概率论、统计和随机过程

任课教师：余锦华
yjh@fudan.edu.cn
31242529
江湾交叉二号楼B5017

- 盛骤，谢式千，潘承毅. 概率论与数理统计（第四版）. 北京：高等教育出版社,2010.
- A Papoulis, S U Pillai. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill Europe, 2002
- 李贤平, 沈崇圣,陈子毅. 概率论与数理统计. 复旦大学出版社, 2003.
- 茆诗松, 程依明, 濮晓龙．概率论与数理统计教程(第二版)．北京：高等教育出版社，2004．
- 陈希孺. 概率论与数理统计（陈希孺文集）. 中国科学技术大学出版社. 2013.

第一章 概率论的基本概念

第二章 随机变量及其分布

第三章 多维随机变量及其分布

第四章 随机变量的数字特征

第五章 大数定理及中心极限定理

第六章 样本及抽样分布

第七章 参数估计 (1,3,4,5,7)

第八章 假设检验 (1-3)

第十二章 随机过程及其统计描述 (1-3)

第十四章 平稳随机过程 (1-3)

工具：

- 高数（微积分）
- Matlab （编程、作图）
- SPSS （统计分析）

Project：

- Monte Carlo方法及概率计算
- 基于图像统计特性的图像处理
- SPSS统计分析

助教：

李云开　23210720202@m.fudan.edu.cn

黄敏诗　24210720202@m.fudan.edu.cn

第一章 概率论的基本概念

一、概率统计的发展历程

- 十七世纪中叶，**赌博问题**刺激了数学家们对**概率论问题**的思考
- 数学家**费马**和**帕斯卡**就**如何分配赌注的问题**进行了讨论。从不同的理由出发，在**1654年7月29日**给出了正确的解法。
- **1657年**，荷兰数学家**惠更斯**用自己的方法解决了这一问题，更写成了**《论赌博中的计算》**一书，**这就是概率论最早的论著**

费马

帕斯卡

惠更斯

三人提出的解法中，都首先涉及了数学期望这一概念，并由此**奠定了古典概率论的基础。**

Story

一、概率统计的发展历程

- 雅各布-伯努利建立了概率论中的第一个极限定理，称为“伯努利大数定理”
- 1730年，法国数学家棣莫弗出版其著作《分析杂论》，当中包含了著名的“棣莫弗—拉普拉斯定理”是概率论中第二个基本极限定理的原始初形
- 拉普拉斯在1812年出版的《概率的分析理论》中，首先明确地对概率作了古典的定义。
- 泊松推广了伯努利形式下的大数定律，研究得出泊松分布。
- 1901年，中心极限定理终于被严格的证明
- 20世纪的30年代，人们开始研究随机过程，1931年，马尔可夫过程的理论奠定了其地位


雅各布·伯努利


棣莫弗


拉普拉斯


泊松

二、概率统计实例

历次人口普查中国人口性别比

普查年	总人口（亿）	性别比
1953年	5.82	107.6
1964年	6.95	105.5
1982年	10.08	106.3
1990年	11.34	106.6
2000年	12.66	106.7

1990～2000年中国分孩次出生性别比

	合计	一孩	二孩	三孩
1990年	111.3	105.2	121.0	127.0
1995年	115.6	106.4	141.1	154.3
2000年	116.9	107.1	151.9	159.4

中国出生性别比升高的原因探讨

根本原因

传统的重男轻女观念主导着强烈的“生男”偏好。这种性别偏好实际上是性别不平等必然导致的性别比失调

实现途径

①产前性别检测；

②产时溺弃女婴；

③产后隐报瞒报。

二、概率统计实例

人口年龄构成

年龄构成亦是人口的自然构成之一。国际社会通常按一定特征把一个人口群划分为“少儿人口”、“成年人口”和“老年人口”这样三大人口组。

- 少儿人口：0-14岁
- 成年人口：15-60岁或15-64岁
- 老年人口：≥60岁或≥65岁

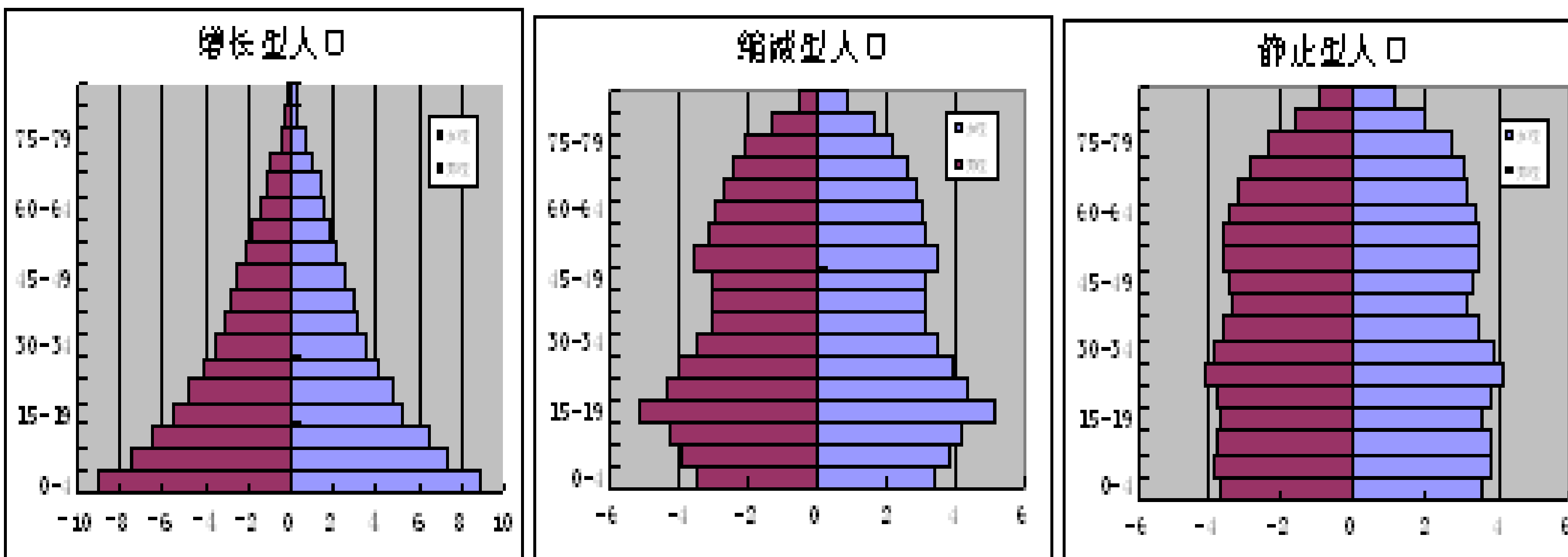
桑德巴模式：
按年龄分组划分的人口再生产类型

	0~14岁	15~49岁	≥50岁
增长型	40.0	50.0	10.0
静止性	26.5	50.5	23.0
减少型	20.0	50.0	30.0

二、概率统计实例

人口金字塔

人口金字塔是按人口年龄和性别表示人口分布的特种塔状条形图，是形象地表示某一人口的年龄和性别构成的图形



三种典型的人口年龄金字塔图示

§1 概率统计的发展历程

二、概率统计实例

数字传达的信息

不同原因所引起的寿命损失

原因	天数	原因	天数
未结婚(男性)	3500	饮酒	130
惯用左手	3285	枪炮事故	11
未结婚(女性)	1600	自然放射线	8
30%超重	1300	医疗X–射线	6
20%超重	900	咖啡	6
吸香烟(男性)	2250	口服避孕药	5
吸香烟(女性)	800	减肥饮料	2
抽雪茄	330	PAP检验	–4
用烟斗抽烟丝	220	家里有烟雾警报	–10
危险工作，事故	300	带有气垫的轿车	–50
一般工作，事故	74	移动冠状动脉监护器	–125

第一章 概率论的基本概念

基本概念摘要

§1 随机试验

随机试验特点

- 随机试验
  - 可重复性 — 可在相同条件下重复进行
  - 不可预知性 — 每次结果不止一个
  - 总体结果的可预测性 — 事先明确试验的所有可能结果

Story　Case

- 事件
  - 随机事件 —— 样本空间S的子集
  - 必然事件 —— 样本空间S自身
  - 不可能事件 —— 空集

基本事件：样本空间S的单个元素组成的子集称为基本事件

随机事件：随机现象的某些样本点组成的集合称为随机事件，简称事件

必然事件： 样本空间S的最大子集(即S本身)，称为必然事件

不可能事件：样本空间S的最小子集(即空集∅)，称为不可能事件

§2 样本空间、随机事件

样本空间：随机试验E所有的可能结果组成的集合，记为S

→事例E_1、S_1：　$\{0,1,2,3,4\}$
→事例E_2、S_2：　$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
→事例E_3、S_3：　{N ｜ $0 \le N \le$ 输入总数}
→事例E_4、S_4：　{输、打平、赢}

例：　写出下列随机试验的样本空间

（1）　抛三枚硬币观察其正反面情况在

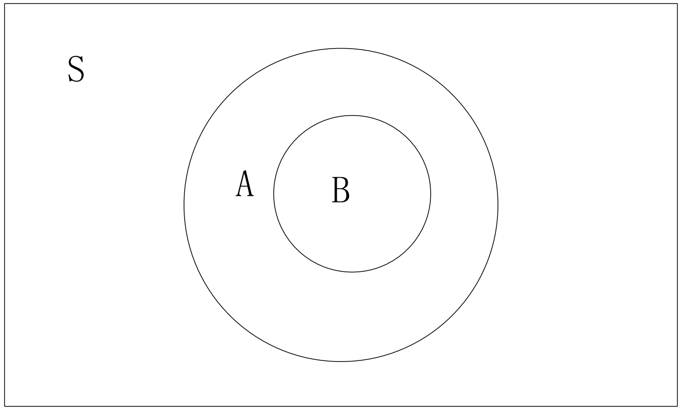
（2）　在1，2，3，4四个数中可重复的取两个数

（3）　将a, b两只球随机地放到3个盒子中

（4）　一射手进行射击，直到击中目标为止其射击的情况

包含关系

若$A \supset B$， 事件A包含B， 如果事件B发生，则事件A必然发生

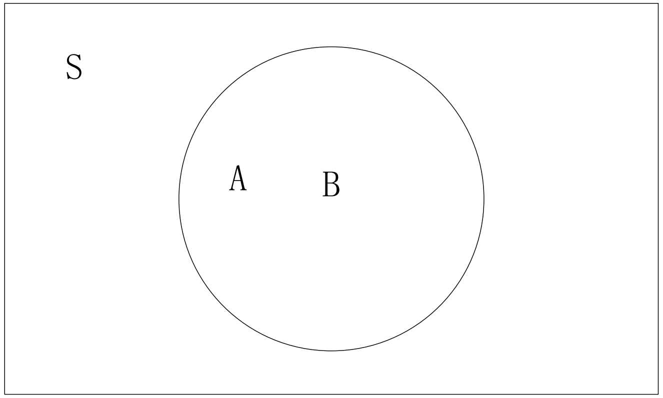


包含关系示例图

例：掷一骰子，事件B =“出现4点”的发生必然导致事件A =“出现偶数点”的发生，故$A \supset B$

相等关系

若$A \supset B$且$A \subset B$，事件A与事件B相等



相等关系示例图

例：掷两颗骰子，以A记事件“两颗骰子的点数之和为奇数”，以B记事件“两颗骰子的点数为一奇一偶”。很容易证明：A发生必然导致B发生，而且B发生也必然导致A发生，所以$A = B$

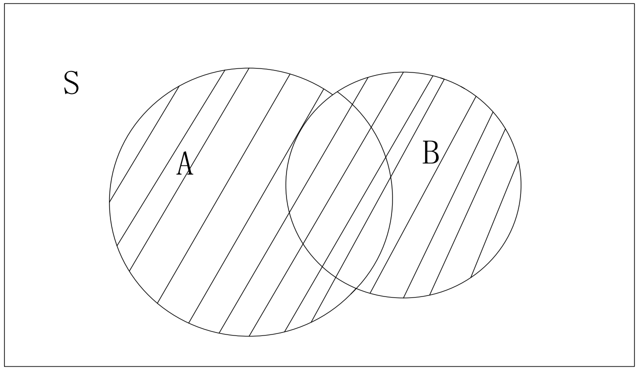
事件的运算

和事件

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A或x \in B\}$$

即只要A、B中有一个发生，和事件就发生

n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件：$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$



和事件示意图

例：在掷一颗骰子的实验中，记事件A =“出现奇数点” =“1,3,5”，记事件B =“出现的点数不超过3” =“1,2,3”，则A对B的并为A ∪B ={1,2,3,5}

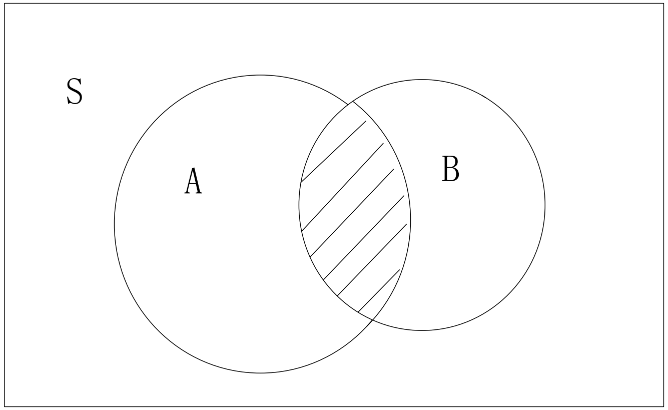
事件的运算

积事件

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A且x \in B\}$$

即当且仅当A、B同时发生时，积事件发生

n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件：$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$



积事件

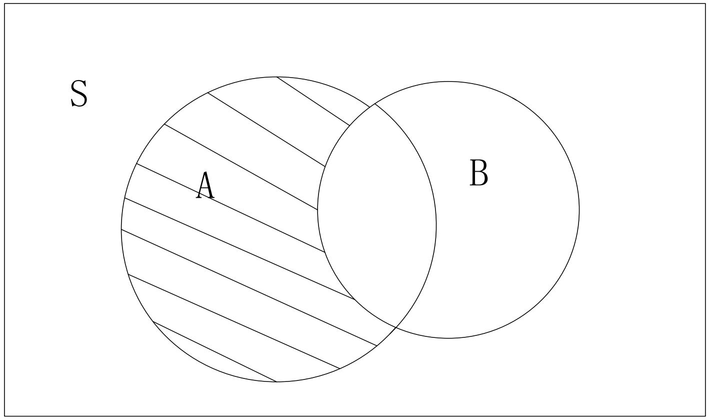
例：在掷一颗骰子的实验中，记事件A =“出现奇数点” =“1,3,5”，记事件B =“出现的点数不超过3” =“1,2,3”，则A对B的交为AB ={1,3}

事件的运算

差事件

$$A - B = \{x \mid x \in A且x \notin B\}$$

即当且仅当A发生、B不发生时，差事件发生



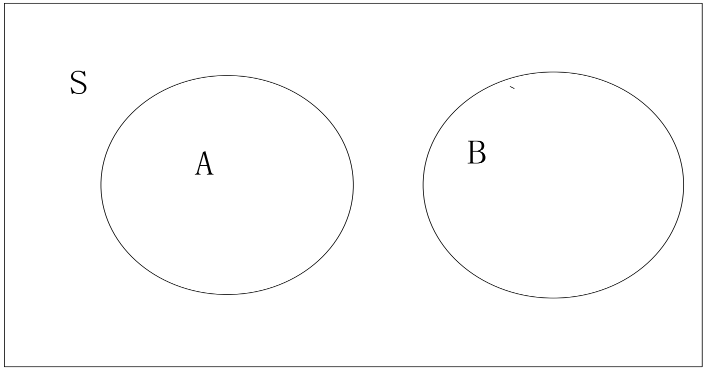
差事件

例：在掷一颗骰子的实验中，记事件A =“出现奇数点” =“1,3,5”，记事件B =“出现的点数不超过3” =“1,2,3”，则A对B的差为A - B ={5}

事件间的关系

互不相容

如果A与B没有相同的样本点，则称A与B互不相容，即A与B不可能同时发生



互不相容示意图

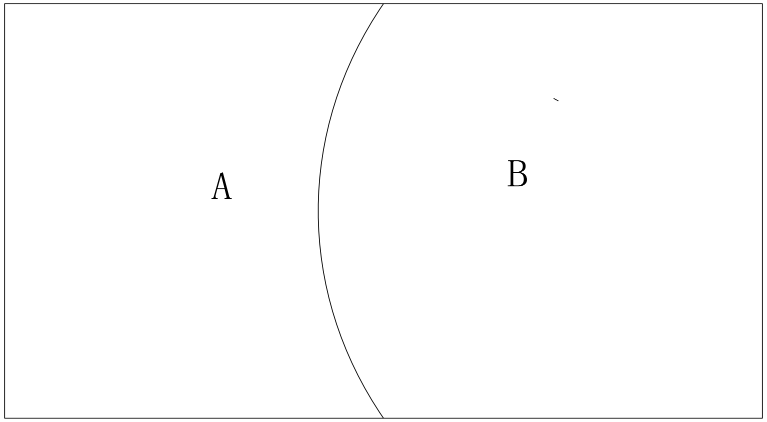
例：在电视机寿命试验中，“寿命小于1万小时”与“寿命大于5万小时”是两个互不相容的事件

事件的运算

对立事件

$$A \bigcup B = S \text{且} A \bigcap B = \varnothing$$

即每次试验时，事件A、B必有一个发生且仅有一个发生
B为A的对立事件，记为$\overline{A}$，$\overline{A} = S - A$



对立事件

例：在掷一颗骰子的实验中，记事件A=“出现奇数点”=“1,3,5”的对立事件是$\overline{A}$={2,4,6}

课堂练习：

设A，B，C为三个事件，用A，B，C的运算关系表示下列各事件：

(1) A，B，C中至少有一个发生
(2) A，B，C中不多于一个发生
(3) A，B，C中不多于两个发生
(4) A，B，C中至少有两个发生

解： 以下分别用$D_i(i=1,2,3,4)$表示(1)(2)(3)(4)中所给出的事件。

注意

一个事件不发生即为它的对立事件发生，例如事件A不发生即为$\overline{A}$。

(1) A，B，C中至少有一个发生

思路1

和事件的含义 → 事件A∪B∪C

$D_1=A\cup B\cup C$

思路2

A，B，C都不发生”的**对立事件**

$D_1=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$

思路3

三个事件中恰有一个发生 **或** 恰有两个发生
或 三个都发生

$D_1=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup ABC$

A，B，C中至少有一个发生

(2) A，B，C中不多于一个发生

思路1

A，B，C都不发生 **或**
A，B，C恰有一个发生

$D_2=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}B\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C$

思路2

$\bar{A}\bar{B}$，$\bar{B}\bar{C}$，$\bar{A}\bar{C}$中**至少**有一个发生

$D_2=\bar{A}\bar{B}\cup \bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}\bar{C}$

思路3

事件G=“A,B,C中至少两个发生”的**对立事件**

$$D_2=\overline{AB\cup BC\cup AC}=\overline{AB}\cap\overline{BC}\cap\overline{AC}$$

A，B，C中不多于一个发生

(3)　A，B，C中不多于两个发生

思路1

A，B，C都不发生 **或** A，B，C中**恰有**一个发生 **或** A，B，C中**恰有**两个发生

$D_3=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}B\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup \bar{A}BC\cup A\bar{B}C$

思路2

A，B，C中**至少**有一个不发生

$D_3=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

思路3

A，B，C三个都发生的**对立事件**

$D_3=\overline{ABC}$

A，B，C中不多于两个发生

(4)　A，B，C中至少有两个发生

思路1

AB，BC，AC中至少有一个发生

$D_4 = AB \cup BC \cup AC$

思路2

恰有两个发生 或 三个都发生

$D_4 = ABC \cup AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C$

A，B，C中不多于两个发生

事件关系的注意要点

① 事件运算顺序约定为先进行逆运算，再进行交运算，最后进行并或差运算

② 要证明A=B, 必须证明$A \subset B$ 和 $B \subset A$

③ 分配律：$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i B$, $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cup B)$

德莫根定律：$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

④ $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$, $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, $A - B = A \cap \overline{B}$, $A - B = \overline{\overline{A} \cup B}$

⑤ 事件互逆必然互不相容，互不相容却不一定互逆

⑥ 事件之间的联系可以用文图直观地表示出来

§3 频率与概率

确定概率的基本方法：

1. 频率的方法：

$$f_n(\mathrm{A})=\frac{n(\mathrm{A})}{n}$$

2. 古典方法：

$$P(\mathrm{A})=\frac{\text{事件A所含样本点的个数}}{\text{S中所有样本点的个数}}=\frac{k}{n}$$

3. 几何方法：

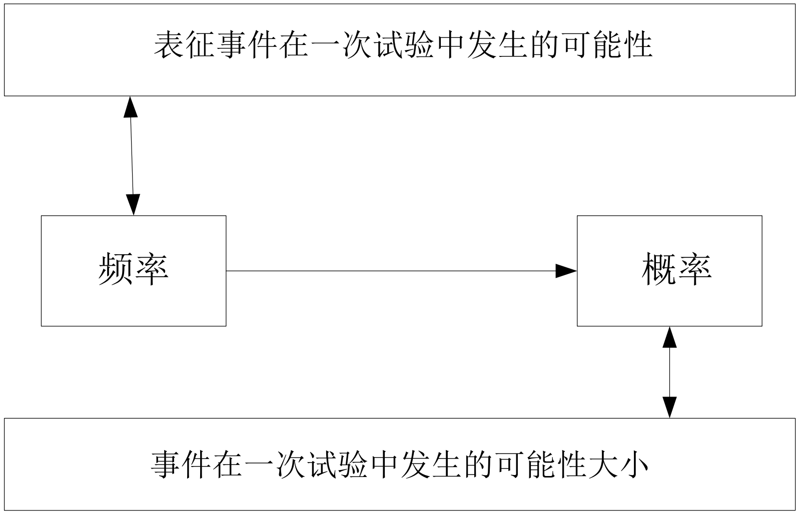
$$P(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{S_A}}{\mathrm{S_\Omega}}$$

4. 主观方法：

事件A的概率P(A)是人们根据经验作出的个人信念

频率

在n次试验中，事件A发生的次数n_A称为频数，比值${}^{n_A}/_{n}$称为事件A发生的频率,记为$f_n(\mathrm{A})$



频率具有如下性质：

① $0 \le f_n(\mathrm{A}) \le 1$

② $f_n(\mathrm{S}) = 1$

③ 若$\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_k$是两两互斥的事件，则

$$f_n(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_k) = f_n(\mathrm{A}_1) + f_n(\mathrm{A}_2) + \cdots + f_n(\mathrm{A}_k)$$

大量实验证实，当重复试验的次数 n 增大，频率$f_n(\mathrm{A})$呈稳定性，趋于某个常数；这种“频率稳定性”即是通常所说的统计规律性。

几何概率

以直观的等可能为基础，借助于集合上的度量(长度、面积、体积等)合理地规定概率。

例如，对于规定的[a,b]的区间范围内，点落在[c,d]区间内的概率为:

$$P = \frac{d-c}{b-a}, \quad a \le c < d \le b$$

例：会面问题——甲乙两人约定在下午6点到7点之间在某处会面，并预先到者应等候另一个人20min，过时即可离去，求两人能会面的概率。

概率

设 E 是随机试验，S 是样本空间，对于 E 中的每一事件A赋予一个实数，记为 P(A), 称为事件 A 的概率。

概率具有如下性质：

1）非负性

对于每个事件A，有 $P(\mathrm{A}) \geq 0$

2）规范性

对于必然事件S，有 $\mathrm{P}(\mathrm{S}) = 1$

3）可列可加性

设$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$是两两互不相容事件，即对$i \neq j$，$\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j = \Phi$，$i, j = 1, 2, \ldots$

则有 $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots) = P(\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2) + \ldots$

概率

概率的一些重要性质：

- $P(\Phi)=0$
- 若A_1，A_2，…，A_n是两两互斥的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

- 设A、B是两个事件，若A⊂B，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

- 对于任一事件A,有 $P(A)\le 1$
- 对于任一事件A,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$
- 对于任意两个事件A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

例1： 36只灯泡中4只是60W, 其余都是40W的。现从中任取3只，求至少取到一只60W灯泡的概率。

例2： 已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)$ =1/16。则A,B,C中至少发生一个的概率是多少？A,B,C都不发生的概率是多少？

§4 等可能概型（古典概型）

等可能概型的特点：

1）有限性

试验的样本空间S是有限集，即：$S=\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$

2）等可能性

每个样本点（即基本事件）发生的可能性大小相等，

即 $$P(S_1)=P(S_2)=\ldots.=P(S_n)=1/n$$

若事件A包含k个基本事件，则$P(\mathrm{A})=\dfrac{k}{n}=\dfrac{\text{A包含的基本事件数}}{\text{S中基本事件的总数}}$

抽样模型—不放回抽样vs放回抽样

一批产品共有N件，其中M是不合格品，N-M件是合格品。从中随机取出n件，试求事件A_m= “取出的n件产品中有m件不合格品”的概率。

一批产品共有N件，其中M是不合格品，N-M 件是合格品。从中抽取一件后放回，然后抽取下一件，如此反复直至抽出n件为止。讨论B_m= “取出的n件产品中有m件不合格品”的概率。

抽样模型—不放回抽样

从5双不同的鞋子中取出4只，问这4只鞋 子中至少有两只配成一双的概率是多少？

至少有一个出现

解： E：从5双不同的鞋子中取出4只

A：事件“所取4只鞋子中至少有两只配成一双”

$\bar{A}$：事件“所取鞋子无配对”

注意

先计算$P(\bar{A})$较为简便，故按$N(\bar{A})$的不同求法本题有3种解法，另外还可直接求P(A)

先计算$P(\bar{A})$，则$P(A)=1-P(\bar{A})$

思路1

4只鞋子是有次序一只一只取出的，自5双鞋子中任取4只共有10×9×8×7种取法，

$N(S)=10\times9\times8\times7$

$N(\bar{A})=10\times8\times6\times4$

$$P(A)=1-P(\bar{A})$$
$$=1-N(\bar{A})/N(S)$$
$$=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}$$

取第一只 → 共10种取法

取第2只 → 共8种取法

取第3只 → 共6种取法

取第4只 → 共4种取法

先计算$P(\bar{A})$，则$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

思路2

10只鞋子任取4只。共有$\binom{10}{4}$种取法，$N(S)=\binom{10}{4}$。

$N(\bar{A})=\binom{5}{4}2^4$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$
$$=1 - N(\bar{A})/N(S)$$
$$=1 - \frac{\binom{5}{4}2^4}{\binom{10}{4}} = \frac{13}{21}$$

任取4双

共$\binom{5}{4}$种取法

每双任选1只

共2^4种取法

先计算$P(\bar{A})$，则$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

先计算$P(\bar{A})$，则$P(A)=1-P(\bar{A})$

思路1

4只鞋子是有次序一只一只取出的，自5双鞋子中任取4只共有10×9×8×7种取法，N(S)= 10×9×8×7

$N(\bar{A})=10\times8\times6\times4$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - N(\bar{A})/N(S) = 1 - \frac{10\times9\times8\times7}{10\times8\times6\times4} = \frac{13}{21}$$

4只鞋子是有次序一只一只取出的，自5双鞋子中任取4只共有10×9×8×7种取法，N(S)= 10×9×8×7

思路2

10只鞋子任取4只。共有$\binom{10}{4}$种取法，$N(S)=\binom{10}{4}$。

$N(\bar{A})=\binom{5}{4}2^4$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - N(\bar{A})/N(S) = 1 - \frac{\binom{5}{4}2^4}{\binom{10}{4}} = \frac{13}{21}$$

10只鞋子任取4只。共有$\binom{10}{4}$种取法，$N(S)=\binom{10}{4}$。

思路3

先从5只左脚鞋子中任取k只(k=0,1,2,3,4)，有$\binom{5}{k}$种取法；

剩下的4-k只鞋子只能从5-k只右鞋中选取，对每个固定的k，有

$\binom{5}{k}\binom{5-k}{4-k}$

$$N(\bar{A})=\sum_{k=0}^{4}\binom{5}{k}\binom{5-k}{4-k}=80$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - N(\bar{A})/N(S) = 1 - \frac{80}{\binom{10}{4}} = \frac{13}{21}$$

直接求P(A)

思路 4

A_i：事件“所取4只鞋子中恰能配对i双”(i=1,2)

$A=A_1\cup A_2$，$A_1A_2=\Phi$，故$P(A)=P(A_1)+P(A_2)$

A_2：4只恰能配对2双，可直接从5双鞋子中成双地取得，$N(A_2)=\binom{5}{2}$

$N(A_1)$算法：先从5双中取1双，共$\binom{5}{1}$种取法，

另外两只能从其他8只中取，共$\binom{8}{2}$种取法，去掉其中成双的，

$$N(A_1)=\binom{5}{1}\left[\binom{8}{2}-\binom{4}{1}\right]=120$$

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{N(A_1)}{N(S)}+\frac{N(A_2)}{N(S)}=\frac{120+100}{210}=\frac{13}{21}$$

抽样模型—放回抽样

扩展题：一个班级有50学生，其中至少有两人同一天生日的概率是多少？

解：E：50个学生的生日

A：事件“至少有两人同一天生日”

$\overline{A}$：事件“所有人的生日都不同”

注意

先计算$P(\overline{A})$较为简便，按$N(\overline{A})$的不同求法，先计算$P(\overline{A})$，$P(A)=1-P(\overline{A})$

思路1

50个学生的生日都可以是365天中的任意一天，

所以：$N(S)=365\times365\times\cdot365\cdots\times365=365^{50}$

求$N(\bar{A})$

第1个学生的生日可以是365天中任意一天，**共有365种**可能；

第2个学生的生日只能是剩下的364天中的一天，**共364种**可能；

第3个学生的生日只能是剩下的363天中的一天，**共363种**可能；

⋮

第50个学生的生日只能是剩下的316天中的一天，**共316**种可能；

所以：$N(\bar{A})=365\times364\times363\cdots\times316$

彩票问题

一种福利彩票称为幸运35选7，即购买时从01,02，……，35中任选7个号码，开奖时从01,02，……，35中不重复地选出7个基本号码和一个特殊号码。中各等奖的规则如下：

中奖级别	中奖规则
一等奖	7个基本号码全中
二等奖	中6个基本号码及特殊号码
三等奖	中6个基本号码
四等奖	中5个基本号码及特殊号码
五等奖	中5个基本号码
六等奖	中4个基本号码及特殊号码
七等奖	中4个基本号码，或3个基本号码及特殊号码

试求各等奖的中奖概率

盒子模型

设有n个球，每个球都等可能地被放到N个不同盒子中的任一个，每个盒子所放球数不限。试求

(1) 指定的n(n≤N)个盒子中各有一球的概率p_1

(2) 恰好有n(n≤N)个盒子各有一球的概率p_2

盒子模型

将n只球随机地放入N（N≥ n）个盒子中去，试求每个盒子至多有一个球的概率（设盒子的容量不限）

解:

A： 事件“n个球在每个盒子中至多放一只球”

S： 事件“n个球放入N个盒子中任意一个”

N(A)：n个球在每个盒子中至多放一只球的放法

N(S)：n个球放入N个盒子中任意一个的放法

注意

这是一个古典概率问题，一个球可以有N种放法，故n个球共有 $N \times N \cdots \times N = N^n$种不同的放法。

思路1

首先从N个盒中选出n个盒来放这n个球，每个盒子 放一个 球，此时有$\binom{n}{N}$种取法。

这n个球在这n个盒中有n(n-1)……1=n!种放法

则n个球在每个盒子中至多放一个球的放法有

$$N(A)=\binom{n}{N}n!=A_N^n$$

而n个球放入N个盒子中的任一盒子中有

$$N(S)=N\times N\cdots\times N=N^n\text{种放法}$$

则所求概率为

$$p=\frac{\binom{n}{N}n!}{N^n}\,\frac{A_N^n}{N^n}$$

思路2

n个球可以放入N个盒子中的任意一个，

所以：$N(S)=N\times N\ldots N=N^n$

求N(A)

- 第1个球可以是N个盒中的任意一个，**共有N种**可能；
- 第2个球只能是剩下的(N-1)个盒中的一个，**共(N-1)种**可能；
- 第3个球只能是剩下的(N-2)个盒中的一个，**共(N-2)种**可能；

⋮

- 第n个球只能是剩下的(N-n+1)个盒中的一个，**共(N-n+1)**种可能；

所以：$N(A)=N(N-1)\ldots(N-n+1)$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}$$

§5 条件概率

条件概率的定义

设A，B是两个事件，且P(A)>0，

称 $$P(\mathrm{B}\mid\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{AB})}{P(\mathrm{A})}$$

为：事件A发生条件下，事件B发生的条件概率。

条件概率符合概率定义的三个条件

1）非负性 对于B，有$P(\mathrm{B}\mid\mathrm{A})\geq 0$

2）规范性 对于必然事件S，有$P(\mathrm{S}\mid\mathrm{A})=1$

3）可列可加性

设$B_1,B_2\ldots$是两两不相容事件，则有：$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$

证明：$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A)=\frac{P((\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_iA)}{P(A)}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}P(B_iA)}{P(A)}$$

条件概率

条件概率

- 乘法公式：$P(AB)=P(A|B)P(B)$
- 全概率公式：$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$
- 贝叶斯公式：$P(B_i|A)=\dfrac{P(B_iA)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$

§5 条件概率

乘法定理

设P(B)>0,则有 P(AB)=P(A|B)P(B)

推广：设A,B,C为事件，且P(AB)>0,则

P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)

一般：设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为n个事件，$n\geq 2$，且$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n-2})\ldots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

罐子模型： 设罐中有b个黑球、r个红球，每次随机取出一个球，取出后将原球放回，还加进c个同色球和d个异色球。记B_i为“第i次取出的是黑球”，R_j为“第j次取出的是红球”。若连续从罐中取出三个球，试求其中有两个红球、一个黑球的概率。

练习题：某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号，求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率。若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解：<法一>

A_i：事件“第i次拨号拨通电话”，$i=1,2,3$

A：事件“拨号不超过3次拨通电话”

$$A = A_1 \cup \overline{A_1}A_2 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$$

A_1、$\overline{A_1}A_2$、$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$两两互不相容，则$P(A_1)=\frac{1}{10}$

$$P(\overline{A_1}A_2)=P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$$

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\frac{1}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$$

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

当已知最后一位数位奇数时，$p=1/5+1/5+1/5=3/5$

某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号，求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率。若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解：<法二>

P(A)=1−P(拨号3次都接不通)= $1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$

$= 1-P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1})=1-\frac{7}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{3}{10}$

当已知最后一位数位奇数时，$p=1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

全概率公式

定理：设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1,B_2,\ldots,B_n$为S的一个划分，且$P(B_i)>0\ (i=1,2,\ldots,n)$，则$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)$称为全概率公式。

证明：因$A=AS=A(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)=AB_1\cup AB_2\cup\ldots\cup AB_n$

由于$B_1,B_2,\ldots,B_n$为S的一个划分，则$(AB_i)(AB_j)=\Phi, i\neq j, i,j=1,2,\ldots,n$

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\ldots+P(AB_n)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)$$

摸彩模型： 设在n张彩票中有一张奖券。
求第二人摸到奖券的概率是多少？

摸球模型1：设甲袋中装有n只白球、m只红球；乙袋中装有N只白球、M只红球。今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一只球。问取到白球的概率是多少？

解： E：从甲袋任取一只球放入乙袋（E_1），再从乙袋任取一球观察其颜色（E_2）

R：事件“从甲袋取到的是红球”

W：事件“从乙袋取到的是白球”

注意

事件E_1和事件E_2之间相互独立，因此在计算概率时可以相乘

思路1

试验E 由E_1 和E_2 合成，试验E_1包括取到白球和取到红球

$$\text{所以：} W=(R\cup\bar{R})W=RW\cup\bar{R}W$$

事件E_1和事件E_2之间相互独立　　则$(RW)(\bar{R}W)=\emptyset$

于是$P(W)=P(RW)+P(\bar{R}W)=P(W|R)P(R)+P(W|\bar{R})P(\bar{R})$

$P(R)=\frac{m}{m+n}$　　　　$P(\bar{R})=\frac{n}{m+n}$

在计算$P(W|R)$和$P(W|\bar{R})$时，由于从甲袋拿出一个球放入乙袋，因此乙袋球个数为N+M+1， $P(W|R)$时白球个数为N,$P(W|\bar{R})$时白球个数为N+1　　$P(W|R)=\frac{N}{N+M+1}$　　$P(W|\bar{R})=\frac{N+1}{N+M+1}$

$$P(W)=P(W|R)P(R)+P(W|\bar{R})P(\bar{R})=\frac{n+N(n+m)}{(n+m)(N+M+1)}$$

思路2

A表示事件“最后取到的是白球”， B表示事件“最后取到的是甲袋中的球”

此时，$A = SA = (B \cup \bar{B})A = BA \cup \bar{B}A$

由于BA和$\bar{B}A$为互斥事件　则$(BA)(\bar{B}A) = \emptyset$

于是　$P(A) = P(BA) + P(\bar{B}A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

$$P(B) = \frac{1}{N+M+1} \qquad P(\bar{B}) = \frac{N+M}{N+M+1}$$

在甲袋中取到白球的概率为　在甲袋中取到白球的概率为

$P(X) = \frac{n}{n+m}$　$P(Y) = \frac{N}{N+M}$

则$P(A|B) = P(X) = \frac{n}{n+m}$　$P(A|B) = P(Y) = \frac{N}{N+M}$

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{n+N(n+m)}{(n+m)(N+M+1)}$$

摸球模型2：第一只盒子装有5只红球，4只白球；第二只盒子装有4只红球，5只白球。先从第一盒中任取2只球放入第二盒中去，然后从第二盒中任取一只球。求取到白球的概率。

解： E：从第一盒中任取2只球放入第二盒(E_1)，再从第二盒任取一球观察其颜色(E_2).

R_i：事件“从第一盒中取得的球中有i只是红球”

W：事件“从第二盒取得一球是白球”

注意

i取值为(0,1,2), R_0, R_1, R_2为两两互不相容事件，且$R_0 \cup R_1 \cup R_2$=S

思路1

试验E 由E_1 和E_2 合成，试验E_1包括取到白球和取到红球

所以：$W=(R_0\cup R_1\cup R_2)W=R_0W+R_1W+R_2W$

从而

$$P(W)=P(R_0W)+P(R_1W)+P(R_2W)$$
$$=P(W|R_0)P(R_0)+P(W|R_1)P(R_1)+P(W|R_2)P(R_2)$$

$P(R_0)=\binom{4}{2}\Big/\binom{9}{2}=\frac{1}{6}$　$P(R_2)=\binom{5}{2}\Big/\binom{9}{2}=\frac{5}{18}$　$P(R_1)=1-P(R_0)-P(R_2)=\frac{10}{18}$

在计算$P(W|R)$和$P(W|\bar{R})$时，试验 E_2中第二个盒内球的个数为11，则

$P(W|R_0)=\frac{7}{11}$　$P(W|R_1)=\frac{6}{11}$　$P(W|R_2)=\frac{5}{11}$

$$P(W)=P(W|R_0)P(R_0)+P(W|R_1)P(R_1)+P(W|R_2)P(R_2)=\frac{53}{99}$$

贝叶斯（Bayes）公式

设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为S的一个划分，且$P(B_i) > 0\ (i = 1,2,\ldots,n)$，则：

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

证明：由条件概率的定义及全概率公式，即得：

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}。$$

§5 条件概率

例1： 某地区居民的肝癌发病率为0.0004，现用甲胎蛋白法进行普查。医学研究表明，化验结果是存有错误的。已知患有肝癌的人其化验结果99%呈阳性（有病），而没患肝癌的人其化验结果99.9%呈阴性（无病）。现某人的检查结果呈阳性，问他真的患肝癌的概率是多少？

例2： 伊索寓言“孩子与狼”讲的是一个小孩每天到山上放养，山里有狼出没。第一天，他在山上喊：“狼来了！狼来了！”，山下的村民闻声便去打狼，可到山上，发现狼没有来；第二天仍是如此；第三天，狼真的来了，可无论小孩如何喊叫，也没有人来救他，因为前两次他说了谎，人们不再相信他。
现用贝叶斯公式来分析此寓言中村民对这个小孩的可信程度是如何下降的。

§6 独立性

独立性的定义

设 A, B 两事件，如果满足等式：　$P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A, B相互独立，简称 A, B独立。

定理1、设A,B两事件，且$P(A)>0$,若A,B相互独立，则 $P(B|A)=P(B)$。

证明：$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

定理2、若事件A,B相互独立，则下列各对事件也相互独立：A与$\bar{B}$，$\bar{B}$与A，$\bar{A}$与$\bar{B}$,

证明：$P(A\bar{B})=P(A(S-B))=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\bar{B})$

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A}(S-B))=P(\bar{A}-\bar{A}B)=P(\bar{A})-P(\bar{A})P(B)=P(\bar{A})P(\bar{B})$

同理可得：$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)$

§6 独立性

相互独立的定义

设A, B, C是三个事件，如果满足等式：

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称事件A, B, C 相互独立。

推论1、若事件A_1， A_2， …… $A_n(n\geq 2)$相互独立，
则其中任意k$(2 \leq k \leq n)$个事件相互独立

推论2、若事件A_1， A_2， …… $A_n(n\geq 2)$相互独立，
则将A_1， A_2， …… A_n中任意多个事件换成
它们的对立事件，所得n个事件仍相互独立

§6 独立性

相互独立的含义

事件们中有一个发生，不影响另一个发生的概率。

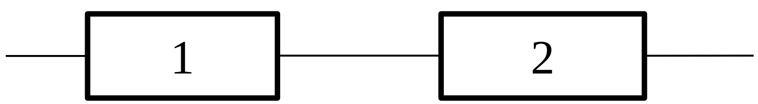
实际情况中，事件间的独立性往往根据事件的实际意义去判断。

当两事件间没有关联或关联很微弱，那就认为它们是相互独立的

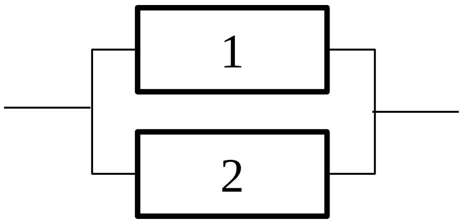
例如：两个人感冒的独立性问题分析。
当两人相距甚远，那就认为两者是相互独立的
当两人同住一个房间时，那两者就不是相互独立的

例：　系统有多个元件组成，且所有元件都独立地工作。设每个元件正常工作的概率都为p = 0.9，试求以下系统正常工作的概率。

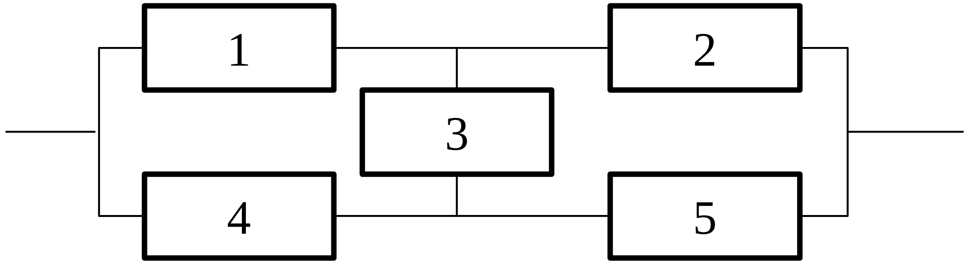
(1)　串联系统S_1
(2)　并联系统S_2
(3)　5个元件组成的桥式系统 S_3



串联系统



并联系统



桥式系统

谢　　谢!