

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

SEMINARSKI RAD

Mihael Cindori, mag. ing. mech.

Zagreb, 21. kolovoz, 2017. g.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

**Numerička analiza laminarnog
graničnog sloja uslijed slobodne
konvekcije na ravnoj okomitoj ploči**

Mihael Cindori, mag. ing. mech.

Zagreb, 21. kolovoz, 2017. g.

Sadržaj

Sadržaj	I
Popis slika	II
Popis tablica.....	III
Popis važnijih oznaka i skraćenica.....	IV
1. Uvod	8
2. Opis problema	10
2.1. Polazne jednadžbe	11
2.2. Uzgonska sila	12
2.3. Boussinesqova aproksimacija	13
3. Dimenzijska analiza izvedenih jednadžbi.....	14
3.1. Pregled izvedenih jednadžbi u bezdimenzijskom obliku	21
3.2. Pregled izvedenih jednadžbi u dimenzijskom obliku.....	21
4. Metode proračuna.....	23
4.1. Vrijednosti korištene pri proračunu	23
4.2. Rješenje uz pretpostavku automodelnosti	24
4.2.1. Parametri prijelaza topline.....	32
4.2.2. Rješenje jednadžbi izvedenih na temelju pretpostavke o automodelnosti profila unutar graničnog sloja	33
4.3. Računalna dinamika fluida.....	35
4.3.1. Implementacija jednadžbi unutar programskog paketa OpenFoam	35
4.3.2. Računalna domena i rubni uvjeti	36
4.3.3. Mreža konačnih volumena	37
4.3.4. Sheme diskretizacije i uvjeti konvergencije	37
4.3.5. Rezultati dobiveni upotrebom stacionarnog rješavača (SIMPLE)	38
4.3.6. Rezultati dobiveni upotrebom nestacionarnog rješavača (PISO)	40
5. Rasprava	44
6. Zaključak	48
Dodatak A	50
Dodatak B	54
Dodatak C	59
Literatura.....	61

Popis slika

Slika 1. Shematski prikaz problema za koje vrijede jednadžbe izvedene u ovom radu	10
Slika 2. Shematski prikaz problema uz pretpostavku o automodelnosti rješenja	24
Slika 3. Shematski prikaz geometrije računalne domene	36
Slika 4. Detalj mreže konačnih volumena uz ploču.....	37
Slika 5. Polja osrednjene temperature \bar{T} , K (a) i (c) i komponente osrednjene brzine \bar{u} , m/s (b) i (d) dobivena stacionarnim rješavačem (SIMPLE algoritam).....	39
Slika 6. Strujnice dobivene stacionarnim rješavačem (SIMPLE algoritam): (a) strujnice generirane duž cijele duljine ploče, (b) uvećan prikaz strujnica uz kraj ploče	40
Slika 7. Polja osrednjene temperature \bar{T} , K (a) i (c) i komponente osrednjene brzine \bar{u} , m/s (b) i (d) dobivena nestacionarnim rješavačem (PISO algoritam)	41
Slika 8. Strujnice dobivene nestacionarnim rješavačem (PISO algoritam): (a) strujnice generirane duž cijele duljine ploče, (b) uvećan prikaz strujnica uz kraj ploče	42
Slika 9. Strujnice generirane u računalnoj domeni iz rezultata dobivenih nestacionarnim rješavačem (PISO algoritam) za $t = 1,5$ s, $t = 2$ s, $t = 2,5$ s i $t = 3$ s.....	43
Slika 10. Usporedba rezultata dobivenih pretpostavkom o automodelnosti rješenja (•), te rezultata dobivenih stacionarnim (a) i (b), te nestacionarnim (c) i (d) rješavačem dobivenih metodom konačnih volumena uz upotrebu programskega paketa OpenFoam	44
Slika 11. Usporedba ovisnosti mjesnog Nusseltovog broja Nu_x o Rayleighovom broju Ra_x . Prikazani su rezultati dobiveni pretpostavkom o automodelnosti rješenja (o), rezultati dobiveni programskim paketom OpenFoam stacionarnim (+) i nestacionarnim rješavačem (x), te uspoređeni s rješenjem dobivenim izrazom danim u [5].	47

Popis tablica

Tablica 1. Vrijednosti korištene pri rješavanju sustava jednadžbi.....	23
Tablica 2. Rubni uvjeti.....	36
Tablica 3. Sheme diskretizacija korištene pri numeričkim simulacijama.....	37
Tablica 4. Rješenje dobiveno jednadžbama izvedenim na temelju prepostavke o automodelnosti rješenja za $\text{Pr} = 0,7$	53
Tablica 5. Zadani rubni i početni uvjeti za kinematski tlak \tilde{p} , m^2/s^2	54
Tablica 6. Zadani rubni i početni uvjeti za temperaturu T , K	55
Tablica 7. Zadani rubni i početni uvjeti za brzinu $\bar{\mathbf{u}}$, m/s	56
Tablica 8. Skripta <i>blockMeshDict</i> za generiranje mreže konačnih volumena korištene pri numeričkom proračunu u OpenFoam-u	58
Tablica 9. <i>Python</i> skripta korištena za generiranje rezultata temeljenih na prepostavci o automodelnosti rješenja.....	60

Popis važnijih oznaka i skraćenica

Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
a	m^2/s	koeficijent toplinske difuzije
a_∞	m^2/s	koeficijent toplinske difuzije fluida uz ploču
c_p	J/kgK	specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku
$c_{p,\infty}$	J/kgK	specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku fluida uz ploču
Co	-	Courantov broj
F	-	funkcija sličnosti
\mathbf{f}	m/s^2	vektor masene sile
g	m/s^2	ubrzanje zemljine sile teže
G	-	funkcija rastezanja strujne funkcije
Gr	-	Grasshofov broj
Gr_L	-	Grasshofov broj izračunat za duljinu ploče L
$Gr_{L,\text{kr}}$	-	kritična vrijednost Grasshofovog broja
Gr_x	-	Grasshofov broj izračunat na udaljenosti x od ruba ploče
H	$1/\text{m}$	funkcija rastezanja (<i>stretching function</i> , engl.) ovisna o x koordinati
L	m	duljina ploče
Nu	-	Nusseltov broj
Nu_x	-	Nusseltov broj izračunat na udaljenosti x od ruba ploče
p	Pa	hidrostatski tlak
\tilde{p}	-	bezdimenzijska vrijednost tlaka p
\tilde{p}	m^2/s^2	kinematski tlak definiran unutar programskog paketa OpenFoam
p'	Pa	poremećaj tlaka zbog strujanja fluida
p_∞	Pa	referentna vrijednost tlaka
Pr	-	Prandtlov broj
R	m	polumjer zakrivljenosti površine
R_∞	J/kgK	specifična plinska konstanta fluida uz ploču
Ra	-	Rayleighev broj
Ra_x	-	Rayleighev broj izračunat na udaljenosti x od ruba ploče
t	s	vrijeme
t_{uk}	s	ukupno vrijeme do kojeg je proveden nestacionarni proračun
T	K	temperatura
\bar{T}	K	osrednjena temperatura
\tilde{T}	-	bezdimenzijska vrijednost temperature T
T_p	K	temperatura ploče

T_∞	K	temperatura fluida uz ploču
u, v	m/s	komponente brzine u smjeru x i y koordinata
\bar{u}, \bar{v}	m/s	komponente osrednjene brzine u smjeru x i y koordinata
\tilde{u}, \tilde{v}	-	bezdimenzijske vrijednosti komponenata brzine u i v
u_B	m/s	referentna vrijednost brzine
\mathbf{u}	m/s	vektor brzine
$\bar{\mathbf{u}}$	m/s	vektor osrednjene brzine
x, y	m	koordinate
\tilde{x}, \tilde{y}	-	bezdimenzijske vrijednosti koordinata x i y

Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
α	W/m ² K	mjesni koeficijent prijelaza topline
α_x	W/m ² K	mjesni koeficijent prijelaza topline izračunat na udaljenosti x od ruba ploče
β	1/K	koeficijent izobarnog obujmenog toplinskog širenja
η	-	bezdimenzijska udaljenost od ploče
φ	°, rad	kut između koordinatne osi x i smjera djelovanja gravitacijskog polja
ϕ	-	funkcija ovisna o Prandtlovom broju
λ	W/mK	koeficijent toplinske provodnosti fluida
λ_∞	W/mK	koeficijent toplinske provodnosti fluida uz ploču
δ	m	debljina hidrodinamičkog graničnog sloja
δ_Γ	m	debljina temperturnog graničnog sloja
μ	Pa·s	dinamička viskoznost
μ_∞	Pa·s	dinamička viskoznost fluida uz ploču
ν	m ² /s	kinematska viskoznost
ν_∞	m ² /s	kinematska viskoznost fluida uz ploču
ψ	-	strujna funkcija ovisna o x i y koordinatama
$\bar{\psi}$	m ² /s	strujna funkcija ovisna o x i η koordinatama
ρ	kg/m ³	gustoća fluida
ρ_k	kg/m ³	gustoća fluida definirana unutar programskog paketa OpenFoam
ρ_∞	kg/m ³	gustoća fluida uz ploču
θ	-	bezdimenzijska temperatura

Skraćenice, indeksi

Oznaka	Puno značenje
CFD	<i>computational fluid dynamics</i>
FVM	<i>finite volume method</i>
MKV	metoda konačnih volumena
RDF	računalna dinamika fluida

Sažetak

U prvom poglavlju ovoga rada će se dati kratki pregled problema kod kojih su bitne fizikalne pojave koje nastaju kao posljedica slobodne konvekcije. Također će se dati kratki osvrt na problematiku rješavanja takvih problema u tehnici.

U drugom poglavlju bit će dan kratki opis problema, te definirani glavni parametri potrebni za rješavanje, dok će u trećem poglavlju biti definiran matematički model za računanje laminarnog graničnog sloja, a koji nastaje kao posljedica slobodne konvekcije na ravnoj okomitoj ploči. Važno je naglasiti kako će se proučiti slučaj kod kojeg je ploča zagrijana na jednoliku konstantnu temperaturu koja je veća od temperature fluida. Korištenjem dimenzijske analize početne jednadžbe će biti svedene na jednostavniji oblik pogodniji za rješavanje nekim od standardnih numeričkih postupaka.

U četvrtom poglavlju će se dati pregled dvije metode odabранe za rješavanje jednadžbi slobodne konvekcije. Prva je metoda rješavanja temeljena na prepostavci samosličnosti profila (automodelnosti rješenja). Stoga će detaljno biti analiziran postupak kojim se početne parcijalne diferencijalne jednadžbe mogu pretvoriti u sustav dviju običnih diferencijalnih jednadžbi i riješiti standardnim postupcima numeričke integracije uz upotrebu programskog jezika *Python*. Druga metoda rješavanja je metoda konačnih volumena (MKV, *finite volume method* - FVM, engl.), te će biti objašnjen način implementacije jednadžbi modela u programskom paketu otvorenog koda OpenFoam-u, kao što će također biti dan pregled rubnih uvjeta i ostalih postavki potrebnih za dobivanje konačnog rješenja. Također će biti prikazani rezultati osrednjjenog temperaturnog polja i polja osrednjene brzine dobiveni upotrebom stacionarnog i nestacionarnog rješavača.

U petom poglavlju će biti uspoređeni rezultati dobiveni na temelju pretpostavke o automodelnosti rješenja s rezultatima dobivenim metodom konačnih volumena u programskom paketu OpenFoam, te će u šestom poglavlju biti iznešeni zaključci o dobivenim rezultatima.

1. Uvod

U većini problema sa strujanjem fluida se pojava i utjecaj slobodne konvekcije (engl. *free convection*) može zanemariti bez velikog utjecaja na konačno rješenje. To su problemi kod kojih fluid struji relativno velikim brzinama, te je prisilna konvekcija (engl. *force convection*) dominantna. Upravo takvi problemi su u većini dostupne literature jako dobro opisani, te se autor tijekom dosadašnjeg studija s takvim problemima uglavnom i susretao, što je bio ujedno i jedan od najvažnijih motivacijskih čimbenika za odabir teme.

No kod manjih brzina može doći do situacije u kojoj su efekti prisilne i slobodne konvekcije istog reda veličine, te se u tom slučaju niti jedan od efekata ne može proglašiti dominantnim. Druga su pak krajnost slučajevi u kojima se prisilna konvekcija može u potpunosti zanemariti, te se kao jedini utjecajan parametar uzimaju efekti povezani sa slobodnom konvekcijom.

Upravo zbog toga se utjecaj slobodne konvekcije u velikom broju slučajeva nebi trebao (ili čak smio!) zanemariti. Tako se u raznim klimatizacijskim proračunima pokazalo kako slobodna konvekcija ima jako važnu ulogu pri uspostavljanju temperaturnog polja u prostorima u kojima borave ljudi, a samim time ima važnu ulogu pri određivanju toplinskih gubitaka, kao i potrebne snage toplinskih uređaja [2]. Osim u termotehnici, slobodna konvekcija važnu ulogu ima i u transportu otrovnih produkata nastalih izgaranjem, ali je i jedan od najvažnijih čimbenika nastanka raznih pojava u atmosferi. Tako je npr. poznato kako je razlika u temperaturi zraka (uzgonski efekt koji nastaje kao posljedica te razlike) jedan od glavnih čimbenika u formiranju tornada. Primjera je još mnogo, a možda je najvažnije napomenuti kako se upravo slobodna konvekcija često koristi kao određena vrsta etalona pri proračunu raznih termoenergetskih sustava, s obzirom da se upravo kod takvih efekata javljaju najveći otpori pri prijelazu topline. Zbog toga inženjeri često koriste proračune temeljene na čistoj slobodnoj konvekciji kako bi eventualno smanjili pogonske troškove u energetskim postrojenjima [2].

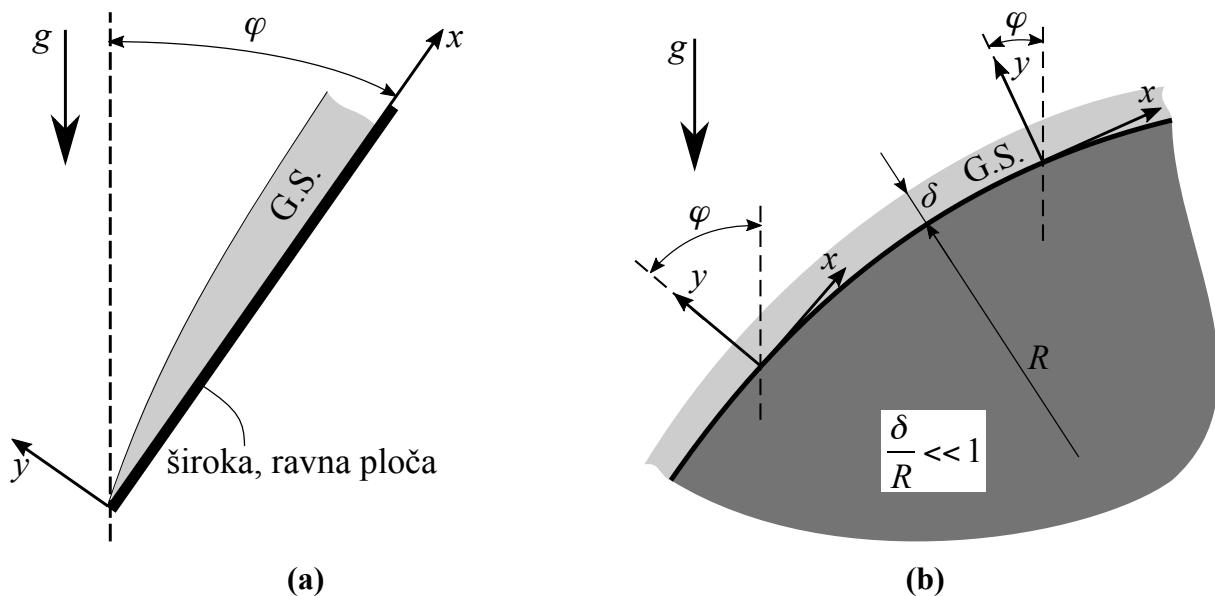
Što se tiče modela rješavanja problema koji uključuju slobodnu konvekciju, važno je spomenuti kako se većina takvih modela temelji na različitim izrazima dobivenim mjeranjima. Ti izrazi su obično prikazani u zavisnosti od bezdimenzijskih veličina (te veličine će biti pojašnjene kasnije), a služe za izračunavanje ostalih bezdimenzijskih veličina karakterističnih za termodinamičke procese. Geometrije za koje postoje takvi izrazi se uglavnom svode na npr. dugi cilindar, sferu ili pak strujanja između dvije dugačke ploče. Pritom zainteresirani čitatelj više o spomenutim izrazima može saznati u dostupnoj literaturi [1], [2], [3], [6], [8], [10], [14]. No čak se i za geometrijski jednostavnije

slučajeve u većini literature može naći vrlo malo modela koji nisu vezani uz izraze dobivene aproksimacijom mjerene vrijednosti. Jedan od takvih modela je slučaj laminarnog graničnog sloja na ploči koja općenito može biti pod nekim kutem u odnosu na djelovanje masene (u ovom slučaju gravitacijske) sile, zbog različite temperature ploče i okolne temperature fluida. Valja napomenuti kako takvi modeli ne vrijede za slučaj kada je ploča horizontalno postavljena, tj. kada je ploča postavljena okomito na djelovanje gravitacijske sile. Stoga se kao specijalni slučaj često izabire slučaj kada je ploča postavljena vertikalno, tj. kada se granični sloj formira paralelno s djelovanjem gravitacijske sile, a koji će biti detaljno analiziran u ovome radu.

Za kraj bi bilo dobro spomenuti kako se u novije vrijeme za rješavanje ovakvih problema sve više koristi i računalna dinamika fluida (RDF, *computational fluid dynamics* – CFD, engl.) temeljena na metodi konačnih volumena. Naime, naglim razvojem računala i procesorske snage, mnogi problemi za koje nisu postojala analitička rješenja, a koje niti izrazi dobiveni eksperimentalnim mjeranjima nisu najbolje opisivali, sada mogu puno brže i efikasnije biti analizirani. Usto, osim slobodne konvekcije RDF relativno brzo može riješiti probleme koji uz slobodnu konvekciju uključuju i druge relevantne načine izmjene topline, od kojih je svakako izazovno modeliranje procesa zračenja. Upravo su modeli koji uključuju sva tri načina izmjene topline (kondukciju, konvekciju i zračenje) u današnje doba predmet mnogih istraživanja, te se za potrebe simulacija uz upotrebu RDF-a još uvijek razvijaju algoritmi koji će biti brži i efikasniji. Pritom se često cilja na razvoj algoritama za točno određeni i specifični oblik problema.

2. Opis problema

U uvodnom dijelu već je spomenuto kako će se u ovom radu razmatrati slučaj laminarnog graničnog sloja koji nastaje uslijed različitih temperatura ploče i fluida uz ploču. Zbog postojanja takve temperaturne razlike fluid uz ploču će se zagrijati, te uslijed pojave uzgonskog efekta početi strujati uzduž ploče. Za potrebe izvoda jednadžbi koje opisuju takav problem, koristit će se pretpostavka da je ploča konstantne temperature T_p , koja je veća od temperature T_∞ fluida podalje od ploče čija je gustoća ρ_∞ , odnosno vrijedit će uvjet da je $T_p > T_\infty$, te će topliji fluid strujati u pozitivnom smjeru osi x koja prati površinu ploče. Također će se prilikom izvođenja jednadžbi pretpostaviti da se tako zagrijana ploča nalazi pod nekim kutem φ u odnosu na smjer masene (gravitacijske) sile iznosa $\rho_\infty g$, kao što je prikazano na Slika 1. (a).



Slika 1. Shematski prikaz problema za koje vrijede jednadžbe izvedene u ovom radu

Osim za ravnu ploču, izvedene jednadžbe vrijedit će za bilo koji slučaj pojave laminarnog graničnog sloja uslijed slobodne konvekcije na zakrivljenoj površini kao što je prikazano na Slika 1. (b), uz uvjet da je polumjer zakrivljenosti površine R mnogo veći od debljine nastalog graničnog sloja δ , tj. mora biti zadovoljen sljedeći uvjet,

$$\frac{\delta}{R} \ll 1. \quad (1)$$

2.1. Polazne jednadžbe

Za pravilno modeliranje problema slobodne konvekcije potrebno je napraviti pravilnu početnu analizu. Naime, slobodna konvekcija će se pojaviti uslijed različite temperature ploče i fluida uz ploču. Za pravilno modeliranje takvog problema je stoga osim jednadžbe kontinuiteta (jednadžbe očuvanja mase) i jednadžbe količine gibanja potrebno riješiti i jednadžbu očuvanja energije, tj. energetsku jednadžbu. Naime, upravo će se energetskom jednadžbom riješiti temperaturno polje. Općenito, sve tri jednadžbe za nestlačivo strujanje su sljedećeg oblika,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu (\nabla^2 \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f}, \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \frac{\lambda}{c_p} (\nabla^2 T). \quad (4)$$

S obzirom da će se razmatrati stacionarno dvodimenzionalno strujanje, pri čemu je vektor masene sile \mathbf{f} definiran kao,

$$\mathbf{f} = -g \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (5)$$

jednadžbe (2) - (4) se mogu zapisati kao,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \rho g \cos \varphi, \quad (7)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \sin \varphi, \quad (8)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\lambda}{c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (9)$$

gdje je ρ , kg/m³, gustoća fluida, μ , Pa·s, dinamička viskoznost fluida, λ , W/mK, koeficijent toplinske provodnosti fluida, a c_p , J/kgK, specifični toplinski kapacitet fluida pri konstantnom tlaku.

2.2. Uzgonska sila

Slično kao i kod prisilne konvekcije, i kod slobodne konvekcije transport količine gibanja i energije se odvija na potpuno isti način. Jedina razlika u odnosu na prisilnu konvekciju leži u činjenici da je kod slobodne konvekcije uzrok strujanja uzgonski efekt nastao kao posljedica razlike u gustoći topnjeg i hladnjeg fluida, a tlačne sile su zanemarive, dok su kod prisilne konvekcije uzgonski efekti zanemarivi zbog dominantnosti tlačnih i inercijskih sila. Kako bi se definirao uzgonski član u jednadžbama količine gibanja polazi se od definicije hidrostatskog tlaka (prema izvodu danom u [4]) koji će vladati u prostoru ispunjenim mirujućim fluidom konstantne temperature,

$$p = p_{\infty} - \rho_{\infty} g x \cos \varphi, \quad (10)$$

$$p = p_{\infty} - \rho_{\infty} g y \sin \varphi, \quad (11)$$

gdje su p_{∞} i ρ_{∞} referentne vrijednosti tlaka i gustoće fluida uz ploču. No ukoliko je ploča zagrijana na neku temperaturu veću od okolišne temperature fluida, fluid uz ploču će se zagrijati i uslijed manje gustoće strujati prema gore. Uslijed strujanja će se uspostaviti novo polje tlaka jednako,

$$p = p_{\infty} - \rho_{\infty} g x \cos \varphi + p', \quad (12)$$

$$p = p_{\infty} - \rho_{\infty} g y \sin \varphi + p', \quad (13)$$

gdje je p' dio polja tlaka nastalog kao posljedica strujanja. S obzirom da se u jednadžbama (7) i (8) pojavljuje član gradijenta tlaka, jednadžbe (12) i (13) valja derivirati iz čega slijedi,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_{\infty} g \cos \varphi + \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_{\infty} g \sin \varphi + \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (15)$$

te se uvrštavanjem dobivenih izraza u jednadžbe (7) i (8) dobiva,

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\rho_{\infty} - \rho) g \cos \varphi, \quad (16)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\rho_{\infty} - \rho) g \sin \varphi. \quad (17)$$

2.3. Boussinesqova aproksimacija

Sada se u jednadžbe uvodi pretpostavka da će maksimalna promjena gustoće biti jako mala, tj. da vrijedi,

$$\frac{(\rho_{\infty} - \rho)_{\max}}{\rho_{\infty}} \ll 1. \quad (18)$$

Upravo je Boussinesqova aproksimacija jedan od temeljnih uvjeta za analitičko modeliranje slobodne konvekcije. Također, uvođenjem Boussinesqove aproksimacije pretpostavljamo sljedeće uvjete [3]:

- 1) Zanemarena je promjena tlaka s promjenom gustoće. Uvođenjem takve pretpostavke omogućeno nam je da se promjena gustoće prikaže razvojem u Taylorov red oko točke referentnog stanja u ovisnosti o temperaturi,

$$\rho = \rho_{\infty} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cdot (T - T_{\infty}), \quad (19)$$

a izraz (19) se može pojednostavljeni pisati kao,

$$\frac{\rho}{\rho_{\infty}} = 1 + \beta(T - T_{\infty}). \quad (20)$$

Pritom β predstavlja koeficijent izobarnog obujmenog toplinskog širenja i definira se kao,

$$\beta = -\frac{1}{\rho_{\infty}} \left. \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \right|_p. \quad (21)$$

- 2) Pretpostavlja se da se varijabla gustoće može u svakom članu jednadžbi modela zamijeniti s referentnom vrijednosti, osim u članu za uzgonsku silu. Time se dobije model slabostlačivog strujanja.

Koristeći spomenute pretpostavke, odnosno uvrštavanjem jednadžbe (20) u jednadžbe (16) i (17), moguće je definirati jednadžbe modela dobivene Boussinesqovom aproksimacijom,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (22)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{\partial p'}{\partial x} + v_{\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_{\infty}) \cos\varphi, \quad (23)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{\partial p'}{\partial y} + v_{\infty} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_{\infty}) \sin\varphi, \quad (24)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a_{\infty} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (25)$$

Pritom su kinematska viskoznost v_{∞} i koeficijent toplinske difuzije a_{∞} definirani,

$$v_{\infty} = \frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty}}, \quad (26)$$

$$a_{\infty} = \frac{\lambda_{\infty}}{\rho_{\infty} c_{p,\infty}}, \quad (27)$$

te se računaju s obzirom na referentno stanje fluida (druga pretpostavka Boussinesqove aproksimacije).

Iz dobivenih jednadžbi vidljivo je kako se nakon pretpostavke Boussinesqove aproksimacije dobiva sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u kojem su komponente jednadžbe količine gibanja (23) i (24) međusobno spregnute s jednadžbom očuvanja energije (25). To zapravo znači da će dobiveno polje temperature ovisiti o izračunatom polju brzine, tj. polje brzine ovisi o dobivenom polju temperature. Također, Boussinesqova aproksimacija omogućava pretpostavku slabostlačivosti fluida (iako postoji mala promjena gustoće zagrijanog fluida), što znači da iako se tlak p' računa, on se najčešće ne prikazuje s obzirom da je uzgonski član u jednadžbi količine gibanja dominantan u odnosu na član gradijenta tlaka.

3. Dimenzijska analiza izvedenih jednadžbi

Kako bi se dobivene jednadžbe dodatno pojednostavile, provest će se njihova dimenzijska analiza. Ideja je dobivene jednadžbe svesti na njihov bezdimenzijski oblik, a kod tako dobivenih jednadžbi se lako može utvrditi koji članovi jednadžbe su dominantni, a koje je moguće zanemariti bez da se napravi velika greška u modelu. Analiza je provedena prema izvodu dostupnom u [3] i [14].

Kako bi bilo moguće provesti dimenzijsku analizu potrebno je sve članove u jednadžbama (22), (23), (24) i (25) prikazati u bezdimenzijskom obliku na sljedeći način,

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \tilde{y} = \frac{y}{\delta}, \tilde{u} = \frac{u}{u_B}, \tilde{v} = \frac{v}{u_B}, \tilde{T} = \frac{T - T_{\infty}}{T_p - T_{\infty}}, \tilde{p} = \frac{p'}{\rho_{\infty} u_B^2}, \quad (28)$$

gdje je δ mjera debljine hidrodinamičkog graničnog sloja (*velocity boundary layer*, engl.), u_B je neka referentna brzina (biti će definirana malo kasnije) s obzirom da kod problema slobodne konvekcije ne postoji početna referentna brzina kao što je to slučaj kod prisilne

konvekcije (tamo je referentna brzina najčešće brzina nastrujavanja fluida), L je mjera duljine ploče, a $T_p - T_\infty$ razlika temperature ploče i fluida podalje od ploče. Sada možemo pretpostaviti redove veličina vrijednosti bezdimenzijskih varijabli kako slijedi,

$$o(\tilde{x}) = 1, o(\tilde{y}) = 1, o(\tilde{u}) = 1, o(\tilde{v}) = ?, o(\tilde{T}) = 1, o(\tilde{p}) = 1, \quad (29)$$

s obzirom da se bezdimenzijske vrijednosti kreću od vrijednosti 0 do maksimalne vrijednosti 1, te se sada može krenuti s pretvaranjem jednadžbi modela u bezdimenzijski oblik. Nakon što se izrazi dani u jednadžbi (28) uvrste u jednadžbu kontinuiteta (22), dobiva se ta jednadžba u bezdimenzijskom obliku,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta / L} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = 0. \quad (30)$$

Ukoliko se usporede redovi veličina svakog pojedinog člana u jednadžbi, dobiva se informacija o odnosu veličina komponenti brzina u i v ,

$$o(\tilde{v}) = \underbrace{o(\tilde{u})}_{=1}^{\overset{=1}{\text{---}}} \cdot \underbrace{o(\tilde{y})}_{=1} \cdot \underbrace{o\left(\frac{\delta}{L}\right)}_{\ll 1}. \quad (31)$$

S obzirom da je debljina hidrodinamičkog graničnog sloja mnogo manja od duljine ploče ($\delta/L \ll 1$), može se zaključiti i kako će komponenta brzine v biti mnogo manja od jedan,

$$o(\tilde{v}) \ll 1, \quad (32)$$

što nam u konačnici ukazuje na činjenicu da će komponenta brzine v biti puno manja od komponente brzine u ,

$$v \ll u. \quad (33)$$

Ista procedura slijedi i za x -komponentu jednadžbe količine gibanja (23). Nakon uvrštavanja izraza (28) i dijeljenja dobivene jednadžbe s $(u_B)^2/L$ dobiva se,

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)} \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) &= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \\ &+ v_\infty \left(\frac{1}{u_B L} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \right) + \frac{1}{u_B \left(\frac{\delta^2}{L}\right)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right) + \frac{g \beta (T_p - T_\infty) L}{u_B^2} \tilde{T} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (34)$$

Ovaj izraz se može dodatno pojednostaviti ako se pronađe smislena vrijednost referentne brzine u_B . Naime, za razliku od prisilne konvekcije gdje se za referentnu brzinu može pretpostaviti brzina nastrujavanja fluida na ploču, kod slobodne konvekcije takve brzine nema. No ono što se zna jest da bezdimenzijski uzgonski član u jednadžbi sigurno mora biti reda veličine jedan, tj. $o(\tilde{T})=1$ (rekli smo da je uzgonska sila dominantna sila kod ovog tipa problema). Uz $o(\tilde{T})=1$ to znači da mora vrijediti i da je,

$$o\left(\frac{g\beta(T_p - T_\infty)L}{u_B^2}\right) = 1, \quad (35)$$

odnosno možemo pisati,

$$\frac{g\beta(T_p - T_\infty)L}{u_B^2} = 1, \quad (36)$$

iz čega slijed izraz za referentnu brzinu u_B ,

$$u_B = \sqrt{g\beta(T_p - T_\infty)L}. \quad (37)$$

Ukoliko sada referentnu brzinu u_B u jednadžbi (34) zamijenimo s izrazom definiranim u (37), dobiva se jednadžba u sljedećem obliku,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta/L} \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{v_\infty^2}{g\beta(T_p - T_\infty)L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{(\delta/L)^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \tilde{T} \cos \varphi. \quad (38)$$

Sada izraz ispred difuzijskog člana u jednadžbi (38) možemo prikazati kao,

$$\frac{1}{Gr_L^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{v_\infty^2}{g\beta(T_p - T_\infty)L^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (39)$$

gdje Gr_L predstavlja bezdimenzijski Grasshofov broj definiran kao,

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)L^3}{v_\infty^2}, \quad (40)$$

gdje indeks L ukazuje na činjenicu da se radi o Grasshofovom broju koji se odnosi na referentnu duljinu L ploče. Stoga x -komponenta bezdimenzijske jednadžbe količine gibanja glasi,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta / L} \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Gr_L^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{(\delta / L)^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \tilde{T} \cos \varphi. \quad (41)$$

S tako definiranom jednadžbom može se vrlo brzo izvršiti procjena odnosa veličina pojedinih članova u jednadžbi,

$$o(\tilde{u}) \frac{o(\tilde{u})}{o(\tilde{x})} + o\left(\frac{1}{\delta / L}\right) o(\tilde{v}) \frac{o(\tilde{u})}{o(\tilde{y})} = \frac{o(\tilde{p})}{o(\tilde{x})} + o\left(\frac{1}{Gr_L^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(\frac{o(\tilde{u})}{o(\tilde{x})} + o\left(\frac{1}{(\delta / L)^2}\right) \frac{o(\tilde{u})}{o(\tilde{y})} \right) + o(\tilde{T} \cos \varphi). \quad (42)$$

uzevši u obzir izraze dane u (29). Sada se može doći do zaključaka o utjecaju pojedinih članova na konačno rješenje. Već je prije spomenuto kako debljina hidrodinamičkog graničnog sloja δ mora biti puno manja od duljine ploče L kako bi izvedene jednadžbe vrijedile ($\delta/L \ll 1$), a u tome slučaj vrijedi pretpostavka da Grasshofov broj mora biti jako velik, tj. $Gr_L \gg 1$. Stoga se iz jednadžbe može dobiti i vrlo važna informacija o tome kako će se debljina hidrodinamičkog graničnog sloja δ mijenjati u ovisnosti o koordinati x ,

$$o\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = o\left(Gr_L^{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow o(\delta) = o\left(L Gr_x^{-\frac{1}{4}}\right), \quad (43)$$

iz čega slijedi zavisnost,

$$\frac{\delta^2}{L^2} \sim \frac{1}{Gr_x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \delta \sim \frac{L}{Gr_x^{\frac{1}{2}}} \sim L Gr_x^{-\frac{1}{4}}. \quad (44)$$

Na temelju jednadžbe (42) može se donijeti još jedan vrlo važan zaključak. Naime ako se pogledaju redovi veličina koji se odnose na dvostruku derivaciju brzine u smjeru x koordinate, može se uočiti kako je ona puno manja od dvostrukih derivacija brzine u smjeru y koordinate. Naime lako se iz jednadžbe (42) i izraza (43) može zaključiti kako je red veličine tog člana jednak $o((\delta/L)^2)$. S obzirom da je $\delta/L \ll 1$, a kvadrat je još i manji, utjecaj tog člana na konačno rješenje će biti zanemariv, te se stoga zanemaruje u dalnjim jednadžbama.

Ostaje još odrediti iznos gradijenta tlaka. Naime, ono što znamo jest da je brzina strujanja na rubu i izvan graničnog sloja jednaka $u = v = 0$, odnosno temperatura $T = T_\infty$, što znači da je i tlak na rubu i izvan graničnog sloja jednak,

$$p' = \text{konst.}, \quad (45)$$

iz čega slijedi da je,

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \quad (46)$$

Ista procedura sada slijedi i za y -komponentu jednadžbe količine gibanja. Ponovno se polazi od bezdimenzijskih izraza definiranih u (28), a koje je potom potrebno uvrstiti u jednadžbu (24) i tako dobivenu jednadžbu podijeliti s $(u_B)^2/L$. Nakon dijeljenja slijedi,

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)} \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) &= - \left(\frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \\ &+ v_\infty \left(\frac{1}{u_B L} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} \right) + \frac{1}{u_B \left(\frac{\delta^2}{L}\right)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right) + \frac{g\beta(T_p - T_\infty)L}{u_B^2} \tilde{T} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (47)$$

te se ponovno za referentnu vrijednost brzine u_B može uzeti izraz definiran jednadžbom (37),

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta/L} \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = - \left(\frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \left(\frac{v_\infty^2}{g\beta(T_p - T_\infty)L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\left(\delta/L\right)^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \tilde{T} \sin \varphi. \quad (48)$$

Pritom ponovno izraz ispred difuzijskog člana možemo prikazati pomoću definiranog Grasshofovog broja,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta/L} \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = - \left(\frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Gr_L^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\left(\delta/L\right)^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \tilde{T} \sin \varphi. \quad (49)$$

Ako sada svaki član u jednadžbi prikažemo redom njegove veličine dobiva se,

$$\begin{aligned} o(\tilde{u}) \frac{o(\tilde{v})}{o(\tilde{x})} + o\left(\frac{1}{\delta/L}\right) o(\tilde{v}) \frac{o(\tilde{v})}{o(\tilde{y})} &= o\left(\frac{1}{\delta/L}\right) \frac{o(\Delta p)}{o(\tilde{y})} + \\ &+ o\left(\frac{1}{Gr_L^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(\frac{o(\tilde{v})}{o(\tilde{x})} + o\left(\frac{1}{\left(\delta/L\right)^2}\right) \frac{o(\tilde{v})}{o(\tilde{y})} \right) + o(\tilde{T} \sin \varphi), \end{aligned} \quad (50)$$

pri čemu je Δp mjera promjene tlaka kroz granični sloj. Pokazali smo u jednadžbi (44) kako je,

$$o(Gr_L) = o\left(\frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)^4}\right), \quad (51)$$

iz čega jednadžba (50) prelazi u,

$$o\left(\frac{\delta}{L}\right) + o\left(\frac{\delta}{L}\right) = o\left(\frac{1}{\delta/L}\right) \frac{o(\Delta p)}{o(\tilde{y})} + o\left(\left(\frac{\delta}{L}\right)^2\right) \cdot \left(o\left(\frac{\delta}{L}\right) + \frac{1}{o\left(\frac{\delta}{L}\right)}\right) + o(\tilde{T} \sin \varphi). \quad (52)$$

Ako sada pomnožimo red veličine ispred difuzijskih članova s komponentama unutar zgrade, slijedi,

$$o\left(\frac{\delta}{L}\right) + o\left(\frac{\delta}{L}\right) = \frac{o(\Delta p)}{o\left(\frac{\delta}{L}\right)} + o\left(\left(\frac{\delta}{L}\right)^3\right) + o\left(\frac{\delta}{L}\right) + o(\tilde{T} \sin \varphi). \quad (53)$$

S obzirom da su u gornjoj jednadžbi konvekcijski i difuzijski članovi reda veličine δ/L ili manje, slijedi kako su jedina dva utjecajna člana sila tlaka i uzgonska sila, tj. vrijedi,

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = \rho g \beta (T - T_{\infty}) \sin \varphi. \quad (54)$$

S obzirom da ćemo promatrati slučaj okomite ploče ($\varphi = 0^\circ$), slijedi da je član gradijenta tlaka također zanemariv, odnosno y - komponentu jednadžbe količine gibanja uopće nije potrebno rješavati. Jednostavnije rečeno, tlak na ploči jednak je tlaku na rubu graničnog sloja, odnosno promjena tlaka kroz granični sloj jednaka je nuli,

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = 0. \quad (55)$$

Ono što je važno spomenuti jest kako ove jednadžbe neće vrijediti za slučajeve u kojima je ploča postavljena horizontalno ili blizu horizontalnog položaja, tj. kada je kut $\varphi \approx 90^\circ$. Naime, u tome slučaju je $\cos \varphi = 0$, što se kosi s prepostavkom kod izvoda x - komponente jednadžbe količine gibanja da je član ispred uzgonske sile reda veličine 1.

Nakon što se napravila dimenzijska analiza jednadžbe kontinuiteta i obje komponente jednadžbe količine gibanja, preostaje još napraviti dimenzijsku analizu energetske jednadžbe. Uvrštavanjem bezdimenzijskih izraza definiranih u (28) u jednadžbu (25), dobiva se,

$$\frac{u_B(T_p - T_\infty)}{L} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \right) + \frac{u_B(T_p - T_\infty)}{\delta} \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) = a_\infty \left(\frac{(T_p - T_\infty)}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} \right) + \frac{(T_p - T_\infty)}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right), \quad (56)$$

a dijeljenjem tako dobivene jednadžbe s izrazom ispred prvog člana u jednadžbi slijedi,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\delta} \right) \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) = a_\infty \left(\frac{1}{u_B L} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} \right) + \frac{1}{u_B \frac{\delta^2}{L}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right). \quad (57)$$

Ponovno se može pretpostaviti iznos referentne brzine u_B definirane u (37) kako bi se gornja jednadžba svela na sljedeći oblik,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\delta} \right) \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{a_\infty v_\infty}{v_\infty L^{\frac{3}{2}} \sqrt{g \beta (T_p - T_\infty)}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\left(\frac{\delta}{L} \right)^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right). \quad (58)$$

Poznato je da se Prandtlov broj Pr općenito definira kao,

$$Pr = \frac{v_\infty}{a_\infty}, \quad (59)$$

te se stoga jednadžba (58) može pisati,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\delta} \right) \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{1}{Pr} \left(\frac{v_\infty^2}{g \beta (T_p - T_\infty) L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\left(\frac{\delta}{L} \right)^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right), \quad (60)$$

a uzevši u obzir definiciju Grasshofovog broja slijedi,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\delta} \right) \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{1}{Pr \cdot Gr_L^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\left(\frac{\delta}{L} \right)^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right). \quad (61)$$

Sada je potrebno svaki član u jednadžbi zamijeniti definicijom reda njegove veličine,

$$o(\tilde{u}) \frac{o(\tilde{T})}{o(\tilde{x})} + o\left(\frac{1}{\left(\frac{\delta}{L} \right)} \right) o(\tilde{v}) \frac{o(\tilde{T})}{o(\tilde{y})} = o\left(\frac{1}{Pr \cdot Gr_L^{\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{o(\tilde{T})}{o(\tilde{x})} + o\left(\frac{1}{\left(\frac{\delta}{L} \right)^2} \right) \frac{o(\tilde{T})}{o(\tilde{y})} \right), \quad (62)$$

a već smo definirali da vrijedi,

$$o(\tilde{v}) = o\left(\frac{\delta}{L}\right), \quad o(Gr_L) = o\left(\left(\frac{\delta}{L}\right)^{-4}\right), \quad (63)$$

te jednadžba (62) prelazi u,

$$o(\tilde{u}) \frac{o(\tilde{T})}{o(\tilde{x})} + o\left(\frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)}\right) o(\tilde{v}) \frac{o(\tilde{T})}{o(\tilde{y})} = \frac{o\left(\left(\frac{\delta}{L}\right)^2\right) o(\tilde{T})}{o(Pr)} + \frac{o(\tilde{T})}{o(Pr)}. \quad (64)$$

Iz gornje jednadžbe se može doći do jednog važnog zaključka, a to je da je prvi član na desnoj strani (x - komponenta difuzije) za $o(\delta^2/L^2)$ manji od drugog člana (y - komponenta difuzije), pa se može zanemariti. Time smo dodatno pojednostavili energetsku jednadžbu.

3.1. Pregled izvedenih jednadžbi u bezdimenzijskom obliku

Dimenzijskom analizom utvrdili smo koje članove u polaznim jednadžbama možemo zanemariti, a da pritom ne napravimo preveliku grešku u konačnom rješenju. Tako dobivene jednadžbe za model vertikalne ploče ($\varphi = 0^\circ$) u bezdimenzijskom obliku glase,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta/L} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = 0, \quad (65)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta/L} \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{1}{Gr_L^{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{(\delta/L)^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \tilde{T}, \quad (66)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)} \left(\tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{1}{Pr \cdot Gr_L^{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right). \quad (67)$$

3.2. Pregled izvedenih jednadžbi u dimenzijskom obliku

Sada konačno možemo definirati jednadžbe modela za okomitu ploču ($\varphi = 0^\circ$) dobivene Boussinesqovom aproksimacijom u dimenzijskom obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (68)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v_{\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \beta (T - T_{\infty}), \quad (69)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a_{\infty} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (70)$$

4. Metode proračuna

Izvedene jednadžbe (68) - (70) će biti riješene na dva načina. Prvi način rješavanja temelji se na prepostavci samosličnosti (automodelnosti) profila brzine i temperature unutar graničnog sloja. Osnovna prednost takve prepostavke jest to što nam omogućava da se sustav od tri parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda, svede na sustav od dvije obične diferencijalne jednadžbe trećeg i drugog reda, čime se znatno pojednostavljuje numerički postupak rješavanja.

Drugi način rješavanja jest rješavanje sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, definiranih u jednadžbama (22) - (25), koristeći računalnu dinamiku fluida koja se temelji na metodi konačnih volumena (engl. *finite volume method*, FVM). Prednost metode konačnih volumena u odnosu na metodu teorije sličnosti jest u tome što ne zahtijeva dodatna pojednostavljenja jednadžbi modela.

4.1. Vrijednosti korištene pri proračunu

Za potrebe ovog seminara razmatrat će se specijalni slučaj vertikalne ploče ($\varphi = 0^\circ$). Pritom su u Tablica 1. definirane vrijednosti koje će biti korištene pri rješavanju sustava jednadžbi koje će biti izvedene na temelju prepostavke o automodelnosti rješenja, te sustava jednadžbi implementiranom u programskom paketu OpenFoam, a koji će biti riješen koristeći metodu kontrolnih volumena.

Parametar	Vrijednost
Temperatura ploče T_p	307 K
Temperatura fluida uz ploču T_∞	300 K
Ubrzanje zemljine sile teže g	9,81 m/s ²
Koeficijent izobarnog obujmenog toplinskog širenja fluida uz ploču β	$3 \cdot 10^{-3}$ 1/K
Gustoća fluida uz ploču ρ_∞	1,2 kg/m ³
Kinematska viskoznost fluida uz ploču ν_∞	$1 \cdot 10^{-5}$ m ² /s
Prandtllov broj fluida uz ploču Pr	0,7
Duljina ploče L	0,3 m

Tablica 1. Vrijednosti korištene pri rješavanju sustava jednadžbi

Ono što je važno spomenuti jest kako je potrebno zadovoljiti vrijednosti Grashoffovog broja za laminarno strujanje, tj. potrebno je osigurati uvjet razvoja laminarnog graničnog sloja na

ploči, odnosno isključiti mogućnost formacije turbulentnog graničnog sloja. Naime, za fluid s definiranim fizikalnim svojstvima pri većim vrijednostima Grashoffovog broja (veća duljina ploče L), može doći do tranzicije iz laminarnog u turbulentni granični sloj, čime jednadžbe izvedene u ovom radu više neće vrijediti. Osim toga, s obzirom da je uvedena pretpostavka Boussinesqove aproksimacije prilikom izvoda jednadžbi modela, razlika temperature ploče i fluida uz ploču ne smije biti velika.

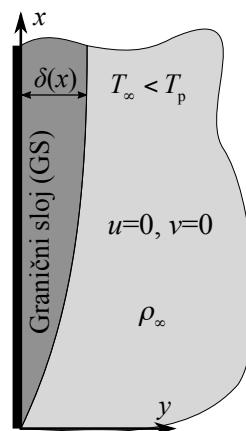
Stoga je za fluid uz ploču odabran zrak ($\nu_\infty = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\beta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}$, $Pr = 0,7$, te $T_\infty = 300 \text{ K}$), dok je temperatura ploče $T_p = 307 \text{ K}$, a duljina $L = 0,3 \text{ m}$. Naime, s takvim odabirom vrijednosti osiguran je razvoj laminarnog graničnog sloja po duljini ploče, s obzirom da je izračunati Grashoffov broj za zadalu duljinu ploče L jednak,

$$Gr_L = \frac{\beta g(T_p - T_\infty)L^3}{\nu_\infty^2} = 5,56 \cdot 10^7 < Gr_{L,\text{kr}} \approx 10^9, \quad (71)$$

te je manji od kritične vrijednosti $Gr_{L,\text{kr}}$ pri kojoj dolazi do prijelaza iz laminarnog u turbulentni granični sloj.

4.2. Rješenje uz pretpostavku automodelnosti

Prilikom izvoda rješenja temeljenog na pretpostavci o automodelnosti rješenja (sličnosti profila brzine i temperature u graničnom sloju), polazi se od pretpostavke vertikalne ploče ($\varphi = 0^\circ$), te uvjeta da je temperatura ploče T_p veća od temperature fluida uz ploču T_∞ . Shematski prikaz navedenog problema je prikazan na Slika 2. Kako su za spomenuti slučaj izvedene jednadžbe (68) - (70), upravo one predstavljaju sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje je potrebno numerički riješiti.



Slika 2. Shematski prikaz problema uz pretpostavku o automodelnosti rješenja

S obzirom da sustav jednadžbi koji je potrebno riješiti predstavlja sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (jednadžba kontinuiteta je prvog reda, dok su jednadžba količine gibanja i energetska jednadžba drugog reda), konačni je cilj sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi svesti na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi koji se puno lakše može riješiti uz upotrebu nekog numeričkog matematičkog postupka za rješavanje problema običnih diferencijalnih jednadžbi. Postupak izvoda je napravljen prema izvodu dostupnom u [19].

Za početak se uvodi strujna funkcija $\psi = \psi(x, y)$ kako bi se spomenute jednadžbe dodatno pojednostavile, pri čemu vrijedi,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = \psi(x, y). \quad (72)$$

Sada se brzine u i v u jednadžbama (68) - (70) mogu prikazati preko derivacija strujne funkcije definiranih u (72).

Krenimo od jednadžbe kontinuiteta. Ukoliko se brzine u i v prikažu preko uvedene strujne funkcije dobiva se,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0, \quad (73)$$

što znači da je jednadžba kontinuiteta automatski zadovoljena, te se više neće uzimati u obzir.

Isti postupak se može ponoviti i za jednadžbu (69), iz koje slijedi,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = v_\infty \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \beta g (T - T_\infty). \quad (74)$$

Potrebno je još srediti i uzgonski član (posljednji član u gornjoj jednadžbi), s obzirom da se u njemu još uvijek pojavljuje temperatura T . To se može učiniti tako da se definira bezdimenzijska temperatura θ ,

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}, \quad (75)$$

te se njenim uvrštavanjem u jednadžbu (74) dobiva,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = v_\infty \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \beta g (T_p - T_\infty) \theta. \quad (76)$$

Potpuno isti postupak se ponavlja za jednadžbu (70), pri čemu je temperaturu T potrebno prikazati preko bezdimenzijske temperature θ jednadžbom definiranom u (75). Nakon matematičkog sređivanja dolazi se do sljedeće jednadžbe,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = a_{\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (77)$$

Može se primjetiti kako se uvođenjem strujne funkcije od tri jednadžbe (68) - (70) došlo do dvije jednadžbe (76) i (77), no s time da je jednadžba (76) sada parcijalna diferencijalna jednadžba trećeg reda, dok je jednadžba (77) parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda.

Za gornje je jednadžbe također moguće definirati sljedeće rubne uvjete:

1. Za $y = 0$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \text{ te } \theta = 1, \text{ tj. } u = v = 0 \text{ i } T = T_p \quad (78)$$

2. Za $y \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \text{ te } \theta = 0, \text{ tj. } u = v = 0 \text{ i } T = T_{\infty} \quad (79)$$

Glavna prepostavka i temelj za dobivanje konačnog rješenja jest prepostavka o automodelnosti (samosličnosti rješenja), tj. prepostavka da su profili brzine i temperature unutar graničnog sloja mjereni na različitim vrijednostima koordinate x od ruba ploče geometrijski slični. Može se reći kako automodelnost podrazumijeva da su profili istih oblika, ali su rastegnuti za neki faktor (funkciju) u smjeru osi x i koja ovisi o x koordinati.

Stoga se za početak može definirati neka bezdimenzijska varijabla η , koja predstavlja bezdimenzijsku udaljenost od ploče, pri čemu je,

$$\eta(x, y) = \eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad (80)$$

gdje je $\delta(x)$ debljina hidrodinamičkog graničnog sloja. S obzirom na gore spomenutu prepostavku o automodelnosti rješenja, bezdimenzijska udaljenost od ploče η se može prikazati i pomoću neke funkcije $H(x)$ koja predstavlja funkciju rastezanja (*stretching function*, engl.) profila,

$$\eta = y \cdot H(x). \quad (81)$$

Glavna ideja je jednadžbe (76) i (77) dobivene uvođenjem strujne funkcije $\psi = \psi(x, y)$ svesti na dvije obične diferencijalne jednadžbe. Ukoliko postoji automodelno rješenje, strujnu funkciju ψ ovisnu o x i y koordinatama mora biti moguće prikazati preko dvije funkcije od kojih jedna ovisi o x , a druga o η ,

$$\bar{\psi}(x, \eta) = v_{\infty} \cdot F(\eta) \cdot G(x), \quad (82)$$

gdje je $F(\eta)$ funkcija sličnosti ovisna samo o η , a $G(x)$ neka funkcija rastezanja strujne funkcije ovisna samo o x koordinati. Također se može pretpostaviti kako će bezdimenzijska temperatura θ ovisiti samo o bezdimenzijskoj koordinati η ,

$$\theta(x, \eta) = \theta(\eta). \quad (83)$$

Derivacije strujne funkcije $\psi = \psi(x, y)$ u jednadžbi (76) i bezdimenzijske temperature θ u jednadžbi (77) sada je upotrebom matematičkog postupka složenog deriviranja također moguće prikazati preko funkcije $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x, \eta)$ i $\theta = \theta(\eta)$ na sljedeći način,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= yH'(x), \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= H(x), \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = v_\infty \frac{dF}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} G(x) = v_\infty \frac{dF}{d\eta} H(x)G(x) = v_\infty F'(\eta)H(x)G(x), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\infty \left(y \frac{dF}{d\eta} \frac{dH}{dx} G(x) + F(\eta) \frac{dG}{dx} \right) = v_\infty \left(yF'(\eta)H'(x)G(x) + F(\eta)G'(x) \right), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} &= v_\infty \left[\frac{dF}{d\eta} \left(\frac{dH(x)}{dx} G(x) + H(x) \frac{dG(x)}{dx} \right) + \eta \frac{d^2 F}{d\eta^2} \frac{dH(x)}{dx} G(x) \right] = \\ &= v_\infty \left[F'(\eta) \left(H'(x)G(x) + H(x)G'(x) \right) + \eta F''(\eta)H'(x)G(x) \right], \quad (84) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= v_\infty \frac{d^2 F}{d\eta^2} H^2(x)G(x) = v_\infty F''(\eta)H^2(x)G(x), \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= v_\infty \frac{d^3 F}{d\eta^3} H^3(x)G(x) = v_\infty F'''(\eta)H^3(x)G(x), \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \theta'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \theta'(\eta) yH'(x), \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \theta'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \theta'(\eta) H(x), \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = H(x) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = H^2(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \theta''(\eta)H^2(x). \end{aligned}$$

Nakon što se derivacije iz izraza (84) uvrste u jednadžbe (76) i (77) dobivaju se jednadžbe sljedećeg oblika,

$$\begin{aligned} v_\infty F'(\eta)H(x)G(x) &\left[v_\infty F'(\eta) \left(H'(x)G(x) + HG'(x) \right) + v_\infty F''(\eta)H'(x)G(x) \right] - \\ &- v_\infty \left(F'(\eta) \frac{\eta}{H(x)} H'(x)G(x) + F(\eta)G'(x) \right) \cdot \left(v_\infty F''(\eta)H^2(x)G(x) \right) = \quad , \quad (85) \\ &= v_\infty^2 H^3(x)G(x)F'''(\eta) + g\beta(T_p - T_\infty)\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v_{\infty} H(x) G(x) \theta'(\eta) \frac{\eta}{H(x)} H'(x) F'(\eta) - \\ & - \left(v_{\infty} H'(x) G(x) \frac{\eta}{H(x)} F'(\eta) + v_{\infty} G'(x) F(\eta) \right) H(x) \theta'(x) = a_{\infty} H^2(x) \theta''(\eta) \end{aligned} . \quad (86)$$

Sada jednadžbu (85) podijelimo s $(v_{\infty})^2 H^3(x) G(x)$, dok jednadžbu (86) podijelimo s $a_{\infty} H^2(x)$ kako bi ispred članova s najvećom derivacijom dobili koeficijent jedan,

$$\begin{aligned} & F'''(\eta) + \frac{g\beta(T_p - T_{\infty})}{v_{\infty}^2 H^3(x) G(x)} \theta(\eta) + \\ & + \left[v_{\infty}^2 H(x) G(x) (F')^2(\eta) \cdot (H'(x) G(x) + v_{\infty}^2 H(x) G'(x)) + \right. \\ & \left. + v_{\infty}^2 \eta H(x) H'(x) G^2(x) F'(\eta) F''(\eta) - \right. \\ & \left. - v_{\infty}^2 \eta H(x) H'(x) G^2(x) F'(\eta) F''(\eta) - \right. \\ & \left. - v_{\infty}^2 H^2(x) G(x) G'(x) F(\eta) F''(\eta) \right] \frac{1}{v_{\infty}^2 H^3(x) G(x)} = 0 \end{aligned} . \quad (87)$$

$$\theta''(\eta) + \frac{v_{\infty}}{a_{\infty}} \frac{H(x) G'(x) F(\eta) \theta'(\eta)}{H^2(x)} = 0 \quad (88)$$

Sređivanjem izraza (87) i (88) dobivaju se dvije sljedeće diferencijalne jednadžbe,

$$\begin{aligned} & F'''(\eta) + \frac{G'(x)}{H(x)} F(\eta) F''(\eta) - \left(\frac{H'(x) G(x)}{H^2(x)} + \frac{G'(x)}{H(x)} \right) (F')^2(\eta) + \\ & + \frac{g\beta(T_p - T_{\infty})}{v_{\infty}^2 H^3(x) G(x)} \theta(\eta) = 0 \end{aligned} . \quad (89)$$

$$\theta''(\eta) + \frac{v_{\infty}}{a_{\infty}} \frac{G'(x)}{H(x)} F(\eta) \theta'(\eta) = 0 . \quad (90)$$

Kako bi se od gornjih jednadžbi koje ovise o x i η dobole dvije obične diferencijalne jednadžbe ovisne samo o bezdimenzijskoj varijabli η , sve kombinacije funkcija ovisne o x koordinati moraju imati rješenje jednako nekoj konstantnoj vrijednosti. To je ujedno i nužan preduvjet za postojanje autodelnog rješenja. Stoga mora vrijediti,

$$H^3(x) G(x) = k_1 = \text{konst.}, \quad (91)$$

$$\frac{G'(x)}{H(x)} = k_2 = \text{konst.} \quad (92)$$

$$\frac{H'(x) G(x)}{H^2(x)} = k_3 = \text{konst.} \quad (93)$$

Ukoliko se sada jednadžba (91) derivira,

$$3H(x)H'(x)G(x) + H^3(x)G'(x) = 0, \quad (94)$$

te ukoliko se podijeli s $H^4(x)$ dobiva se sljedeća jednadžba,

$$3\frac{H'(x)G(x)}{H^2(x)} + \frac{G'(x)}{H(x)} = 0, \quad (95)$$

iz čega se zaključuje kako će dobivena jednadžba biti zadovoljena samo ukoliko su zadovoljene jednadžbe (92) i (93), odnosno jednadžba (95) će imati rješenje konstantu samo ako jednadžbe (92) i (93) imaju vrijednosti konstante. Jednadžbu (95) možemo prikazati u sljedećem obliku,

$$\frac{H'(x)G(x)}{H^2(x)} = -\frac{1}{3} \frac{G'(x)}{H(x)} \quad (96)$$

a njenim uvrštavanjem u jednadžbu (89) se dobiva sljedeći oblik diferencijalne jednadžbe,

$$F'''(\eta) + \frac{G'(\eta)}{H(x)} F(\eta) F''(\eta) - \frac{2}{3} \frac{G'(\eta)}{H(x)} (F')^2(\eta) + \frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{v_\infty^2 H^3(x) G(x)} \theta(\eta) = 0. \quad (97)$$

Kao što je već spomenuto, automodelno rješenje će postojati ukoliko su sve kombinacije funkcija ovisnih o x koordinati u jednadžbi (97) jednake nekoj konstantoj vrijednosti, tj. možemo odabratи bilo koju vrijednost konstante k_1 i k_2 da bismo dobili dvije obične diferencijalne jednadžbe. No pažljivijim odabirom konstanti, konačne diferencijalne jednadžbe će biti jednostavnijeg oblika, te se u skladu s time može odabratи,

$$\frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{v_\infty^2 H^2(x) G(x)} = 1, \quad (98)$$

$$\frac{G'(x)}{H(x)} = 3. \quad (99)$$

Takva kombinacija dovodi do konačnog oblika sustava običnih diferencijalnih jednadžbi koji glasi,

$$F'''(\eta) + 3F(\eta)F''(\eta) - 2(F')^2(\eta) + \theta(\eta) = 0, \quad (100)$$

$$\theta''(\eta) + 3PrF(\eta)\theta'(\eta) = 0, \quad (101)$$

gdje je u jednadžbi (101) u obzir uzeta definicija Prandtlovog broja definiranog izrazom (59). Pritom je prva jednadžba obična diferencijalna jednadžba trećeg reda, dok je druga jednadžba obična diferencijalna jednadžba drugog reda. Te dvije jednadžbe su međusobno spregnute

preko članova $F(\eta)$ i $\theta(\eta)$, a potrebno ih je riješiti nekom od dostupnih matematičkih metoda. Ako se dobivene jednadžbe usporede s početnim jednadžbama (jednadžbe (68) - (70)), može se lako uočiti kako je uz pomoć pretpostavke o automodelnosti rješenja, sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi sveden na sustav dvije obične diferencijalne jednadžbe ovisne samo o bezdimenzijskoj udaljenosti od zida η .

Ostaje još odrediti konačan oblik funkcija $H(x)$ i $G(x)$. Oblik se može odrediti rješavanjem sustava jednadžbi (98) i (99) na sljedeći način,

$$H(x) = \left(\frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{V_\infty^2} \right)^{\frac{1}{3}} G^{-\frac{1}{3}}(x) = A \cdot G^{-\frac{1}{3}}(x), \quad (102)$$

gdje je izraz u zagradi konstanta označena s A radi jednostavnijeg izvoda. Sada uvrštavanjem $H(x)$ u jednadžbu (99) dobivamo sljedeću diferencijalnu jednadžbu prvog reda,

$$G'(x) = 3H(x) = 3AG^{-\frac{1}{3}}(x), \quad (103)$$

koja ovisi o x koordinati i moguće ju je riješiti nekim od matematičkih postupaka za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi (jednadžbu je moguće riješiti koristeći module dostupne unutar programskog jezika *Python*). Dobiveno rješenje jednadžbe (103) glasi,

$$G(x) = (4Ax + C_1)^{\frac{3}{4}}, \quad (104)$$

te se uvrštavanjem konstante definirane s A dobiva,

$$G(x) = \left[4x \left(\frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{V_\infty^2} \right)^{\frac{1}{3}} + C_1 \right]^{\frac{3}{4}}. \quad (105)$$

Uz uvjet da je $C_1 = 0$ jednadžba (105) prelazi u,

$$G(x) = 4^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{V_\infty^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (106)$$

a uz upotrebu definicije Grasshofovog broja Gr_x ,

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)x^3}{V_\infty^2}, \quad (107)$$

dobiva se sljedeći oblik funkcije $G(x)$,

$$G(x) = 4^{\frac{3}{4}} \cdot (Gr_x)^{\frac{1}{4}}. \quad (108)$$

Kako bi smo dobiveni oblik funkcije $G(x)$ još malo pojednostavili, desnu stranu jednadžbe (108) je moguće prikazati na sljedeći način,

$$G(x) = 4^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{4^{\frac{1}{4}}}{4^{\frac{1}{4}}} \cdot (Gr_x)^{\frac{1}{4}}, \quad (109)$$

te se njenim preuređivanjem dobiva konačan oblik jednadžbe $G(x)$,

$$G(x) = 4 \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (110)$$

Uvrštavanjem dobivenog oblika $G(x)$ u jednadžbu (102), nakon matematičkog sređivanja dobivamo konačan oblik funkcije $H(x)$,

$$H(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (111)$$

Ako sada dobivene izraze za $G(x)$ i $H(x)$ vratimo u jednadžbe (81) i (82), slijedi konačan oblik funkcije bezdimenzijske udaljenosti od zida $\eta(x,y)$ i strujne funkcije $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x,\eta)$,

$$\eta = \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (112)$$

$$\bar{\psi}(x,\eta) = 4v_{\infty} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F(\eta). \quad (113)$$

Sada je moguće koristeći jednadžbe (72), (112) i (113) uz upotrebu matematičke operacije složenog deriviranja odrediti iznos komponenata brzine $u(x,\eta)$ i $v(x,\eta)$ u ovisnosti o funkciji sličnosti $F(\eta)$,

$$u(x,\eta) = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\psi}(x,\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} = \frac{2v_{\infty}}{x} (Gr_x)^{\frac{1}{2}} F'(\eta), \quad (114)$$

$$v(x,\eta) = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \bar{\psi}(x,\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{v_{\infty}}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\eta F'(\eta) - 3x^{\frac{1}{4}} F(\eta) \right). \quad (115)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (114) i (115) u izraze za rubne uvjete definirane u (78) i (79), dolazi se do rubnih uvjeta potrebnih za rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadži dobivenih u (100) i (101),

1. Za $\eta = 0$:

$$F(\eta = 0) = F'(\eta = 0) = 0, \text{ te } \theta(\eta = 0) = 1 \quad (116)$$

2. Za $\eta \rightarrow \infty$:

$$F'(\eta \rightarrow \infty) = \theta(\eta \rightarrow \infty) = 0 \quad (117)$$

4.2.1. Parametri prijelaza topline

Mjesni koeficijent prijelaza topline na površini ploče ($y = 0$) ovisi o koordinati x mjerenoj od ruba ploče i definira se na sljedeći način,

$$\alpha_x = -\frac{\lambda_\infty}{T_p - T_\infty} \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad (118)$$

a iz definicije bezdimenzijske temperature (75) i bezdimenzijske udaljenosti od zida (112), te uporabom pravila matematičke operacije složenog deriviranja slijedi,

$$\begin{aligned} \alpha_x &= -\frac{\lambda_\infty}{T_p - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{\eta=0} = \\ &= -\frac{\lambda_\infty}{T_p - T_\infty} \cdot (T_p - T_\infty) \left. \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{\eta=0} = -\lambda_\infty \theta'(\eta = 0) \frac{1}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (119)$$

Sada se pomoću izведенog mjesnog koeficijenta prijelaza topline α_x može definirati i mjesni Nusseltov broj ovisan o x koordinati (na površini ploče, $\eta = 0$) mjerenoj od ruba ploče,

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda_\infty} = -\theta'(\eta = 0) \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} = -\frac{\theta'(\eta = 0)}{\sqrt{2}} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (120)$$

gdje se,

$$-\frac{\theta'(\eta = 0)}{\sqrt{2}} = \phi(Pr), \quad (121)$$

može općenito definirati kao funkcija Prandtlovog broja, što znači da strogoo ovisi o fizikalnim svojstvima fluida. Ede [5] je 1964. godine predložio funkciju za jednostavnije određivanje iznosa funkcije $\phi(Pr)$, a koja se pokazala dobrom u usporedbi s rješenjem temeljenom na automodelnosti rješenja (važno je spomenuti i kako vrijedi za čitav raspon vrijednosti Prandtlovog broja, tj. $0 < Pr < \infty$),

$$\phi(Pr) = \frac{3}{4} \left(\frac{2Pr^2}{5 \left(1 + 2Pr^{\frac{1}{2}} + 2Pr \right)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (122)$$

a nakon uvrštavanja funkcije $\phi(Pr)$ u jednadžbu (120) dobiva se sljedeći oblik za određivanje mjesnog Nusseltovog broja,

$$Nu_x(Gr_x, Pr) = \phi(Pr)(Gr_x)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \left(\frac{2Pr}{5 \left(1 + 2Pr^{\frac{1}{2}} + 2Pr \right)} \right)^{\frac{1}{4}} (Gr_x Pr)^{\frac{1}{4}}. \quad (123)$$

Korisno je još mjesni Nusseltov broj prikazati preko Rayleighovog broja Ra_x , a vrijedi da je,

$$Ra_x = Gr_x Pr, \quad (124)$$

iz čega se dobiva Nu_x u ovisnosti o Pr i Ra_x ,

$$Nu_x(Pr, Ra_x) = \phi(Pr)(Gr_x)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \left(\frac{2Pr}{5 \left(1 + 2Pr^{\frac{1}{2}} + 2Pr \right)} \right)^{\frac{1}{4}} (Ra_x)^{\frac{1}{4}}. \quad (125)$$

4.2.2. Rješenje jednadžbi izvedenih na temelju prepostavke o automodelnosti profila unutar graničnog sloja

Za generiranje rješenja korištena je skripta napisana u objektno-orientiranom programskom jeziku *Python*, dostupna u Dodatak C ovog rada, a koja se temelji na skripti dostupnoj u [12] i napisanoj za programski paket *MathWorks MatLab®*. Stoga je za integraciju sustava spregnutih diferencijalnih jednadžbi (100) i (101) korišten integrator dostupan unutar *Pythonovog* modula *Scipy* (*scipy.integrate.odeint*). Prvo je jednadžbe (100) i (101) bilo potrebno napisati u izmjenjenom obliku kako bi ih programski jezik mogao prepoznati, što je učinjeno definiranjem funkcije *free_convection()*. Kako bi se sustav običnih diferencijalnih jednadžbi riješio, potrebno je bilo definirati rubne uvjete definirane jednadžbama (116) i (117). No kao što se može vidjeti u definiranim rubnim uvjetima, oni postoje samo za $F(\eta)$, $F'(\eta)$, te $\theta(\eta)$, te je za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi na neki način bilo

potrebno definirati i rubne uvjete za $F''(\eta)$ i $\theta'(\eta)$. Stoga je prilikom rješavanja korištena funkcija `scipy.optimize.fsolve` koja služi za pronalaženje nultočki polinoma, a kojom su iterativnim postupkom dobivene pravilne vrijednosti tih rubnih uvjeta.

Slijedi kratak opis skripte korištene za generiranje rješenja iz Dodatak C ovoga rada:

- 1.)** Definirana je funkcija `free_convection()` koja vraća matricu s rješenjima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (100) i (101).
- 2.)** Definirana je funkcija `derivation()`. Unutar te funkcije se definira vektor x_0 s početnim uvjetima koje zadaje korisnik, a potom se rješava sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi pozivanjem funkcije `free_convection()` unutar funkcije `derivation()`. Rješavanjem sustava dobivaju se vrijednosti $F(\eta)$, $F'(\eta)$, $F''(\eta)$, $\theta(\eta)$, te $\theta'(\eta)$ s krivim rubnim uvjetima, a funkcija `derivation()` vraća vrijednosti $F'(\eta=10)$ i $\theta(\eta=10)$. Funkcija `scipy.optimize.fsolve` će pozivati funkciju `derivation()` sve dok se ne zadovolji uvjet da je $F'(\eta=10) = 0$ i $\theta(\eta=10) = 0$, te će se u svakoj novoj iteraciji računati i dobivati bolje vrijednosti rubnih uvjeta za $F''(\eta=0)$, te $\theta'(\eta=0)$.
- 3.)** Nakon što se za izračunati novi rubni uvjet $F''(\eta=0)$, te $\theta'(\eta=0)$ zadovolji uvjet da je $F'(\eta=10) = 0$ i $\theta(\eta=10) = 0$, ti rubni uvjeti se koriste za generiranje rezultata dobivenih pretpostavkom o automodelnosti rješenja pozivom funkcije `y = scipy.integrate.odeint(free_convection, initial_condition, eta)`.

Tablični prikaz rješenja sustava spregnutih običnih diferencijalnih jednadžbi (100) i (101) dan je u Dodatak A ovoga rada.

4.3. Računalna dinamika fluida

Sustav dobivenih jednadžbi će se riješiti uz pomoć stacionarnog rješavača (SIMPLE algoritam, engl. *semi-implicit method for pressure linked equations*), te uz pomoć nestacionarnog rješavača (PISO algoritam, engl. *pressure-implicit with splitting of operators*). Za rješavanje će se koristiti programski paket otvorenog koda OpenFoam, koji među dostupnim rješavačima već sadrži stacionarni i nestacionarni rješavač temeljen na Boussinesqovoj aproksimaciji (*bouyantBoussinesqSimpleFoam* i *bouyantBoussinesqPisoFoam*).

4.3.1. Implementacija jednadžbi unutar programskog paketa OpenFoam

Unutar programskog paketa OpenFoam implementiran je sljedeći sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za rješavanje laminarnog strujanja uz Boussinesqovu aproksimaciju,

$$\nabla \bullet \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (126)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \bullet \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} - \nabla \bullet \left\{ \nu_{\infty} \left[(\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) - \frac{1}{3} (\nabla \bullet \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{I} \right] \right\} = -\nabla \tilde{p} + \rho_k \mathbf{g}, \quad (127)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \nabla \bullet \bar{\mathbf{u}} \bar{T} - a_{\infty} (\nabla^2 \bar{T}) = 0, \quad (128)$$

gdje je $\bar{\mathbf{u}}$ vektor osrednjene brzine, a \tilde{p} je kinematski tlak koji je za laminarno strujanje definiran,

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho_{\infty}}, \quad (129)$$

dok je gustoća ρ_k u zadnjem izrazu s lijeve strane jednadžbe (127) definirana,

$$\rho_k = 1 - \beta (\bar{T} - T_{\infty}). \quad (130)$$

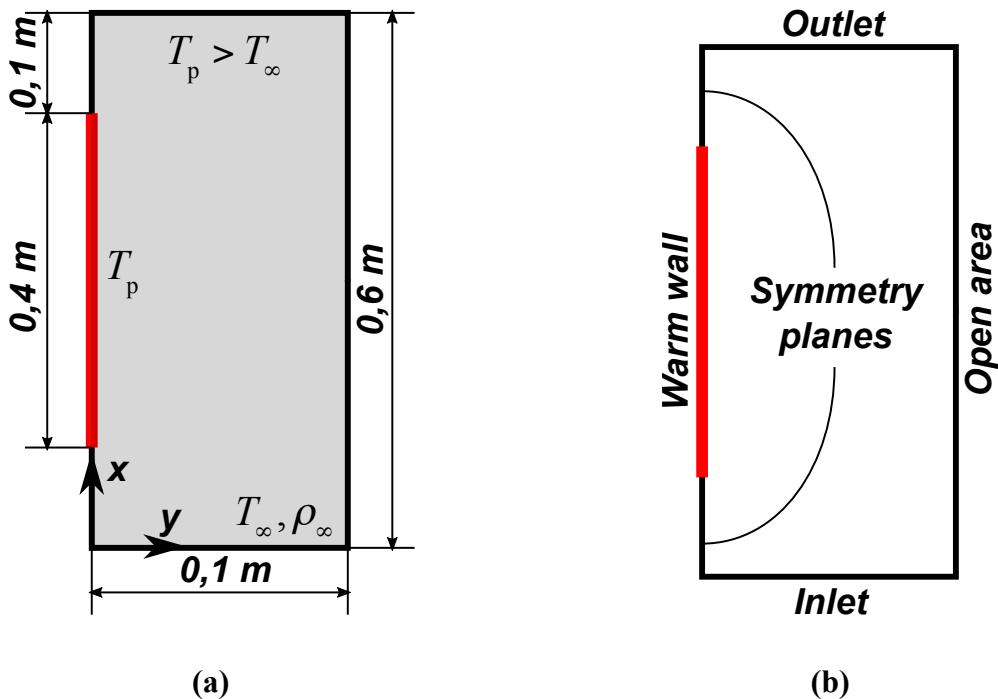
Koeficijent toplinske difuzije a_{∞} u jednadžbi (128) računa se iz kinematske viskoznosti ν_{∞} i Prandtlovog broja Pr koje zadaje korisnik,

$$a_{\infty} = \frac{\nu_{\infty}}{Pr}. \quad (131)$$

Jednadžbe (126) - (128) su riješene koristeći SIMPLE i PISO algoritam. Za slučaj stacionarnog rješavača (SIMPLE algoritam), tranzijentni član u jednadžbama (127) i (128) je zanemaren. Više o načinu na koji su jednadžbe implementirane unutar programskog paketa OpenFoam se može naći u literaturi [9] i [16].

4.3.2. Računalna domena i rubni uvjeti

U programskom paketu OpenFoam generirana je računalna domena širine 0,1 m, te ukupne visine 0,6 m. Pritom su rubovi ploče od gornje i donje granice domene udaljeni 0,1 m, kao što je prikazano na Slika 3. (a), dok su rubovi računalne domene imenovani kao što je prikazano na Slika 3. (b).



Slika 3. Shematski prikaz geometrije računalne domene

Rubni uvjeti za temperaturu \bar{T} , K, brzinu \bar{u} , m/s, te kinematski tlak \tilde{p} , m^2/s^2 , definirani su kao što je prikazano u Tablica 2.

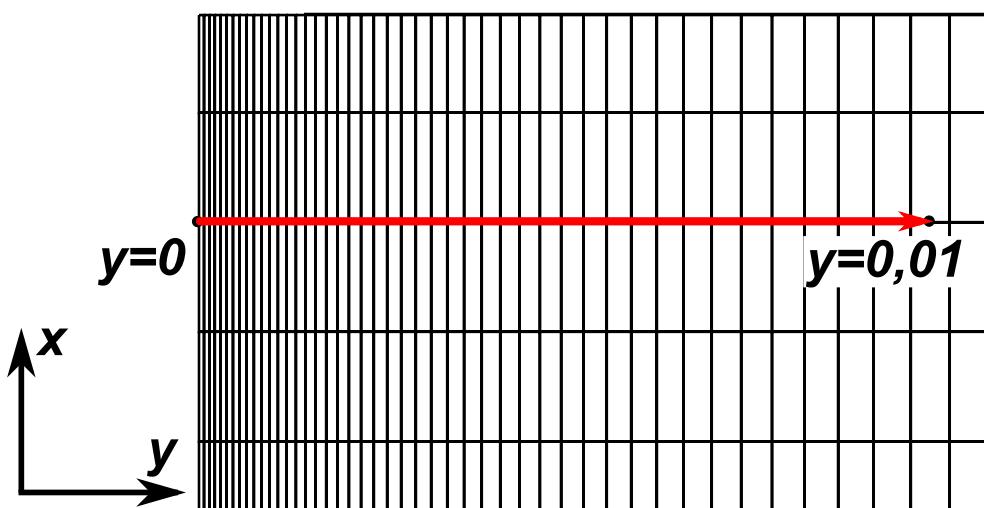
	\bar{T} , K	\bar{u} , m/s	\tilde{p} , m^2/s^2
Warm wall	307 K	$u = 0, v = 0$	Buoyant pressure BC ($\tilde{p} = 0$)
Inlet	300 K	$u = 0, v = 0$	Buoyant pressure BC ($\tilde{p} = 0$)
Outlet	Neumann BC	Neumann BC	$\tilde{p} = 0$
Open area	300 K	Neumann BC	Neumann BC
Symmetry planes	Symmetry	Symmetry	Symmetry

Tablica 2. Rubni uvjeti

Više o načinu na koji su rubni uvjeti zadani u programskom paketu OpenFoam može se pronaći u Dodatak B ovoga rada.

4.3.3. Mreža konačnih volumena

Na Slika 4. je prikazan dio mreže konačnih volumena uz ploču. Kako bi bilo moguće metodom konačnih volumena izračunati laminarni granični sloj, generirana je vrlo gusta mreža konačnih volumena uz ploču. Crveni vektor na Slika 4. duljine je 0,01 m, što predstavlja 10% ukupne širine računalne domene, te smjera y - osi. Upravo u smjeru tog vektora i na njegovoj duljini su generirana 44 konačna volumena (45 težišta konačnih volumena), kako bi se pravilno izračunao laminarni granični sloj. U računalnoj domeni je generirano ukupno 30 000 konačnih volumena.



Slika 4. Detalj mreže konačnih volumena uz ploču

4.3.4. Sheme diskretizacije i uvjeti konvergencije

Pri numeričkim simulacijama korištene su sheme diskretizacije definirane u Tablica 3.

Shema diskretizacije	
Vremenski član	Eulerova shema (Euler)
Difuzijski član	Linearna shema (Gauss linear corrected)
Konvektivni član	Upwind shema (Gauss upwind)
Gradijenti	Linearna shema (Gauss linear)

Tablica 3. Sheme diskretizacija korištene pri numeričkim simulacijama

Prilikom definiranja početnih uvjeta za stacionarni proračun, potrebno je obratiti pozornost na početni iznos masene sile (gravitacijske konstante g , m/s^2). Naime, pokazalo se kako iznos gravitacijske konstante $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ dovodi do divergencije rješenja, te je stoga za dobivanje rješenja s takvim iznosom masene sile prvo potrebno odrediti rješenja s nekim manjim iznosom, te takva rješenja koristiti kao početni uvjet za sljedeći proračun s većim iznosom gravitacijske konstante. Na taj način se pokazalo mogućim osigurati konvergenciju rješenja. U radu je prvotno određeno polje temperature i brzine za $g_1 = 0,981 \text{ m/s}^2$, a nakon što je dobiveno to rješenje na isti način se proveo postupak za $g_2 = 3,981 \text{ m/s}^2$, te $g_3 = 6,981 \text{ m/s}^2$, a u konačnici su dobivena konvergirana polja brzine i temperature za traženi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Numerički proračun stacionarnim rješavačem je prekinut kada su svi reziduali dosegnuli iznos od 10^{-6} .

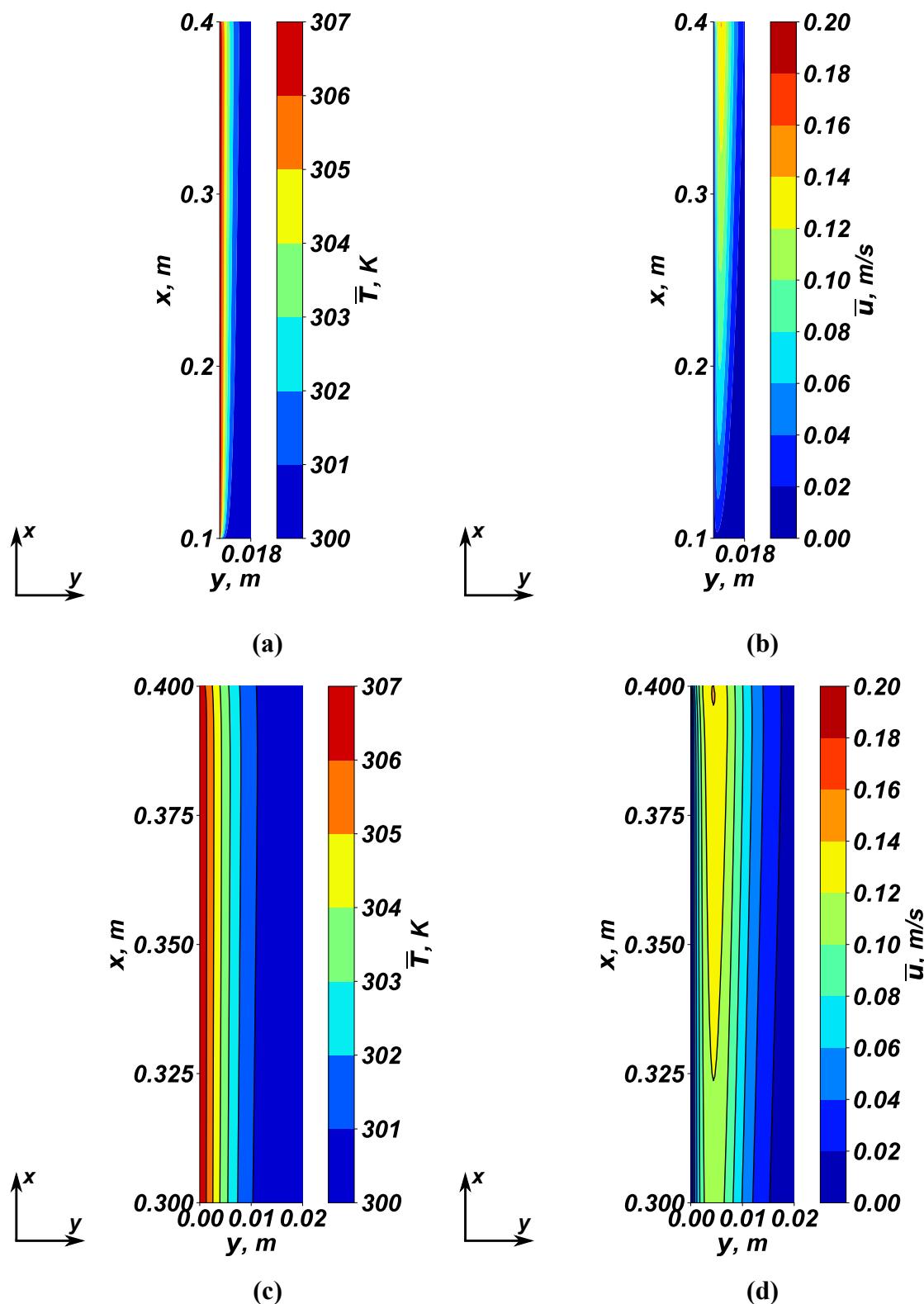
Numerički proračun nestacionarnim rješavačem proveden je do vremena $t_{\text{uk}} = 60 \text{ s}$, s obzirom da se pokazalo potrebnim proračun provesti tijekom duljeg vremenskog razdoblja, kako bi se omogućila uspostava stacionarnog rješenja. Pritom je kod nestacionarnog proračuna trebalo voditi brigu i o Courantovu broju Co , s obzirom da je za proračun korišten PISO algoritam. Stoga je maksimalan Courantov broj tijekom nestacionarnog numeričkog proračuna iznosio $Co = 0,14$, što je manje od uvjeta da Courantov broj ne smije premašiti vrijednost od $Co = 1$.

4.3.5. Rezultati dobiveni upotrebom stacionarnog rješavača (SIMPLE)

Na Slika 5. prikazana su polja osrednjene temperature \bar{T} , K i komponente osrednjene brzine \bar{u} , m/s, uz ploču, dobiveni stacionarnim rješavačem (SIMPLE algoritam).

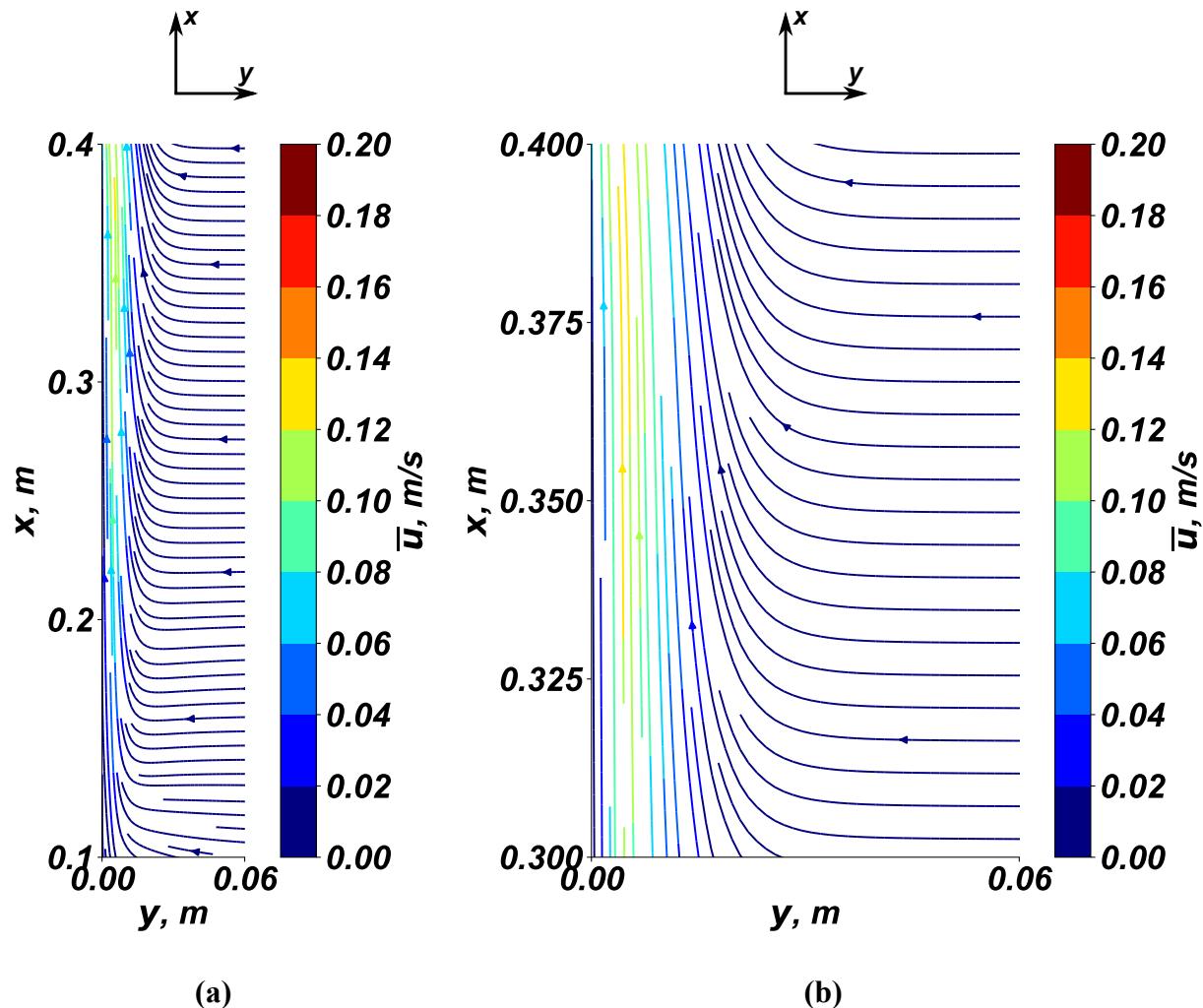
Na Slika 5. (a) prikazan je temperaturni granični sloj (*temperature boundary layer*, engl.) razvijen duž cijele ploče ($x = 0,1 - 0,4 \text{ m}$), dok je na Slika 5. (c) prikazan dio temperaturnog graničnog sloja na kraju ploče ($x = 0,3 - 0,4 \text{ m}$). Na spomenutim slikama vidljivo je kako je temperatura \bar{T} najveća na ploči i jednaka zadanoj temperaturi ploče $T_p = 307 \text{ K}$, te udaljavanjem od ploče vrlo brzo opada na temperaturu fluida uz ploču $T_\infty = 300 \text{ K}$.

Na Slika 5. (b) i Slika 5. (d) prikazan je hidrodinamički granični sloj razvijen uz cijelu ploču ($x = 0,1 - 0,4 \text{ m}$), odnosno granični sloj uz kraj ploče ($x = 0,3 - 0,4 \text{ m}$). Na slikama je vidljivo kako brzina raste od početka ploče ($x = 0,1 \text{ m}$), te je najveća na kraju ploče ($x = 0,4 \text{ m}$) gdje je iznosa $\bar{u} \approx 0,137 \text{ m/s}$. Osim toga, brzina je $\bar{u} = 0 \text{ m/s}$ na samoj ploči, nakon čega brzo raste i najveća je na $y \approx 0,005 \text{ m}$, nakon čega opada na vrijednost $\bar{u} \approx 0 \text{ m/s}$ na $y \approx 0,018 \text{ m}$.



Slika 5. Polja osrednjene temperature \bar{T}, K (a) i (c) i komponente osrednjene brzine $\bar{u}, m/s$ (b) i (d) dobivena stacionarnim rješavačem (SIMPLE algoritam)

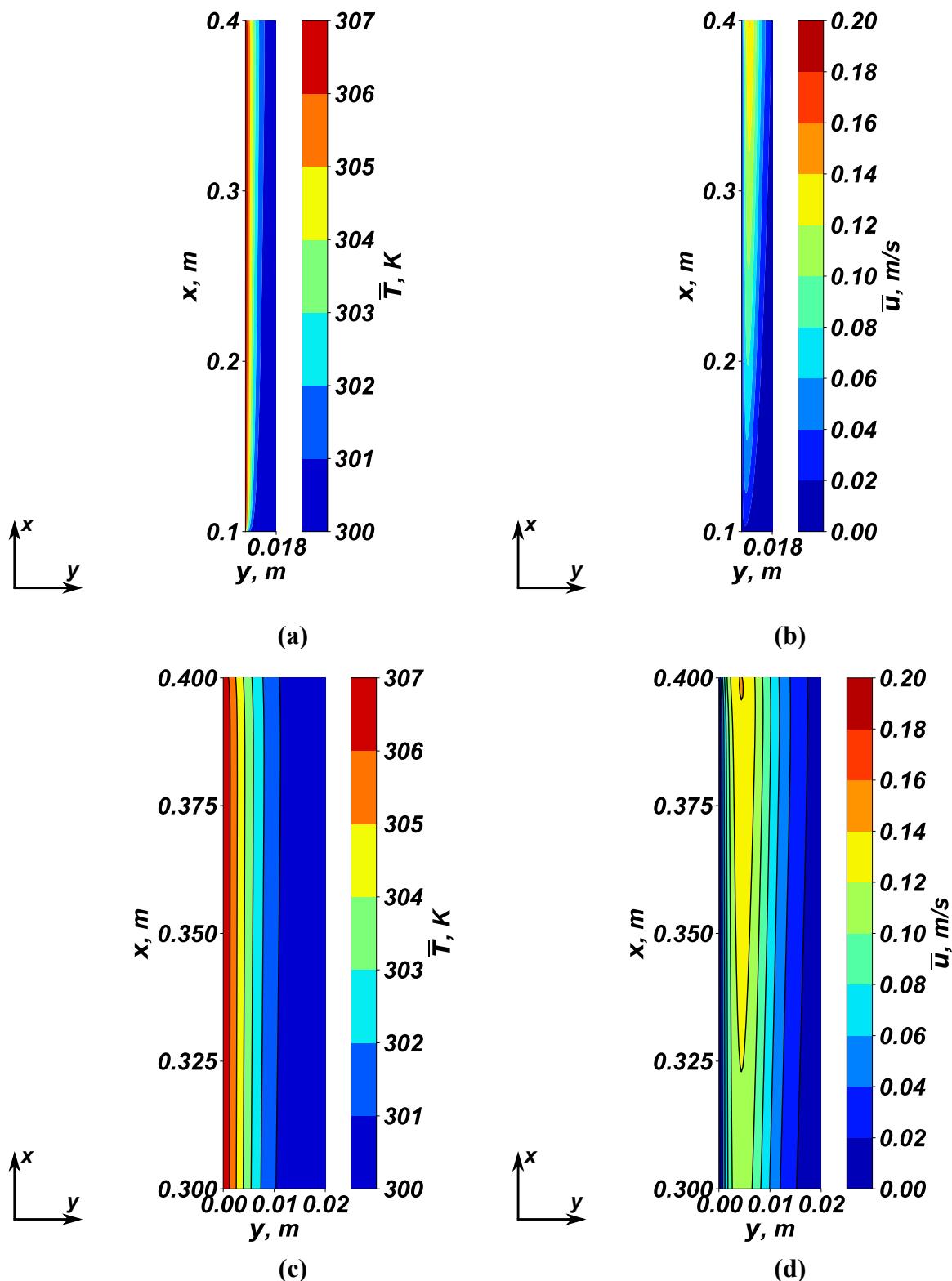
Na Slika 6. (a) prikazane su strujnice generirane uz cijelu duljinu ploče, dok su strujnice generirane uz kraj ploče prikazane na Slika 6. (b). Na prikazanim slikama vidljivo je kako je brzina strujanja fluida daleko od ploče jednaka $\bar{u} = 0 \text{ m/s}$, dok se približavanjem ploči fluid ubrzava, te struji u pozitivnom smjeru osi x (prema gore).



Slika 6. Strujnice dobivene stacionarnim rješavačem (SIMPLE algoritam): (a) strujnice generirane duž cijele duljine ploče, (b) uvećan prikaz strujnica uz kraj ploče

4.3.6. Rezultati dobiveni upotrebom nestacionarnog rješavača (PISO)

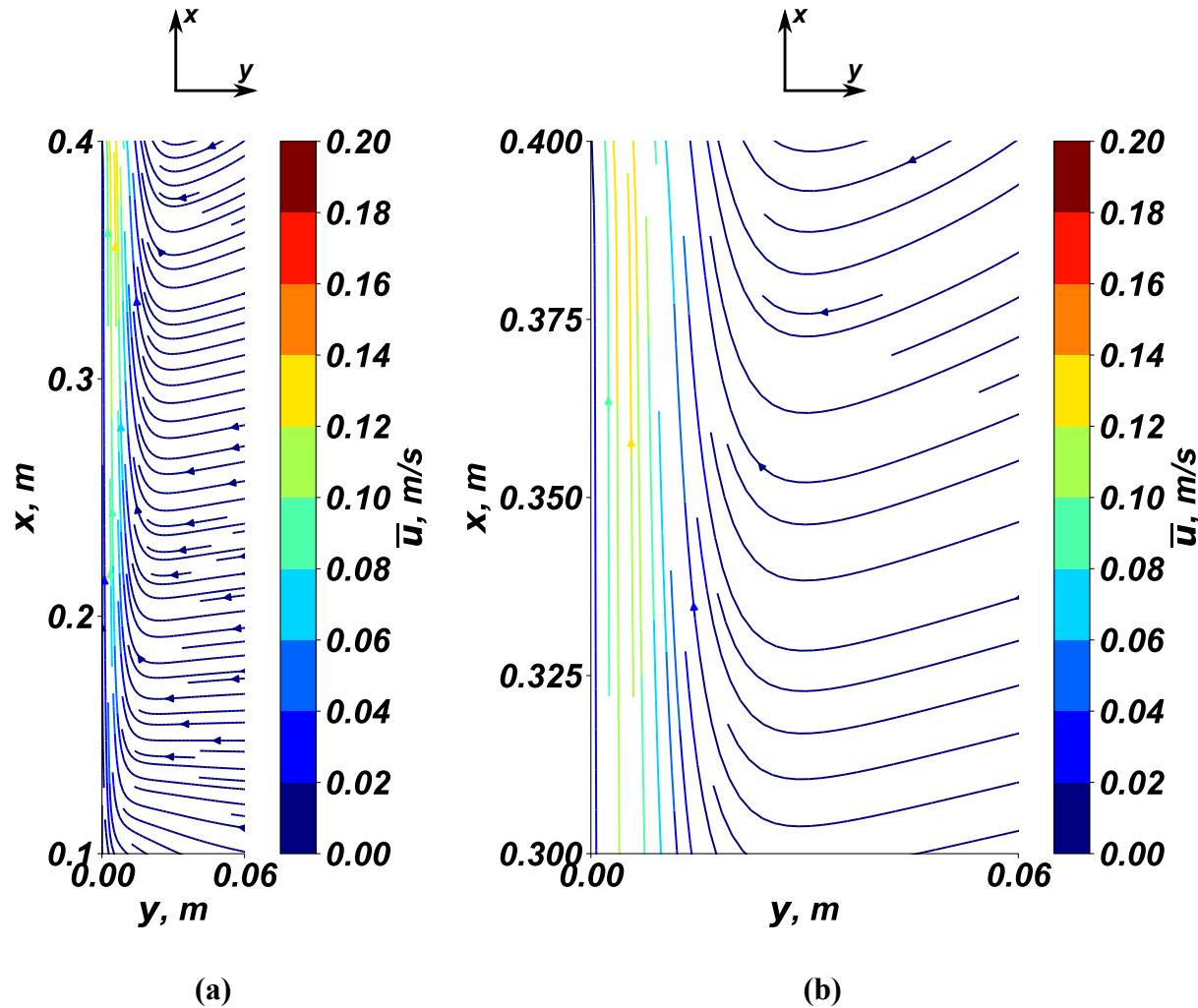
Na Slika 7. prikazani su rezultati dobiveni nestacionarnim rješavačem (PISO algoritam). Usporedbom s rezultatima dobivenim stacionarnim rješavačem ne mogu se uočiti razlike u dobivenim poljima osrednjene temperature \bar{T} i komponente osrednjene brzine \bar{u} , te zaključci izneseni za rezultate dobivene stacionarnim rješavačem, vrijede i za rezultate dobivene nestacionarnim rješavačem.



Slika 7. Polja osrednjene temperature \bar{T} , K (a) i (c) i komponente osrednjene brzine \bar{u} , m/s (b) i (d) dobivena nestacionarnim rješavačem (PISO algoritam)

Veće razlike između rezultata dobivenih stacionarnim i nestacionarnim rješavačem mogu se uočiti usporedbom strujnica generiranih za rezultate dobivene nestacionarnim rješavačem i prikazanim na Slika 8., sa strujnicama generiranim za rezultate dobivene stacionarnim

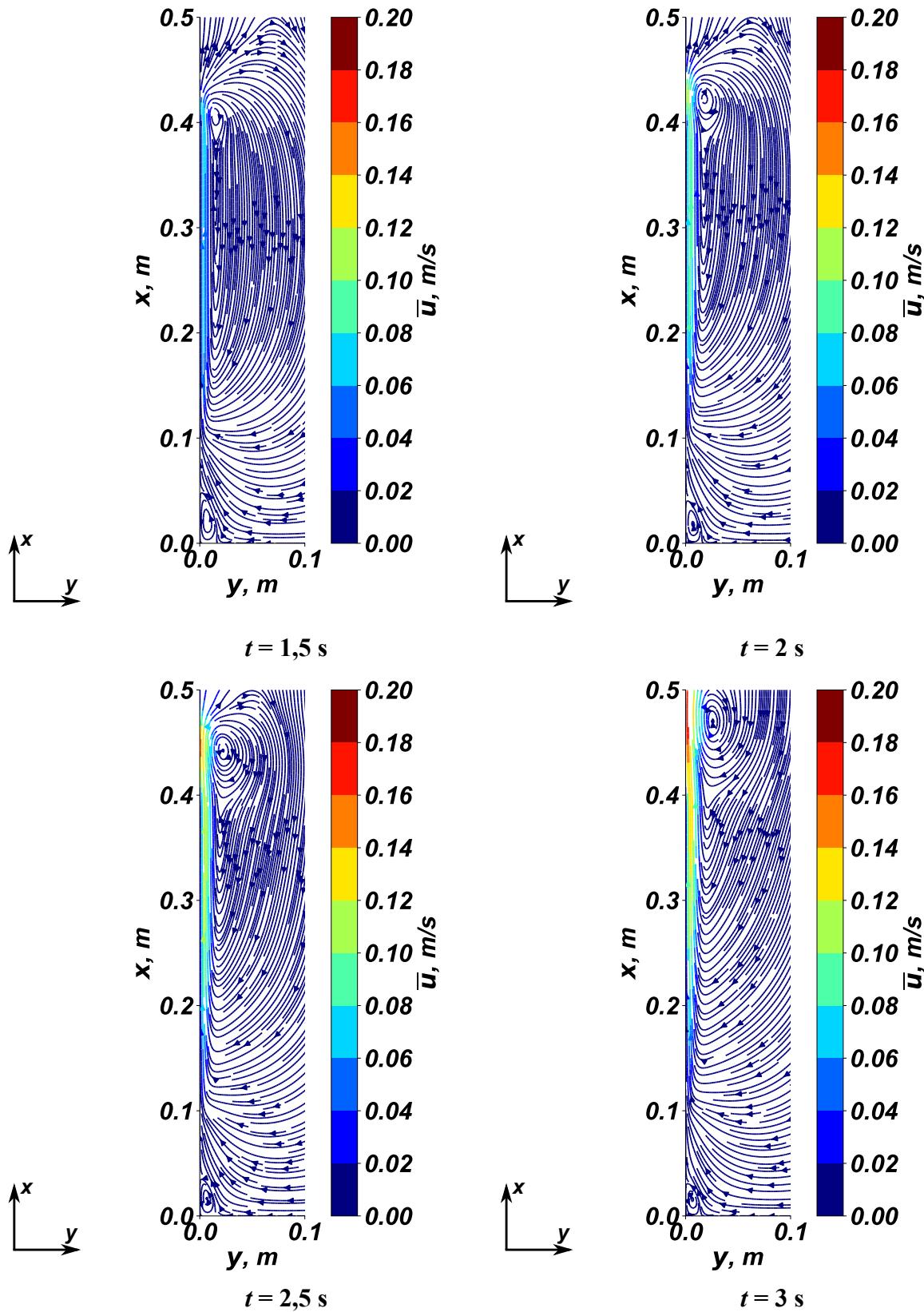
rješavačem i prikazanim na Slika 6. Usporedbom tih rezultata jasno se može uočiti razlika u strujnicama. Za razliku od stacionarnog rješavača koji u području dalje od ploče ($y = 0,02 - 0,06$ m) generira strujnice okomite na ploču s malim vrijednostima komponente osrednjene brzine \bar{v} (komponenta osrednjene brzine u smjeru y -osi), nestacionarni rješavač daje rješenje s većim iznosom \bar{v} .



Slika 8. Strujnice dobivene nestacionarnim rješavačem (PISO algoritam): (a) strujnice generirane duž cijele duljine ploče, (b) uvećan prikaz strujnica uz kraj ploče

Razlog tome je što nestacionarni rješavač omogućava računanje svih nestacionarnih efekata koji se javljaju tijekom razvoja graničnog sloja. Tako na početku razvoja graničnog sloja (u vremenu $t \approx 3$ s) dolazi do stvaranja vrtloga uz ploču uzrokovanih strujanjem zagrijanog fluida u pozitivnom smjeru osi x , te njegovom interakcijom s mirujućim fluidom podalje od ploče dolazi do formacije vrtloga kao što je prikazano na Slika 9. Taj vrtlog brzo biva odnešen u područje izvan gornje granice računalne domene, ali njegov utjecaj jako sporo slabi. Tako je bilo potrebno $t = 60$ s kako bi se generiralo rješenje polja osrednjene brzine prikazano na

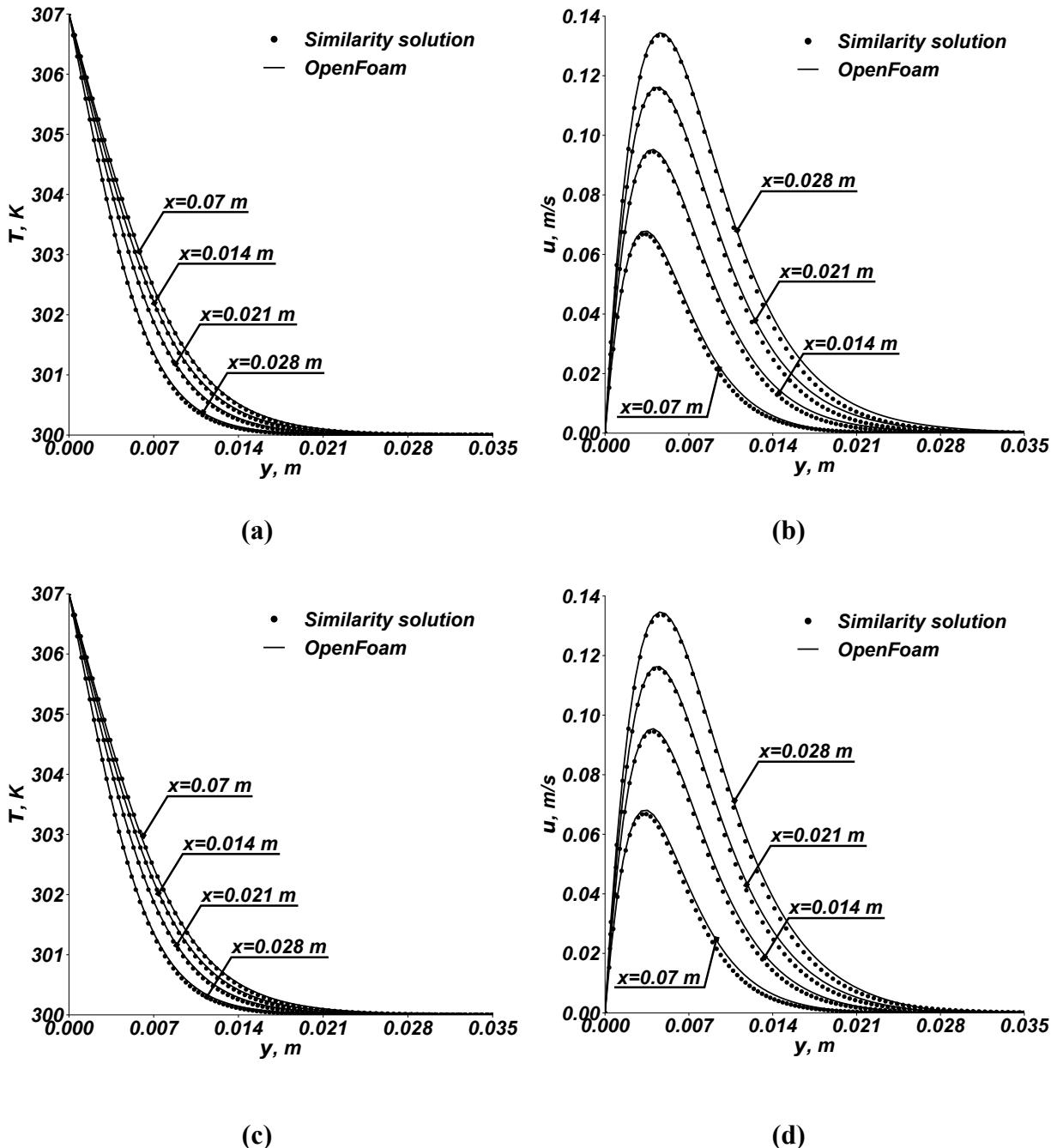
Slika 8., što se može smatrati konvergiranim rješenjem, a na što upućuju i rezultati prikazani u sljedećem poglavlju ovog rada.



Slika 9. Strujnice generirane u računalnoj domeni iz rezultata dobivenih nestacionarnim rješavačem (PISO algoritam) za $t = 1,5 \text{ s}$, $t = 2 \text{ s}$, $t = 2,5 \text{ s}$ i $t = 3 \text{ s}$

5. Rasprava

Na Sliku 10. dani su rezultati dobiveni rješavanjem sustava običnih diferencijalnih jednadžbi izvedenih pretpostavkom o automodelnosti rješenja, te uspoređeni s rezultatima dobivenim metodom konačnih volumena u programskom paketu OpenFoam.



Slika 10. Usporedba rezultata dobivenih pretpostavkom o automodelnosti rješenja (•), te rezultata dobivenih stacionarnim (a) i (b), te nestacionarnim (c) i (d) rješavačem dobivenih metodom konačnih volumena uz upotrebu programskog paketa OpenFoam

Upotrebom programskog jezika *Python*, dobiveno je rješenje raspodjele temperature T , K, te komponente brzine u , m/s paralelne s pločom u graničnom sloju. U dijagramima na Slika 10. ti su rezultati prikazani kružićem (\bullet). Dobivena rješenja su uspoređena s raspodjelom osrednjene temperaturnog polja i polja osrednjene brzine dobivenih metodom konačnih volumena korištenjem programskog paketa OpenFoam upotrebom stacionarnog (a) i (b), te nestacionarnog rješavača (c) i (d).

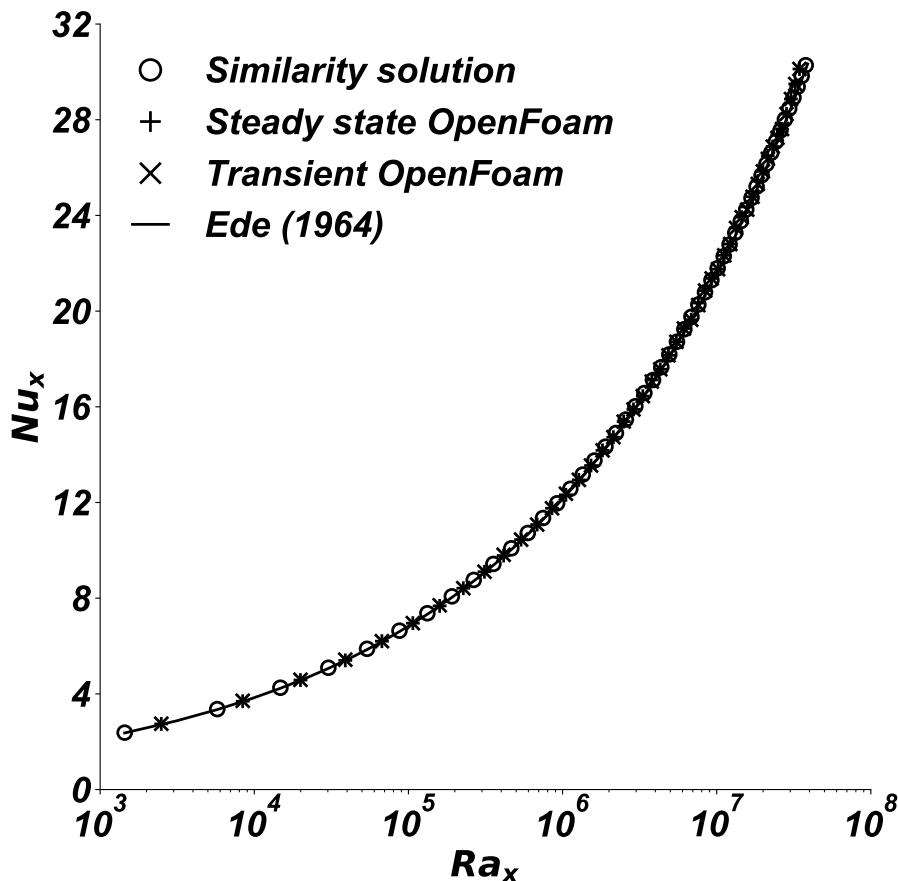
Rezultati dobiveni teorijom sličnosti su u skladu s rezultatima dostupnim u literaturi [17]. Temperatura T , K, najveća je na $y = 0$ i jednaka zadanoj temperaturi ploče $T_p = 307$ K, nakon čega opada, te se na $y \approx 0,025$ m može smatrati jednakom temperaturi okolišnog fluida $T_\infty = 300$ K. Stoga se na temelju dobivenih rezultata može zaključiti kako je debљina temperaturnog graničnog sloja približno jednaka $\delta_T \approx 0,025$ m. Komponenta brzine u , m/s, jednaka je nuli na $y = 0$, nakon čega brzo raste do maksimalne vrijednosti na $y \approx 0,005$ m, te na $y \approx 0,03$ m ponovno opada na vrijednost nula, te se za debљinu hidrodinamičkog graničnog sloja može uzeti približna vrijednost $\delta \approx 0,03$ m. Rješenja dobivena pretpostavkom o automodelnosti rješenja moraju biti geometrijski slična (pretpostavka o samosličnosti profila unutar graničnog sloja). Iz dobivenih rezultata sličnost se može jasno uočiti s obzirom da su profili brzine mjereni na različitim pozicijama x koordinate jednakog oblika, ali se s porastom x koordinate ti profili rastežu, što je u skladu s pretpostavkom o automodelnosti rješenja, kao i s provedenim eksperimentima dostupnim u literaturi [20].

Rezultati dobiveni metodom konačnih volumena pokazuju kako je rješenje dobiveno teorijom sličnosti moguće u potpunosti reproducirati koristeći oba algoritma (SIMPLE i PISO algoritam). Oba rješavača jednako dobro reproduciraju maksimalnu vrijednost osrednjene brzine u graničnom sloju mjerenu na pozicijama $x = 0,07$ m, $x = 0,14$ m, $x = 0,21$ m, te $x = 0,28$ m od ruba ploče, a kao što je prikazano na Slika 10. (b) i (d). Također, i stacionarni i nestacionarni rješavač jednako dobro omogućavaju reproduciranje temperaturnog graničnog sloja prikazanog na Slika 10. (a) i (c). Jedina razlika se može uočiti kod profila osrednjene brzine, gdje rezultati dobiveni nestacionarnim rješavačem malo bolje reproduciraju brzine dobivene pretpostavkom o automodelnosti rješenja u području dalje od ploče ($y > 0,021$ m), u usporedbi s poljem osrednjene brzine dobivenim stacionarnim rješavačem. Razlog leži u činjenici da je nestacionarnim rješavačem moguće izračunati i nestacionarne (prijelazne) efekte koji se javljaju prilikom formiranja graničnog sloja, kao što je vrtlog koji nastaje kao posljedica veće brzine fluida uz ploču u odnosu na mirujući fluid dalje od ploče.

Valja napomenuti da iako je za dobivanje konvergiranog osrednjeg temperaturnog polja i polja osrednjene brzine uz upotrebu nestacionarnog rješavača potrebno provesti numerički proračun do vremena $t_{uk} = 60$ s, nestacionarni proračun se pokazao boljom alternativom za rješavanje ovakvog tipa problema, s obzirom da stacionarni rješavač zahtjeva pažljiv odabir početne vrijednosti masene sile (gravitacijske konstante g , m/s^2). Naime, s obzirom da u sustavu ne postoje efekti uslijed prisilne konvekcije (u početnom trenutku brzina u računalnoj domeni je jednaka nuli), prevelik iznos gravitacijske konstante može lako dovesti do divergencije rješenja (za bolje razumijevanje i objašnjenje odabira parametara kod rješavanja ovakvog tipa problema autor predlaže dodatno istraživanje). Stoga je kako bi se zadovoljio uvjet konvergencije stacionarnog rješenja potrebno definirati dobre početne uvjete, odnosno potrebno je pretpostaviti dobro početno rješenje, što je i učinjeno odabirom manjih vrijednosti masene sile. Razlog leži u činjenici da su kod problema slobodne konvekcije tlačne sile zanemarive, dok je dominantan utjecaj uzgonske sile. Stoga rješavači temeljeni na korekciji tlaka (kao što su SIMPLE i PISO algoritam) slabo konvergiraju ili čak divergiraju ukoliko je utjecaj uzgonske sile prevelik [4]. Upravo je iz navedenih razloga u konačnici za dobivanje nestacionarnog rješenja bilo potrebno manje vremena i manje zahtjeva za pravilnim definiranjem početnih uvjeta (kod nestacionarnog rješavača jedini je zahtjev da vrijednost Courantovog broja Co bude manja od jedan).

Na Slika 11. uspoređeni su rezultati ovisnosti mjesnog Nusseltovog broja Nu_x o Rayleighovom broju Ra_x dobiveni pretpostavkom o automodelnosti rješenja i rješenja dobivenih u programskom paketu OpenFoam stacionarnim i nestacionarnim rješavačem, s rješenjem dobivenim izrazom danim u [5]. Vrijednosti Nusseltovog broja na ploči ($y = 0$) izračunate su koristeći jednadžbe (118), (120) i (124), dok je za dobivanje funkcionske vrijednosti Nusseltovog broja korišten izraz (125) preuzet iz literature [5]. Dobivena rješenja ukazuju kako su razlike u ovisnosti Nusseltovog broja o Rayleighovom broju dobivene pretpostavkom o automodelnosti rješenja i rješenja dobivenih stacionarnim i nestacionarnim rješavačem neznatne, te se rješenja poklapaju s predloženim izrazom danim u literaturi [5] i definiranim u jednadžbi (125). S obzirom da Nusseltov broj fizikalno predstavlja omjer konvektivnog prijenosa topline i prijenosa topline kondukcijom, iz dobivenih rezultata je vidljivo kako je konduktivni prijenos topline najizraženiji u okolini ruba ploče, dok porastom duljine ploče raste dominantnost konvekcije (veći iznos Nusseltovog broja na kraju ploče). S obzirom da su dobivene vrijednosti Nusseltovog broja manje od 32, zaključuje se kako je u procesu prijenosa topline dominantna kondukcija (općenito vrijedi da je kod dominatno

konvektivnih procesa $Nu > 100$), što je u skladu s laminarnom karakteristikom strujanja unutar graničnog sloja (konvektivni efekti su mnogo izraženiji kod turbulentnih strujanja).



Slika 11. Usporedba ovisnosti mjesnog Nusseltovog broja Nu_x o Rayleighovom broju Ra_x . Prikazani su rezultati dobiveni prepostavkom o automodelnosti rješenja (o), rezultati dobiveni programskim paketom OpenFoam stacionarnim (+) i nestacionarnim rješavačem (x), te uspoređeni s rješenjem dobivenim izrazom danim u [5].

6. Zaključak

U ovom radu je napravljena analiza laminarnog graničnog sloja na ravnoj okomitoj ploči uslijed efekta slobodne konvekcije, te su iz Navier – Stokesovih jednadžbi za nestlačivo strujanje analizom utjecaja članova (procjenom reda veličine svakog člana u jednadžbi) izvedene jednadžbe koje opisuju takvo strujanje. Pritom je uzgonski član modeliran uz pretpostavku Boussinesqove aproksimacije kako bi se izbjegla potreba za rješavanjem sustava jednadžbi za stlačivi fluid u kojem bi gustoća fluida bila promjenjiva veličina.

Izvedene jednadžbe rješene su korištenjem dvije različite metode. Prva metoda je metoda temeljena na pretpostavci o automodelnosti rješenja (sličnosti profila unutar graničnog sloja). Osnovna ideja takve metode je sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koji opisuje laminarni granični sloj svesti na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi višeg reda koji je moguće riješiti nekim od standardnih postupaka matematičke integracije, čime se znatno smanjuje kompleksnost problema. Izvedeni sustav spregnutih običnih diferencijalnih jednadžbi rješen je korištenjem modula *SciPy* dostupnog unutar programskog jezika *Python*.

Druga metoda korištena u radu je metoda konačnih volumena, kojom je moguće riješiti sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi izvedenih u radu. Za rješavanje jednadžbi korišten je programski paket otvorenog koda *OpenFoam*, unutar kojeg već postoje implementirane jednadžbe za rješavanje laminarnog strujanja uz pretpostavku Boussinesqove aproksimacije. Stoga su za dobivanje konačnog rješenja korišteni stacionarni rješavač temeljen na SIMPLE algoritmu (*buoyantBoussinesqSimpleFoam*) i nestacionarni rješavač temeljen na PISO algoritmu (*buoyantBoussinesqPisoFoam*).

Rješenja dobivena korištenjem spomenutih metoda međusobno su uspoređena. U radu je pokazano kako je metodom temeljenom na pretpostavci o automodelnosti rješenja moguće u potpunosti reproducirati laminarni granični sloj razvijen uslijed slobodne konvekcije na ravnoj okomitoj ploči. Valja još jednom napomenuti kako jednadžbe dobivene prvom metodom ne vrijede u samoj okolini ruba ploče ($x \approx 0$). Metodom konačnih volumena također je moguće reproducirati temperaturno polje i polje brzine unutar graničnog sloja, s time da je nestacionarnim rješavačem moguće napraviti i dodatnu analizu razvoja graničnog sloja u vremenu (što nije moguće metodom temeljenom na pretpostavci o automodelnosti rješenja i stacionarnim rješavačem).

U radu je također pokazano kako je nestacionarni rješavač bolji izbor za rješavanje problema u odnosu na stacionarni rješavač, s obzirom da se stacionarni rješavač pokazao osjetljivim na

odabir početnog iznosa masene gravitacijske sile (gravitacijske konstante g), dok je kod nestacionarnog rješavača jedini uvjet da Courantov broj Co bude manji od 1.

Dodatak A

η	$F(\eta)$	$F'(\eta)$	$F''(\eta)$	$G(\eta)$	$G'(\eta)$
0,00	0,00000	0,00000	0,67891	1,00000	-0,49951
0,04	0,00053	0,02636	0,63931	0,98002	-0,49950
0,08	0,00209	0,05116	0,60054	0,96004	-0,49945
0,12	0,00460	0,07442	0,56263	0,94006	-0,49931
0,16	0,00802	0,09618	0,52561	0,92010	-0,49905
0,20	0,01228	0,11648	0,48950	0,90014	-0,49863
0,24	0,01732	0,13535	0,45434	0,88021	-0,49801
0,28	0,02309	0,15284	0,42014	0,86031	-0,49717
0,32	0,02953	0,16898	0,38693	0,84044	-0,49607
0,36	0,03659	0,18381	0,35474	0,82062	-0,49470
0,40	0,04422	0,19737	0,32358	0,80087	-0,49303
0,44	0,05236	0,20971	0,29347	0,78118	-0,49103
0,48	0,06098	0,22086	0,26444	0,76159	-0,48870
0,52	0,07002	0,23088	0,23648	0,74209	-0,48602
0,56	0,07943	0,23979	0,20963	0,72271	-0,48298
0,60	0,08919	0,24766	0,18387	0,70346	-0,47957
0,64	0,09923	0,25452	0,15923	0,68435	-0,47580
0,68	0,10953	0,26041	0,13570	0,66540	-0,47164
0,72	0,12005	0,26539	0,11328	0,64662	-0,46712
0,76	0,13075	0,26949	0,09197	0,62804	-0,46222
0,80	0,14160	0,27276	0,07177	0,60965	-0,45697
0,84	0,15256	0,27525	0,05266	0,59148	-0,45136
0,88	0,16361	0,27699	0,03464	0,57355	-0,44540
0,92	0,17471	0,27803	0,01769	0,55586	-0,43912
0,96	0,18585	0,27842	0,00179	0,53842	-0,43252
1,00	0,19698	0,27819	-0,01307	0,52126	-0,42562
1,04	0,20809	0,27739	-0,02692	0,50438	-0,41844
1,08	0,21916	0,27605	-0,03977	0,48779	-0,41100
1,12	0,23017	0,27422	-0,05166	0,47150	-0,40331
1,16	0,24109	0,27193	-0,06262	0,45553	-0,39541
1,20	0,25192	0,26922	-0,07266	0,43987	-0,38730
1,24	0,26263	0,26613	-0,08183	0,42454	-0,37902
1,28	0,27320	0,26269	-0,09015	0,40955	-0,37059
1,32	0,28364	0,25893	-0,09765	0,39490	-0,36202
1,36	0,29391	0,25488	-0,10437	0,38059	-0,35335
1,40	0,30402	0,25059	-0,11035	0,36663	-0,34458
1,44	0,31396	0,24606	-0,11562	0,35302	-0,33575
1,48	0,32371	0,24135	-0,12021	0,33977	-0,32688
1,52	0,33326	0,23646	-0,12415	0,32687	-0,31798
1,56	0,34262	0,23142	-0,12749	0,31433	-0,30908
1,60	0,35178	0,22627	-0,13026	0,30215	-0,30020
1,64	0,36072	0,22101	-0,13249	0,29032	-0,29135
1,68	0,36946	0,21567	-0,13421	0,27884	-0,28255
1,72	0,37798	0,21028	-0,13546	0,26771	-0,27382
1,76	0,38628	0,20484	-0,13627	0,25693	-0,26517
1,80	0,39436	0,19938	-0,13668	0,24650	-0,25661
1,84	0,40223	0,19391	-0,13671	0,23640	-0,24817
1,88	0,40988	0,18845	-0,13639	0,22664	-0,23985
1,92	0,41730	0,18301	-0,13575	0,21721	-0,23166
1,96	0,42452	0,17759	-0,13482	0,20811	-0,22361
2,00	0,43151	0,17222	-0,13362	0,19932	-0,21571
2,04	0,43829	0,16691	-0,13219	0,19085	-0,20797
2,08	0,44487	0,16165	-0,13054	0,18268	-0,20040
2,12	0,45123	0,15647	-0,12869	0,17481	-0,19300
2,16	0,45738	0,15136	-0,12668	0,16724	-0,18577
2,20	0,46334	0,14633	-0,12451	0,15995	-0,17872
2,24	0,46909	0,14140	-0,12221	0,15294	-0,17186
2,28	0,47465	0,13656	-0,11979	0,14620	-0,16518
2,32	0,48002	0,13182	-0,11728	0,13972	-0,15869
2,36	0,48520	0,12718	-0,11468	0,13350	-0,15238
2,40	0,49019	0,12264	-0,11202	0,12753	-0,14627
2,44	0,49501	0,11822	-0,10930	0,12180	-0,14034
2,48	0,49965	0,11390	-0,10655	0,11630	-0,13460
2,52	0,50412	0,10969	-0,10376	0,11103	-0,12904

η	$F(\eta)$	$F'(\eta)$	$F''(\eta)$	$G(\eta)$	$G'(\eta)$
2,56	0,50843	0,10560	-0,10095	0,10597	-0,12367
2,60	0,51257	0,10162	-0,09814	0,10113	-0,11848
2,64	0,51656	0,09775	-0,09532	0,09649	-0,11346
2,68	0,52039	0,09399	-0,09251	0,09205	-0,10863
2,72	0,52408	0,09035	-0,08972	0,08780	-0,10397
2,76	0,52762	0,08681	-0,08695	0,08373	-0,09947
2,80	0,53103	0,08339	-0,08420	0,07984	-0,09515
2,84	0,53430	0,08008	-0,08149	0,07612	-0,09098
2,88	0,53743	0,07687	-0,07882	0,07256	-0,08698
2,92	0,54045	0,07377	-0,07619	0,06916	-0,08313
2,96	0,54334	0,07077	-0,07360	0,06591	-0,07943
3,00	0,54611	0,06788	-0,07106	0,06280	-0,07588
3,04	0,54877	0,06509	-0,06857	0,05984	-0,07247
3,08	0,55132	0,06240	-0,06614	0,05700	-0,06919
3,12	0,55376	0,05980	-0,06376	0,05430	-0,06606
3,16	0,55610	0,05729	-0,06144	0,05172	-0,06305
3,20	0,55835	0,05488	-0,05917	0,04925	-0,06016
3,24	0,56050	0,05256	-0,05697	0,04690	-0,05740
3,28	0,56255	0,05032	-0,05482	0,04466	-0,05476
3,32	0,56452	0,04817	-0,05273	0,04252	-0,05223
3,36	0,56641	0,04610	-0,05071	0,04048	-0,04980
3,40	0,56821	0,04411	-0,04874	0,03853	-0,04749
3,44	0,56994	0,04220	-0,04683	0,03668	-0,04527
3,48	0,57159	0,04037	-0,04498	0,03491	-0,04315
3,52	0,57317	0,03860	-0,04319	0,03323	-0,04112
3,56	0,57468	0,03691	-0,04146	0,03162	-0,03919
3,60	0,57612	0,03529	-0,03979	0,03009	-0,03734
3,64	0,57750	0,03373	-0,03817	0,02863	-0,03557
3,68	0,57882	0,03223	-0,03660	0,02724	-0,03389
3,72	0,58008	0,03080	-0,03509	0,02592	-0,03228
3,76	0,58129	0,02942	-0,03364	0,02466	-0,03074
3,80	0,58244	0,02811	-0,03224	0,02346	-0,02927
3,84	0,58354	0,02684	-0,03088	0,02232	-0,02788
3,88	0,58459	0,02564	-0,02958	0,02123	-0,02654
3,92	0,58559	0,02448	-0,02833	0,02019	-0,02527
3,96	0,58654	0,02337	-0,02712	0,01921	-0,02405
4,00	0,58746	0,02231	-0,02596	0,01827	-0,02290
4,04	0,58833	0,02129	-0,02484	0,01737	-0,02179
4,08	0,58916	0,02032	-0,02377	0,01652	-0,02074
4,12	0,58996	0,01939	-0,02273	0,01571	-0,01974
4,16	0,59071	0,01850	-0,02174	0,01494	-0,01878
4,20	0,59144	0,01765	-0,02079	0,01421	-0,01787
4,24	0,59213	0,01684	-0,01988	0,01351	-0,01701
4,28	0,59278	0,01606	-0,01900	0,01285	-0,01618
4,32	0,59341	0,01532	-0,01816	0,01222	-0,01540
4,36	0,59401	0,01461	-0,01736	0,01162	-0,01465
4,40	0,59458	0,01393	-0,01658	0,01105	-0,01393
4,44	0,59512	0,01328	-0,01584	0,01050	-0,01325
4,48	0,59564	0,01266	-0,01513	0,00998	-0,01261
4,52	0,59614	0,01207	-0,01445	0,00949	-0,01199
4,56	0,59661	0,01150	-0,01380	0,00903	-0,01141
4,60	0,59706	0,01096	-0,01318	0,00858	-0,01085
4,64	0,59749	0,01045	-0,01258	0,00816	-0,01032
4,68	0,59789	0,00996	-0,01201	0,00775	-0,00981
4,72	0,59828	0,00949	-0,01146	0,00737	-0,00933
4,76	0,59865	0,00904	-0,01094	0,00701	-0,00887
4,80	0,59901	0,00861	-0,01044	0,00666	-0,00844
4,84	0,59934	0,00820	-0,00996	0,00633	-0,00802
4,88	0,59966	0,00782	-0,00950	0,00602	-0,00763
4,92	0,59997	0,00744	-0,00906	0,00572	-0,00726
4,96	0,60026	0,00709	-0,00864	0,00544	-0,00690
5,00	0,60054	0,00675	-0,00824	0,00517	-0,00656
5,04	0,60080	0,00643	-0,00786	0,00491	-0,00624
5,08	0,60105	0,00612	-0,00750	0,00467	-0,00593
5,12	0,60129	0,00583	-0,00715	0,00444	-0,00564
5,16	0,60152	0,00555	-0,00681	0,00422	-0,00536
5,20	0,60173	0,00529	-0,00650	0,00401	-0,00510
5,24	0,60194	0,00503	-0,00619	0,00381	-0,00484

η	$F(\eta)$	$F'(\eta)$	$F''(\eta)$	$G(\eta)$	$G'(\eta)$
5,28	0,60214	0,00479	-0,00590	0,00362	-0,00461
5,32	0,60232	0,00456	-0,00562	0,00344	-0,00438
5,36	0,60250	0,00434	-0,00536	0,00327	-0,00416
5,40	0,60267	0,00413	-0,00511	0,00311	-0,00396
5,44	0,60283	0,00393	-0,00487	0,00295	-0,00376
5,48	0,60298	0,00374	-0,00464	0,00281	-0,00358
5,52	0,60313	0,00356	-0,00442	0,00267	-0,00340
5,56	0,60327	0,00339	-0,00421	0,00254	-0,00323
5,60	0,60340	0,00322	-0,00401	0,00241	-0,00307
5,64	0,60353	0,00307	-0,00382	0,00229	-0,00292
5,68	0,60365	0,00292	-0,00364	0,00218	-0,00278
5,72	0,60376	0,00278	-0,00347	0,00207	-0,00264
5,76	0,60387	0,00264	-0,00330	0,00197	-0,00251
5,80	0,60397	0,00251	-0,00314	0,00187	-0,00238
5,84	0,60407	0,00239	-0,00299	0,00177	-0,00227
5,88	0,60416	0,00227	-0,00285	0,00169	-0,00215
5,92	0,60425	0,00216	-0,00271	0,00160	-0,00205
5,96	0,60434	0,00205	-0,00258	0,00152	-0,00195
6,00	0,60442	0,00195	-0,00246	0,00145	-0,00185
6,04	0,60449	0,00186	-0,00234	0,00137	-0,00176
6,08	0,60457	0,00177	-0,00223	0,00131	-0,00167
6,12	0,60463	0,00168	-0,00212	0,00124	-0,00159
6,16	0,60470	0,00160	-0,00202	0,00118	-0,00151
6,20	0,60476	0,00152	-0,00192	0,00112	-0,00143
6,24	0,60482	0,00144	-0,00183	0,00106	-0,00136
6,28	0,60488	0,00137	-0,00174	0,00101	-0,00130
6,32	0,60493	0,00130	-0,00166	0,00096	-0,00123
6,36	0,60498	0,00124	-0,00158	0,00091	-0,00117
6,40	0,60503	0,00118	-0,00150	0,00087	-0,00111
6,44	0,60508	0,00112	-0,00143	0,00082	-0,00106
6,48	0,60512	0,00106	-0,00136	0,00078	-0,00101
6,52	0,60516	0,00101	-0,00129	0,00074	-0,00096
6,56	0,60520	0,00096	-0,00123	0,00071	-0,00091
6,60	0,60524	0,00091	-0,00117	0,00067	-0,00086
6,64	0,60527	0,00087	-0,00111	0,00064	-0,00082
6,68	0,60531	0,00082	-0,00106	0,00060	-0,00078
6,72	0,60534	0,00078	-0,00101	0,00057	-0,00074
6,76	0,60537	0,00074	-0,00096	0,00054	-0,00070
6,80	0,60540	0,00070	-0,00091	0,00052	-0,00067
6,84	0,60543	0,00067	-0,00087	0,00049	-0,00064
6,88	0,60545	0,00063	-0,00083	0,00047	-0,00060
6,92	0,60548	0,00060	-0,00079	0,00044	-0,00057
6,96	0,60550	0,00057	-0,00075	0,00042	-0,00055
7,00	0,60552	0,00054	-0,00071	0,00040	-0,00052
7,04	0,60554	0,00051	-0,00068	0,00038	-0,00049
7,08	0,60556	0,00049	-0,00064	0,00036	-0,00047
7,12	0,60558	0,00046	-0,00061	0,00034	-0,00045
7,16	0,60560	0,00044	-0,00058	0,00032	-0,00042
7,20	0,60562	0,00042	-0,00055	0,00031	-0,00040
7,24	0,60563	0,00040	-0,00053	0,00029	-0,00038
7,28	0,60565	0,00037	-0,00050	0,00028	-0,00036
7,32	0,60566	0,00036	-0,00047	0,00026	-0,00035
7,36	0,60568	0,00034	-0,00045	0,00025	-0,00033
7,40	0,60569	0,00032	-0,00043	0,00024	-0,00031
7,44	0,60570	0,00030	-0,00041	0,00022	-0,00030
7,48	0,60571	0,00029	-0,00039	0,00021	-0,00028
7,52	0,60573	0,00027	-0,00037	0,00020	-0,00027
7,56	0,60574	0,00026	-0,00035	0,00019	-0,00025
7,60	0,60575	0,00024	-0,00033	0,00018	-0,00024
7,64	0,60576	0,00023	-0,00032	0,00017	-0,00023
7,68	0,60577	0,00022	-0,00030	0,00016	-0,00022
7,72	0,60577	0,00021	-0,00029	0,00015	-0,00021
7,76	0,60578	0,00020	-0,00027	0,00015	-0,00020
7,80	0,60579	0,00018	-0,00026	0,00014	-0,00019
7,84	0,60580	0,00017	-0,00024	0,00013	-0,00018
7,88	0,60580	0,00016	-0,00023	0,00012	-0,00017
7,92	0,60581	0,00016	-0,00022	0,00012	-0,00016
7,96	0,60582	0,00015	-0,00021	0,00011	-0,00015

η	$F(\eta)$	$F'(\eta)$	$F''(\eta)$	$G(\eta)$	$G'(\eta)$
8,00	0,60582	0,00014	-0,00020	0,00011	-0,00015
8,04	0,60583	0,00013	-0,00019	0,00010	-0,00014
8,08	0,60583	0,00012	-0,00018	0,00009	-0,00013
8,12	0,60584	0,00012	-0,00017	0,00009	-0,00012
8,16	0,60584	0,00011	-0,00016	0,00008	-0,00012
8,20	0,60585	0,00010	-0,00015	0,00008	-0,00011
8,24	0,60585	0,00010	-0,00015	0,00008	-0,00011
8,28	0,60585	0,00009	-0,00014	0,00007	-0,00010
8,32	0,60586	0,00009	-0,00013	0,00007	-0,00010
8,36	0,60586	0,00008	-0,00012	0,00006	-0,00009
8,40	0,60586	0,00008	-0,00012	0,00006	-0,00009
8,44	0,60587	0,00007	-0,00011	0,00006	-0,00008
8,48	0,60587	0,00007	-0,00011	0,00005	-0,00008
8,52	0,60587	0,00006	-0,00010	0,00005	-0,00008
8,56	0,60587	0,00006	-0,00010	0,00005	-0,00007
8,60	0,60588	0,00006	-0,00009	0,00004	-0,00007
8,64	0,60588	0,00005	-0,00009	0,00004	-0,00006
8,68	0,60588	0,00005	-0,00008	0,00004	-0,00006
8,72	0,60588	0,00005	-0,00008	0,00004	-0,00006
8,76	0,60588	0,00004	-0,00007	0,00003	-0,00006
8,80	0,60589	0,00004	-0,00007	0,00003	-0,00005
8,84	0,60589	0,00004	-0,00007	0,00003	-0,00005
8,88	0,60589	0,00003	-0,00006	0,00003	-0,00005
8,92	0,60589	0,00003	-0,00006	0,00003	-0,00005
8,96	0,60589	0,00003	-0,00006	0,00002	-0,00004
9,00	0,60589	0,00003	-0,00005	0,00002	-0,00004
9,04	0,60589	0,00003	-0,00005	0,00002	-0,00004
9,08	0,60590	0,00002	-0,00005	0,00002	-0,00004
9,12	0,60590	0,00002	-0,00004	0,00002	-0,00003
9,16	0,60590	0,00002	-0,00004	0,00002	-0,00003
9,20	0,60590	0,00002	-0,00004	0,00002	-0,00003
9,24	0,60590	0,00002	-0,00004	0,00001	-0,00003
9,28	0,60590	0,00002	-0,00004	0,00001	-0,00003
9,32	0,60590	0,00001	-0,00003	0,00001	-0,00003
9,36	0,60590	0,00001	-0,00003	0,00001	-0,00003
9,40	0,60590	0,00001	-0,00003	0,00001	-0,00002
9,44	0,60590	0,00001	-0,00003	0,00001	-0,00002
9,48	0,60590	0,00001	-0,00003	0,00001	-0,00002
9,52	0,60590	0,00001	-0,00003	0,00001	-0,00002
9,56	0,60590	0,00001	-0,00002	0,00001	-0,00002
9,60	0,60590	0,00001	-0,00002	0,00001	-0,00002
9,64	0,60590	0,00001	-0,00002	0,00001	-0,00002
9,68	0,60590	0,00000	-0,00002	0,00000	-0,00002
9,72	0,60590	0,00000	-0,00002	0,00000	-0,00002
9,76	0,60590	0,00000	-0,00002	0,00000	-0,00002
9,80	0,60590	0,00000	-0,00002	0,00000	-0,00001
9,84	0,60590	0,00000	-0,00002	0,00000	-0,00001
9,88	0,60590	0,00000	-0,00001	0,00000	-0,00001
9,92	0,60590	0,00000	-0,00001	0,00000	-0,00001
9,96	0,60590	0,00000	-0,00001	0,00000	-0,00001
10,00	0,60590	0,00000	-0,00001	0,00000	-0,00001

Tablica 4. Rješenje dobiveno jednadžbama izvedenim na temelju prepostavke o automodelnosti rješenja za $Pr = 0,7$

Dodatak B

```

dimensions      [0 2 -2 0 0 0 0];

internalField   uniform 0;

boundaryField
{
    warmWall
    {
        type          buoyantPressure;
        rho           rhok;
        value         uniform 0;
    }
    inlet
    {
        type          buoyantPressure;
        rho           rhok;
        value         uniform 0;
    }
    outlet
    {
        type          fixedValue;
        value         uniform 0;
    }
    opening
    {
        type          zeroGradient;
    }
    symmetry
    {
        type          symmetryPlane;
    }
    emptySides
    {
        type          empty;
    }
}

```

Tablica 5. Zadani rubni i početni uvjeti za kinematski tlak \tilde{p} , m^2/s^2

```

dimensions      [0 0 0 1 0 0 0];

internalField   uniform 300;

boundaryField
{
    warmWall
    {
        type          fixedValue;
        value         uniform 307;
    }
    inlet
    {
        type          fixedValue;
        value         uniform 300;
    }
    outlet
    {
        type          zeroGradient;
    }
    opening
    {
        type          fixedValue;
        value         uniform 300;
    }

    symmetry
    {
        type          symmetryPlane;
    }
    emptySides
    {
        type          empty;
    }
}

```

Tablica 6. Zadani rubni i početni uvjeti za temperaturu T , K

```

dimensions      [0 1 -1 0 0 0 0];

internalField   uniform (0 0 0);

boundaryField
{
    warmWall
    {
        type          fixedValue;
        value         uniform (0 0 0);
    }
    inlet
    {
        type          fixedValue;
        value         uniform (0 0 0);
    }
    outlet
    {
        type          zeroGradient;
    }
    opening
    {
        type          zeroGradient;
    }
    symmetry
    {
        type          symmetryPlane;
    }
    emptySides
    {
        type          empty;
    }
}

```

Tablica 7. Zadani rubni i početni uvjeti za brzinu \bar{u} , m/s

```

convertToMeters 1;

vertices
(
    (0 0 0) //0
    (0.15 0 0) //1
    (0.15 0.1 0) //2
    (0 0.1 0) //3
    (0 0 0.005) //4
    (0.15 0 0.005) //5
    (0.15 0.1 0.005) //6
    (0 0.1 0.005) //7
    (0 0.4 0) //8
    (0.15 0.4 0) //9
    (0 0.4 0.005) //10
    (0.15 0.4 0.005) //11
    (0 0.5 0) //12
    (0.15 0.5 0) //13
    (0 0.5 0.005) //14
    (0.15 0.5 0.005) //15
);

blocks
(
    hex (0 1 2 3 4 5 6 7) (100 50 1) simpleGrading (100 0.5 1)
    hex (3 2 9 8 7 6 11 10) (100 200 1) simpleGrading (100 1 1)
    hex (8 9 13 12 10 11 15 14) (100 50 1) simpleGrading (100 2 1)
);

edges
(
);

boundary
(
    warmWall
    {
        type wall;
        faces
        (
            (3 7 10 8)
        );
    }
    symmetry
    {
        type symmetryPlane;
        faces
        (
            (0 4 7 3)
            (8 10 14 12)
        );
    }
    outlet
    {
        type patch;
        faces
        (
            (12 14 15 13)
        );
    }
)

```

```

inlet
{
    type wall;
    faces
    (
        (0 1 5 4)
    );
}
opening
{
    type patch;
    faces
    (
        (1 2 6 5)
        (2 9 11 6)
        (9 13 15 11)
    );
}
emptySides
{
    type empty;
    faces
    (
        (4 5 6 7)
        (7 6 11 10)
        (10 11 15 14)
        (0 3 2 1)
        (3 8 9 2)
        (8 12 13 9)
    );
}
);

mergePatchPairs
(
);

```

Tablica 8. Skripta *blockMeshDict* za generiranje mreže konačnih volumena korištene pri numeričkom proračunu u OpenFoam-u

Dodatak C

```
# -*- coding: utf-8 -*-

from __future__ import unicode_literals
import scipy
from scipy import optimize
import scipy.integrate
import pylab
import numpy as np
import matplotlib
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.pyplot import gca

matplotlib.rcParams.update({'legend.markerscale': 1.5,
'legend.handlelength': 1, 'legend.frameon': 0, 'legend.handletextpad': 1 ,
'font.size': 26,'font.family':'Arial', 'font.weight': 'bold', 'font.style':
'italic'})

params = {'axes.labelsize': 26,
           'axes.labelweight': 'bold',
           'axes.titlesize': 26,
           'xtick.labelsize': 26,
           'ytick.labelsize': 26}
matplotlib.pyplot.rcParams.update(params)

matplotlib.rcParams['mathtext.fontset'] = 'custom'
matplotlib.rcParams['mathtext.it'] = 'stixsans:italic'
matplotlib.rcParams['mathtext.bf'] = 'stixsans:italic:bold'

n = 251
eta = np.linspace(0, 10, n)

def free_convection(y, eta):
    return [y[1], y[2], -3*y[0]*y[2] + 2*y[1]*y[1] - y[3],
           y[4], -3*Pr*y[0]*y[4]]

def derivation(a):
    x0 = [0, 0 , a[0], 1, a[1]]
    f = scipy.integrate.odeint(free_convection, x0, eta)
    return f[np.size(eta)-1,1], f[np.size(eta)-1,3]

Pr = 0.7

a = scipy.optimize.fsolve(derivation,[0.676, -0.5046],xtol=1e-06);

print "a = ", a

initial_condition = [0, 0, a[0], 1, a[1]]
y = scipy.integrate.odeint(free_convection, initial_condition, eta)

print "y = ", y

fig1 = plt.figure(1)
ax = plt.axes()
plt.plot(eta, y[:,1], color='k', linewidth=2, linestyle='-' ,
label=r'$f(\eta)$')
fig2 = plt.figure(2)
ax = plt.axes()
```

```
plt.plot(eta, y[:,3], color='k', linewidth=2, linestyle='-' ,  
label=r'$\frac{df(\eta)}{d\eta}$')  
  
result = np.column_stack((eta,y))  
  
np.savetxt('similarity_solution_Pr=0.7.txt', result, delimiter=" ",  
header=" eta F(eta) F'(eta)  
      F''(eta) G(eta)  
      G'(eta)")
```

Tablica 9. Python skripta korištena za generiranje rezultata temeljenih na prepostavci o automodelnosti rješenja

Literatura

- [1] *Bejan, A., Convection Heat Transfer*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 2004.
- [2] *Bergman, T. L., Adrienne S. Lavine, Incropera, F. P., Dewitt, D. P. Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 7th Edition, John Wiley & Sons, 2011.
- [3] *Deen, W.M., Analysis of Transport Phenomena*, Oxford University Press, New York, 1998.
- [4] *Džijan, I., Računalna dinamika fluida*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2010.
- [5] *Ede, A.J., Advances in Free Convection, Advances in Heat Transfer*, Vol. 4 , pp. 1-64, Academic Press, New York, 1964.
- [6] *Galović, A., Termodinamika II*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2010.
- [7] *Glasgow, L.A., Transport Phenomena – An Introduction to Advanced Topics*, John Wiley & Sons, 2010.
- [8] *Holman, J.P., Lloyd, J. Heat Transfer*, 10th Edition, The McGraw-Hill Companies, 2010.
- [9] *Holzmann, T. Mathematics, Numerics, Derivation and OpenFOAM® - The Basics for Numerical Simulations*, 4th ed., February 23, 2017.
https://www.researchgate.net/profile/Tobias_Holzmann/publication/307546712_Mathematics_Numerics_Derivations_and_OpenFOAMR/links/58acbe3992851c3cfda05ab4/Mathematics-Numerics-Derivations-and-OpenFOAMR.pdf
- [10] *Kays, W.M., Crawford, M.E., Weigand, B., Convection Heat Transfer*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 2005.
- [11] *Kiusalaas, J. Numerical methods in engineering with Python*, 6th ed., Cambridge University Press, New York, 2010.
- [12] *Binous H., Free Convection Past a Vertical Flat Plate*, MathWorks®, February 9, 2006. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/9743-free-convection-past-a-vertical-flat-plate>
- [13] *Mitra, A. Numerical simulation on laminar free-convection flow and heat transfer over an isothermal vertical plate*, International Journal of Research in Engineering and Technology, Vol 4(4), 2015.
- [14] *Oosthuizen, P.H., Naylor D., An Introduction to Convective Heat Transfer Analysis*, McGraw-Hill, 1999.

- [15] *OpenFOAM, The OpenFOAM Foundation, User Guide*, version 5.0, July 24, 2017.
<http://foam.sourceforge.net/docs/Guides-a4/OpenFOAMUserGuide-A4.pdf>
- [16] *OpenFOAMWiki, BuoyantBoussinesqPisoFoam*, May 15, 2014.
<https://openfoamwiki.net/index.php/BuoyantBoussinesqPisoFoam>
- [17] **Ostrach, S., An Analysis of Laminar Free Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force, NASA Report**, Vol. 1111, pp. 63–79, 1953.
- [18] **The Kitchin Research Group, Solving the Blasius Equation**, March 11, 2013.
<http://kitchingroup.cheme.cmu.edu/blog/2013/03/11/Solving-the-Blasius-equation/>
- [19] **Thermal Fluids Central, Similarity Solution for Natural Convection on a Vertical Surface**, June 23, 2010.
https://www.thermalfluidscentral.org/encyclopedia/index.php/Similarity_Solution_for_Natural_Convection_on_a_Vertical_Surface
- [20] **Tsuji, T., Nagano, Y., Velocity and Temperature Measurements in a Natural Convection Boundary Layer along a Vertical Flat Plate**, Experimental Thermal and Fluid Science, Vol. 2(2), pp. 208-215, 1989.
- [21] **Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I., Mehanika fluida II – Vježbe**, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2010.