ \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \end{cases}$$

于是μ和σ^2的矩估计量为

$$\begin{cases} \hat{\mu} = A_1 = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \end{cases}$$

二、矩估计法

例 设总体X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$

其中$\alpha>-1$是未知参数，$X_1, X_2,\ldots, X_n$是取自X的样本，求参数α的矩估计。

解： $\mu_1=E(X)=\int_0^1 x(a+1)x^a dx=(a+1)\int_0^1 x^{a+1}dx=\dfrac{a+1}{a+2}$

解得 $\alpha=\dfrac{2\mu_1-1}{1-\mu_1}$,

由矩法，可得α的据估计量 $\hat{\alpha}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$,

二、矩估计法

矩法的优点

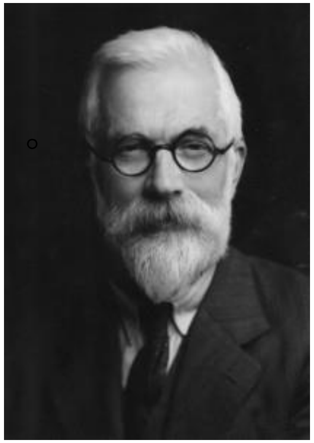
简单易行， 并不需要事先知道总体是什么分布

矩法的缺点

当总体类型已知时，没有充分利用分布提供的信息。一般场合下，矩估计量不具有唯一性。

其主要原因在于建立矩法方程时，选取那些总体矩用相应样本矩代替带有一定的随意性。

Ronald Aylmer Fisher



- R.A.Fisher（1890～1962)，生于伦敦，卒于Adleaide（澳洲）。
- 1912年毕业于剑桥大学数学系，后进修一年统计力学。
  1918年任罗坦斯泰德农业试验站统计试验室主任。
  1933年被聘为伦敦大学优生学教授。
  1943年任剑桥大学遗传学教授。
  1959年在澳大利亚联邦科学和工业研究组织的数学统计部作研究工作。

贡献

- 《研究工作者的统计方法》影响力超过半世纪，遍及全世界
- 《天择的遗传理论》将统计分析的方法带入演化论的研究，说明孟德尔的遗传定律与达尔文的理论并不像当时部份学者认为的互相矛盾，而是相辅相成的，为解释现代生物学的核心理论的夯实基础。

与Pearson的矛盾

- 在剑桥大学时，解决了高尔登相关系数的统计分布问题投稿到《Biometrika》
- Pearson看不懂论文内容，虽然验证Fisher结果的正确性依然要求其修改
- 一年后，Pearson发表了相关结果和统计表格，但Fisher的理论结果只被标注在不起眼的脚注里。
- 之后Fisher就再也没有在《Biometrika》上发表过任何的论文。

三、最大似然估计

矩估计法一般不涉及总体的分布类型，而实际问题中**总体的分布**类型常常是已知的，这**正是估计总体参数的最好信息**。在估计参数时，应充分利用这些信息。

一般来说，**最大似然估计的思想方法**是：

使我们的**估计**能够**最有利于**我们**已经观察到的结果**的出现

引例

三、最大似然估计

离散型总体的情况

似然函数的定义

一般, 设 X 为离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x\}=p(x;\theta),\quad x=\mu_1,\mu_1,\cdots,\theta\in\Theta$$

则 $X_1, X_2,\ldots, X_n$ 取到 $x_1, x_2,\ldots, x_n$的概率为

$$P\{X_1=x_1, X_2=x_2,\ldots, X_n=x_n\}=p(x_1;\theta)\,p(x_2;\theta)\ldots p(x_n;\theta)$$

记为$L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta)$ 或$L(\theta)$, 称为样本的**似然函数**。

即 $$\boxed{L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_k;\theta)=\prod_{i=1}^{k}p(x_i;\theta)}$$

三、最大似然估计

定 义

在一组样本值$x_1, x_2, \ldots, x_n$给定的条件下，若有$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Theta$

使得$L(\hat{\theta}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta)$，则称$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$\theta$的**最大似然估计值**。

而相应的统计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，称为$\theta$ 的**最大似然估计量**。

几点说明

1. 求似然函数$L(\theta)$ 的最大值点，　可以应用微积分中的技巧。

   通过求解方程$\dfrac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = 0$，可以得到$\theta$的最大值。

2. 用上述求导方法求参数的最大值行不通时，用最大似然原则来求。

3. 若概率函数中含有多个未知参数，则可解方程组$\dfrac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0$, 或 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = 0$

   得到θ_j的最大似然估计值，j=1, 2, ..., k。

三、最大似然估计

连续型总体情况

似然函数的定义

若X连续，且$X \sim f(x;\theta)$，则来自总体X的样本$X_1, X_2, ..., X_n$的联合密度为$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$，又设$x_1, x_2, ..., x_n$为相应样本$X_1, X_2, ..., X_n$的一个样本值。

则随机点$(X_1, X_2, ..., X_n)$落在点$(x_1, x_2, ..., x_n)$的邻域(边长分别为$dx_1, dx_2, ..., dx_n$的n为立方体)内的概率近似地为$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)dx_i$

那么 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ 称为样本的**似然函数**。

三、最大似然估计

连续型总体情况

似然函数的定义

注 未知参数可以不止一个，如$\theta_1,\ldots,\theta_k$，设$X\sim f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$，

则**定义似然函数**为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$$

$$-\infty<x_i<\infty,\quad i=1,2,\cdots,n,(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in\Theta$$

定 义

若$L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta)$，则称$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$\theta$的**最大似然估计值**。

而相应的统计量$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，称为$\theta$ 的**最大似然估计量**。

三、最大似然估计

求最大似然估计量的步骤

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} f(x;\theta)$ $\left(或\ p(x;\theta)\right), \theta\in\Theta$，试求$\theta$的最大似然估计。

(1) 做似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\left(或\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)\right)$$

(2) 做对数似然函数

$$\ln L(\theta)=\ln L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta)\left(或\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta)\right)$$

(3) 列出似然方程 $\dfrac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=0$

三、最大似然估计

例题

离散型总体的情况

例 设总体 X 服从0-1分布，且 $P\{X=1\}=p$，用最大似然法求 p 的估计值。

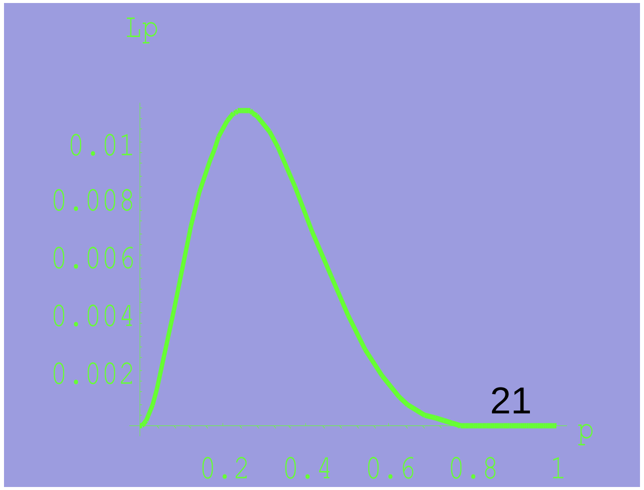
解： 总体 X 的分布律为 $P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}$， $x=0,1$。

设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为总体样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的样本值，则

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}$$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}=L(p)$$

对于不同的 p，$L(p)$ 不同，见右图



三、最大似然估计

现经过一次试验，事件$\{X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n\}$发生了，**则** p 的取值应使这个事件发生的概率最大。

在容许范围内选择p，使$L(p)$最大。注意到，$\ln L(p)$是 L 的单调增函数，故若某个p 使$\ln L(p)$最大, 则这个p 必使$L(p)$最大。

$$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}\overset{令}{=}0 \Rightarrow \hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

$$\left(\frac{d^2\ln L}{dp^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p^2}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-p)^2}<0\right)$$

所以$\hat{p}=\bar{x}$ 为所求 p 的最大似然估计值。

所以$\hat{p}=\bar{X}$为所求 p 的最大似然估计量。

这一估计量与矩估计量是相同的.

拓展到二项分布

三、最大似然估计

例　从批量很大的一批产品中，随机抽查n件，发现m件次品，求次品率p的最大似然估计。

解： 由于批量很大，可以认为样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$是相互独立的，且与总体 X 的同服从参数是p的两点分布，其分布律为：

$$f(x;p) = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0,1$$

似然函数为：$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

对似然函数求对数：$\ln L(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(p) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \ln(1-p)$

解似然方程 $\dfrac{d \ln L}{dp} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \dfrac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$

则p的最大似然估计为 $\hat{p} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} = \dfrac{m}{n}$

三、最大似然估计

例题

连续型总体的情况

例 设$X_1, \cdots, X_n$为取自$N(\mu, \sigma^2)$总体的样本，求参数μ, σ^2的最大似然估计。

解： 设$x_1,\ldots,x_n$是对应于样本$X_1,\ldots,X_n$的一个样本值. 则总体的概率密度函数为

$$f\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$$

似然函数为：

$$L\left(\mu,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i;\mu,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right]$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

三、最大似然估计

对似然函数求对数 $\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$

解似然方程 $\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) = 0 \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases}$

则μ, σ^2的**最大似然估计值**为

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$$

μ, σ^2的**最大似然估计量**为:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

与相应的矩估计值相同

三、最大似然估计

例 设总体X在$[a, b]$上服从均匀分布，参数a，b未知，$x_1, x_2, \ldots,$ x_n是来自总体X的一个样本值，试求a，b的最大似然估计。

解： 因为 X 的概率密度函数为 $f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & else\end{cases}$

似然函数为：$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, a\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le b\\ 0, else\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(a,b)}{\partial a}=-\dfrac{n}{(b-a)^{n+1}}\neq 0\\ \dfrac{\partial L(a,b)}{\partial b}=-\dfrac{n}{(b-a)^{n+1}}\neq 0\end{cases}$$

无解，故不能用此法求$L(a, b)$

三、最大似然估计

容易想到$L(a,b)$取最大值的充要条件是$b-a$取最小值，

但 a，b应满足： $a \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le b$

可见，当 $\begin{cases} a=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ b=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$ 时，

$b-a$达到最小值，从而$L(a,b)$达到最大值

于是， a，b的最大似然估计值为： $\begin{cases} a=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ b=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$

与前面矩估计法得到的估计量不同

三、最大似然估计

比较矩估计法与最大似然估计

矩估计法	VS	最大似然估计
可以不知道总体的分布类型，其理论基础为大数定理，所以一般要求样本容量较大。其只能估计与矩有关的参数。		必须知道总体分布的类型，它不仅可估计与矩有关的参数，还可估计其他复杂的参数。由于最大似然法充分利用了总体分布类型的信息，因而它具有许多优良性质。

在一定意义上，没有比最大似然估计更好的估计。

思考

是否服从任何分布的参数都能用矩估计和MLE估计？

当总体的同一个参数存在不同的估计量时，如何进行选择？选择估计量的标准是什么？

§2 估计量的评价标准

一、无偏性

定义

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体X的一个样本，$\theta \in \Theta$ (Θ是θ的取值范围)是包含在总体X的分布中的待估参数，若估计量$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的数学期望$E(\hat{\theta})$存在，且对于任意$\theta \in \Theta$有：

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称$\hat{\theta}$是θ的**无偏估计量**

若$E(\hat{\theta}) \neq \theta$，但当样本容量$n \to \infty$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}[E(\hat{\theta}) - \theta] = 0$

则称$\hat{\theta}$是θ的**无偏估计量**

若一个估计量不是无偏的，则称它为**有偏估计量**。

一、无偏性

例 设总体X的k阶矩 $\mu_k = E\left(X^k\right)(k \geq 1)$存在，又设$X_1, \cdots, X_n$是$X$的一个样本，试证无论总体服从什么分布，$k$阶样本矩是总体矩$\mu_k$的无偏估计。

证明： $X_1, \cdots, X_n$与X的同分布相互独立，故有

$$E\left(X_i^k\right) = E\left(X^k\right) = \mu_k, i = 1,2,\cdots,n$$

即有 $E(A_k) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \mu_k$

故 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是k阶总体矩μ_k的无偏估计。

§2 估计量的评价标准

一、无偏性

例 设总体X的k阶矩μ，方差$\sigma^2>0$都存在，μ，σ^2为未知参数，则σ^2的估计量：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \text{是有偏估计量。}$$

证明： $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$

则 $E\left(\hat{\sigma}^2\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-E\left(\overline{X}^2\right)$

由于：$E\left(X_i^2\right)=D\left(X_i\right)+\left[E\left(X_i\right)\right]^2=\sigma^2+\mu^2$

且：$E\left(\overline{X}^2\right)=D\left(\overline{X}\right)+\left[E\left(\overline{X}\right)\right]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$;

故：$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=\left(\sigma^2+\mu^2\right)-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$

§2 估计量的评价标准

一、无偏性

所以 $\hat{\sigma}^2$ 是有偏估计；若用$\hat{\sigma}^2$去估计σ^2，则平均偏小

由 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$， 故$\hat{\sigma}^2$是渐进无偏估计量。

另外，样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$

$$E\left(S^2\right) = E\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{n-1}{n}\frac{n}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2$$

即：样本方差S^2是总体方差σ^2的无偏估计，故一般采用S^2作为总体方差σ^2的估计量

§2 估计量的评价标准

一、无偏性

例　设$X_1,\cdots,X_n$是来自参数λ的泊松分布的一个样本，试证对任意值α，$0\le\alpha\le1$，$\alpha\overline{X}+(1+\alpha)S^2$都是参数为$\lambda$的无偏估计

证明： 设$X\sim\pi(\lambda)$，知$E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$；无论X服从什么分布，只要总体的一阶和二阶矩存在，则总有

$$E(\overline{X})=\lambda;\ E(S^2)=D(X)=\lambda$$

即：$\overline{X}$、S^2是λ的无偏估计

又因为：$E(\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2)=\alpha E(\overline{X})+(1-\alpha)E(S^2)=\lambda$

$\alpha\overline{X}+(1+\alpha)S^2$都是参数为$\lambda$的无偏估计

多个无偏估计中谁好？

二、有效性

如何衡量一个参数的两个无偏估计更好？

定义

设$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots X_n)$与$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots X_n)$都是$\theta$的无偏估计，若$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效

有效性的意义在于：用$\hat{\theta}$估计θ时，除无系统偏差外，还要求估计精度更高

例　设总体X的期望为μ，方差σ^2存在，$X_1,\cdots,X_n$是随机变量X的一个样本，证明估计μ时，$\hat{\mu}_1=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 比 $\hat{\mu}_2=\sum_{i=1}^{n}w_iX_i$ 有效，其中$w_i>0,\sum_{i=1}^{n}w_i=1$

二、有效性

证明： $E(\hat{\mu}_1)=E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$

$$E(\hat{\mu}_2)=E\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)=\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\mu=\mu$$

所以，$\hat{\mu}_1$、$\hat{\mu}_2$ 是$E(X)=\mu$的无偏估计

$$D(\hat{\mu}_1)=D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}\qquad D(\hat{\mu}_2)=D\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iD(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}c_i^{\ 2}$$

由柯西不等式得：$\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2\le n\sum_{i=1}^{n}c_i^{\ 2}$

从而：$D(\hat{\mu}_2)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}c_i^{\ 2}\ge\sigma^2\qquad D(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2=\frac{\sigma^2}{n}$

故 $\hat{\mu}_1$比 $\hat{\mu}_2$有效

最小方差无偏估计MVUE

三、相合性 (一致性)

估计量 $\hat{\theta}$ 的**无偏性**和**有效性**都是在**样本容量n固定**的情况下提出的

一个好的估计量$\hat{\theta}$，当**样本容量n越大**时，关于总体的信息也随之增加，该**估计也应该越精确越可靠**；特别**当n→∞时**，估计值将与参数值**几乎完全一致**，这就是估计量的**一致性** (或**相合性**)。

定义

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots X_n)$是未知参数$\theta$的估计量，若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$时，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots X_n)$依概率收敛于$\theta$，即对于任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right\}=1$$

称$\hat{\theta}$为θ的一致估计量或相合估计量，并记$\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta(n\to\infty)$

频率是概率的无偏、相合估计

§3 区间估计

估计量构造方法

抽样随机性

影响

点估计的精准度和可信度

估计值只能近似落在真值θ附近，即$\theta \in \left(\hat{\theta}-\delta,\ \hat{\theta}+\delta\right)$，而且由于抽样的随机性，由决定了$\theta \in \left(\hat{\theta}-\delta,\ \hat{\theta}+\delta\right)$ 具有一定的概率，即：

$$P\left\{\hat{\theta}-\delta < \theta < \hat{\theta}+\delta\right\}=1-\alpha$$

- 区间$\theta \in \left(\hat{\theta}-\delta,\ \hat{\theta}+\delta\right)$的长度反映了估计的精确程度
- $100(1-\alpha)\%$则反映了估计的可信程度

§3 区间估计

一、置信区间

定义

设总体X的分布函数$F(x,\theta)$包含一个未知参数θ，对于定值α $(0<\alpha<1)$，若由样本$X_1,\cdots,X_n$确定的两个统计量$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots X_n)$和$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots X_n)$满足：

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots X_n)\}=1-\alpha$$

则称随机区间$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha$的**置信区间**，$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$分别称为置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间的**置信下限**和**置信上限**，$1-\alpha$称为**置信水平**。

§3 区间估计

一、置信区间

置信区间的意义：

(1) 它以1–α 的概率包含未知参数θ

(2) 被估参数θ是一常数(虽然未知)，没有随机性，而区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$的两端点是随机的。

$P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots X_n)\} = 1-\alpha$ 的物理解释

对于重复抽样多次θ (各次的样本容量都是n)每次抽样得到的样本值都对应一个确定的区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$，每个这样的区间要么包含$\theta$的真值，要么不包含$\theta$ 的真值。

§3 区间估计

一、置信区间

按照伯努利大数定律，当抽样次数充分大时，在这些区间中包含θ 真值的频率接近于1–α，即在这些区间中包含真值θ 的约占100(1–α)%，不包含真值θ 的约占100α%

例　若α=0.01，重复抽样1000次，则得到的1000个区间中不包含θ真值的约有10个

例　设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2已知，若$X_1, \cdots, X_n$是来自总体X的样本，试求μ的置信度为1–α的置信区间

一、置信区间

解 因$\overline{X}$是μ的无偏估计，则有：$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

按标准正态分布的上α分位点定义：

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<Z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,\ Z_{\alpha/2}$$ 是标准正态分布的上α/2分位点

即：$\int_{Z_{\alpha/2}}^{\infty}\phi(x)\,dx=\dfrac{\alpha}{2}$ 则有：$P\left\{\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

从而得μ的一个置信度1−α的置信区间：$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$

可以简写为：$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$

一、置信区间

若取α=0.05， 1−α=0.95， σ=1， μ=16，则查表得：$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$

于是可以得到一个置信度为0.95的置信区间：

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right) \to \left(\bar{X} \pm \frac{1}{\sqrt{16}} 1.96\right) \to \left(\bar{X} \pm 0.49\right)$$

若可由一个样本值算得样本均值的观察值$\bar{X} = 5.20$，进而得到μ的置信度为0.95的一个置信区间:$(5.20 \pm 0.49) \Rightarrow (4.71,\ 5.69)$

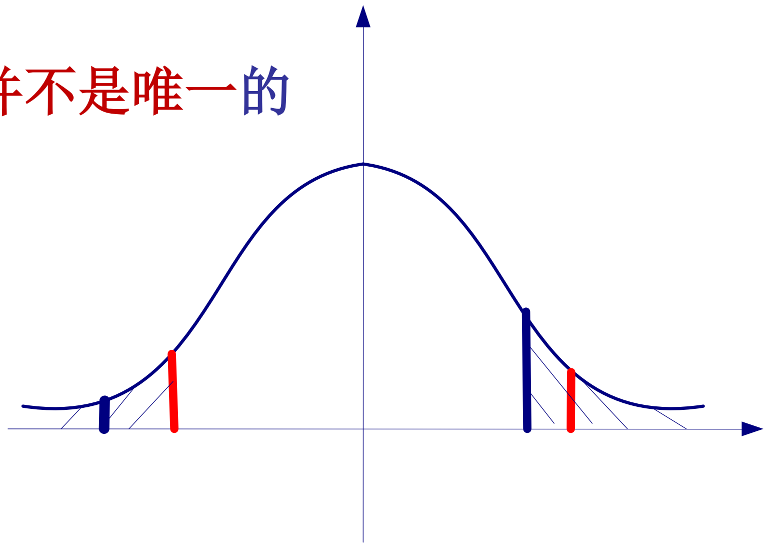
其意义为：若反复抽样多次，每个样本值(n=16)按上式确定一个区间，则这么多区间中，包含μ的约占95%，不包含μ的约占5%。

而今抽样区间为(4.71, 5.69)，则可以认为该区间包含μ这一事实的可信度为95%。

§3 区间估计

一、置信区间

置信度(置信水平)为1−α的置信区间并不是唯一的



$$P\left\{Z_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_2\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_2 < \mu < \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_1\right\} = 1-\alpha$$

于是，得到不是以为$\bar{X}$ 中心的置信区间：

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_2, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_1\right)$$

由 $Z_2 - Z_1 > 2Z_{\alpha/2}$，故两置信区间长度有如下关系：

$$(Z_2 - Z_1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 2Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

§3 区间估计

一、置信区间

当n固定时，$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$的长度最短

置信区间越短，表示估计精度越高

若记置信区间的长度为L，则：$L=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\Rightarrow n=\left(\frac{2\sigma Z_{\alpha/2}}{L}\right)^2$

(1) α给定时，n变大$\rightarrow L$变小

获取样本容量越大，估计越精确

(2) n给定时，$(1-\alpha)$变大 $\rightarrow Z_{\alpha/2}$ 变大 $\rightarrow L$变大

直观上讲，样本容量一定时，要求估计的可靠性高，则估计范围就大，估计精确性就差。

一般而言，估计可信度和精确度不可兼得。

通常α=0.05, 0.01, 或0.1；**越小可靠性越高**

一、置信区间

寻求未知参数θ的置信区间的具体做法如下：

1. 寻求一个样本$X_1, \cdots, X_n$是和参数θ的函数

$$Z = Z(X_1, X_2, \cdots X_n; \theta)$$

使Z 的分布不依赖于θ以及其他未知参数，称具有这种性质的函数Z为**枢轴量**

2. 对于给定置信度$1-\alpha$，定出两个常数a，b使得

$$P(a < Z = Z(X_1, X_2, \cdots X_n; \theta) < b) = 1 - \alpha$$

§4 参数正态总体均值和方差的区间估计

一、单个总体$N(\mu, \sigma^2)$的情形

设已给定置信水平1–α，并设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$为总体$N(\mu, \sigma^2)$ 的样本 $\overline{X}$，S^2 分别是样本均值和样本方差

1. 均值θ的置信区间

(1) 方差已知σ^2，对均值μ的区间估计

已得到μ的置信水平$1-\alpha$的双侧置信区间为：$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right)$

例 已知某种滚球直径服从正态分布，且方差为0.06，现从某日生产的一批滚球中抽取6只，测得直径的数据(单位：mm)为：14.6, 15.1, 14.9, 14.8, 15.2, 15.1试求该批滚球平均直径的95%的置信区间。

一、单个总体$N(\mu, \sigma^2)$的情形

解： $\sigma=\sqrt{0.06}$, $n=6$, $\bar{x}=14.95$; 当α=0.05时，查表得 $Z_{\alpha/2}=1.96$

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}=14.95-\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}\times1.96=14.75;$$

$$\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}=14.95+\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}\times1.96=15.15;$$

故所求置信区间为 (14.75，15.15)

例 上例中，若要求绝对误差不大于0.1mm，置信度仍为95%，问应抽几只滚球？

解： 因要求 $P\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le Z_{\alpha/2}\right\}=0.95 \Rightarrow \left|\bar{X}-\mu\right|\le\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}=0.1$

由$\sigma=\sqrt{0.06}$, $Z_{\alpha/2}=1.96$ 代入得 n =23.05 $\Rightarrow n=24$

即：实际应抽样24只

§4 参数正态总体均值和方差的区间估计

一、单个总体$N(\mu, \sigma^2)$的情形

(2) 方差σ^2未知，对均值μ的区间估计

在方差σ^2未知时，由于$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$中包含$\sigma$，故不能使用之前的方法进行估计

但考虑到S^2是 σ^2 的无偏估计，可考虑用S^2代替前面方法中的σ^2

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \Rightarrow P\left\{\frac{\left|\overline{X}-\mu\right|}{\sigma/\sqrt{n}} \le t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

故得到μ的置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间为：$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

§4 参数正态总体均值和方差的区间估计

一、单个总体$N(\mu, \sigma^2)$的情形

例　有一批零件，随机抽取9个，测得其长度(单位：mm)为：21.1, 21.3, 21.4, 21.5, 21.3, 21.7, 21.4, 21.3, 21.6设零件长度近似服从正态分布，试求总体均值μ的置信度为0.95的置信区间。

解： 我们知道，μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为：

$$\left(\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

$$\bar{x} = 21.4, \quad S = 0.17, \quad t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.3060$$

$$\text{从而} \left(\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right) \to (21.219, 21.531)$$

亦即估计零件长度的均值在21.219mm与21.531mm之间

这个估计的可信度为95%

§4 参数正态总体均值和方差的区间估计

一、单个总体$N(\mu, \sigma^2)$的情形

2. 方差σ^2的区间估计

考虑到S^2是σ^2的无偏估计，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

给定α，查χ^2分布表，可得临界值$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

一、单个总体$N(\mu, \sigma^2)$的情形

从而得σ^2的置信度$1-\alpha$的置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

而σ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为 $\left(\dfrac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi^2{}_{\alpha/2}(n-1)}}, \dfrac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$

例　有一批零件，随机抽取9个，测得其长度(单位：mm)为：21.1, 21.3, 21.4, 21.5, 21.3, 21.7, 21.4, 21.3, 21.6设零件长度近似服从正态分布，试求总体标准差σ的置信度为0.95的置信区间。

解： $\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，又S=0.17

则标准差σ的置信区间为：(0.148, 0.3257)

二、两个总体$N(\mu, \sigma_1^2)$和$N(\mu, \sigma_2^2)$的情形

实际中常遇到这样的问题：已知产品的某一质量指标服从正态分布，但由于设备条件不同，操作人员不同或工艺改变等因素，引起总体均值，总体方差有所改变。于是，我们想知道这些变化有多大，就需要考虑两个正态总体均值差和方差比的估计问题。

设已给定置信水平1–α，并设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$总体是分别来自于正态总体$N(\mu, \sigma_1^2)$ 和$N(\mu, \sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立

$\overline{X}, S_1^2 \rightarrow$ 总体$N(\mu, \sigma_1^2)$ 的容量为n_1的样本均值和样本方差

$\overline{Y}, S_2^2 \rightarrow$ 总体$N(\mu, \sigma_2^2)$ 的容量为n_2的样本均值和样本方差

二、两个总体$N(\mu, \sigma_1^2)$和$N(\mu, \sigma_2^2)$的情形

1. 两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的区间估计

(1) 方差σ_1^2和σ_2^2都已知

由 $\bar{X}, \bar{Y}$ 的独立性以及 $\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$ 得：

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

令 $U = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$ 则由 $P\{|U| \le Z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$

得到$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为1–α的置信区间为：

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

二、两个总体$N(\mu, \sigma_1^2)$和$N(\mu, \sigma_2^2)$的情形

(2) 方差$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$且未知时

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad 且\ S_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

得到$\mu_1 - \mu_2$的一个置信度为1–α的置信区间为：

$$\left((\overline{X} - \overline{Y}) \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

二、两个总体$N(\mu,\sigma_1^2)$和$N(\mu,\sigma_2^2)$的情形

例 为提高某一化学生产过程的效益，试图采用一种新的催化剂，为慎重起见，先在实验室进行试验。设采用原来的催化剂进行了n_1=8次试验，得效益的平均值$\bar{x}_1$=91.73，样本方差s_1^2=3.89；又采用新催化剂进行了n_2=8次试验，得到效益的平均值$\bar{x}_2$=93.75，样本方差s_1^2=4.02。假设两总体都可认为服从正态分布，且方差相等。试求两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.95的置信区间。

解： $$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{7\times3.89+7\times4.02}{8+8-2}}=\sqrt{3.96}$$

得到$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为0.95的置信区间为：

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm t_{0.025}(14)s_w\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}\right),\quad s_w=\sqrt{3.96}$$

由于所得置信区间包含零，故在实际中我们认为采用两种催化剂所得的效益的均值无显著差异。

二、两个总体$N(\mu, \sigma_1^2)$和$N(\mu, \sigma_2^2)$的情形

(3) 当方差σ_1^2 和 σ_2^2 未知，且$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$时

当n_1，n_2充分大时，$U = \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$

给定α，查$N(0, 1)$分布表得$Z_{\alpha/2}$，使得$P\{|U|<Z_{\alpha/2}\}\approx 1-\alpha$

$$P\left\{-Z_{\alpha/2} < \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$$

$$P\left\{(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}-\bar{Y})+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right\} \approx 1-\alpha$$

§4 参数正态总体均值和方差的区间估计

二、两个总体$N(\mu, \sigma_1^2)$和$N(\mu, \sigma_2^2)$的情形

得到$\mu_1-\mu_2$的一个置信度1–α的置信区间为：$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$

例　为比较两种枪弹的枪口速度(单位：m/s)，在相同条件下，进行速度测得样本平均值和样本标准差如下：

枪弹甲：$n_1=110, \bar{x}=2805, S_1=120.41;$

枪弹乙：$n_2=100, \bar{y}=2680, S_2=105.00$

试求两种枪弹的枪口平均速度之差$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.95的置信区间。

解：　因n_1，n_2都很大，故可以采用上式计算；$Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}=1.96$，从而

$n_1=110, \bar{x}=2805, S_1=120.41;$

所以，$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.95的置信区间为：

(109.44, 140.56)

二、两个总体$N(\mu, \sigma_1^2)$和$N(\mu, \sigma_2^2)$的情形

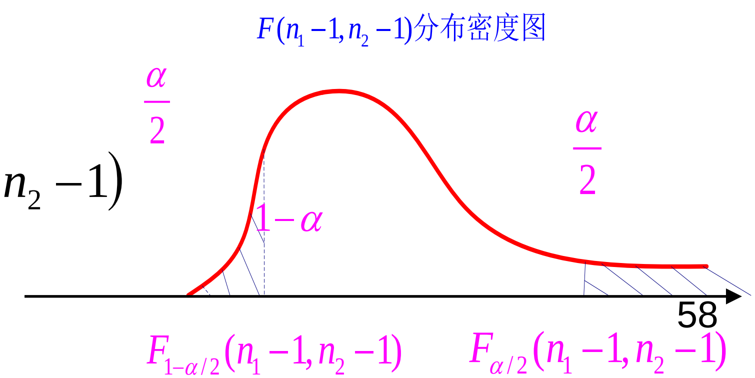
2. 两总体差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

仅讨论μ_1和μ_2都未知的情况

因 $\begin{cases} \dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1) \\ \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1) \end{cases}$ 且 $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}, \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$ 相互独立

由 F分布定义：

$$F=\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)}=\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$



二、两个总体$N(\mu, \sigma_1^2)$和$N(\mu, \sigma_2^2)$的情形

给定α，查 F分布表可得临界值$F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$和$F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

使得 $P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \dfrac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$

$$P\left\{\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < \frac{S_2^2}{S_1^2}F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$$

从而得到$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为1–α的置信区间

$$\left(\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1), \frac{S_2^2}{S_1^2}F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right)$$

当置信区间的上限小于1，$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$；当置信区间下限大于1，$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

二、两个总体$N(\mu, \sigma_1^2)$和$N(\mu, \sigma_2^2)$的情形

例　设有两正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其中参数均未知，随机地从两总体中分别抽取容量为10和15的独立样本，测得样本方差分别为 $S_1^2=0.21$，$S_2^2=0.67$

求总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为0.95的置信区间

解：　这里α=0.05，n_1=10，n_2=10

于是　$F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)=F_{0.025}(9,14)=3.21;$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)=F_{0.975}(9,14)=\frac{1}{F_{0.025}(14,9)}=\frac{1}{3.80}\qquad \frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{0.21}{0.67}=0.31$$

代入$\left(\dfrac{S_2^2}{S_1^2}F_{1\text{-}\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1),\dfrac{S_2^2}{S_1^2}F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)\right)$可得

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为0.95的置信区间为(0.096, 1.18)

§5 单侧置信区间估计

一、单侧置信区间估计引入与定义

某些实际问题，往往只关心θ的一个方向上的界限

- 产品废品率p的上界是多少
- 平均寿命的下界是多少

如何确定？

这就是单侧置信区间估计

定义

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本，θ是包含在总体分布中的一个未知参数，对于定值α ($0<\alpha<1$)，若统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots X_n)$

满足：$P\left\{\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots X_n)<\theta\right\}=1-\alpha$

则称随机区间$(\hat{\theta}, +\infty)$是参数θ的置信度为$1-\alpha$的**单侧置信区间**，$\hat{\theta}$称为置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间的**置信下限**或**置信下界**

§5 单侧置信区间估计

一、单侧置信区间估计引入与定义

定义

又若统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots X_n)$满足：

$$P\left\{\theta<\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots X_n)\right\}=1-\alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta},+\infty)$是参数θ 的置信度为$1-\alpha$ 的**单侧置信区间**，$\hat{\theta}$ 称为置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间的**置信上限**或**置信上界**

对于单侧置信区间问题的讨论，基本上与双侧区间估计的方法相同精度的标准不能像双侧区间那样用置信区间的长度来刻画

给定置信度$1-\alpha$， 选择**置信下界** $\hat{\theta}$ ，应使$E(\hat{\theta})$**越大越好**

给定置信度$1-\alpha$， 选择**置信上界** $\hat{\theta}$ ，应使$E(\hat{\theta})$**越小越好**

一、单侧置信区间估计引入与定义

例　对于正态总体X，若均值μ，方差σ^2均未知，设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本。

由 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 可得：$P\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即 $P\left\{\mu > \bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$

得到μ的一个置信度为1–α的单侧置信区间为：$\left(\bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1),\ \infty\right)$

μ的一个置信度为1–α的单侧置信下限为：$\underline{\mu} = \bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$

一、单侧置信区间估计引入与定义

又由 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 可得：$P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{1-\alpha}{}^2(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即 $P\left\{\sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}{}^2(n-1)}\right\} = 1-\alpha$

得到σ^2的一个置信度为1−α的**单侧置信区间**为：$\left(0, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}{}^2(n-1)}\right)$

σ^2的一个置信度为1−α的**单侧置信上限**为：$\overline{\sigma}^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}{}^2(n-1)}$

一、单侧置信区间估计引入与定义

例　从一批灯泡中随机抽取5只作寿命试验，测得寿命(以小时计)为：1050, 1100, 1120, 1250, 1280，设灯泡寿命服从正态分布，求灯泡寿命平均值的置信度为0.95的单侧置信下限。

解：　因为$1-\alpha=0.95$，$n=5$，$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318$

$\bar{x}=1160,\quad S^2=9950$

则代入公式求得单侧置信下限为：$\underline{\mu}=\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065$

假设检验的引出

例. 为比较两个稻种的产量，选择了25块条件相似的试验田，采用相同的耕作方法作试验，结果播种甲稻种的13块田的亩产量与播种乙稻种的12块田的亩产量（500g/亩）分别为 甲稻种：880，1120，980,885，828,927，924,942，766,1180，780,1063，650；乙稻种：940，1142，1020，785,645，780,1180，680,810，824,846，780, 希望知道这两个稻种平均产量之差的置信区间，如果置信度为95%的话。

谢 谢!