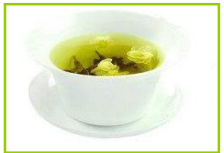
第十四章 平稳随机过程

第十四章 平稳随机过程

- 平稳随机过程的概念
- 各态历经性



一、严格平稳随机过程

严格随机过程的定义

平稳随机过程： 过程的统计特性不随时间的推移而变化

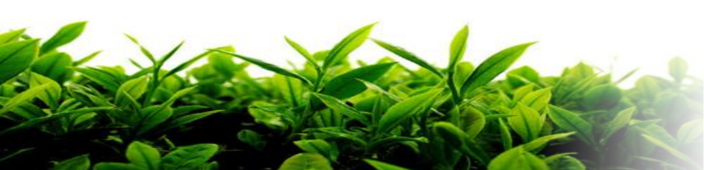
定 义

对于任意的n (n=1, 2, ...), t_1, t_2, $t_n \in$T和任意实数h，当设t_1+h, t_2+h ···, $t_n+h \in$T，n维随机变量：

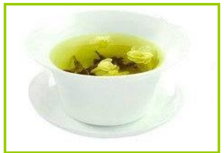
$$\left(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)\right)\to F\left(x_1,x_2,\ldots x_n;\ t_1,t_2,\ldots t_n\right)$$

$$\left(X(t_1+h),X(t_2+h),\ldots,X(t_n+h)\right)\to F\left(x_1,x_2,\ldots x_n;\ t_1+h,t_2+h,\ldots t_n+h\right)$$

具有相同的分布函数，则称**随机过程{ $X(t)$, $t\in T$ }具有平稳性，**称此随机过程为**严格(严、狭义)平稳随机过程**，或简称为**平稳过程**



§1 平稳随机过程的概念



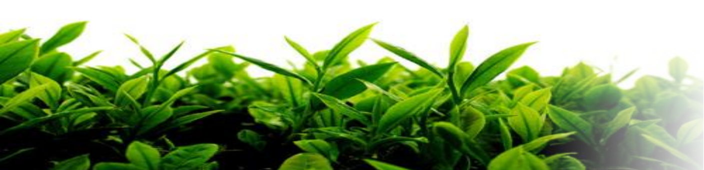
一、严格平稳随机过程

定义说明：

(1) 平稳随机过程是随机序列时，则称为**平稳随机序列**

(2) 在实际中判定一个随机过程是否平稳比较困难。如果前后的环境和主要条件不随时间推移而变化，则一般就可以认为是平稳的

例 恒温条件下的热噪声电压仅与时间间隔有关，而与两个时刻本身无关。



§1 平稳随机过程的概念

一、严格平稳随机过程

严格随机过程的数字特征

若二阶矩过程随机过程$\{X(t), t\in T\}$是严格平稳过程，则：

(1) 均值函数

$$\mu_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x;\ t)=\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)=\text{常数}$$

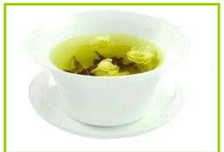
一、二阶存在的严平稳过程的均值函数是常数。

(2) 相关函数

$$R_X(t_1,\ t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 dF(x_1, x_2;\ t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 dF(x_1, x_2;\ 0, t_1-t_2)$$

$$=R_X(t_1-t_2)$$

相关函数是时间间隔的函数，而与时间的起点与终点无关。



二、宽平稳过程

由严平稳过程的定义，要确定一个随机过程是严平稳过程，就需要**求出它的有限维分布，这在实际中使十分困难的**。由于实际需要，人们常常**在相关理论的范围内考虑平稳过程**。

定 义

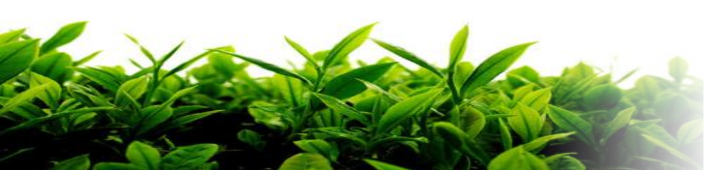
设$\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程，如果：

1) $\forall t \in T,\ \mu_X(t) = \mu_X$ (常数)

2) $\forall t_1, t_2 \in T,\ R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)$

$$\Leftrightarrow \forall \tau \in R,\ t, t+\tau \in T,\ R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$$

则称$\{X(t), t\in T\}$为**宽(弱、广义)平稳过程**，简称**平稳过程**



§1 平稳随机过程的概念

二、宽平稳过程

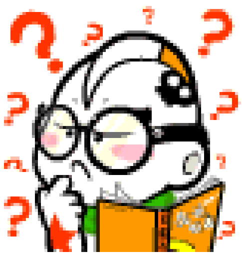
定理：

若$\{X(t), t\in T\}$是正态过程，则$\{X(t), t\in T\}$是严平稳过程的充要条件：$\{X(t), t\in T\}$为宽平稳过程。

严平稳 —— 正态过程 —— 宽平稳

§2 各态历经性

一、各态历经概念的引入



能否从一个时间范围内观察到的一个样本函数或一个样本函数在某些时刻的取值来提取过程的数字特征呢？

所谓**各态历经**，就是指可以**从过程的一个样本函数中获得它的各种统计特性**；具有这一特征的随机过程为**具有各态历经性的随机过程**。

二、随机过程积分的概念

给定二阶矩过程{ $X(t)$, $t\in T$ }，如果它的每一个样本函数在[a, b] $\in T$ 上的积分都存在，我们称随机过程 $X(t)$ 在[a, b]上积分存在，并记为：

$$Y=\int_a^b X(t)dt$$ Y 是一随机变量

(1) 时间均值 $$\langle X(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

(2) 时间相关函数 $$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$$

二、随机过程积分的概念

例 计算随机相位正弦波$X(t) = a \cdot \cos(wt + \Theta)$的时间平均$\langle X(t)\rangle$和$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$。$(\Theta \sim U(0, 2\pi))$

解 由于$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$是平稳过程，且$\mu_X = 0$，$R_X(\tau) = \dfrac{a^2}{2}\cos w\tau$

时间均值：

$$\langle X(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cdot\cos(\omega t+\Theta)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{a}{2T}\int_{-T}^{T}[\cos(\omega t)\cos(\Theta) - \sin(\omega t)\sin(\Theta)]dt = \lim_{T\to\infty}\frac{a\cos(\Theta)\sin(\omega T)}{\omega T}$$

时间均相关函数：

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega t+\Theta)\cdot a\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{a^2}{4T}\int_{-T}^{T}(\cos(2\omega t+\omega\tau+\Theta)+\cos\omega\tau)dt = \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau$$

二、随机过程积分的概念

结论：

$$\mu_X = E\left(X(t)\right) = \left\langle X(t) \right\rangle$$

$$R_X(\tau) = E\left(X(t)X(t+\tau)\right) = \left\langle X(t)X(t+\tau) \right\rangle$$

说明： 对于随机相位正弦波，用时间平均和集平均分别算得的均值和自相关函数是相等的，这一特性并不是随机相位正弦波所独有的。

三、随机过程的各态历经性

定 理

(1) 如果$\mu_X = E(X(t)) = \langle X(t) \rangle$ **以概率1成立**，则称$X(t)$具有**均值各态历经性。**

(2) 如果对任意实数τ，$R_X(\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle$ **以概率1成立**，则称$X(t)$具有**自相关函数各态历经性。**

(3) 如果$X(t)$的**均值和自相关函数都具有各态历经性**，则称$X(t)$是**(宽) 各态历经过程**，或者说$X(t)$是 **各态历经的。**

注：

(1) 定义中的“以概率成立”是对X 的所有样本函数而言的

(2) 各态历经性又称遍历性或斯尔古德性(Ergodicity)

(3) 各态历经过程是平稳过程，但平稳过程不一定是各态历经过程

三、随机过程的各态历经性

例 设 $X(t)=\begin{cases} x_1(t)=1, & p=\dfrac{1}{3} \\ x_2(t)=2, & p=\dfrac{2}{3} \end{cases}, \quad -\infty<t<\infty$

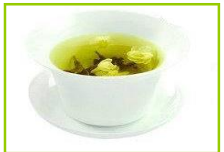
试讨论 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的Ergodicity。

解 $E(X(t))=1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}=\mu_X$

$$E(X(t)X(t+\tau))=1\times1\times\frac{1}{3}+2\times2\times\frac{2}{3}=3=R_X(\tau)$$

因此，$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$是平稳过程

令 $X=\begin{cases} 1, & p=1/3 \\ 2, & p=2/3 \end{cases}$



三、随机过程的各态历经性

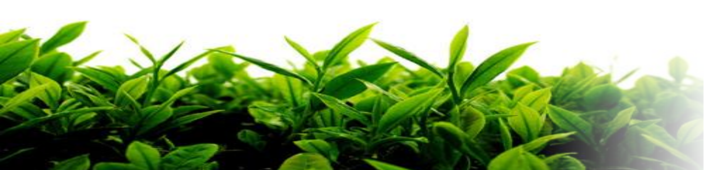
时间均值： $\langle X(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Xdt = X$

时间均相关函数： $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2dt = X^2$$

$P\{\ X = 5/3\ \}\neq 1$或$P\{\ X^2 = 3\ \}\neq 1$不成立，故 $\{\ X(t), -\infty<t<+\infty\}$ **不具有均值和相关函数的各态历经性**。

即：样本函数$x_1(t)$或$x_2(t)$的状态没有经历随机过程的所有状态。这里也就说明了"**平稳过程不一定是各态历经过程**"



谢　　谢!