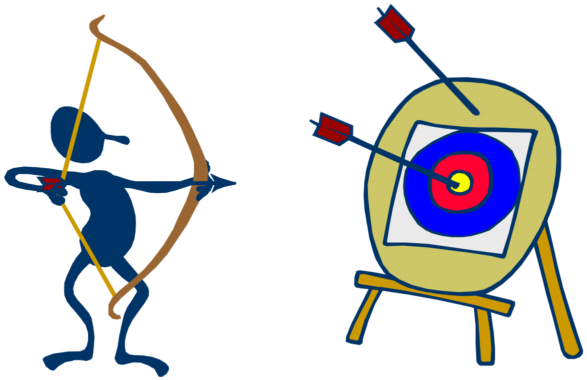
第三章 多维随机变量及其分布

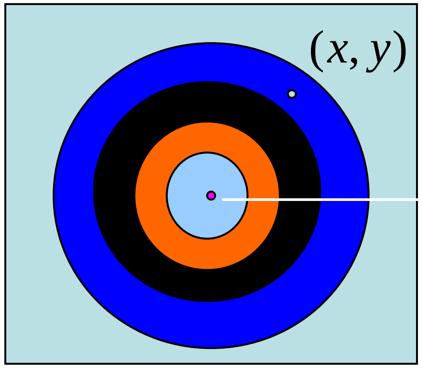
第三章 多维随机变量及其分布

- 二维随机变量
- 边缘分布
- 条件分布
- 相互独立的随机变量
- 两个随机变量的函数的分布

§1 二维随机变量

一、二维随机变量的概念





命中点的位置不能用一个随机变量来描述，需要使用x, y (两个坐标)确定

定 义

设$S=\{e\}$是某一随机试验的样本空间，若对于任意的$e\in S$，都有确定的两个实数$X(e)$, $Y(e)$与之对应，则称向量(X,Y)为一个二维随机变量或二维随机向量，简称为(X,Y)，亦称X和Y是二维随机变量(X,Y)的两个分量。

研究方法与一维类似，用分布函数、分布律、或概率密度来描述其统计规律。

一、二维随机变量的概念

实例

体重W(公斤)，身高H(米)

$BMI=W/H^2$

BMI 分类	WHO 标准	亚洲标准	中国参考标准	相关疾病发病的危险性
体重过低	<18.5	<18.5	<18.5	低（但其它疾病危险性增加）
正常范围	18.5～24.9	18.5～22.9	18.5～23.9	平均水平
超重	≥25	≥23	≥24	增加
肥胖前期	25.0～29.9	23～24.9	24～26.9	增加
I度肥胖	30.0～34.9	25～29.9	27～29.9	中度增加
II度肥胖	35.0～39.9	≥30	≥30	严重增加
Ⅲ度肥胖	≥40.0	≥40.0	≥40.0	非常严重增加

§1 二维随机变量

二、联合分布函数

定 义

设(X, Y)是二维随机变量，对于任意实数x，y，二元函数：

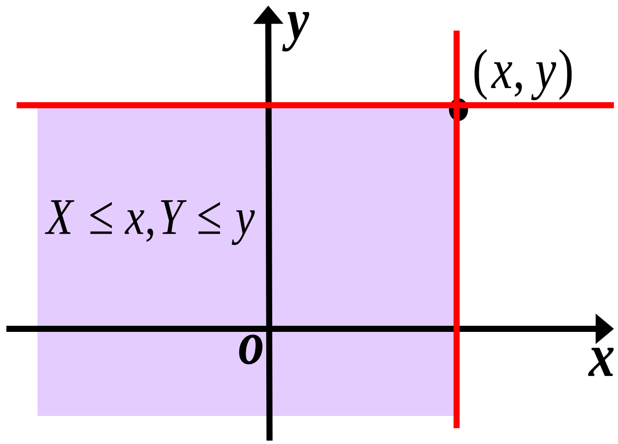
$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=}P\{X\le x,\ Y\le y\}$$

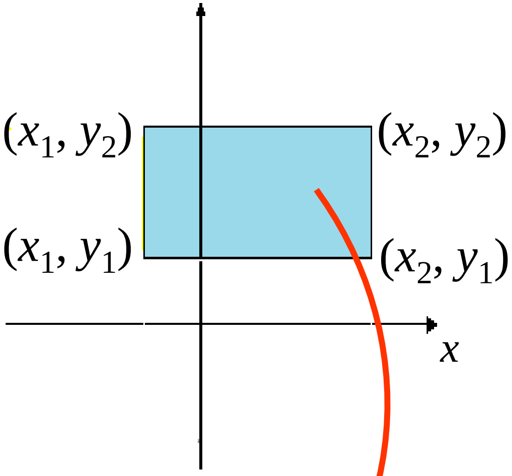
称为**二维随机变量(X, Y)的分布函数**，或称为随机变量X**和Y的联合分布**

一维随机变量X	VS	二维随机变量(X, Y)
X的分布函数 $F(x)=P(X\le x)$		(X, Y)的分布函数 $F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}$ $\overset{\text{记成}}{=}P\{X\le x,\ Y\le y\}$

二、联合分布函数

联合分布函数的几何意义





由上面的几何解释,易见:随机点(X, Y)落在矩形区域:$\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}$内的概率

$$P\{x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2\}$$

$$=F(x_2, y_2)-F(x_2, y_1)-F(x_1, y_2)+F(x_1, y_1)$$

二、联合分布函数

分布函数$F(x, y)$具有的基本性质

1. $F(x,y)$ 是变量x, y的非减函数。

$\forall y\in R$ 取定, 当$x_1<x_2$时, $F(x_1, y)\le F(x_2, y)$。

$\forall x\in R$取定, 当$y_1<y_2$时, $F(x, y_1)\le F(x, y_2)$。

2. $\forall\ x, y\in$ R 有 $0\le F(x, y)\le 1$。

$\forall y\in R, F(-\infty, y) = 0; \forall x\in R, F(x, -\infty) = 0$

$F(-\infty, -\infty)= 0$，$F(\infty, \infty)= 1$

3. 右连续性

$$F(x_0+0, y) = \lim_{x\to x_0^+} F(x, y) = F(x_0, y);$$

$$F(x, y_0+0) = \lim_{y\to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0).$$

4. 非负性

对于任意

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)\in R^2$,

$x_1<x_2$, $y_1<y_2$,

$$F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)-F(x_2, y_1)+F(x_1, y_1)\ge 0$$

二、二维离散随机变量的分布律

离散型随机变量

若二维随机变量(X,Y)的所有可能取值为有限对或可列无限对，则称(X,Y)为二维离散型随机变量。

离散型随机变量的分布律

若二维离散型随机变量(X, Y) 取每对(x_i, y_j)的概率为p_{ij}，则称

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad (i, j=1,2,\ldots)$$

为二维离散型随机变量(X, Y)的分布律，或随机变量X与Y的联合分布律。

二、二维离散随机变量的分布律

二维离散型随机变量的分布律也可表示如下:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

联合分布律的性质

(1) $p_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots$;

(2) $\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} p_{ij} = 1$

例 设随机变量X在1,2,3,4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一整数值。试求(X,Y)的分布律。

三、维离散随机变量的分布函数

定义

设二维离散型随机向量(X, Y)的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad (i, j=1,2,\ldots)$$

于是 **(X, Y)的分布函数**

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=P\left(\bigcup_{x_i\le x, y_j\le y}\{X=x_i, Y=y_j\}\right)$$

$$\therefore F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P\{X=x_i, Y=y_j\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

已知联合分布律求联合分布函数

三维超几何分布和三项分布

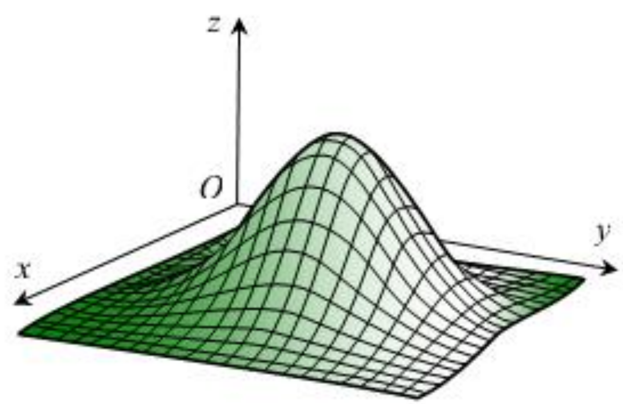
四、二维连续型随机变量及其密度函数

定义

对于二维随机变量(X, Y)，若存在一个非负可积函数$f(x, y)$，使对$\forall(x, y)\in R^2$，其分布函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u, v)dudv$$

则称 **(X,Y)为二维连续型随机变量**，$f(x,y)$为(X,Y) **的概率密度**，或**X与Y的联合概率密度**。



四、二维连续型随机变量及其密度函数

联合密度函数的性质

1. 非负性

$$f(x,y)\geq 0,\ \ (x,y)\in R^2;$$

2. 归一性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1;$$

3. 若$f(x,y)$在$(x,y)\in R^2$处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y);$$

4. 对于任意平面区域$G\subset R^2$，

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_{(x,y)\in G} f(x,y)dxdy.$$

五、n维联合分布函数

定义

对于任意n个实数$x_1, x_2, \ldots, x_n$，n元函数

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n\}$$

称为的n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的分布函数，或随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$的联合分布函数。

例 设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-3x-4y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

试求：(1) 联合分布函数；(2)$P(0<X\le 1，0<Y\le 2)$
(3)$P(X+Y\le 1)$

三、两种重要的二维连续型分布

1. 二维均匀分布

若二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d}, & (x,y)\in D\\ 0, & else\end{cases}$$

其中d为平面区域D的面积($0<d<+\infty$)，则称

(X,Y)服从区域D的均匀分布

例：设D为平面上以原点为圆心，以r为半径的圆内区域，如今向该圆内随机投点，其坐标(X,Y)服从D上的二维均匀分布，试求概率P(|X|≤r/2)

三、两种重要的二维连续型分布

2. 二维正态分布

若二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

其中，μ_1，μ_2，$\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $|\rho|<1$是5个参数，则称

(X, Y)服从二维正态分布，并记为：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

Project

§ 2 边缘分布函数

一、边缘分布的定义及表示

定义

二维随机变量(X,Y)作为一个整体, 具有分布函数$F(x,y)$。

其**分量X和Y也都是随机变量, 也有自己的分布函数**，将其分别记为$F_X(x)$, $F_Y(y)$。依次称为二**维随机变量(X,Y) 关于X和关于Y的边缘分布函数**

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<\infty,Y\le y\}=F(\infty,y)$$

边缘分布实际上是高维随机变量的某个(某些)低维分量的分布。

二、边缘分布律

一般, 对离散型 r.v (X,Y), X和Y 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

则**(X,Y)关于X的边缘分布律为**

$$P\{X = x_i\} = p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

(X,Y)关于Y 的边缘分布律为

$$P\{Y = y_j\} = p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

二、边缘分布律

边缘分布律可表示如下:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$		

多项分布的一维边际分布仍为二项分布

§ 2 边缘分布函数

三、边缘密度函数

对连续型 随机变量 (X,Y)，设联合概率密度为$f(x,y)$，则(X,Y)**关于X的边缘概率函数为**

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

(X,Y)关于Y的边缘概率函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

例　设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, |y|<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：(1) 边际密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$； (2) $P(X<1/2)$ 及 $P(Y>1/2)$

三、边缘密度函数

例 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

其中，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数，且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$ 。

我们称(X,Y)为服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布，

记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,\rho)$

试求二维正态随机变量的边缘概率密度。

§ 3 条件分布

一、条件分布及条件分布律的定义

条件概率：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 推广到随机变量

设有两个随机变量X, Y， 在给定Y取某个或某些值的条件下，求X的概率分布。**这个分布就是条件分布**

定义

设 (X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\quad i=1,2,\ldots$$

为在**$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律**。

若$P\{X=x_i\}>0$，则称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\quad i=1,2,\ldots$$

为在**$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布律**。

一、条件分布及条件分布律的定义

例 一射手进行射击，击中目标的概率为$p(0<p<1)$，射击直至击中目标两次为止。设以X表示首次击中目标所进行的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数，试求X和Y的联合分布律及条件分布律。

例 设在一段时间内进入某一商店的顾客人数X服从泊松分布$\pi(\lambda)$每个顾客购买某种物品的概率为p,并且各个顾客是否购买该种物品相互独立。求进入商店的顾客购买这种物品的人数Y的分布列。

二、连续型随机变量的条件分布

定义

设X和Y的联合概率密度为 $f(x,y)$, 边缘概率密度为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则对与固定的 x，$f_X(x)>0$, 定义**已知 $X=x$的条件下, Y 的条件密度函数**为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

同样, 对与固定的y, $f_Y(y)>0$, 定义 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

为**已知 $Y=y$的条件下, X的条件密度函数**。

定义的解释：以 $f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为例

将上式左边乘以 dx , 右边乘以 $(dxdy)/dy$ 即得

$$f_{X|Y}(x\mid y)dx=\frac{f(x,y)dxdy}{f_Y(y)dy}\approx\frac{P\{x\le X\le x+dx, y\le Y\le y+dy\}}{P\{y\le Y\le y+dy\}}$$

$$=P\{x\le X\le x+dx\mid y\le Y<y+dy\}$$

二、连续型随机变量的条件分布

例　设数X在区间(0,1)上随机地取值，当观察到$X=x(0<x<1)$时，数Y在区间$(0,x)$上随机地取值。求Y的概率密度 $f_Y(y)$。

例　身高—体重问题

§ 4 相互独立的随机变量

一、相互独立的随机变量

随机变量相互独立的定义

定义

设 X, Y是两个$r.v$，若对任意的 x, y, 有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$

则称X, Y相互独立。

两事件A, B 独立的定义是：

若$P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A, B独立。

随机变量 X, Y相互独立，实际上是指：

对于任意的 x, y,

随机事件$\{X\le x\}$与$\{Y\le y\}$相互独立。

一、相互独立的随机变量

随机变量相互独立的定义

等价定义

设 X, Y是两个$r.v$，$F(x, y)$，$F_X(x)$，$F_Y(y)$分别为(X, Y)的分布函数和边缘分布函数，若$\boldsymbol{F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)}$，则称**$X, Y$相互独立**。

它表明，两个随机变量相互独立时，它们的联合分布函数可由两个边缘分布函数唯一确定。

设 X, Y是两个$r.v$，$f(x, y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$分别为(X, Y)的概率密度和边缘密度，**X, Y相互独立等价于 $f(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$ 在平面上几乎处处成立**(平面上除去面积为0的集合外)

一、相互独立的随机变量

例 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时，他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时，设他们两人到达的时间相互独立，求他们到达办公室的时间相差不超过5分钟(1/12小时)的概率。

例 $(X,Y)\sim f(x,y)=\frac{1}{\pi}I_{(x^2+y^2\le 1)}$ 问r.v.X与r.v.Y是否独立？

若 (X,Y)是离散型随机变量, 则上述独立性的定义等价于:

对(X,Y)的所有可能取值(x_i, y_j) ,若有

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},\quad i, j=1, 2, \ldots$$

则称X和Y相互独立。

§ 4 相互独立的随机变量

二、*n*维随机变量的边缘分布与独立性

设n维随机变量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的分布函数为$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$，则$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的 k $(1\le k<n)$维边缘分布函数就随之确定，如关于(X_1,X_2)的边缘分布函数是 $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)=F(x_1, x_2, +\infty, +\infty, \dots +\infty)$

若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的概率密度函数, 则$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 关于X_1、(X_1, X_2)的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_2dx_3\cdots dx_n$$

$$f_{X_1,\ X_2}(x_1, x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_3dx_4\cdots dx_n$$

若X_k的边缘分布函数为$F_{X_k}(x_k)$, $k=1, 2, \dots, n$, 且

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称**$X1$，$X2$, ..., X_n相互独立**，或称**$(X_1, X_2, \dots, X_n)$是独立的**。

§4 相互独立的随机变量

二、n维随机变量的边缘分布与独立性

定义

设n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的分布函数为$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$； m维随机变量$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$的分布函数为$F_Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$； $X_1, X_2, \ldots, X_n$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$组成的$n+m$维随机变量的分布函数为$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$。

如果$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)F_Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$

称**n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$与m维随机变量$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$独立**。

定理

设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$与$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$相互独立，则$X_i\ (i=1, 2, \ldots, n)$与$Y_j\ (j=1, 2, \ldots, m)$相互独立；又若h, g是连续函数，则$h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$与$g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$相互独立。

一、一般情形

问题

已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 是二元连续函数，欲求随机变量 $Z=g(X,Y)$的概率密度。

解题步骤

先求随机变量$Z=g(X,Y)$的分布函数 $F_Z(z)$，

再求导即可得其概率密度函数：$f_Z(z)=F'_Z(z)$。

§5 两个随机变量的函数的分布

一、一般情形

$Z=g(X,Y)$的概率分布

例 设二维r.v.(X,Y)的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1
-1	5/20	3/20
1	2/20	3/20
2	6/20	1/20

试求$Z_1=X-Y$及$Z_2=XY$的分布律

解 由(X,Y)的联合分布律为

P	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$
(X,Y)	$(0,-1)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,-1)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$Z_1=X-Y$	1	-1	-2	2	0	-1
$Z_2=XY$	0	0	0	-1	1	2

由此，容易得到$Z_1=X-Y$及$Z_2=XY$的分布律为：

Z_1	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{3}{20}$

和

Z_2	-1	0	1	2
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

§ 5 两个随机变量的函数的分布

一、一般情形

例 设X, Y是相互独立的随机变量，其分布律分别为：

$$P\{X=k\}=p(k),\quad k=0,1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=r\}=q(r),\quad r=0,1,2,\cdots,$$

证明随机变量$Z=X+Y$的分布律为

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}p(k)q(i-k),\quad i=0,1,2,\cdots.$$

例 设X, Y是相互独立的随机变量，$X\sim\pi(\lambda_1)$， $Y\sim\pi(\lambda_2)$。

证明 $Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$

例 设X, Y是相互独立的随机变量，$X\sim b(n_1,p)$， $Y\sim b(n_2,p)$ 。

证明 $Z=X+Y\sim b(n_1+n_2,p)$

一、一般情形

例 设r.v. X, Y是相互独立的随机变量，$X\sim N(0, 1)$， $Y\sim N(0, 1)$。试求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的概率密度。

解 先求Z的分布函数$F_Z(z)$，由于X, Y是相互独立，则

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

由于$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$是非负，故当 $z<0$时，$F_Z(z)=0$； 当 $z\geq 0$时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leq z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$\overset{\substack{\text{令}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta=2\pi\left[1-e^{-\frac{z^2}{2}}\right]=1-e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}}, & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

服从参数σ=1的瑞利分布 (Rayleigh)

二、和的分布

解题步骤

设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，
$Z = X+Y$的概率密度记为$f_Z(z)$

1. 求$F_Z(z)$

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy$$

$$\overset{令y=u-x}{=}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{z}f(x,u-x)du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{z}f(x,u-x)dx]du$$

2. 求$f_Z(z)$

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$$ 同理可得 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy$$

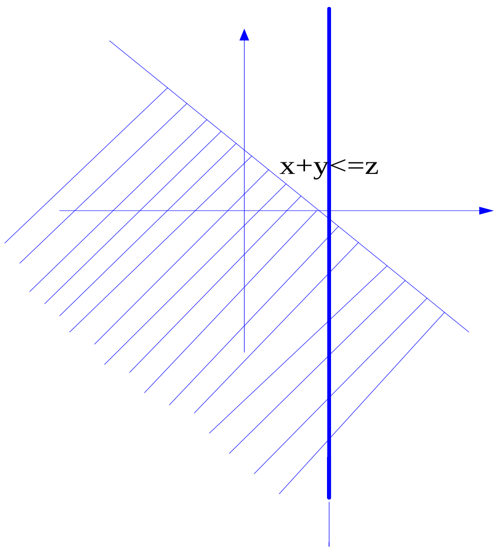
求$Z_1=g_1(X,Y)$ $Z_2=g_2(X,Y)$的联合分布

二、和的分布

例　设r.v. X, Y是相互独立的随机变量，$X \sim N(0, 1)$，　$Y \sim N(0, 1)$。

试求$Z = X+Y$的概率密度$f_Z(z)$。

解　由卷积公式可得：



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[x^2+(z-x)^2\right]} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx \overset{x-\frac{z}{2}=\frac{t}{\sqrt{2}}}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \sim N(0,2)$$

当X和Y相互独立时，$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ 这时

1 反转 $f(-x)$

2 平移 $f(z-x)$

3 求积分

卷积

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy \overset{\text{记为}}{=} \boxed{f_X * f_Y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$$

二、和的分布

定理1：(**正态分布的可加性**)设随机变量 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

且X与Y独立，则：$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

定理2：设随机变量 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ i=1, 2, ..., n 且X_1, X_2, ..., X_n独立，

则：$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$

更一般地,可以证明有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布

$$\sum_{i=1}^n k_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n k_i \mu_i, \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2\right)$$

二、和的分布

例 设r.v. X, Y是相互独立的随机变量，且它们的概率密度分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0 & else\end{cases}$$

试求：$Z=X+Y$是相互独立的概率密度$f_Z(z)$

解 法一：由卷积公式 $f_Z(z)=\int f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^1 f_Y(z-x)dx$

$$\overset{令y=z-x}{=}\int_{z-1}^{z}-f_Y(y)dy=\int_{[z-1,z]\bigcap(0,+\infty)}-e^{-y}dy$$

当$z\le 0$时，$[z-1,z]\bigcap(0,+\infty)=\Phi$， $f_Z(z)=0$;

当$0<z\le 1$时，$[z-1,z]\bigcap(0,+\infty)=(0,z]$， $f_Z(z)=\int_0^z e^{-y}dy=1-e^{-z}$;

当$z>1$时，$[z-1,z]\bigcap(0,+\infty)=[z-1,z]$， $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}e^{-y}dy=e^{-z}\ (e-1)$

二、和的分布

法二：由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} f_X(x)f_Y(z-x)dx$ 欲使 $f_X(x)\,f_Y(z\text{-}x)\neq 0$，积分变量$x$的变化范围，必须满足如下联立不等式

$$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ z-x>0 \end{cases} \quad \text{即：} \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ z>x \end{cases} \qquad (*)$$

这时，$f_X(x)f_Y(z-x)=e^{-(z-x)}$

(1) 当$z\le 0$时，(*)无解，即对任意的x，有$f_X(x)f_Y(z-x)=0$

(2) 当$0<z\le 1$时，(*)的解为$0\le x<z$，这时$f_Z(z)=\int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}$

(3) 当$z>1$时，(*)的解为$0\le x<1$，这时 $f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=e^{-z}(e-1)$

三、商和积的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量，其概率密度为$f(x,y)$，则$Z=Y/X$、$Z=XY$仍为连续型随机变量，其概率密度分别为：

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)dx \qquad f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$$

若X和Y相互独立，设(X, Y)关于X，Y的边缘密度分别为$f_X(x)$，$f_Y(y)$则概率密度分别为：

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(y)dx \qquad f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(y)dx$$

例：设X与Y相互独立且同服从指数分布：$f(x)=e^{-x}I_{(0,+\infty)}(x)$，若U=X+Y，V=X/Y，证明：U和V也独立。

四、极值分布

设(X, Y)相互独立，其分布函数分别为$F_X(x)$，$F_Y(y)$，记 $M=\max\{X, Y\}$，$N=\min\{X, Y\}$，则M和N的分布函数分别为：

$$\boxed{\begin{aligned} F_M(z) &= F_X(z)\,F_Y(z) \\ F_N(z) &= 1-[1-F_X(z)]\,[1-F_Y(z)] \end{aligned}}$$

推导：

$$\begin{aligned} F_M(z) &= P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} \\ &= P\{X \le z\}P\{Y \le z\} = F_X(z)F_Y(z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_N(z) &= P\{N \le z\} = 1 - P\{N > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\ &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]. \end{aligned}$$

四、极值分布

推 广

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，其分布函数分别为

$F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)$，记

$M = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$,

$N = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

则M和N的分布函数分别为：

$$F_M(z) = F_1(z) \ldots F_n(z)$$

$$F_N(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(z)]$$

四、极值分布

特别，当$X_1, X_2, \dots, X_n$独立同分布（分布函数相同）时，则有

$$\boxed{F_M(z)=[F(z)]^n;F_N(z)=1-[1-F(z)]^n.}$$

进一步地，若$X_1, X_2, \dots, X_n$独立且具相同的密度函数$f(x)$，则M和N的密度函数分别由以下二式表出

$$\boxed{f_M(z)=n[F(z)]^{n-1}f(z);\quad f_N(z)=n[1-F(z)]^{n-1}f(z).}$$

例　设某种型号的电子元件寿命近似服从正态分布N(160, 400)，随机选取4只，求其中没有一只寿命小于180的概率。

例　各种连接方式下系统的寿命问题。

谢　　谢!