

“FAST” 主动反射面的形状调节

摘 要

本文主要解决的是如何调节主动反射面使得馈源舱达到最佳接收效果的问题,通过对抛物面理想程度和反射面尽量贴近该理想抛物面进行优化,分别建立了两种不同的优化模型,从而解出了不同情况下理想抛物面方程和合理的促动器径向伸缩量。

对于天体 S 位于特定方位情况下确定理想抛物面的问题,给出抛物面方程,并分析衡量其理想程度。对于抛物面方程,依据抛物线定义,得到关于抛物面顶点伸缩量为参数的方程。在衡量抛物面理想程度时,我们将其转化为寻求整体反射面调节程度最小的情况,并进一步转化为二维竖直平面内基准圆弧和抛物线在 Z 轴方向所围成区域的面积最小的优化模型。在此优化模型中,以抛物面顶点径向改变量为决策变量,反射面板调节因素为约束条件,从而建立关于理想抛物面的优化模型,对于该优化模型的求解,采用定步长搜索算法对决策变量在其约束条件内进行搜索,得到理想的抛物面方程为: $z = \frac{x^2 + y^2}{560.7536} - 300.3884$ 。

对于问题二,此时待测天体 S 方位为一般空间位置,首先通过与问题一相似的空间几何分析,得到此情况下理想抛物面的方程。对于抛物面顶点径向改变量,因该工作抛物面只进行了以球心 C 为中心的旋转,故当抛物面为理想状态时,抛物面顶点的最优径向改变量与问题一相同,则此时理想抛物面方程为 $0.9730x^2 - 0.9849y^2 - 0.0420z^2 + 0.0403xy + 0.3060xz + 0.2404yz + 91.5550x + 68.4794y + 548.8413z + 168443.8767 = 0$, 抛物面顶点坐标为 $(-49.3374, -36.8621, -294.0071)$ 。其次进行空间坐标系的转轴变换,通过整个待求工作反射面板与该理想抛物面所围成体积来衡量待求反射面与该理想抛物面吻合程度,并以不同主索节点下驱动器的径向伸缩量为决策变量,建立一个使待求工作反射面板与该理想抛物面所围成体积最小的优化模型,寻求以上优化问题的最值,其余求解结果见附表。

对于问题三,题目要求基于问题二的调节方案以及基准反射球面,给出关于馈源舱的接收比,故建立反射模型定量描述馈源舱有效区域接收到的反射信号与反射面的反射信号的比例。为简化问题,视反射面板为平面,对于反射面的反射信号,用工作区域内各块三角形反射板在馈源舱平面内投影面积之和来进行量化,而馈源舱有效区域收到的反射信号为馈源舱有效区域内能够接收到三角形反射面板反射的电磁波的面积总和,进而用以上两者的面积之比来表示馈源舱的接收比。通过 MATLAB 求解得调节后馈源舱的接收比为 1.77%,基准反射球面的接收比为 1.48%。

关键词: 目标优化; 主动反射面调节模型; 反射模型; 空间直角坐标变换

一、问题的提出

1.1 问题的背景

1994 年我国天文学家提出了利用贵州喀斯特洼地, 建造 500 米口径具有主动反射面的大型射电望远镜 FAST 的计划^[1]。它的落成启用, 对我国在科学前沿实现重大原创突破、加快创新驱动发展具有重要意义。将反射面调节为工作抛物面是主动反射面技术的关键, 该过程通过下拉索与促动器配合来完成。天眼的反射面由 4450 个反射面板拼装而成, 然而即使单块面板再精致, 也不等于可以完全把反射信号反射到馈舱源, 这就显得主动反射面形状的调节十分重要, 在某种意义上说它决定了天眼的电性能。因此为了把反射信号较好地反射到馈舱源, 就必须通过调节促动器的径向伸缩量来合理调节面板, 尽量使得该工作抛物面尽量贴近理想抛物面, 以获得天体电磁波经反射面反射后的最佳接收效果。

1.2 已知条件

主动反射面可分为两个状态: 基准态和工作态。基准态时反射面为半径约 300 米、口径为 500 米的球面 (基准球面); 工作态时反射面的形状被调节为一个 300 米口径的近似旋转抛物面 (工作抛物面)。C 点是基准球面的球心, 馈源舱接收平面的中心只能在与基准球面同心的一个球面 (焦面) 上移动, 两同心球面的半径差为 $F = 0.466R$ (其中 R 为基准球面半径, 称 F/R 为焦径比)。馈源舱接收信号的有效区域为直径 1 米的中心圆盘。

1.3 需求解的问题

问题一: 当待观测天体 S 位于基准球面正上方, 即 $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$ 时, 结合考虑反射面板调节因素, 确定理想抛物面。

问题二: 当待观测天体 S 位于 $\alpha = 36.795^\circ$, $\beta = 78.169^\circ$ 时, 确定理想抛物面。建立反射面板调节模型, 调节相关促动器的伸缩量, 使反射面尽量贴近该理想抛物面。将理想抛物面的顶点坐标, 以及调节后反射面 300 米口径内的主索节点编号、位置坐标、各促动器的伸缩量等结果按照规定的格式 (见附件 4) 保存在 “result.xlsx” 文件中。

问题三: 基于第 2 问的反射面调节方案, 计算调节后馈源舱的接收比, 即馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比, 并与基准反射球面的接收比作比较。

二、问题的分析

2.1 问题一的分析

问题需要求当待观测天体 S 位于基准球面正上方时, 并结合考虑反射面板调节因素来确定理想的抛物面。针对此问题, 首先基于对抛物面和抛物面天线相关知识的了解, 分析得到工作旋转抛物面在不同调节因素情况下, 其焦距是变化的,

我们通过对反射面板调节因素进行约束，得到该工作抛物面在正常工作要求时，反射面板的调节范围；对于衡量抛物面理想程度这一目标，将其抽象为寻求整体反射面板调节程度最小的情况，进一步转化为基准球面与调整后工作抛物面在三维空间中所形成空间体积最小的优化问题，考虑到空间体积不易量化，且工作抛物面和基准球面均为立体旋转面，则此时优化目标可以转化为在过球心 C 的切平面中基准球弧和工作抛物线在 Z 轴方向上它们之间面积最小的优化调整模型，同时基于工作抛物面在正常工作要求时对反射面板调节来求解该优化模型。

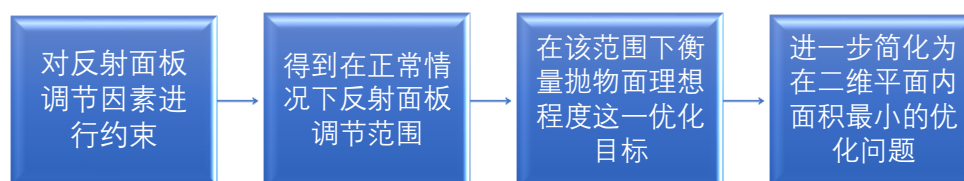


图 1 问题一的思维导图

2.2 问题二的分析

对于待观测天体 S 相对于空间坐标原点 C 为一般位置时，在问题一的求解过程基础上进行空间坐标几何分析，并结合旋转抛物面的相关知识求出抛物面的方程。在考虑反射面板调节因素时，由于工作抛物面和基准球面等工作参数没有进行调整，只是空间位置发生相对转动，故此时反射面板调节因素同问题一相同，即可以得出理想抛物面的方程。

为了使工作抛物面尽量贴近该理想抛物面，可以将其抽象为三维每一个工作反射面与该理想抛物面所围成的体积最小问题。对于体积的求解，首先进行坐标系的转轴变换，并利用二重积分以驱动器径向伸缩量为决策变量求解反射面工作区域与理想抛物面所围成的体积，通过调节主索节点的位置来使围成的体积这一目标函数最小，以达到反射面与理想抛物面尽量吻合。

2.3 问题三的分析

题目要求基于问题二的反射面调节方案，求出馈源舱有效区域接受到的信号与 300 米口径内反射面的发射信号之比。针对于此问题，首先应该将馈源舱接受到的反射信号与反射面板的反射信号进行量化分析，忽视因接受到信号的密度对接受比的影响。对于衡量反射面板的反射信号，将其抽象为各块三角形反射板在馈源舱所在平面内围成投影面积之和，而对于馈源舱有效区域收到的反射信号，将其简化为馈源舱有效区域内能够接收到各块三角形反射面板反射的电磁波的面积总和。通过以上两者的面积之比，可以得到调节后馈源舱的接收比。对于馈源舱有效区域接收到的反射信号与基准反射球面的反射信号之比，可以通过上述一样的方法进行求解。最后将两个比值进行比较，比较得到反射面调节方案与基准反射球面的接收效果。

三、模型的假设

1. 天体发出的电磁波信号传到 FAST 时, 因天体距地面上 FAST 系统距离较远, 故将其传播的信号视为一束平行的电磁波。
2. 假设每个三角网格上安装的反射面板均为平面面板。
3. 忽视因接受到信号的密度对接受比的影响。
4. 假设反射面板间有一定的缝隙, 能够确保反射面板在变位时不会被挤压、拉扯而变形。
5. 假设主索节点调节后, 相邻节点间的距离可能会发生微小变化, 变化幅度忽略不计。
6. 假设所得到的附件中的数据是正确的。
7. 假设天眼反射面板的内应力和回弹很小, 可以忽略不计。
8. 由于馈源舱重心的偏移导致的误差忽略不计。

四、符号的说明

符号	定义	单位
ΔL_0	作抛物面的顶点相对于基准球面对应点的径向改变量	米
k	焦径比	无量纲
Q_2	工作抛物面的顶点	(空间坐标点)
M_1	设工作抛物线上任意一点 M_1 坐标	(空间坐标点)
M_2	工作抛物线端点处坐标	(空间坐标点)
α	天体 S 的方位中的方位角	度
β	天体 S 的方位中的仰角	度
f	为工作抛物面的焦径	米

五、模型的建立与求解

5.1 模型的准备及相关概念

5.1.1 抛物面相关知识概况

空间旋转抛物面是指平面直角坐标系内抛物线旋转 180° 所得到的立体面，在数学上的抛物线就是曲面上任意一点到定点(焦点)的距离与到定直线(准线)的距离相等的点的集合，同理空间中旋转抛物面就是空间中曲面上任意一点到定点(焦点)的距离与到定平面(“定准面”)的距离相等的点的集合。

(一) 概念解析：

抛物面是二次曲面的一种。抛物面共有两种分类：椭圆抛物面和双曲抛物面。椭圆抛物面在笛卡尔坐标系中的方程^[2]为：

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

(二) 性质：

当参数 $a = b$ 时，曲面称为旋转抛物面，它可以由抛物面绕着它的轴旋转而成。它是抛物面反射器的形状，把光源或电磁波发生器放在焦点上，经镜面反射后，会形成一束平行的光线或电磁波，由于光路和电磁波的路径可逆，反过来也同样成立，即一束平行的光线照向镜面后，会聚集在焦点处^[3]。其具体传播示意图如图 2 所示。

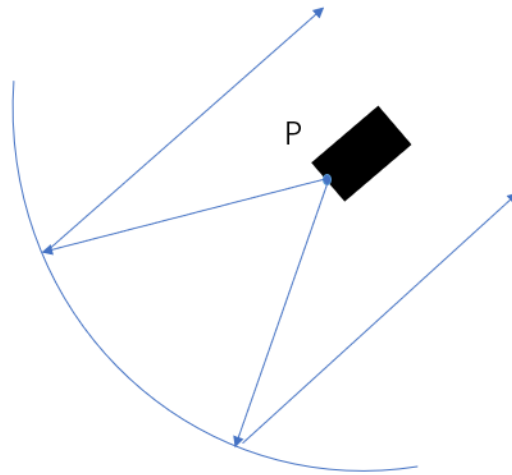


图 2 平面传播示意图

5.1.2 空间直角坐标系变换

题意中原有的空间直角坐标系为 $C - xyz$ ，设在此空间直角坐标系下原始的坐标向量为 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} ，取该空间直角坐标系下一点 A，令其坐标为 (a, b, c) ；连接空间坐标原点 C 与点 A，其 A 点的方位可用方位角 α 和仰角 β 来表示。

对以上空间坐标轴经过转轴变换^[4]之后，将 z 轴转换到 CA 直线方向上，取变换后空间直角坐标系为 $C - x'y'z'$ ，其坐标系下的坐标向量为 \vec{i}' 、 \vec{j}' 、 \vec{k}' ，此时

A 点的坐标可以取为 (a', b', c') 。

由空间中的位置关系可以得到如下关系式：

$$\begin{cases} \vec{i}' = \vec{i} \sin \alpha - \vec{j} \cos \alpha \\ \vec{j}' = \cos \alpha \sin \beta \vec{i} + \sin \alpha \sin \beta \vec{j} - \cos \beta \vec{k} \\ \vec{k}' = \cos \alpha \cos \beta \vec{i} + \sin \alpha \cos \beta \vec{j} + \sin \beta \vec{k} \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} a' \sin \alpha + b' \cos \alpha \sin \beta + c' \cos \alpha \cos \beta = a \\ -a' \cos \alpha + b' \sin \alpha \sin \beta + c' \sin \alpha \cos \beta = b \\ -b' \cos \beta + c' \sin \beta = c \end{cases}$$

解上述方程得到

$$\begin{aligned} a' &= (b' \sin \beta + c' \cos \beta) \tan \alpha - \frac{b}{\cos \alpha} \\ b' &= a \cos \alpha \sin \beta + b \sin \alpha \sin \beta - c \cos \beta \\ c' &= a \cos \alpha \cos \beta + b \sin \alpha \cos \beta + c \sin \beta \end{aligned}$$

5.13 求反射光线的方向向量

令向量 \overrightarrow{AO} 为入射光线，向量 \overrightarrow{OB} 为反射光线。由图 3 和相关知识可知，通过入射光线和反射面的法向量可以得出反射光线。其推导步骤如下：

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) ; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OP}$$

又因为 $\overrightarrow{OP} = -(\overrightarrow{AO} \cdot \vec{n})\vec{n}$ ，得 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} - 2(\overrightarrow{AO} \cdot \vec{n})\vec{n}$

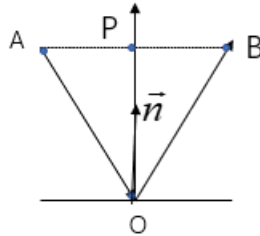


图 3 光路图

5.2 问题一中理想抛物面的确定

5.2.1 理想旋转抛物面方程的建立

(一) 旋转抛物面的定平面 (“定准面”) 的建立

考虑到反射面板调节因素，令工作抛物面的顶点 Q_2 相对于基准球面对应点 Q_1 的径向改变量为 ΔL_0 ，即 Q_1 、 Q_2 两点距离 $|Q_1 Q_2| = \Delta L_0$ 。由促动器顶端的径向改变量范围为 $(-0.6, +0.6)\text{m}$ ，则 $|\Delta L_0| \leq 0.6$ 。

由题意知，空间坐标系的坐标原点是准球面的球心 C，并以该点建立空间中互相垂直的 x 、 y 、 z 轴。令题中已知的焦径比用 k 来表示，即 $k = \frac{F}{R} = 0.466$ 。则

FAST 主动反射面部分点的坐标位置为：

$$C(0,0,0)、P(0,0,-0.534k)、Q_1(0,0,-R)$$

并有如下关系

$$|CP| = (1-k)R, |PQ_1| = kR$$

当待观测天体S位于基准球面正上方时，定平面（“定准面”）应该平行于xoy面，令该定平面的坐标为 z_0 。由上文模型的准备可知，旋转抛物面就是空间中曲面上任意一点到定点（焦点）的距离与到定平面（“定准面”）的距离相等的点的集合。则定平面方程如下式：

$$z_0 - 2\Delta L_0 + (1+k)R = 0 \quad (1)$$

（二）旋转抛物面方程的建立

由上文知该抛物面的焦点为点P，定平面如（1）式，令该工作抛物面任一点的坐标为 (x, y, z) ，由旋转抛物面就是空间中曲面上任意一点到定点（焦点）的距离与到定平面（“定准面”）的距离相等的点的集合，通过以上关系得到抛物面方程如下式：

$$\frac{|z - 2\Delta L_0 + (1+k)R|}{1} = \sqrt{x^2 + y^2 + [z + (1-k)R]^2}$$

经化简得到下式：

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4(kR - \Delta L_0)} + (\Delta L_0 - R) \quad (2)$$

（三）工作抛物面在正常工作要求时，反射面板的调节约束

通过综合分析可知，面板的调节因素包括调节为一个300米口径的近似旋转抛物面和不同主索节点下驱动器顶端的径向改变量等因素。

在考虑不同主索节点下驱动器顶端的径向改变量的约束时，题目要求径向改变量范围为 $(-0.6, +0.6)m$ ，对于这一约束要求，我们将驱动器顶端的径向改变量转化为在同一径向上工作抛物面和基准球面上两点的距离。同时考虑到工作抛物面和基准球面均为立体旋转面，即由抛物线和圆弧旋转而成。故可以利用二维平面内抛物线和圆的位置关系来衡量径向改变量这一约束条件，并选取 xOz 坐标轴面上的抛物线和圆进行分析，即令（2）式中 $y = 0$ ，得到 xOz 平面内抛物线的方程如下：

$$z = \frac{x^2}{4(kR - \Delta L_0)} + (\Delta L_0 - R) \quad (3)$$

同时，在 xOz 平面内圆弧的方程为

$$x^2 + z^2 = R^2 \quad (4)$$

题目要求连接所有主索节点的驱动器顶端径向变化量范围为 $(-0.6, +0.6)m$ ，对于所有驱动器顶端径向变化量，在此我们只取径向变化量的最值来进行限制，

已达到题目中要求。在二维平面内同一径向上工作抛物线和基准圆弧上两点距离的最值可以由极值点、端点处和抛物线顶点选取。已知C点坐标为C(0,0)，设工作抛物线上任意一点M₁坐标为M₁(x₁, z₁)、端点处为M₂，其坐标为M₂(x₂, z₂)。

在对于在极值点情况下，选取同一径向上工作抛物线和基准圆弧上两点切线相互平行的情况，可以等效为某一径向上工作抛物线一点M₁处的切线和其与原点组成的直线垂直。对于(3)式将z视为x的函数，即z = f(x)，函数f(x)在M₁点处的导函数值为

$$z' = f'(x_1) = \frac{x_1}{-2\Delta L_0 + 2kR}$$

对其进行如下讨论分析：

I. 当x₁ ≠ 0时，令该工作抛物线一点M₁处的切线和其与原点组成的直线垂直。得到下式为：

$$\frac{x_1}{-2\Delta L_0 + 2kR} \cdot \frac{z_1}{x_1} = -1$$

通过对上式求解得到

$$z_1 = 2\Delta L_0 - 2kR$$

将得到的z₁代入(3)式中，可得到两个x₁的数字，经过分析可知，工作抛物线和基准圆线均是关于直线SC对称，符合题意，即考虑一种情况满足要求即可，此时取x₁为正值：

$$x_1 = \sqrt{[-2\Delta L_0 + (1+k)R]^2 - [(1-k)R]^2 - (-4\Delta L_0 + 4kR)(-2\Delta L_0 + 2kR)}$$

此时|CM₁|为坐标原点C到抛物线距离的极值。

$$|CM_1| = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}$$

此时应满足驱动器顶端径向改变量的约束，要求如下：

$$R - 0.6 \leq |CM_1| \leq R + 0.6$$

II. 当x₁ = 0时，此时该点为工作抛物线的定点，仍需满足驱动器顶端径向改变量的约束，即要求|ΔL₀| ≤ 0.6

在对于端点M₂处情况下，易知x₂ = 150，将其代入(3)式，得

$$z_2 = \frac{150^2}{4(kR - \Delta L_0)} + (\Delta L_0 - R)$$

此时端点M₂与坐标原点C点的距离为|CM₂|，其值为

$$|CM_2| = \sqrt{x_2^2 + z_2^2} = \sqrt{\left[\frac{150^2}{4(kR - \Delta L_0)} + (\Delta L_0 - R)\right]^2 + 150^2}$$

此时应满足驱动器顶端径向改变量的约束，要求如下：

$$R - 0.6 \leq |CM_2| \leq R + 0.6$$

在考虑调节为一个 300 米口径的近似旋转抛物面的约束时，同样可以将三维工作旋转抛物面和基准球面转化为二维平面来进行约束。此时将三维平面投影到 xOy 坐标轴面上，选取工作抛物面内任意一点 M ，其坐标为 $M(x, y)$ ，在此条件下，应满足的约束为：

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 150 \text{ 且} \\ \max(x^2 + y^2) &= 150 \end{aligned}$$

综上所述，工作抛物面在正常工作要求时，反射面板调节约束如下：

$$s.t. \begin{cases} R - 0.6 \leq |CM_1| = \sqrt{x_1^2 + z_1^2} \leq R + 0.6 \\ |\Delta L_0| \leq 0.6 \\ R - 0.6 \leq |CM_2| = \sqrt{x_2^2 + z_2^2} \leq R + 0.6 \\ x^2 + y^2 \leq 150 \\ \max(x^2 + y^2) = 150 \end{cases} \quad (5)$$

在此约束条件下，可以求得整个工作抛物面在正常工作情况下，工作抛物面顶点 Q_2 的径向改变量 ΔL_0 的取值范围。

(四) 衡量抛物面理想程度的优化模型

由问题的分析可知，此时我们将衡量抛物面理想程度的优化模型转化为二维平面 xOz 内过球心 C 的切平面中基准球弧和工作抛物线在 Z 轴方向上它们之间面积最小的优化调整模型，由 (3)、(4) 式可知 xOz 平面内抛物面和圆弧的方程，抛物面在 xOz 平面内的方程为

$$f(x) = z = \frac{x^2}{4(kR - \Delta L_0)} + (\Delta L_0 - R)$$

圆弧在 xOz 平面内的方程为

$$g(x) = z = -\sqrt{R^2 - x^2}$$

整个工作区域内基准球弧和工作抛物线在 Z 轴方向上它们之间面积最小的优化调整为

$$\begin{aligned} \min W &= \min \int_{-150}^{150} |f(x) - g(x)| dx \\ \text{即: } \min W &= \min \int_{-150}^{150} \left| \frac{x^2}{4(kR - \Delta L_0)} + (\Delta L_0 - R) - (-\sqrt{R^2 - x^2}) \right| dx \end{aligned} \quad (6)$$

此时 ΔL_0 为整个工作抛物面在正常工作情况下，工作抛物面顶点 Q_2 的径向改变量的取值范围，即在 ΔL_0 的取值范围内寻求合理的解，使得上式优化模型达到最优情况。

综上所述衡量抛物面理想程度的优化模型为：

$$\min W = \min \int_{-150}^{150} \left| \frac{x^2}{4(kR - \Delta L_0)} + (\Delta L_0 - R) - (-\sqrt{R^2 - x^2}) \right| dx$$

$$s.t. \begin{cases} R - 0.6 \leq |CM_1| = \sqrt{x_1^2 + z_1^2} \leq R + 0.6 \\ |\Delta L_0| \leq 0.6 \\ R - 0.6 \leq |CM_2| = \sqrt{x_2^2 + z_2^2} \leq R + 0.6 \\ x^2 + y^2 \leq 150 \\ \max(x^2 + y^2) = 150 \end{cases}$$

5.2.2 理想抛物面的求解确定

（一）关于抛物面在正常工作情况下，工作抛物面顶点 Q_2 的径向改变量 ΔL_0 的取值范围的确定。

由题意可知 ΔL_0 初始变化范围为 $(-0.6, +0.6)m$ ，要求在满足（5）式的前提下确定 ΔL_0 的取值范围。此时我们通过定步长搜索的方法，以步长为 $0.0001m$ 进行搜索，对于满足（5）式约束的径向改变量 ΔL_0 进行保留，当不满足时进行舍去，得到关于满足（5）式约束条件下 ΔL_0 的取值范围如下表所示。

表 1 满足约束下 ΔL_0 的取值情况

序号 参数	1	2		1838	1839		4839	4840
$\Delta L_0/m$	-0.5722	-0.5721	...	-0.3885	-0.3884	...	-0.0884	-0.0883
$\min \Delta L_i$ /m	299.9175	299.9174	...	299.7212	299.7211	...	299.4002	299.4001
$\max \Delta L_j$ /m	300.6000	300.5998	...	300.3953	300.3952	...	300.0608	300.0606

即 $-0.5722 \leq \Delta L_0 \leq -0.0883$ ，其中 ΔL_0 为工作抛物面顶点 Q_2 的径向改变量， $\min \Delta L_i$ 为整个工作抛物面内径向改变量最小的一点 i ， $\max \Delta L_j$ 为整个工作抛物面内径向改变量最大的一点 j ，其均满足 $|\Delta L_0| \leq 0.6$ ，故符合题意的要求。

（二）抛物面理想程度优化模型的求解。

对于上式（6），同样以步长为 $0.0001m$ 进行搜索，此时搜索范围为 $(-0.5722, -0.0883)m$ ，对于每一次搜索，利用优化模型（6），都可以得到一个对应的 W ，之后进行判断此时得到的 W 与前一个所求得大小关系，若小于，则更新

最小值，否则不更新。最终得到目标函数取最小值时 $\Delta L_0 = -0.3884m$ ，即工作抛物面的顶点 Q_2 相对于基准球面对应点 Q_1 的径向改变量 $\Delta L_0 = -0.3884m$ 时，抛物面最理想。

将 $\Delta L_0 = -0.3884m$ 代入 (2) 式中得到理想抛物面方程为：

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4(kR - \Delta L_0)} + (\Delta L_0 - R) = \frac{x^2 + y^2}{560.7536} - 300.3884$$

5.3 问题二中理想抛物面的确定和反射面板调节模型的建立与求解

5.3.1 理想旋转抛物面方程的确定

取题目中焦点坐标为 P 点，其坐标为 $P(x_p, y_p, z_p)$ ，工作抛物面的顶点为 Q_2 ，令直线 SC 与旋转抛物面定平面的交点为 N，令其坐标为 $N(x_N, y_N, z_N)$ 。设 S' 为 SC 直线上 C 点上方的一点，且 $|S'C|=1$ 。其示意图如图 4：.....

由空间解析几何知 S' 的坐标为 $S'(\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)$ ，即直线 CP 的方向向量 $\vec{v} = (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)$ 。又由题意知 $|CP| = (1-k)R$ ，则 P 点的坐标如下：

$$x_p = -(1-k)R \cos \alpha \cos \beta$$

$$y_p = -(1-k)R \sin \alpha \cos \beta$$

$$z_p = -(1-k)R \sin \beta$$

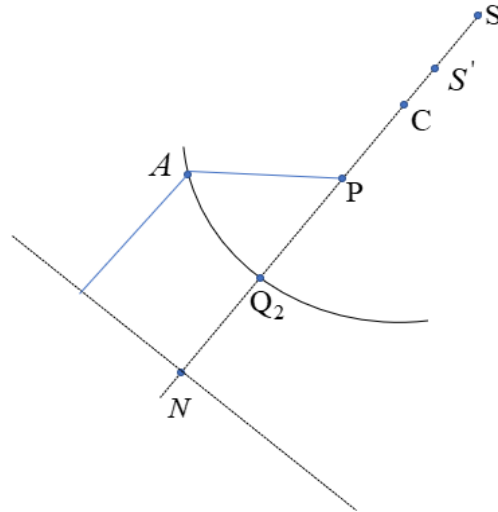


图 4 特殊点的剖面示意图

对于点 N、P、 Q_2 的相对位置关系，由抛物面的定义知 $|PQ_2| = |Q_2N|$ ，且 N 在直线 CP 上，故 N 点的坐标为：

$$x_N = (-(1+k)R + 2\Delta L_0) \cos \alpha \cos \beta$$

$$y_N = (-(1+k)R + 2\Delta L_0) \sin \alpha \cos \beta$$

$$z_N = (-(1+k)R + 2\Delta L_0) \sin \beta$$

其中 ΔL_0 为工作抛物面的顶点 Q_2 相对于基准球面对应点的径向改变量。设抛物面上任意一个点 $A(x, y, z)$ ，则 A 到定平面的距离为 d

$$d = \frac{\cos \alpha \cos \beta (x - x_N) + \sin \alpha \cos \beta (y - y_N) + \sin \beta (z - z_N)}{\sqrt{(\cos \alpha \cos \beta)^2 + (\sin \alpha \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta}}$$

抛物面任一点 A 距焦点 P 的距离为 $|AP| = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}$

由抛物面定义知 $d = |AP|$ 可得抛物面方程为：

$$\begin{aligned} & 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta xy + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \beta xz + 2 \sin \alpha \cos \beta \sin \beta yz - \\ & 4 \Delta L_0 (\cos \alpha \cos \beta x + \sin \alpha \cos \beta y + \sin \beta z) + 4kR^2 - 4 \Delta L_0 (1+k)R + 4 \Delta L_0^2 + \\ & (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 1)x^2 + (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - 1)y^2 + (\sin^2 \beta - 1)z^2 + \\ & 4kR(\cos \alpha \cos \beta x + \sin \alpha \cos \beta y + \sin \beta z) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

题中已知天体 S 的方位，即其方位角为 $\alpha = 36.795^\circ$ 、仰角为 $\beta = 78.169^\circ$ 。通过对问题的分析，在考虑反射面板调节因素时，由于工作抛物面和基准球面等工作参数没有进行调整，只是空间位置发生相对转动，故此时反射面板调节因素同问题一相同，即 ΔL_0 相同，此时 $\Delta L_0 = -0.3884m$ ，将以上已知参数代入 (7) 式中得到关于在问题二条件下理想抛物面的方程为：

$$0.9730x^2 - 0.9849y^2 - 0.0420z^2 + 0.0403xy + 0.3060xz + 0.2404yz + 91.5550x + 68.4794y + 548.8413z + 168443.8767 = 0$$

此时理想抛物面的顶点坐标为 $(-49.3374, -36.8621, -294.0071)$

5.3.2 基于工作区域反射面板调节模型的建立

(一) 坐标系的转轴变换理想抛物面的确定

在由空间坐标系 $C - xyz$ 转轴变化为 $C - x'y'z'$ 的过程中，坐标原点仍在 C 点，此时 z' 轴变换为 SC 直线方向。在此情况下，由问题一可知抛物面在转换后坐标系内的方程为：

$$z' = \frac{x'^2 + y'^2}{4(kR - \Delta L_0)} - (R - \Delta L_0)$$

取 f 为焦距，则应满足 $f = kR - \Delta L_0$ ，故上式可简化为：

$$z' = \frac{x'^2 + y'^2}{4f} - [(1-k)R + f]$$

(二) 在新坐标系下确定反射面板的调节模型

设在 $C - x'y'z'$ 空间直角坐标系下一个三角形面板的三个顶点的坐标为

$A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ 、 $C(x_3, y_3, z_3)$ ，令该三角形面板三个顶点在 $x'Cy'$ 平面上的投影为 $A'(x'_1, y'_1, z'_1)$ 、 $B'(x'_2, y'_2, z'_2)$ 、 $C'(x'_3, y'_3, z'_3)$ 。

此时，再进行空间直角坐标系的转换。 z' 轴保持不变，原点始终在 C 点处，建立以平行于直线 $A'B'$ 且过坐标系原点 C 的直线为 u 轴、设 θ 为 $A'B'$ 与原来的 x 轴的夹角，根据右手定则确定 v 轴，即空间直角坐标系 $C-uvz'$ 。假设 A' 点的坐标为 $A'(a, 0, z'_1)$ ， B' 的坐标为 $B'(b, 0, z'_2)$ ， C' 的坐标为 $C'(c_1, c_2, z'_3)$ 。其中：

$$a = x'_1 \cos \theta - y'_1 \sin \theta$$

$$b = x'_2 \cos \theta - y'_2 \sin \theta$$

$$c_1 = x'_3 \cos \theta - y'_3 \sin \theta$$

$$c_2 = x'_3 \sin \theta + y'_3 \cos \theta$$

设三角形面板在 $C-uvz'$ 平面中的方程为 $z = tu + mv + n$ 。

直线 $A'C'$ 的方程为：

$$v(c_1 - a) = c_2(u - a)$$

直线 $B'C'$ 的方程为：

$$v(c_1 - b) = c_2(u - b)$$

通过二重积分求解第 i 块三角形反射面工作区域与理想抛物面所围成的体积如下：

$$V_i = \int_0^{c_2} \int_{\frac{c_1-b}{c_2}v+a}^{\frac{c_1-a}{c_2}v+b} [tu + mv + n - \frac{u^2 + v^2}{4f} + f + (1-k)R]^2 dudv$$

设三角形面板三个主索节点 (x_{iA}, y_{iA}, z_{iA}) 、 (x_{iB}, y_{iB}, z_{iB}) 、 (x_{iC}, y_{iC}, z_{iC}) 经过空间直角坐标系变换得 $(x'_{iA}, y'_{iA}, 0)$ 、 $(x'_{iB}, y'_{iB}, 0)$ 、 $(x'_{iC}, y'_{iC}, 0)$ ，对于在工作区域三角形面板的个数的确定：当三角形面板都满足以下条件时，则该三角形平面属于工作区域

$$s.t. \begin{cases} (x'_{iA})^2 + (y'_{iA})^2 \leq 150^2 \\ (x'_{iB})^2 + (y'_{iB})^2 \leq 150^2 \\ (x'_{iC})^2 + (y'_{iC})^2 \leq 150^2 \\ i = 2, 3, 4, 5, \dots, 4301 \end{cases}$$

求解得满足在工作区域内的三角形面板的个数共有 1295 个（详见附录），则在考虑整个工作区域反射面板与理想抛物面所围成总的面积优化模型为：

$$\min f = \sum_{i=1}^{1295} \int_0^{c_2} \int_{\frac{c_1-b}{c_2}v+a}^{\frac{c_1-a}{c_2}v+b} [tu + mv + n - \frac{u^2 + v^2}{4f} + f + (1-k)R]^2 dudv$$

5.3.3 工作区域反射面板调节模型的求解

题中决策变量略多，故解空间较大，若采用遍历搜索则在有限时间内不能搜

索到有效结果。且粒子群算法有较快的收敛性和运算速度,在可行域为凸集的情况下较适用,故采用粒子群算法来实现对其求解。下面先对粒子群算法进行简单的介绍。

(一) 粒子群算法简要介绍

粒子群算法基于“种群”和“进化”的概念,通过个体间的协作与竞争实现最优解的搜索^[6],是一种随机搜索算法。它可以以较大概率收敛于全局最优解与其他传统优化算法相较而言,其具有较快的计算能力和更好的全局搜索能力。其基本的思想来源于鸟群捕食行为,鸟群通过集体的信息共享使群体找到最优的目的地。

以优化问题的求解与鸟群捕食行为过程的相似性为基础,将食物的量模拟为目标函数值,森林演化成求解空间,每个鸟所在的位置为空间中的一个解,食物量最多的位置为全局最优解,鸟相当于粒子,每个粒子有了初始位置和初始速度,然后通过迭代求优。算法步骤如下:

STEP1.初始化粒子群参数:粒子群规模,粒子维度,最大迭代次数,惯性重,学习因子;

STEP2.通常在允许的范围内随机初始化每个粒子的位置和速度,每个微粒的 $pbest$ 设为其初始位置, $pbest$ 的最优值为 $gbest$;

STEP3.计算动态惯性权重值,更新速度和位置并进行边界条件处理,对每个粒子,将其适应值与个体极值 $pbest$ 进行比较,对每个粒子,将其适应度值与全局极值 $gbest$ 进行比较,判断是否更替 p 、 $pbest$ 、 g 、 $gbest$;

STEP4.判断是否满足迭代终止条件(达到最大次数或达到两次迭代之间适应值的最小差值),若满足则结束搜索、过程,输出优化值,若不满足,则继续进行迭代优化;

(二) 初始个体最优位置和最优值及全局最优位置和最优值

粒子群算法的关键在于在每一次循环时,能够通过计算动态权重值,利用更新公式产生新的位置和速度,从而更新个体最优位置和最优值及全局最优位置和最优值,按照公式依次迭代直到满足迭代次数。

(三) 控制参数的确定

根据本题目的实际情况要求和粒子群算法的规则,对其参数选取如下:

群体粒子个数 $N = 100$

粒子维度(工作区域内的主索节点数) $D = 692$

最大迭代次数 $T = 200$

惯性权重最大值 $W_{max} = 0.8$

惯性权重最小值 $W_{min} = 0.4$

位置最大值 $X_{max} = 0.6$

位置最小值 $X_{min} = -0.6$

速度最大值 $V_{max} = 0.3$

速度最小值 $V_{min} = -0.3$

学习因子 1 $c_1 = 1.5$

学习因子 2 $c_2 = 1.5$

（四）求解结果及其结果分析

代入控制参数与关键参数，将上述优化算法运行，可以得到关于目标函数值进化曲线如图 5 所示：

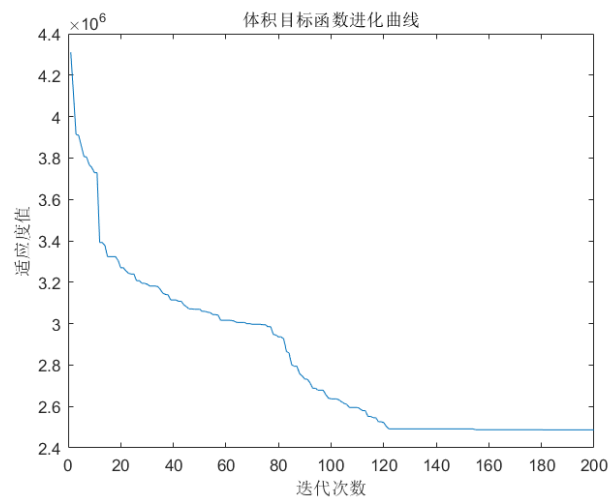


图 5 目标函数进化曲线图

由此，我们可以得到在工作区域内各主索节点对应的促动器伸缩量的最优解，进而求出该主索节点调整后的位置坐标。部分结果如表 2 所示，完整结果见“result.xlsx”文件。

表 2 问题二的部分结果表

节点编号	X 坐标（米）	Y 坐标（米）	Z 坐标（米）	伸缩量（米）
A0	0.0000	0.0000	-300.7417	-0.3417
B1	6.1147	8.4165	-300.5608	-0.3408
C1	9.8964	-3.2155	-300.6366	-0.4167
D1	0.0000	-10.3853	-300.0546	0.1657
E1	-9.8754	-3.2086	-299.9994	0.2210

5.4 问题三中馈源舱反射模型建立与求解

5.4.1 反射模型的建立

(一) 对于 300 米口径内反射面的反射信号

在 $C-xyz$ 空间直角坐标系下, 取第 i 组反射面板的三个顶点组成一个三角形反射板, 其三点的坐标为: (x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) 、 (x_{2i}, y_{2i}, z_{2i}) 、 (x_{3i}, y_{3i}, z_{3i}) 。为了更好地建立反射模型, 同问题二分析相同, 将空间坐标系 $C-xyz$ 转轴变化为 $C-x'y'z'$, 坐标原点仍在 C 点, 此时 z' 轴变换为 SC 直线方向。此时在 $C-x'y'z'$ 空间直角坐标下, 以上三个顶点坐标变换为 $(x'_{1i}, y'_{1i}, z'_{1i})$ 、 $(x'_{2i}, y'_{2i}, z'_{2i})$ 、 $(x'_{3i}, y'_{3i}, z'_{3i})$ 。

这三点可以构成该三角形反射面板, 设其法向量为 $\vec{N} = (t_1, t_2, t_3)$, 通过空间几何关系得到

$$\begin{aligned} t_1 &= (y'_{2i} - y'_{1i})(z'_{3i} - z'_{1i}) - (z'_{2i} - z'_{1i})(y'_{3i} - y'_{1i}) \\ t_2 &= (x'_{3i} - x'_{1i})(z'_{2i} - z'_{1i}) - (z'_{3i} - z'_{1i})(x'_{2i} - x'_{1i}) \\ t_3 &= (x'_{2i} - x'_{1i})(y'_{3i} - y'_{1i}) - (y'_{2i} - y'_{1i})(x'_{3i} - x'_{1i}) \end{aligned}$$

同时, 取该三角形反射面板的单位法向量为 $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, 通过上式法向量的假设, 则单位法向量分向量的模可表示为

$$n_1 = \left| \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} \right|, \quad n_2 = \left| \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} \right|, \quad n_3 = \left| \frac{t_3}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} \right|$$

在转轴变化为 $C-x'y'z'$ 空间坐标中, 馈源舱所处的平面方程为

$$z = -(1-k)R \quad (9)$$

取任意一束光线 $\vec{\lambda}(0,0,-1)$ 入射到该三角形反射面板上, 由该三角形反射面板单位法向量为 $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, 则通过反射面板反射后, 利用模型的准备相关知识, 得出反射光线 $\vec{\phi}$ 的向量为 $\vec{\phi} = (2n_1n_3, 2n_2n_3, 2n_3^2 - 1)$ 。

对于第 i 组反射面板中第 j 个主索节点的坐标位置为 (x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) , 其中 $(j=1,2,3)$, 根据单位法向量, 可得到反射光的直线方程为:

$$\frac{x - x_{ji}}{2n_1n_3} = \frac{y - y_{ji}}{2n_2n_3} = \frac{z - z_{ji}}{2n_3^2 - 1} \quad (10)$$

联立 (9)、(10) 式求解得到

$$\begin{cases} x_{\text{投}ji} = x_{ji} + \frac{2[(k-1)R - z_{ji}]n_1n_3}{n_3} \\ y_{\text{投}ji} = y_{ji} + \frac{2[(k-1)R - z_{ji}]n_2n_3}{n_3} \end{cases}$$

此时 $(x_{\text{投}ji}, y_{\text{投}ji})$ 为第 i 组三角形反射面板每个顶点在馈源舱所在平面的投影

点，则三个投影点围成的反射面积为 $S_{\text{投}i}$ ，其值为

$$S_{\text{投}i} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{\text{投}2i} - x_{\text{投}1i} & y_{\text{投}2i} - y_{\text{投}1i} \\ x_{\text{投}3i} - x_{\text{投}1i} & y_{\text{投}3i} - y_{\text{投}1i} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [(x_{\text{投}2i} - x_{\text{投}1i})(y_{\text{投}3i} - y_{\text{投}1i}) - (y_{\text{投}2i} - y_{\text{投}1i})(x_{\text{投}3i} - x_{\text{投}1i})]$$

由上文可知在工作区域三角形反射面板的个数的为 1295 个，即此时 i 共有 1295 种取值。则工作区域内所有三角形反射面板在馈源舱所在平面的反射面积总和为：

$$S_{\text{投总}} = \sum_{i=1}^{1295} S_{\text{投}i}$$

（二）对于馈源舱有效区域收到的反射信号

对于馈源舱有效区域收到的反射信号，我们将其简化为馈源舱有效区域内能够接收到三角形反射面板反射的电磁波的面积总和。由题意知馈源舱有效接收信号的区域为直径为 1 米的中心圆盘，假设第 i 块三角形反射面板反射到馈源舱平面的投影三角形为 ΔABC ，此时考虑投影到馈源舱接收平面上 ΔABC 与有效区域的中心圆盘的相对位置，以此来确定所有三角形反射面板反射到馈源舱有效区域的总面积。

I. 当馈源舱有效接收信号区域的圆心位于投影三角形 ΔABC 的外部时，且圆心 O 和点 C 位于直线 AB 异侧时

当 ΔABC 处于如下图所示情况时，此时三角形反射面板 i 投影在接收平面上与有效接收圆形区域所重叠的面积用 $S'_{\text{投}i}$ ，并将其面积等效划分为以下三个部分，分别是新三角形 ΔOAC 与有效接收圆形区域的重叠面积 $S'_{\Delta OAC}$ 、新三角形 ΔOBC 与有效接收圆形区域的重叠面积 $S'_{\Delta OBC}$ 、新三角形 ΔOAB 与有效接收圆形区域的重叠面积 $S'_{\Delta OAB}$ 。即

$$S'_{\text{投}i} = S'_{\Delta OAC} + S'_{\Delta OBC} + S'_{\Delta OAB}$$

以下就对新三角形 ΔOAC 为例，求解关于 $S'_{\text{投}i}$ ，其中假设 O 点到直线 AC 的距离为 h ，其中包括以下四种情况。

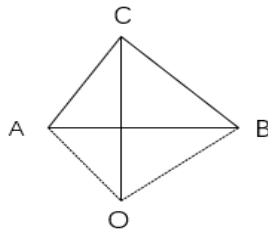


图 6 ΔABC 与圆心 O 的相对位置

- 1) 当三角形 ΔOAC 与有效圆形区域满足以下几何约束时

$$\begin{cases} |OA| \geq R \\ |OC| \geq R \\ h \leq R \end{cases} \begin{cases} |OA| \geq R \\ |OC| \geq R \\ \angle OAC \geq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \angle OCA \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

此时新三角形 ΔOAC 与有效接收圆形区域的重叠面积为：

$$S'_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} R^2 \alpha_{\angle COA}$$

2) 当三角形 ΔOAC 与有效圆形区域满足以下几何约束时

$$\begin{cases} |OA| \geq R \\ |OC| \geq R \\ h \leq R \\ \angle OAC \leq \frac{\pi}{2} \text{ 且 } \angle OCA \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

此时直线 AC 与圆 O 相较于 E 、 F 两点，如图 7 所示：

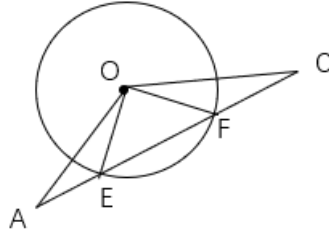


图 7 ΔOAC 与圆心 O 的相对位置

此时新三角形 ΔOAC 与有效接收圆形区域的重叠面积为：

$$S'_{\Delta OAC} = S_{\Delta OEF} + \frac{1}{2} R^2 \alpha_{\angle COF} + \frac{1}{2} R^2 \alpha_{\angle EOA}$$

3) 当三角形 ΔOAC 与有效圆形区域满足以下几何约束时

$$(|OA| - R)(|OC| - R) \leq 0$$

此时直线 AC 与圆 O 相交于 E 点，如图 8 所示：

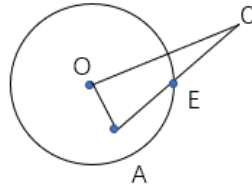


图 8 ΔOAC 与圆心 O 的相对位置

此时新三角形 ΔOAC 与有效接收圆形区域的重叠面积为：

$$S'_{\Delta OAC} = S_{\Delta AED} + \frac{1}{2} R^2 \alpha_{\angle EOC}$$

4) 当三角形 ΔOAC 与有效圆形区域满足以下几何约束时

$$\begin{cases} |OA| \leq R \\ |OC| \leq R \end{cases}$$

此时新三角形 ΔOAC 与有效接收圆形区域的重叠面积为:

$$S'_{\Delta OAC} = S_{\Delta OAC}$$

II. 当馈源舱有效接收信号区域的圆心位于投影三角形 ΔABC 的外部时, 且圆心 O 和点 C 位于直线 AB 同一侧时。

当 ΔABC 处于如下图 9 所示情况时, 此时三角形反射面板 i 投影在接收平面上与有效接收圆形区域所重叠的面积用 $S'_{\text{投}i}$, 并将其面积等效划分为以下三个部分, 分别是新三角形 ΔOAC 与有效接收圆形区域的重叠面积 $S'_{\Delta OAC}$ 、新三角形 ΔOBC 与有效接收圆形区域的重叠面积 $S'_{\Delta OBC}$ 、新三角形 ΔOAB 与有效接收圆形区域的重叠面积 $S'_{\Delta OAB}$, 此时, 它们之间的关系表达式应满足

$$S'_{\text{投}i} = S'_{\Delta OAC} - S'_{\Delta OBC} - S'_{\Delta OAB}$$

而 $S'_{\Delta OAC}$ 的求解分析方法同 I 中类似, 故不再阐述。

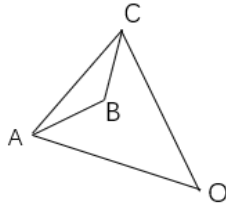


图 9 ΔABC 与圆心 O 的相对位置

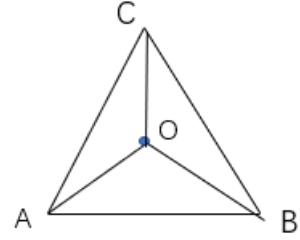


图 10 ΔABC 与圆心 O 的相对位置

III. 当馈源舱有效接收信号区域的圆心位于投影三角形 ΔABC 的内部时, 具体分析如下:

当 ΔABC 处于如上图 10 所示情况时, 此时三角形反射面板 i 投影在接收平面上与有效接收圆形区域所重叠的面积用 $S'_{\text{投}i}$, 并将其面积等效划分为以下三个部分, 分别是新三角形 ΔOAC 与有效接收圆形区域的重叠面积 $S'_{\Delta OAC}$ 、新三角形 ΔOBC 与有效接收圆形区域的重叠面积 $S'_{\Delta OBC}$ 、新三角形 ΔOAB 与有效接收圆形区域的重叠面积 $S'_{\Delta OAB}$, 此时, 它们之间的关系表达式应满足

$$S'_{\text{投}i} = S'_{\Delta OAC} + S'_{\Delta OBC} + S'_{\Delta OAB}$$

对于其中 $S'_{\Delta OAC}$ 的面积, 考虑到其形状特殊, 为以 O 点为圆心的扇形, 其面积易求。

综上所述, 以上是求解第 i 块三角形反射面板反射到馈源舱接收平面上的区域面积。由上文可知在工作区域三角形反射面板的个数的为 1295 个, 即此时 i 共有 1295 种取值。则工作区域内所有三角形反射面板反射到馈源舱有效区域的总

面积为

$$S'_{\text{投总}} = \sum_{i=1}^{1295} S'_{\text{投}i}$$

则在此情况下馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比为：

$$ratio = \frac{S'_{\text{投总}}}{S_{\text{投总}}} = \frac{\sum_{i=1}^{1295} S'_{\text{投}i}}{\sum_{i=1}^{1295} S_{\text{投}i}}$$

对于馈源舱有效区域内接收到的反射信号与基准反射球面的反射信号之比，其同样可以等效为，对于基准反射球面的反射信号，用工作区域内各块三角形反射板在馈源舱平面内投影面积之和来进行量化，而对于馈源舱有效区域收到的反射信号，将其简化为馈源舱有效区域内能够接收到三角形反射面板反射的电磁波的面积总和，进而用以上两者的面积来表示馈源舱的接收比，其两者面积均可由上文的步骤进行求解。

5.4.2 模型的求解

（一）问题二调节完的反射面

馈源舱有效区域收到的反射信号记为馈源舱有效区域内能够接收到三角形反射面板反射的电磁波的面积总和为 $1.1804 \times 10^3 \text{ m}^2$

工作区域内所有三角形反射面板在馈源舱所在平面的反射面积总和为 $6.6584 \times 10^4 \text{ m}^2$

故馈源舱有效区域接收到的反射信号与该反射面的反射信号之比 $ratio_1 = 1.77\%$

（二）基准反射球面

馈源舱有效区域收到的反射信号记为馈源舱有效区域内能够接收到三角形反射面板反射的电磁波的面积总和为 984.2410 m^2

工作区域内所有三角形反射面板在馈源舱所在平面的反射面积总和为 $6.6457 \times 10^4 \text{ m}^2$

故馈源舱有效区域接收到的反射信号与基准反射球面的反射信号之比 $ratio_2 = 1.48\%$

（三）提高的接收效果

$$\eta = \frac{ratio_1 - ratio_2}{ratio_2} = 19.59\%$$

5.4.3 问题三求解结果分析

无论是基准反射球面还是经过问题二调节的抛物面，它们的接受比结果都偏小。

在本题中，我们假设三角形反射面板为一个平面，而在实际中三角形反射面板为一个曲面。在考虑三角形反射面板为一个平面的情况下，三角形反射面板在馈源舱所在平面的投影为一个三角形。投影三角形的最大面积为 $105.3154 m^2$ ，投影三角形的最小面积为 $4.7172 m^2$ ，投影三角形的平均面积为 $51.3182 m^2$ ，而馈源舱的有效圆形区域面积为 πm^2 。故有一半以上投影三角形的面积是有效圆形区域面积的 10 倍以上。因此馈源舱对每一块三角形反射面板反射的电磁波的接收比都很小，即馈源舱对整个 $300 m$ 口径内的反射的电磁波的接受比很小。可以求得其理论最大接收比为 6.11%。所以，相对于理论最大接收比而言，问题二调节的抛物面型的反射面反射天体电磁波的接收效果较为合理。

六、模型的检验

6.1 问题一模型的检验

以抛物面顶点伸缩量为决策变量，反射面板调节因素为约束条件，从而建立关于理想抛物面的优化模型，我们通过改变 ΔL 的值来观察问题一中在过球心 C 的切平面中基准球弧和工作抛物线在 Z 轴方向上它们之间面积 W 的变化，具体的变化如图所示。观察下图 11，随着 ΔL 的值的改变，问题一中在 ΔL 变化过程中 W 的值先减小再增加，在 ΔL 为 $-0.4m$ 左右时， W 取到最小值，与模型一中 $\Delta L_0 = -0.3884m$ ，说明了我们模型的准确性。

最优值处的 ΔL 随着从 10% 到 -10% 的变化幅度，问题一中 W 变化幅度在 0.937% 以内，不超过 1%，这说明了求解模型模型的稳定性较高。

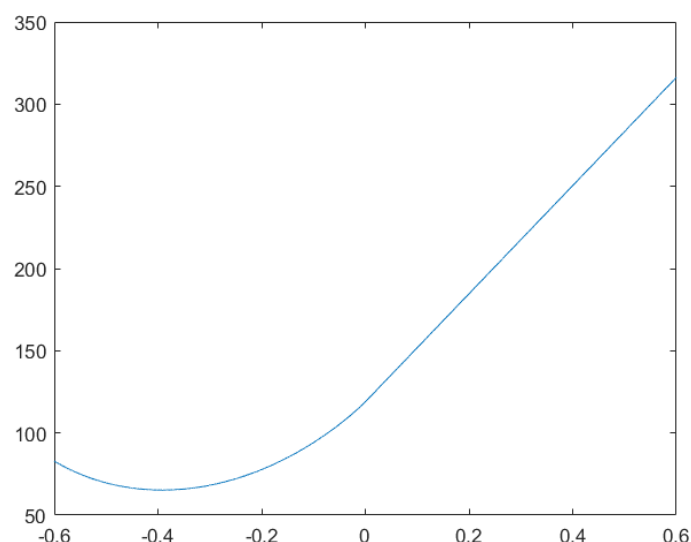


图 11 抛物线与基准圆弧所成曲面面积与抛物线顶点伸缩量的关系图

七、模型的评价与改进

7.1 模型的优点

- 1) 模型的建立是按照问题的解决的思路进行的, 首先分析和发现反射规律, 然后对现有的规律对理想抛物面方程进行确定, 再确定反射面 300 米口径内的主索节点的位置坐标的物理状态, 层次渐进易于理解;
- 2) 充分利用了 MATLAB 等软件进行算法求解, 所得数据合理;
- 3) 问题二的模型以第一问的模型为基础, 问题三的模型以第二问的模型为基础, 使得模型整体性更强、思路清晰;
- 4) 在问题一中, 对反射面板调节因素进行约束转化为在过球心 C 的切平面中基准球弧和工作抛物线在 Z 轴方向上它们之间面积最小的优化调整模型;
- 5) 在问题二中, 为了使工作抛物面尽量贴近该理想抛物面, 将其抽象为三维每一个工作反射面与该理想抛物面所围成的体积最小问题。

7.2 模型的缺点

- 1) 为了简化模型的求解, 本文中将忽略反射面板的变形情况, 可能对模型的求解带来一定的误差;
- 2) 问题三中假设反射面板为平面, 可能结果与实际相差较远;
- 3) 该模型未考虑各主索节点之间的相互影响。

7.3 模型的改进

- 1) 面板上任意点的位置受某个主索节点的位置变化的影响而改变, 实际调整中要考虑某一个主索节点对其他主索节点位置的改变;
- 2) 天眼反射面板对型面精度要求极高, 尽管成形原理属于“小刚度下成形, 大刚度下定形”, 相对于常规成形而言, 内应力和回弹很小, 但回弹或多或少总会存在, 只有通过对回弹误差^[6]进行补偿, 才能进一步提高精度;
- 3) 馈源舱内机构的运动会引起馈源舱重心的偏移, 可以考虑这个因素重新求出馈源舱所在平面的方程。

八、模型的推广

本文中通过对“FAST”主动反射面形状调节建立数学模型, 求解出反射面 300 口径内各促动器的伸缩量, 实现对主索网形态控制, 这可以使反射面尽量贴近理想抛物面, 进而使得馈舱源有效区域接收到的反射信号更多, 对能看见更遥远暗弱的天体有了极大的帮助, 把坐标提供给天眼, 它可以实现在较短时间内就能发现星体。且它发现重要特殊意义的天体的可能性可以增大。

参考文献

- [1]彭文涛. FAST 铝制背架结构选型及优化研究[D].哈尔滨工业大学,2009.
- [2]刘颖,戴景民,郎治国,等.旋转抛物面聚光器焦面能流分布的有限元分析[J].光学学报, 2007(10):1775-1778.
- [3]帅永,张晓峰,谈和平.抛物面式太阳能聚能系统聚光特性模拟[J]. 工程热物理学报, 2006(03):126-128.
- [4]王仲锋,杨凤宝.空间直角坐标转换大地坐标的直接解法[J]. 测绘工程, 2010(02):12-14+17.
- [5]赵乃刚, 邓景顺.粒子群优化算法综述[J].科技创新导报, 2015,26:216.
- [6]周贤宾,陈连峰,李东升.反射器夹层面板精密成形原理[J].北京航空航天大学学报,2004(04):296-300.

附录

由于本文模型所用到的全部代码太多，所以附录只包含了涉及核心思想的源代码，其余可见于支撑材料。

支撑材料清单：

MATLAB 程序文件	reflecting_surface_display.m%导入所有节点数据 reflection_panel_display.m%导入所有反射面板数据 actuator_display.m%导入所有促进器数据 fixed_step_search_method.m%定步长搜索法 ideal_paraboloid_1.m%问题一理想抛物面求解 ideal_paraboloid_2.m%以距离为优化目标求解最优伸缩量 ideal_paraboloid_2_area.m%根据面积求解最优伸缩量 receiving_ratio.m%求解馈源舱的接收比
表格	Result.xlsx%问题二的结果
MATLAB 数据文件	BestExpansionAmout.mat%最优伸缩量数据 dataActuator.mat%促进器数据 dataMainNode.mat%主索节点数据 newMainNode.mat%工作区域内主索节点的新坐标 panel_data.mat%所有反射面板数据 panel_use.mat%工作区域内反射面板数据 range.mat%理想抛物面顶点径向改变量的范围 vertex_data.mat%问题二理想抛物面的顶点坐标

附录一 问题一求解理想抛物面程序

文件名：ideal_paraboloid_1.m

```

clear,clc,close all
% 问题一的理想抛物面
R=300;% 基准球面半径
k=0.466;% 原焦距比
% 顶点径向改变量为 0 时，300 米口径内的理想抛物面及 500 米口径的基准球面
x_sphere=-250:1:250;y_sphere=-(300.^2-x_sphere.^2).^0.5;% 球面
x_paraboloid=-150:1:150;y_paraboloid=x_paraboloid.^2./(4.*k.*R)-R;% 理想抛物面
figure
plot(x_sphere,y_sphere,'r',x_paraboloid,y_paraboloid,'y');
temp_l=find(x_sphere==
150);temp_r=find(x_sphere==150);y_temp=y_sphere(temp_l:temp_r);
residual=y_paraboloid-y_temp;% 300 米口径内理想抛物面的高度与球面高度的残差
figure
plot(x_paraboloid,residual);% 残差图

```



```

delta_l=-0.6:0.0001:0.6;%顶点的径向改变量
distance1=sqrt(4.*(1-k).*R.*(k.*R-delta_l));% 球心 C 到理想抛物面 300 米口径内的最近
距离
distance2=sqrt(150.^2+(75.^2./(k.*R-delta_l)-R+delta_l).^2);% 球心 C 到理想抛物面 300
米口径的边界的距离
figure
plot(delta_l,distance1,'r',delta_l,distance2,'b');

% 找出符合要求的顶点的径向改变量
temp=[delta_l;distance1;distance2];
temp(:,temp(2,:)>R+0.6)=[];temp(:,temp(2,:)<R-0.6)=[];
temp(:,temp(3,:)>R+0.6)=[];temp(:,temp(3,:)<R-0.6)=[];
range=[min(temp(1,:)),max(temp(1,:))];% 顶点的径向改变量的范围
save range.mat temp
area=@env_area;
[best_delta_l,best_area]=fixed_step_search_method(area,range(1),range(2),0.0001);

% 故最优理想抛物面如下
function z=ideal_paraboloid(x,y)
delta_l=-0.3884;% 取顶点坐标的径向改变量为-0.3884;
z=(x.^2+y.^2)./(4.*0.466.*300-delta_l)+(300-delta_l);
end
% 同一过球心的竖直平面内的理想抛物线与基准圆弧之间的面积;(取 Z 轴方向的)
function s=env_area(delta_l)
x=-150:1:149;
R=300.4;k=0.466;
s=sum(abs(sqrt(R.^2-x.^2)+x.^2./(4.*(k.*R-delta_l)+(delta_l-R))));
end

```

附录二 问题二求解最优伸缩量程序

文件名: ideal_paraboloid_2_area.m

```

clear,clc,close all
% 该程序需要半个小时
% 问题二的理想抛物面及反射面的调节
% 取第一问的抛物线顶点处最优径向改变量-0.3884;
alpha=36.765./180.*pi;belta=78.169./180.*pi;% 天体方位角 alpha 及仰角 belta
vertex=-(300-(-0.3884)).*[cos(alpha).*cos(belta),sin(alpha).*cos(belta),sin(belta)];% 问题二
理想抛物线的顶点坐标
xlswrite('result.xlsx',{'X 坐标 (米)';'Y 坐标 (米)';'Z 坐标 (米)'};num2cell(vertex),'理
想抛物面顶点坐标');
save vertex_data.mat vertex

```

```

load dataMainNode.mat;% 导入主索节点坐标数据
alpha=36.765./180.*pi;belta=78.169./180.*pi;% 天体方位角 alpha 及仰角 belta
direction_vector=[cos(alpha).*cos(belta),sin(alpha).*cos(belta),sin(belta)];% 抛物面对称轴
的单位方向向量
dist_mainNode=sqrt(sum(mainNode.^2,2)-sum(mainNode.*direction_vector,2).^2);% 各主
索节点距抛物面对称轴的距离
newMainNode=mainNode(dist_mainNode<=150,:);% 在工作区域内的主索节点
num_newMainNode=table2array(data_mainNode(dist_mainNode<=150,1));% 在工作区域
内的主索节点编号
load panel_data.mat;% 导入反射面板数据
temp=[];% 临时变量,保存工作区域内的反射面板的索引
for i=1:size(reflection_panel_data,1)
    flag1=find(num_newMainNode==reflection_panel_data(i,1));
    flag2=find(num_newMainNode==reflection_panel_data(i,2));
    flag3=find(num_newMainNode==reflection_panel_data(i,3));
    if(flag1&flag2&flag3)
        temp=[temp,i];
    end
end
panel_data=reflection_panel_data(temp',:);% 工作区域内的反射面板
panel_use=panel_data;
save panel_use.mat panel_use;

% 粒子群算法求解工作区域内各主索节点的最优伸缩量
N=50;
D=size(newMainNode,1);% 工作区域内的主索节点数
T=200;
c1=1.5;
c2=1.5;
Wmax=0.8;
Wmin=0.6;
Xmax=0.6;
Xmin=-0.6;
Vmax=0.1;
Vmin=-0.1;
% 初始化种群个体
x=rand(N,D)*(Xmax-Xmin)+Xmin;
v=rand(N,D)*(Vmax-Vmin)+Vmin;
% 初始化个体最优位置 and 最优值
p=x;
pbest=ones(N,1);
for i=1:N
    pbest(i)=func(x(i,:),newMainNode,panel_data,num_newMainNode);
end

```

```

% 初始化全局最优位置 and 最优值
g=ones(1,D);
gbest=inf;
for i=1:N
    if(pbest(i)<gbest)
        g=p(i,:);
        gbest=pbest(i);
    end
end
gb=ones(1,T);
% 按公式依次迭代, 直至满足精度或者迭代次数
for i=1:T
    for j=1:N
        % 更新个体最优位置及最优值
        temp=func(x(j,:),newMainNode,panel_data,num_newMainNode);
        if(temp<pbest(j))
            p(j,:)=x(j,:);
            pbest(j)=temp;
        end
        % 更新全局最优位置及最优值
        if(pbest(j)<gbest)
            g=p(j,:);
            gbest=pbest(j);
        end
        % 计算动态惯性权重值
        w=Wmax-(Wmax-Wmin)*i/T;
        % 更新位置和速度
        v(j,:)=w*v(j,:)+c1*rand*(p(j,:)-x(j,:))+c2*rand*(g-x(j,:));
        x(j,:)=x(j,:)+v(j,:);
        % 边界条件处理
        for ii=1:D
            if((v(j,ii)>Vmax)||(v(j,ii)<Vmin))
                v(j,ii)=rand*(Vmax-Vmin)+Vmin;
            end
            if((x(j,ii)>Xmax)||(x(j,ii)<Xmin))
                x(j,ii)=rand*(Xmax-Xmin)+Xmin;
            end
        end
    end
    % 记录每代全局最优值
    gb(i)=gbest;
end
figure
plot(gb);
xlabel('迭代次数');

```

```

ylabel('适应度值');
title('体积目标函数进化曲线');

mainNodeR=sqrt(sum(newMainNode.^2,2));% 工作区域内主索节点基准态时的半径
mainNodeNew=newMainNode.*(mainNodeR-g')./mainNodeR;% 工作区域内主索节点的新坐标

%
old_new_mainNode=[{'x0','y0','z0','x1','y1','z1'};num2cell(newMainNode),num2cell(mainNodeNew)];
% xlswrite('text.xlsx',old_new_mainNode);

result_mainNode={num_newMainNode,mainNodeNew,g'};
result1=[{'节点编号','X坐标（米）','Y坐标（米）','Z坐标（米）'};cellstr(num_newMainNode),num2cell(mainNodeNew)];
result2=[{'对应主索节点编号','伸缩量（米）'};cellstr(num_newMainNode),num2cell(g')];
xlswrite('result.xlsx', result1,'调整后主索节点编号及坐标');
xlswrite('result.xlsx', result2,'促动器顶端伸缩量');
save newMainNode.mat result_mainNode
%scatter3(mainNodeNew(:,1),mainNodeNew(:,2),mainNodeNew(:,3));

% 反射面板与理想抛物面在对称轴方向包围的体积
function result=func(x,newMainNode,panel_data,num_newMainNode)
alpha=36.765./180.*pi;beta=78.169./180.*pi;% 天体方位角 alpha 及仰角 beta
mainNodeR=sqrt(sum(newMainNode.^2,2));% 各主索节点基准态时的半径
MainNode=newMainNode.*(mainNodeR-x')./mainNodeR;% 主索节点的新坐标
% 空间直角坐标系变换
% 变换后，工作区域内的主索节点的位置坐标计算如下
temp(:,3)=MainNode(:,1).*cos(alpha).*cos(beta)+MainNode(:,2).*sin(alpha).*cos(beta)+MainNode(:,3).*sin(beta);% 新竖坐标
temp(:,2)=MainNode(:,1).*cos(alpha).*sin(beta)+MainNode(:,2).*sin(alpha).*sin(beta)-MainNode(:,3).*cos(beta);% 新纵坐标
temp(:,1)=tan(alpha).*(temp(:,2).*sin(beta)+temp(:,3).*cos(beta))-MainNode(:,2)./cos(alpha);% 新横坐标
newGps=temp;% 主索节点新坐标
Volume=0;% 总共的体积
k=0.466;R=300;f=k.*R+0.3884;
for i=1:size(panel_data,1)
    A=newGps(num_newMainNode==panel_data(i,1),:);
    B=newGps(num_newMainNode==panel_data(i,2),:);
    C=newGps(num_newMainNode==panel_data(i,3),:);
    if(A(1)==B(1))
        theta=pi./2;

```

```

else
    theta=atan((B(2)-A(2))./(B(1)-A(1)));
end
A(1)=A(1).*cos(theta)-A(2).*sin(theta);B(1)=B(1).*cos(theta)-
B(2).*sin(theta);temp=C(1).*cos(theta)-C(2).*sin(theta);
A(2)=0;B(2)=0;C(2)=C(1).*sin(theta)+C(2).*cos(theta);C(1)=temp;
x1=A(1);y1=A(2);z1=A(3);x2=B(1);y2=B(2);z2=B(3);x3=C(1);y3=C(2);z3=C(3);
t=((z1-z3).*(y2-y3)-(z2-z3).*(y1-y3))./((x1-x3).*(y2-y3)-(x2-x3).*(y1-y3));
m=((z1-z3).*(x2-x3)-(z2-z3).*(x1-x3))./((y1-y3).*(x2-x3)-(y2-y3).*(x1-x3));
n=-t.*x1-m.*y1+z1;
v=0:C(2)/100:C(2);
uu=(C(1)-B(1))./C(2).*v+B(1);ul=(C(1)-A(1))./C(2).*v+A(1);du=(uu-
ul)./100;dd=0:1:100;
u=ul+du.*dd';
s=sum(sum(abs((t.*u+m.*v+n-(u.^2+v.^2))./(4.*f)+f+(1-k).*R).^2.*du))).*(C(2)./100);
Volume=Volume+s;
end
result=Volume;
end

```

附录三 问题三求解馈源舱接收比程序

文件名: receiving_ratio.m

```

clear,clc,close all

% 求解 300 米口径内反射面板的接收比
load newMainNode.mat;% 导入问题二中得出的工作区域内主索节点的编号
num_MainNode=result_mainNode{1};% 工作区域的主索节点的编号
load BestExpansionAmout.mat
MainNode=mainNodeNew;

% 求解 300 米口径内基准球面的接收比
load dataMainNode.mat;% 导入所有主索节点数据
num_all=table2array(data_mainNode(:,1));% 所有主索节点编号
MainNode=mainNode(ismember(num_all,num_MainNode),:);% 300 米口径内基准态下, 各
主索节点坐标

% 空间直角坐标系变换为 OX`Y`Z`
k=0.466;R=300;% 焦径比及基准球面半径
alpha=36.765./180.*pi;beta=78.169./180.*pi;% 天体方位角 alpha 及仰角 beta
% 主索节点新坐标 mainNod
mainNod(:,3)=MainNode(:,1).*cos(alpha).*cos(beta)+MainNode(:,2).*sin(alpha).*cos(beta)
+MainNode(:,3).*sin(beta);
mainNod(:,2)=MainNode(:,1).*cos(alpha).*sin(beta)+MainNode(:,2).*sin(alpha).*sin(beta)-
MainNode(:,3).*cos(beta);

```

```

    mainNod(:,1)=tan(alpha).*(mainNod(:,2).*sin(belta)+mainNod(:,3).*cos(belta))-
MainNode(:,2)./cos(alpha);
    load panel_use.mat;% 导入工作区域内各反射面板所对应的三个主索节点的编号
    num_panel=panel_use;% 每组主索节点编号
    % 所有工作区域内反射面板反射的电磁波在馈源舱所在平面的投影面积之和 S_all
    S_all=0;
    % 从工作区域内的反射面板反射且被馈源舱接收的电磁波在馈源舱所在平面的投影面
    积之和 S_receive
    S_receive=0;
    for i=1:size(num_panel,1)
        % 工作区域内第 i 个反射面板的三个主索节点(x1,y1,z1),(x2,y2,z2),(x3,y3,z3)

x1=mainNod(num_MainNode==num_panel(i,1),1);y1=mainNod(num_MainNode==num_panel(i,
1),2);z1=mainNod(num_MainNode==num_panel(i,1),3);

x2=mainNod(num_MainNode==num_panel(i,2),1);y2=mainNod(num_MainNode==num_panel(i,
2),2);z2=mainNod(num_MainNode==num_panel(i,2),3);

x3=mainNod(num_MainNode==num_panel(i,3),1);y3=mainNod(num_MainNode==num_panel(i,
3),2);z3=mainNod(num_MainNode==num_panel(i,3),3);
        % 第 i 个反射面板所在平面的法向量
        t1=(y2-y1).*(z3-z1)-(z2-z1).*(y3-y1);t2=(z2-z1).*(x3-x1)-(x2-x1).*(z3-z1);t3=(x2-
x1).*(y3-y1)-(y2-y1).*(x3-x1);
        % 第 i 个反射面板所在平面的向上的单位法向量

n1=abs(t1)./sqrt(sum([t1,t2,t3].^2));n2=abs(t2)./sqrt(sum([t1,t2,t3].^2));n3=abs(t3)./sqrt(sum([t1,t2
,t3].^2));
        % 电磁波经第 i 个反射面板反射后的方向向量
        L1=2.*n1.*n3;L2=2.*n2.*n3;L3=2.*n3.^2-1;
        % 三个主索节点沿电磁波出射方向在馈源舱所在平面的三个投影点 A,B,C;
        Ax=x1+L1./L3.*((k-1).*R-z1);Ay=y1+L2./L3.*((k-1).*R-z1);
        Bx=x2+L1./L3.*((k-1).*R-z2);By=y2+L2./L3.*((k-1).*R-z2);
        Cx=x3+L1./L3.*((k-1).*R-z3);Cy=y3+L2./L3.*((k-1).*R-z3);
        S_all=S_all+0.5.*abs(Ax.*By+Bx.*Cy+Cx.*Ay-By.*Cx-Ax.*Cy-Ay.*Bx);
        OA=sqrt(sum([Ax,Ay].^2));OB=sqrt(sum([Bx,By].^2));OC=sqrt(sum([Cx,Cy].^2));
        angle_AOB=acos((Ax.*Bx+Ay.*By)./(OA.*OB));
        angle_AOC=acos((Ax.*Cx+Ay.*Cy)./(OA.*OC));
        angle_BOC=acos((Cx.*Bx+Cy.*By)./(OC.*OB));
        angle=[angle_AOB,angle_AOC,angle_BOC];
        S_OAC=0.5.*abs(Ax.*Cy-Cx.*Ay);
        S_OBC=0.5.*abs(Bx.*Cy-Cx.*By);
        S_OAB=0.5.*abs(Ax.*By-Bx.*Ay);
        S_judge=[S_OAB-S_OAC-S_OBC,S_OAC-S_OBC-S_OAB,S_OBC-S_OAC-S_OAB];
        angle_judge=sum(angle);
        if(angle_judge-2*pi<10^-10)

```

```

S=overlapping_area(Ax,Ay,Bx,By)+overlapping_area(Ax,Ay,Cx,Cy)+overlapping_area(Bx,By,Cx,Cy);
else
    m_angle=find(angle==max(angle));
    if(m_angle==1)
        if(S_judge(m_angle)<0)
            S=-
overlapping_area(Ax,Ay,Bx,By)+overlapping_area(Ax,Ay,Cx,Cy)+overlapping_area(Bx,By,Cx,Cy);
        else
            S=overlapping_area(Ax,Ay,Bx,By)-overlapping_area(Ax,Ay,Cx,Cy)-
overlapping_area(Bx,By,Cx,Cy);
        end
    elseif(m_angle==2)
        if(S_judge(m_angle)<0)
            S=overlapping_area(Ax,Ay,Bx,By)-
overlapping_area(Ax,Ay,Cx,Cy)+overlapping_area(Bx,By,Cx,Cy);
        else
            S=-overlapping_area(Ax,Ay,Bx,By)+overlapping_area(Ax,Ay,Cx,Cy)-
overlapping_area(Bx,By,Cx,Cy);
        end
    else
        if(S_judge(m_angle)<0)
            S=overlapping_area(Ax,Ay,Bx,By)+overlapping_area(Ax,Ay,Cx,Cy)-
overlapping_area(Bx,By,Cx,Cy);
        else
            S=-overlapping_area(Ax,Ay,Bx,By)-
overlapping_area(Ax,Ay,Cx,Cy)+overlapping_area(Bx,By,Cx,Cy);
        end
    end
end
end
S_receive=S_receive+S;
end
disp('300 米口径内反射面的接收比');
% disp('300 米口径内基准球面的接收比');
ratio=S_receive/S_all;
disp(ratio);

```

```

function S=overlapping_area(x1,y1,x3,y3)
OA=sqrt(sum([x1,y1].^2));OC=sqrt(sum([x3,y3].^2));AC=sqrt(sum([x1-x3,y1-y3].^2));
h=abs(y1.*x3-x1.*y3)./sqrt(sum([y3-y1,x3-x1].^2));
angle_OAC=acos((OA.^2-x1.*x3-y1.*y3)./(OA.*AC));
angle_OCA=acos((OC.^2-x1.*x3-y1.*y3)./(OC.*AC));
if(OA>=1&&OC>=1&&h<=1&&angle_OAC<pi/2&&angle_OCA<pi/2)
    angle_AOE=acos((OA.^2+1-(sqrt(OA.^2-h.^2)-sqrt(1-h.^2)).^2)./(2.*OA));

```

```

angle_COF=acos((OC.^2+1-(sqrt(OC.^2-h.^2)-sqrt(1-h.^2)).^2)./(2.*OC));
S=h.*sqrt(1-h.^2)+0.5.*(angle_AOE+angle_COF);
elseif((OA-1)*(OC-1)<0)
    if(OC>1)
        angle_COE=acos((OC.^2+1-(sqrt(OC.^2-h.^2)-sqrt(1-h.^2)).^2)./(2.*OC));
        AE=AC-sqrt(OC.^2-h.^2)+sqrt(1-h.^2);
        S=0.5.*h.*AE+0.5.*angle_COE;
    else
        angle_AOE=acos((OA.^2+1-(sqrt(OA.^2-h.^2)-sqrt(1-h.^2)).^2)./(2.*OA));
        CE=AC-sqrt(OA.^2-h.^2)+sqrt(1-h.^2);
        S=0.5.*h.*CE+0.5.*angle_AOE;
    end
elseif(OA<=1&&OC<=1)
    S=0.5.*abs(x1.*y3-x3.*y1);
else
    S=0.5.*acos((x1.*x3+y1.*y3)./(OA.*OC));
end
end

```