P9. 一维分布函数刻画了随机过程在各个时刻的统计特性

N 充分大时，n维分布函数族能近似描述随机过程特性

一维 r.v. 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$

二维 r.v. …… $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

随机过程每个固定 t 都是一个 r.v.

$X(t_1)$ 是 r.v. …… $X(t_n)$ 是 r.v.

$$F_X(x_1,x_2\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)$$

$$=P\{X(t_1)\le x_1,\ X(t_2)\le x_2,\cdots X(t_n)\le x_n\}$$

例：随机过程 $\{X(t,e),\ -\infty<t<\infty\}$ 有两个样本函数

$X(t_1,e_1)=2\cos t$, $X(t_2,e_2)=-2\cos t$ $\quad -\infty<t<\infty$

$P(e_1)=\frac{2}{3}$ $\quad P(e_2)=\frac{1}{3}$

求：(1) 一维分布函数 $F(x,0)$ 和 $F(x,\frac{\pi}{4})$

(2) 二维 …… $F(x,y,0,\frac{\pi}{4})$

解：

$X(0)$	-2 ($-2\cos t$, e_2发生)	2 ($2\cos t$, e_1发生)
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$X(\frac{\pi}{4})$	$-\sqrt{2}$ ($-2\cos t$, e_2发生)	$\sqrt{2}$ (e_1发生)
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$F(x,0)=\begin{cases}0 & -\infty<x<-2\\ \frac{1}{3} & -2\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$F(x,\tfrac{\pi}{4})=\begin{cases}0 & x<-\sqrt{2}\\ \frac{1}{3} & -\sqrt{2}\le x<\sqrt{2}\\ 1 & x\ge\sqrt{2}\end{cases}$$

例： $X(t)=A\cos t$ $P(A=1)=\frac{1}{3}$ $P(A=2)=\frac{2}{3}$.

求 (1) $F(x;\frac{\pi}{4})$ $F(x;\frac{\pi}{2})$

(2) $F(x_1,x_2;0,\frac{\pi}{3})$ (3) 数字特征

解： (1) $t=\frac{\pi}{4}$ $X(\frac{\pi}{4})=A\cos\frac{\pi}{4}=\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}A}$

$(p=\frac{1}{3})$ $A=1$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $A=2$ $\sqrt{2}$ $(p=\frac{2}{3})$

$X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$F(x;\frac{\pi}{4})=\begin{cases}0 & x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\le x<\sqrt{2}\\ 1 & x>\sqrt{2}\end{cases}$$

$X(\frac{\pi}{2})$	0
P	1

~~其一非不随机~~

$$F(x;\frac{\pi}{2})=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$$

(2) $t_1=0$ $X(t_1)=A\cos 0=A$ $\begin{cases}1 & p=\frac{1}{3} & A=1\\ 2 & p=\frac{2}{3} & A=2\end{cases}$

$t_2=\frac{\pi}{3}$ $X(t_2)=A\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}A$ $\begin{cases}\frac{1}{2} & p=\frac{1}{3} & A=1\\ 1 & p=\frac{2}{3} & A=2\end{cases}$

$X(t_2)$ \ $X(t_1)$	1	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{2}{3}$

$$F(x_1,x_2;0,\frac{\pi}{3})=\begin{cases}0 & x_1<1 \text{ 或 } x_2<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & 1\le x_1<2,\ \frac{1}{2}\le x_2<1\\ \frac{1}{3} & x_1\ge 2,\ \frac{1}{2}\le x_2<1\\ \frac{1}{3} & 1\le x_1<2,\ x_2\ge 1\\ 1 & x_1\ge 2,\ x_2\ge 1\end{cases}$$

合并 $1\le x_1<2$ $x_2\ge\frac{1}{2}$

$x_1\ge 1$ $\frac{1}{2}\le x_2<1$

(3) $\mu_X(t)=E[X(t)]=E(A)\cos t=(1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3})\cos t=\frac{5}{3}\cos t$

自相关 $R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E(A\cos t_1 A\cos t_2)=E(A^2)\cos t_1\cos t_2$

$=(1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{2}{3})\cos t_1\cos t_2=3\cos t_1\cos t_2$

均方值 $\Psi_X(t)=R_X(t,t)=3\cos^2 t$

自协方差 $C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$

$=3\cos t_1\cos t_2-\frac{5}{3}\cos t_1\cdot\frac{5}{3}\cos t_2=(3-\frac{25}{9})\cos t_1\cos t_2$

$=\frac{2}{9}\cos t_1\cos t_2$