第十二章 随机过程及其统计描述

第十二章 随机过程及其统计描述

- 随机过程的概念
- 随机过程的统计描述
- 泊松过程及维纳过程

§1 随机过程的概念

一、随机过程概念的引入

随时间演变的随机现象

- 随机变量
- 一族(无限多个)随机变量
- 多维随机变量

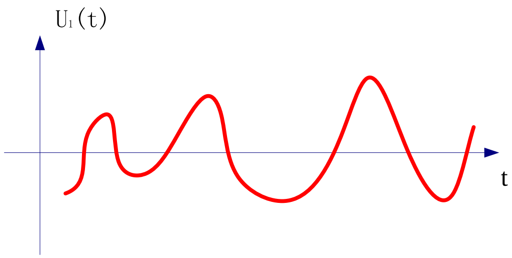
引例

通过某种装置对元件(或器械)两端的热噪声电压进行长时间观察，并把结果记录下来，作为一次试验结果，便得到一个电压–时间函数。在相同条件下独立进行k次测量：

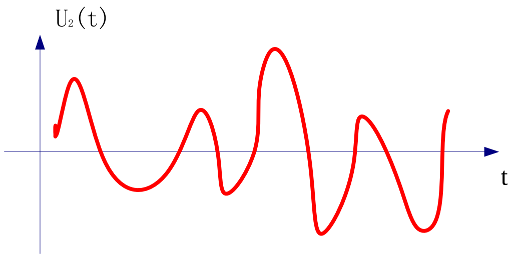
§1 随机过程的概念

一、随机过程概念的引入

第一次试验结果：　$U_1(t),\ \ t>0$

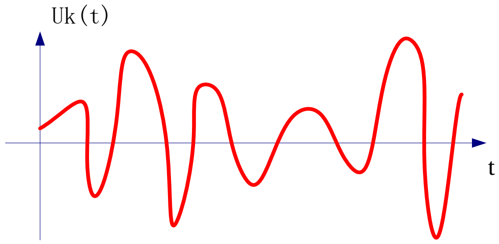


第二次试验结果：　$U_2(t),\ \ t>0$



⋮

第k次试验结果：　$U_k(t),\ \ t>0$



不断地独立重复地一次次测量课得到一族不同的电压-时间函数。

§1 随机过程的概念

二、随机过程的概念

定 义

设E 为随机试验，它的样本空间为 S，对于样本空间的每一个元素e，总有一个确知的时间函数 $X(t, e)$，$t \in T$与之对应，其中T是一无限实数集。这样对于所有$e \in S$，就可得到**一族依赖于参数$t \in T$的随机变量**，称为**随机过程**，记为$\{ X(t, e), t \in T \}$

$X(t, e)$剖析

(1) 当e固定，t变化，对应的是一个样本函数$x(t, e_i)$, 是一个时间t的确定函数。**随机过程就是一个样本函数的集合**。

(2) 当t固定，e变动，对应的是一个**随机变量**。

(3) 当t , e都固定时，是**确定的取值**。

§1 随机过程的概念

二、随机过程的概念

参数集 *T*

当T取时间 t 时，$X(t, e)$是个随机过程函数，$X(t)$为时刻 t 时过程的状态。

状态空间

对于一切 $t\in T$，$X(t)$所有可能取的一切值的全体称为随机过程的状态空间。

样本函数 (样本曲线)

对随机变量$\{ X(t),\ t\in T \}$进行一次试验，其结果是t的函数，记为$x(t)$，$t\in T$，称它为随机过程的一个样本函数或样本曲线

§1 随机过程的概念

二、随机过程的概念

例　抛掷一枚硬币的试验，样本空间为$S=\{H, T\}$，现基于此定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos \pi t, & \text{出现}H \\ t, & \text{出现}T\end{cases}$$

且$P(H)=P(T)=0.5$，对于任意的t, $X(t)$是定义在S上的随机变量

解析：(1) 对于不同t , $X(t)$是不同的随机变量，$\{X(t), t\in T\}$是一族随机变量

(2) 另一方面，做一次实验：

若出现H，样本函数为$\cos\pi t$

若出现T，样本函数为t

所以，该随机过程对应的是一族样本函数，仅包含两个函数$\{\cos\pi t, t\}$。这个随机过程的状态空间为$(-\infty,+\infty)$

二、随机过程的概念

例　考虑$X(t)=a\cos(wt+\theta)$， $t\in(-\infty,+\infty)$其中a， w为常数，θ是在$(0, 2\pi)$上服从均匀分布的随机变量

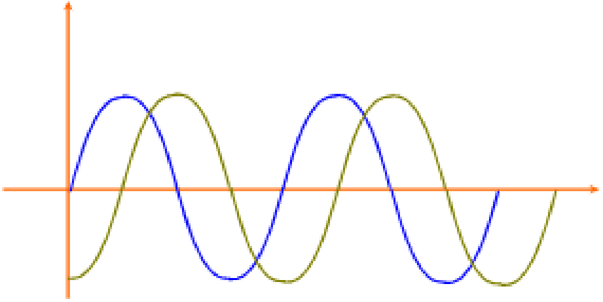
解析：

(1) 显然，对于一个固定时刻t_1，$X(t_1)=a\cos(wt_1+\theta)$是一个随机变量。

因此， $X(t)=a\cos(wt+\theta)$为一随机过程，其状态空间是$[-a, a]$。

(2) 对于$(0, 2\pi)$内任取一数θ_i, 则得这个随机过程的一个样本函数。

$$X_i(t)=a\cos(wt+\theta_i),\ \ \theta_i\in(-\infty,+\infty)$$



§2 随机过程的统计描述

一、随机过程的分布函数族

给定随机过程$\{ X(t), t\in T \}$，对于每一个固定的$t\in T$，**随机变量$X(t)$的分布函数一般与t有关**，记为：$F_X(x, t) = P\{ X(t) \le x \}, x\in R$ 称它为随机过程$\{ X(t), t\in T \}$的**一维分布函数**，而$\{ F_X(x, t), t\in T \}$称为**一维分布函数族**

为了描述随机过程在不同时刻状态之间的统计联系，一般可对任意n (n=2, 3, ...) 个不同的时刻$t_1, t_2, \dots, t_n \in T$，引入 n 维随机变量给定随机过程$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$

它的分布函数记为：$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{ X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_n) \le x_n\}$，$x_i\in R$, $i=1, 2, \dots, n$

对于固定的n，称$\{F_X(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n),\ t\in T \}$为$\{ X(t), t\in T \}$的**$n$维分布函数族**

二、随机过程的数字特征

均值函数

定 义

给定随机过程$\{X(t), t\in T\}$，固定$t\in T$，$X(t)$是一随机变量，它的均值一般与t有关，记为

$$\mu_X(t) = E[(X(t)]$$

称$\mu_X(t)$为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的**均值函数**

注意

$\mu_X(t)$是随机过程的所有样本函数在时刻t的函数值的平均值，通常称为集平均或统计平均

二、随机过程的数字特征

二阶原点矩和二阶中心矩

定 义

二阶原点矩：$\Psi_X(t)=E\left(X^2(t)\right)$

二阶原点矩：$\sigma_X^2(t)=D(X(t))=D_X(t)=Var(X(t))=E\left\{[X(t)-\mu_X(t)]^2\right\}$

分别称它们为随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$的**均方值函数**和**方差函数**。

方差函数的算术平方根$\sigma_X(t)$称为**随机过程的标准差函数**，它**表示随机过程在时刻t对于均值$\mu_X(t)$的平均偏离程度**

二、随机过程的数字特征

自相关函数和自协方差函数

定 义

设任意$t_1, t_2 \in T$，随机过程**$X(t_1)$和$X(t_2)$的二阶原点混合矩**记作：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

称它为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的**自相关函数**，简称**相关函数**。记号$R_{XX}(t_1,t_2)$或$R_X(t_1,t_2)$。

二阶混合矩记作：

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= Cov[X(t_1), X(t_2)] \\ &= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} \end{aligned}$$

称它为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的**自协方差函数**，简称**协方差函数**。记号$C_{XX}(t_1,t_2)$或$C_X(t_1,t_2)$。

二、随机过程的数字特征

自相关函数和自协方差函数**刻画了随机过程在两个不同时刻的状态之间的依赖程度**

各数字特征间的关系

- $\Psi_X(t)=R_X(t,\ t)$
- $C_X(t_1,\ t_2)=R_X(t_1,\ t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$
- 当 $t_1=t_2=t$ 时 $\sigma_X^2(t)=C_X(t,\ t)=R_X(t,\ t)-\mu_X^2(t)$

二、随机过程的数字特征

例 令$X(t)=A\cos t,\ t\in(-\infty,+\infty)\}$，其中为随机变量，其分布律为：$P(A=1)=1/3$，$P(A=2)=2/3$。试求：

(1) 随机过程的一维分布函数$F(x;\ \pi/4)$，$F(x;\pi/2)$

(2) 二维分布函数$F(x_1,\ x_2;0,\pi/3)$

(3) 数字特征

解： (1) 当 $t=\pi/4$ 时，$X(\pi/4)=A\cos(\pi/4)=\left(\sqrt{2}/2\right)A$

$$P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\frac{1}{3};\quad P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\right\}=\frac{2}{3}$$

$$F\left(x;\ \frac{\pi}{4}\right)=P\{X(t)\le x\}=\begin{cases}0, & x<\sqrt{2}/2\\ \dfrac{1}{3} & \sqrt{2}/2\le x<\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2}\le x\end{cases}$$

二、随机过程的数字特征

当 $t=\pi/2$时，$X(\pi/2)=A\cos(\pi/2)=0$

因此 $X(\pi/2)$ 的取值只能为0。于是：$F\left(x;\ \dfrac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$

(2) $F(x_1, x_{21};\ 0, \pi/3)=F\{X(t_1)\le x_1,\ X(t_2)\le x_2\}$

其中$t_1=0$，$t_2=\pi/3$, $X(t_1)=\begin{cases}1, & p=1/3\\ 2, & p=2/3\end{cases}$, $X(t_2)=\begin{cases}1/2, & p=1/3\\ 1, & p=2/3\end{cases}$

$$F\left(x_1,x_2;0,\frac{\pi}{3}\right)=\begin{cases}0, & x_1<1\text{或}x_2\text{任意}\\ 0, & 1\le x_1<2, x_2<1/2\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le x_1<2, 1/2\le x_2\le 1\\ \dfrac{1}{3}, & 2\le x_1, 1/2\le x_2<1\\ 1, & 2\le x_1, 1\le x_2\end{cases}$$

二、随机过程的数字特征

(3) 数字特征

a. $\mu_X(t)=E(X(t))=E(A)\cos t=(1\times(1/3)+2\times(2/3))\cos t=(5/3)\cos t$

b. $D(X(t))=D(A)\cos^2 t=[E(A^2)-(E(A))]^2\cos^2 t$

$=[1^2\times(1/3)+2^2\times(2/3)-(5/3)^2]\cos^2 t=(2/9)\cos^2 t$

c. $R_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)X(t_2))=E(A\cos t_1 A\cos t_2)$

$=E(A^2)\cos t_2\cos t_2=3\cos t_1\cos t_2$

d. $C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$

$=(3-(25/9))\cos t_1\cos t_2=(2/9)\cos t_1\cos t_2$

$D_X(t)=C_X(t,t)=(2/9)\cos^2 t,\psi_X(t)=R_X(t,t)=3\cos^2 t$

二、随机过程的数字特征

例　令$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$, $t\in(-\infty,+\infty)$，其中a，ω是常数，Θ是服从$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量，求$\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$的数字特征。

解： 由于Θ的概率密度函数为：$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & 0<\theta<2\pi\\ 0 & else\end{cases}$

$$\mu_X(t)=E(X(t))=E(a\cos(\omega t+\theta))=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\times\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

$$R_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)X(t_2))=E[a\cos(\omega t_1+\theta)\cdot a\cos(\omega t_2+\theta)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1),t_1,t_2\in(-\infty,+\infty)$$

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1),t_1,t_2\in(-\infty,+\infty)$$

$$D_X(t)=C_X(t,t)=\frac{a^2}{2};\quad \Psi_X(t)=R_X(t,t)=\frac{a^2}{2},\ t\in(-\infty,+\infty)$$

谢　　谢!