5.6.3

View space의 좌표계로 변환한 후에는 투영(projection)을 통해 평면 상에 점을 위치시킴

projection 의 종류로는 perspective(원근 투영), orthographic 등이 있음

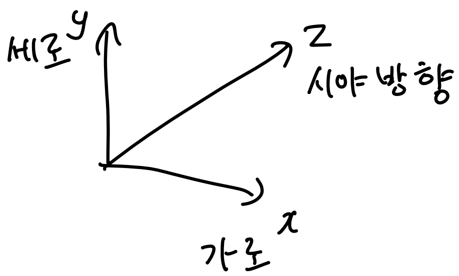
↳ 본 교재에서 사용하는 방식

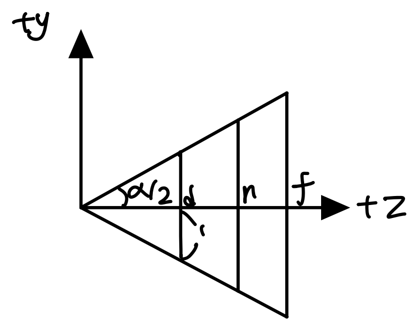
Perspective projection: eye point(시점)을 기준으로 함

eye point 와 정점을 이은 직선 = 투영선(line of projection)

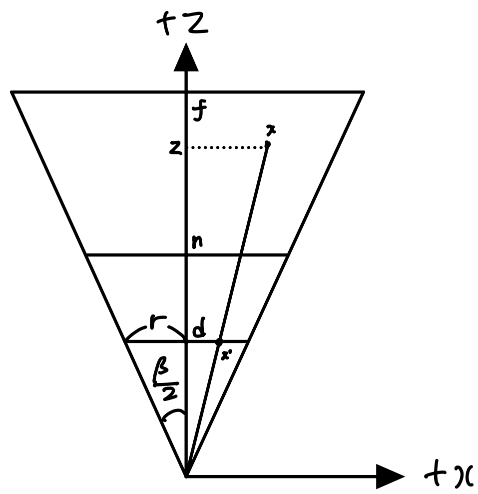
종횡비는 고정, 실제 너비와 높이는 임의로 조정 가능 → 편의상 $h=2$

$\therefore w = 2r$





$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{d}$$



$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{d} = r\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \beta = 2\tan^{-1}\left(r\tan\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$x' = \frac{d}{z}x = \frac{x}{z\tan(\alpha/2)}$$

$$y' = \frac{y}{z\tan(\alpha/2)} \quad \text{(view space)}$$

$$-r \le x' \le r \qquad -1 \le y' \le 1$$

$$n \le z \le f$$

NDC(Normalized device coordinate): 가로 2, 세로 2인 투영창의 좌표계

[-1, 1] ↓

aspect ratio에 대한 의존성 제거

$$x'(NDC) = \frac{x'(\text{view space})}{r} = \frac{x}{rz\tan(\alpha/2)}$$

$$y'(NDC) = y(\text{view space}) = \frac{y}{z\tan(a/2)}$$

깊이 값 정규화 → $g(z) = A + \frac{B}{z}$ (책에서 왜 이 형태의 함수를 쓰는지는 설명 X)
$[0,1]$

$g(n)=0,\ g(f)=1$ 을 풀면

$$A = \frac{f}{f-n},\quad B = \frac{-nf}{f-n}$$

$g(z)$ 의 그래프를 보면 z가 작은 구간에 몰려있음

→ 두 깊이 값이 조금 차이나는 경우 부동소수점 표현으로 인해 구별이 불가능할 수 있음

→ n과 f의 차이를 줄이면 완화됨

최종 투영행렬

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{r\tan(\alpha/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(\alpha/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f}{f-n} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-nf}{f-n} & 0 \end{bmatrix}$$

투영은 점에 대해서만

$$[x, y, z, 1]\cdot P = \left[\frac{x}{r\tan(\alpha/2)}, \frac{y}{\tan(\alpha/2)}, Az+B, z\right]$$

동차절단공간 or 투영 공간에 있다고 한다.

원근 나누기(perspective divide)
또는
동차 나누기(homogeneous divide)

이 행렬을 $w=z$로 나누면 투영 완성 (가장 가까운 평면까지 거리 n은 0보다 큼, 따라서 $z=0$인 경우는 절두체에서 잘리므로 $z>0$이다.)

$$\left[\frac{x}{rz\tan(\alpha/2)}, \frac{y}{z\tan(\alpha/2)}, A+\frac{B}{z}, 1\right]$$

↳ NDC space 상에 있음

Perspective divide 이후의 점은 NDC 상에 존재

이때 해당 점 $\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, 1\right)$이 절두체 내에 있으려면

$-1 \le \frac{x}{w} \le 1,\ -1 \le \frac{y}{w} \le 1,\ 0 \le \frac{z}{w} \le 1$ 을 만족해야 하므로

동차 절단 공간(perspective divide 이전 상태) 상에서는 다음 조건들을 만족 (x, y, z, w)

$$-w \le x \le w,\quad -w \le y \le w,\quad 0 \le z \le w$$

이로부터 평면들을 정의하여 절단

view space 상에서 z=0 인 지점에서 $0 \le B \le 0$ 으로 항상 만족X, 그러므로 절두체에서 제외

연습 문제

7. $r = \frac{B}{A}$ $\quad \tan(\alpha/2) = \frac{1}{B} \to \alpha = 2\tan^{-1}\frac{1}{B}$

$n = -\frac{D}{C}$ $\quad C\left(f + \frac{D}{C}\right) = f$

$Cf - f = -D \quad f = \frac{D}{1-C}$

8. $vP = [xw, yw, zw, w]$

$$\frac{vP}{(vP)_w} \cdot T = [x, y, z, 1] \cdot T = [x', y', z', 1]$$

$$\frac{vPT}{(vPT)_w} = \frac{[xw, yw, zw, w] \cdot T}{(vPT)_w} = \frac{w[x, y, z, 1] \cdot T}{(vPT)_w} = \frac{[x'w, y'w, z'w, w]}{w}$$

$$= [x', y', z', 1]$$

10. $[x, y, z, 1]P = [x', y', z', z]$

$[x', y', z', z]P^{-1} = [x, y, z, 1]$

$= z[x_{ndc}, y_{ndc}, z_{ndc}, 1]P^{-1} = [x, y, z, 1]$

동차절단공간 → 시야공간 에서는 w로 나누기 불필요

11. $r = \frac{w}{h}$ $\tan(\alpha/2) = \frac{h}{2n}$