

**Uniwersytet Warszawski**

---

Wydział Fizyki

ZAKŁAD OPTYKI INFORMACYJNEJ



**ROZPRAWA DOKTORSKA**

**MARCIN STOLAREK**

**ELEMENTY DYFRAKCYJNE, REFRAKCYJNE  
I ABSORPCYJNE OPARTE NA PODFALOWYCH  
PERIODYCZNYCH STRUKTURACH  
METALICZNYCH**

PROMOTOR:  
dr hab. Rafał Kotyński

Warszawa 2014





## OŚWIADCZENIE AUTORA PRACY

OŚWIADCZAM, ŚWIADOMY ODPOWIEDZIALNOŚCI KARNEJ ZA POŚWIADCZENIE NIEPRAWDY, ŻE NINIEJSZĄ PRACĘ DYPLOMOWĄ WYKONAŁEM OSOBIŚCIE I SAMODZIELNIE, I NIE KORZYSTAŁEM ZE ŹRÓDEŁ INNYCH NIŻ WYMIESZCZONE W PRACY.

.....

PODPIS

**University of Warsaw**

---

Faculty of Physics

INFORMATION OPTICS DEPARTMENT



**PHD IN PHYSICS**

**MARCIN STOLAREK**

**DIFFRACTIVE, REFRACTIVE AND ABSORPTIVE  
OPTICAL ELEMENTS BASED ON PERIODIC  
SUB-WAVELENGTH METALLIC STRUCTURES**

SUPERVISOR:

Rafał Kotyński Ph.D

Warsaw 2014



Serdecznie dziękuję ...

# **Spis treści**

<b>1. Wstęp.....</b>	1
1.1. Wprowadzenie .....	1
1.2. Cele i tezy pracy .....	3
1.3. Podział pracy .....	4
<b>2. Modelowanie własności podfalowych struktur fotonicznych.....</b>	7
2.1. Metody modelowania podfalowych struktur fotonicznych .....	7
2.1.1. Metoda macierzy przejścia (TMM) .....	10
2.1.2. Metoda różnic skończonych (FDTD).....	12
2.1.3. FDTD w jednym wymiarze.....	12
2.1.4. Warunki brzegowe.....	15
2.1.5. Nieodbijające warunki brzegowe (PML) .....	16
2.1.6. Źródła pola elektromagnetycznego w symulacjach metodą FDTD .....	18
2.1.7. Metoda FDTD dla układów o symetrii walcowej (BOR- FDTD).....	19
2.2. Układy liniowe niezmiennicze ze względu na przesunięcia .....	21
2.3. Modele dyspersji materiałów .....	24
2.3.1. Model Lorenza-Drudego .....	24
2.4. Przybliżenie ośrodka efektywnego.....	26
<b>3. Kształtowanie fali elektromagnetycznej w zakresie THz .....</b>	29
3.0.1. Własności wykorzystywanych materiałów .....	30

3.1.	Antena THz - siatka dyfrakcyjna wraz z falowodem .....	32
3.1.1.	Rezonansowa transmisja przez grube siatki.....	32
3.1.2.	Antena dla promieniowania THz o działaniu opartym na wzbudzeniu modu falowodowego .....	35
3.2.	Transmisja jednokierunkowa .....	39
3.3.	Soczewka dyfrakcyjna z transmisją jednokierunkową .....	47
<b>4.</b>	<b>Absorber y o budowie warstwowej.....</b>	<b>51</b>
4.1.	Wyprowadzenie UPML .....	51
4.2.	PML ze struktury warstwowej [33] .....	56
<b>5.</b>	<b>Bezdyfrakcyjna propagacja światła w wielowarstwach metaliczno- dielektrycznych .....</b>	<b>65</b>
5.1.	Właściwości dyspersyjne materiałów optycznych w zakresie wi- działnym .....	66
5.2.	Wielowarstwy z bezdyfrakcyjną propagacją światła .....	70
5.3.	Nadrozdzielczy pryzmat .....	72
5.4.	Analiza gładkości powierzchni.....	74
<b>6.</b>	<b>Podsumowanie .....</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>85</b>	
<b>Spis ilustracji .....</b>	<b>92</b>	

# Rozdział 1

## Wstęp

### 1.1. Wprowadzenie

Optyka jest częścią fizyki, która po szkolnym kursie kojarzy się większości z wyznaczaniem biegu promieni świetlnych zgodnie z zasadami optyki geometrycznej. Podstawowe elementy, z których budowane są zadania do rozwiązania przez uczniów to soczewki i pryzmaty, tworzące niezbyt skomplikowany, w porównaniu z innymi, dział fizyki. Powstaje wrażenie, że w nauce o świetle nie ma miejsca na niespodzianki, nowe odkrycia czy nawet zaskakujące wykorzystanie znanych praw. Zgłębianie zagadnień związanych z elektromagnetyzmem, prowadzi nas jednak w świat, w którym dokonuje się wielu zaskakujących odkryć poszerzających nasze zrozumienie i umożliwiających różnorakie zastosowania.

Skupiąc się na ostatnich trzydziestu latach historii optyki dostrzec możemy wiele kroków milowych dokonanych przez fizyków na całym świecie. Z pewnością jednym z najbardziej istotnych był opis kryształów fotonicznych, w których struktura geometryczna narzuca ograniczenia na ruch fotonów na zasadach analogicznych do wpływu jaki wywiera sieć krystaliczna w ciałach stałych na poruszające się w nich elektrony. Chociaż tego rodzaju struktury były badane przez ludzi jeszcze w XIX wieku, to sam termin jak i nowatorskie podejście znajdujące głęboką analogię do fizyki półprzewodników pojawiły się dopiero po kluczowych pracach Eli Yablonovitscha [62] i Sajeeva Johna [15]. W szczególności przytoczeni

autorzy zauważyli możliwość występowania fotonicznej przerwy wzbronionej.

Znaczący wpływ na postrzeganie elektromagnetyzmu miało wprowadzenie „optyki transformacyjnej”, której podwaliny stworzyli Ward i Pendry [60]. Zaproponowane przez nich podejście do równań Maxwella polegające na równoważnym potraktowaniu transformacji przestrzeni i przenikalności elektrycznej i magnetycznej jest analogiczne do zakrzywienia przestrzeni przez grawitację w ogólnej teorii względności. Najbardziej spektakularnym przewidywaniem teoretycznym, opartym na optyce transformacyjnej, które zostało również potwierdzone w eksperymentach jest płaszczyznie niewidzialności [44].

Jednym z najbardziej podstawowych zastosowań optyki przez stulecia było obrazowanie, czyli tworzenie obrazu rzeczywistego obiektu w innym miejscu w przestrzeni niż znajduje się obiekt. Zastosowanie znajdują tu zazwyczaj soczewki, nieodłącznym w dziejach ludzkości elementem optycznym wykorzystującym naturalną soczewkę, do obrazowania właśnie, jest ludzkie oko. Ewentualne wady ludzkiej soczewki mogą być korygowane przy pomocy dodatkowych soczewek w postaci okularów czy szkieł kontaktowych. Zapewne z tego względu wielu moich znajomych w trakcie studiów, gdy mówiłem, że zajmuję się optyką kojarzyło mnie z kimś zajmującym się okularami.

Tradycyjne soczewki posiadają jednak znaczące ograniczenie (oczywiście nieistotne w kontekście konstrukcji okularów do korekcji widzenia). Przy ich pomocy nie jest możliwe skupianie światła w obszarach znacznie mniejszych od połowy długości fali. Pierwsza propozycja teoretyczna stworzenia idealnej soczewki została podana przez Pendry'ego [35], a oparta była na wykorzystaniu materiałów o ujemnej przenikalności elektrycznej, których własności teoretycznie analizował już w latach sześćdziesiątych XX wieku Wiesiełago [59]. Dalsze prace dotyczące supersoczewek czy hipersoczewek [25] znacznie poszerzyły potencjalne zastosowania światła widzialnego w obszarach takich jak obrazowanie czy litografia wysokorozdzielcza wykorzystująca światło widzialne. Obrazowaniu nadrozdzielczemu poświęcony jest rozdział 5.

Innym odkryciem dla którego kluczowe znaczenia ma występowanie powierzchniowych plazmonów polarytonów jest nadzwyczajna transmisja fal elektro-magnetycznych przez szczeliny o rozmiarach podfalowych. Analiza tego

zjawiska została przedstawiona w 1998 przez Ebbesena i innych [10, 9]. Prace te stanowią podstawę dla analizowanych w rozdziale 3 niniejszej rozprawy podfałowych siatek dyfrakcyjnych wykazujących transmisję asymetryczną.

Poniższa praca jest kolejnym, małym wkładem, czynionym przez tysiące fizyków na całym świecie służącym pogłębienu wiedzy o świecie, w szczególności o zjawiskach optycznych i umożliwieniu jej zastosowania.

## 1.2. Cele i tezy pracy

Głównymi zadaniami realizowanymi przez autora było wykorzystanie metod obliczeniowych w celu projektowania i optymalizacji struktury podfałowych do kształtuowania fal elektromagnetycznych. Rozważania dotyczyły zarówno zakresu widzialnego i dalekiej podczerwieni, aż po symulacje dotyczące fal E-M o częstotliwościach terahercowych. W wyniku przeprowadzonych prac sformułowane zostały następujące tezy, dotyczące zarówno aspektów teoretycznych jak i posiadających kontekst eksperymentalny:

- Podwójne siatki metalowe, jako układy liniowe, zgodne z twierdzeniem o wzajemności Lorenza nie mogą posłużyć do konstrukcji izolatorów optycznych. Asymetria w kierunku transmisji w odpowiednio zaprojektowanych strukturach DMG osiągana jest w -1 i +1 rzędzie dyfrakcyjnym, dzięki czemu omawiane struktury mogą zostać wykorzystane w geometrii cylindrycznej do konstrukcji soczewek dyfrakcyjnych.
- Możliwe jest wykorzystanie metalowych siatek dyfrakcyjnych w celu budowy wąskopasmowych, efektywnych anten promieniowania THz opartego na tranzystorach polowych realizowanych w podkładzie z półprzewodników.
- Możliwa jest eksperymentalna realizacja metamateriału absorpcyjnego o właściwościach podobnych do PML dla długości fali z zakresu podczerwieni. Tego typu absorberby choć złożone z warstw o rozmiarach podfałowych, same osiągają jednak grubości zbliżone do długości fali lub większe

gdy wymagane jest osiągnięcie niskiego współczynnika odbicia dla padania pod kątami bliskimi  $90^\circ$ .

- Realizacja metamateriałów charakteryzujących się propagacją światła nie podlegającą ograniczeniu dyfrakcyjnemu opartych o wielowarstwy metaliczno-dielektryczne wymaga możliwości bardzo gładkiego napylania warstw. Chropowatości charakteryzujące się  $RMS > 1 \text{ nm}$  mogą uniemożliwić praktyczne wykorzystanie takich struktur, szczególnie w przypadku stosów zawierających znaczną liczbę (ok 10) warstw.

### 1.3. Podział pracy

Poniższa rozprawa doktorska składa się ze wstęp, pięciu rozdziałów będących przedmiotem rozprawy, oraz szóstego rozdziału stanowiącego podsumowanie pracy. Wstęp zawiera niezbędne elementy wprowadzające do tematyki kształtuowania fal elektromagnetycznych, oraz zawiera tezy rozprawy doktorskiej. Rozdział drugi stanowi wprowadzenie literaturowe do tematyki. Opisane w nim zostały stosowane w symulacjach metody numeryczne, w szczególności dokładnie metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (ang. FDTD finite-difference time-domain). Rozdział zawiera również niezbędne informacje na temat układów liniowych niezmienniczych ze względu na przesunięcia, wraz z elementami Optyki Fourierowskiej. Wprowadzenie zawiera również zwięzły wstęp do przybliżenia ośrodku efektywnego stosowanego dla wielowarstw dyskutowanych w rozdziale czwartym i piątym.

Rozdział trzeci poświęcony jest projektowaniu układów opartych na metalach i półprzewodnikach, przeznaczonych dla zakresu terahercowego. Rozdział traktuje na temat możliwości wykorzystania metalowych siatek dyfrakcyjnych w roli anten promieniowania THz. Wskazane zostały możliwości kierowania promieniowaniem E-M, oraz transmisji selektywnej - rezonansowej. Zachodzące zjawiska zostały przedstawione w sposób jakościowy, w oparciu o współczesną literaturę przedmiotu. Dokładny opis ilościowy oparty jest o autorskie obliczenia autora pracy, pozwalające na dokładne określenie granic stosownalności przybliżeń teoretycznych w zakresie modelowania własności materiałów jak i samych siatek

dyfrakcyjnych. W dalszej części rozdziału przedstawione zostały struktury określone w literaturze mianem podwójnych siatek metalowych. Opisany został wpływ odpowiednich parametrów geometrycznych DMG na współczynniki transmisji. Przedstawione zostały możliwości uzyskania transmisji asymetrycznej, wraz z zaprzeczeniem funkcjonowania omawianych układów w charakterze diody optycznej. Zakończenie rozdziału stanowi omówienie możliwości wykorzystania DMG w geometrii cylindrycznej jako jednokierunkowej soczewki promieniowania THz.

Rozdziały czwarty i piąty poświęcone są metamateriałom opartym na strukturach warstwowych. W rozdziale czwartym wyprowadzony zostaje w oparciu o zasady optyki transformacyjnej nieodbijający ośrodek pochłaniający promieniowanie E-M, w obliczeniach numerycznych określany jako PML (od ang. perfectly matched layer). Omówiona zostaje możliwość realizacji metamateriału absorpcyjnego o charakterystyce PML przy pomocy wielowarstwy, w granicy homogenizacji opisywanej efektywnymi tensorami przenikalności elektrycznej i magnetycznej odpowiadającymi wybranemu PML. Dyskusji poddana zostaje możliwość realizacji metamateriału przy pomocy substancji występujących w przyrodzie, nie posiadających zysku optycznego oraz własności magnetycznych w zakresach światła widzialnego i podczerwieni. Ostatecznie przedstawione są wyniki eksperymentów numerycznych dla metamateriału o właściwościach podobnych do PML składającego się z rzeczywistych substancji.

W kolejnym rozdziale omówione zostały wielowarstwy metaliczno-dielektryczne umożliwiające propagację światła niepodlegającą klasycznemu ograniczeniu dyfrakcyjnemu. W pierwszych częściach rozdziału czytelnik może zapoznać się ze współczesnym stanem wiedzy w dziedzinie obrazowania podfalowego. W dalszej części rozdziału, w oparciu o wyniki obliczeniowe autora pracy, oraz informacje literaturowe omówione zostały możliwości budowy bardziej skomplikowanych elementów optycznych pozwalających na uzyskanie podfalonej koncentracji światła, oraz na realizację operacji geometrycznych rzutowania, obrotu na podfalconych rozkładach pola elektromagnetycznego.

Ostatni rozdział stanowi podsumowanie rozprawy. Wskazane w nim są kluczowe wnioski, podana zostaje argumentacja tez rozprawy, wraz z odniesieniem do treści pracy.



## Rozdział 2

# Modelowanie własności podfaliowych struktur fotonicznych

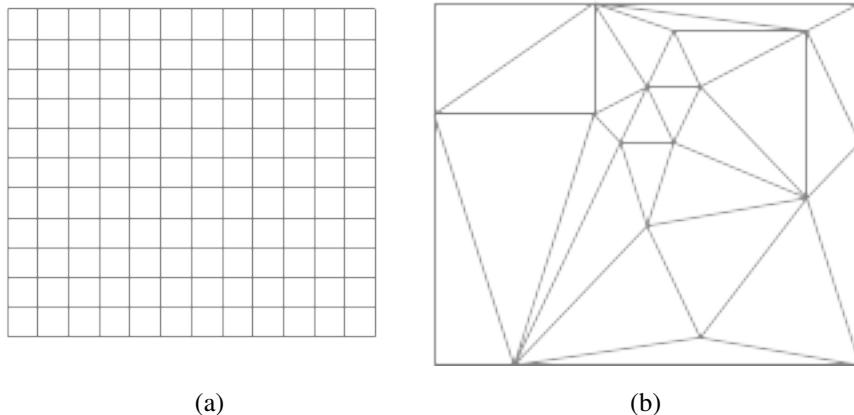
### 2.1. Metody modelowania podfaliowych struktur fotonicznych

Modelowanie zjawisk elektromagnetycznych realizowane jest poprzez rozwiązywanie równań Maxwella dla oceny interakcji fal E-M z obiektem fizycznym i otoczeniem. Wiele realnych problemów elektromagnetycznych nie jest rozwiązywalnych na drodze analitycznej, ze względu na nieregularności geometryczne spotykane w strukturach czy trudne do analitycznego opisu właściwości elektromagnetyczne wykorzystywanych materiałów.

Jednym ze sposobów na rozwiązywanie problemów elektromagnetycznych jest dyskretyzacja przestrzenna interesującego nas obszaru i rozwiązanie równań Maxwella dla każdego punktu dyskretyzacji<sup>1</sup>. Możemy wyróżnić dwa zasadnicze sposoby wprowadzenia siatki dyskretyzacji:

---

<sup>1</sup>Podejście to może wymagać znaczającej mocy obliczeniowej, oraz pamięci operacyjnej wykorzystywanych komputerów. Szczególnie w symulacjach trójwymiarowych w których dwukrotne zwiększenie rozdzielczości powoduje ośmiokrotny wzrost wymaganej pamięci RAM.



Rysunek 2.1: Porównanie siatek dyskretyzacji dla metody (a) różnic skończonych (ang. finite-difference), (b) elementu skończonego (ang. finite-element, FEM)

- Metodę różnic skończonych, w której kolejne punkty obliczeniowe rozłożone są na ortogonalnej siatce równo oddalonych od siebie punktów. Ten sposób podziału obszaru obliczeniowego wiąże się z trudnościami w odniesieniu nie prostokątnych kształtów geometrycznych, oraz niedokładnym odwzorowaniem obiektów, których rozmiary nie pasują do siatki dyskretyzacji. Tego typu siatkę przedstawia rysunek 2.1a.
- Metodę elementów skończonych. Przykładową siatkę dyskretyzacji przedstawia rysunek 2.1b. W przypadku metod FEM (ang finite-element method) samo tworzenie odpowiedniej dyskretyzacji na podstawie definicji geometrii lub zdjęcia struktury może być zagadnieniem wymagającym obliczeniowo. Właściwy dobór siatki dyskretyzacji jest szczególnie ważny ze względu na większe (w porównaniu do siatki regularnej) możliwości występowania artefaktów numerycznych.
- Metody w których obliczenia nie są prowadzone na dyskretnej siatce. Jak omówiona w rozdziale 2.1.1 metoda macierzy przejścia.

Rozwiążując równania Maxwella, wprost poszukujemy wartości składowych pól  $E$  i  $H$  dla kolejnych chwil czasu. Tego typu metody określane są jako działające w dziedzinie czasu. Powszechnie wykorzystywaną metodą tego typu jest

metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu opisana szeroko w podrozdziałach 2.1.2 - 2.1.7. Największą zaletą takiego podejścia jest możliwość zadania dowolnych prądów  $J(\vec{x}, t)$ , przez co sama symulacja staje się sensu stricte eksperymentem numerycznym. Metody tego typu są jednak bardzo wymagające obliczeniowo, w szczególności dla symulacji trójwymiarowych dwukrotne zwiększenie gęstości siatki powoduje szesnastokrotne wydłużenie obliczeń.

Wykorzystywane metody obliczeniowe można również podzielić na rozwiązuające równania Maxwella z czasem, jak np. metoda FDTD, oraz metody w których numerycznemu rozwiązaniu podlega problem analitycznie uproszczony. Przykładem takiej metody jest Beam Propagation Method (BPM), w której numerycznemu rozwiązaniu podlega przyosiowe równanie Helmholtza w postaci:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_0^2) \Psi = 0, \quad (2.1)$$

w którym  $\Psi$  jest jedynie funkcją położenia powstałą w wyniku założenia rozwiązań pola E-M w postaci skalarnej  $E(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x}) \cdot \exp(-j\omega t)$ . W dalszej części wyprowadzenia zakładamy, że zależność przestrzenna rozwiązania ma również postać funkcji harmonicznej:

$$\Psi(\vec{x}) = A(x_1, x_2) \exp\{jk_0\nu x_2\}, \quad (2.2)$$

gdzie funkcja  $A$  jest słabo zmienna względem  $x_2$ . Podane założenie, o wolno zmiennej obwiedni amplitudy, prowadzi do ostatecznego równania rozwiązywanego numerycznie w metodzie BPM:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (n^2 - \nu^2) \right\} A(\vec{x}) = \pm 2jk_0\nu \frac{\partial A(\vec{x})}{\partial x_1}. \quad (2.3)$$

W metodzie BPM możliwe jest rozwiązanie powyższego równania zarówno w dziedzinie przestrzennej - w kolejnych iteracjach obliczana jest sąsiednia warstwa rozkładu pola w kierunku propagacji lub w dziedzinie częstotliwości - za pomocą dyskretnej transformaty Fouriera. Wprowadzone przybliżenia, w stosunku do bezpośredniego rozwiązywania równań Maxwella, zmniejszają złożoność obliczeniową metody BPM w porównaniu z bardziej rygorystycznymi algorytmami, prowadzą jednocześnie do ograniczeń takich jak brak możliwości symulacji struktur z dużą zmiennością geometryczną w kierunku propagacji, konieczność itera-

Rysunek 2.2: Ilustracja podstawowego elementu w symulacjach metodą TMM, wraz z ilustracją amplitud z równania (2.4). Opisywanym elementem może być warstwa, granica warstw lub struktura warstwowa.



cyjnej implementacji odbić, czy trudności z symulacjami w których fala E-M propaguje się pod dużymi kątami względem osi układu optycznego.

### 2.1.1. Metoda macierzy przejścia (TMM)

Metoda macierzy przejścia (ang. transfer matrix method - TMM) jest używana w optyce do analizy propagacji fal elektromagnetycznych przez ośrodkie warstwowe. Podobne metody w odniesieniu do ośrodków warstwowych wykorzystywane są w mechanice kwantowej, akustyce czy sejsmologii. Metoda macierzy przejścia może być wykorzystywana do wyznaczania współczynników transmisji i odbicia.

Macierz przejścia dowolnego liniowego układu optycznego wiąże ze sobą amplitudy pól padających i wychodzących z układu lub jego fragmentu [28, 56]:

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_r \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} U_t \\ U_b \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

gdzie  $M$  jest macierzą przejścia warstwowego układu,  $U$  jest dowolną wybraną składową pola elektrycznego lub magnetycznego, odpowiednio  $U_i$  - padającą,  $U_r$  - odbitą,  $U_t$  - przechodzącą przez układ, oraz  $U_b$  padającą z przeciwej strony.  
<sup>2</sup> Graficznie sytuację opisywaną powyższym równaniem przedstawia schemat na rysunku 2.2.

<sup>2</sup>Metodę macierzy przejścia można również zastosować do analizy pola padającego w postaci dwuwymiarowego rozkładu. W takim przypadku  $U_x$  są wektorami a  $M$  tensorem trzeciego rzędu.

W przypadku analizy układu złożonego z wielu warstw, oznaczenia ze wzoru (2.4), możemy poprzez indeks liczbowy przypisać osobno do każdej z macierzy  $M_i$ :

$$\begin{bmatrix} U_i^1 \\ U_r^1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} U_t^1 \\ U_b^1 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} U_i^2 \\ U_r^2 \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} U_t^2 \\ U_b^2 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

dodając kolejne warstwy np. po lewej stronie od warstwy z rysunku 2.2. Wtedy  $U_i^1$  i  $U_r^1$  obliczone według wzoru 2.5 dla kolejnej warstwy mają znacznie odpowiednio  $U_t^2$  i  $U_b^2$ . Podstawiając to do wzoru 2.6 otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} U_i^2 \\ U_r^2 \end{bmatrix} = M_2 M_1 \begin{bmatrix} U_t^1 \\ U_b^1 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

z czego wynika, że układ złożony z  $N$  warstw opisywanych macierzami przejścia  $M_N$  można traktować jak jeden element opisywany za pomocą macierzy przejścia będącej iloczynem macierzy opisujących wszystkie jego elementy  $M = M_i \cdot M_{i-1} \dots \cdot M_1$ . Podstawowymi macierzami przejścia wykorzystywany do obliczeń w układach warstwowych są:

- Macierz przejścia odpowiadająca propagacji w ośrodku jednorodnym

$$M_p = \begin{bmatrix} \exp(-ikz_0) & 0 \\ 0 & \exp(ikz_0) \end{bmatrix}, \text{ gdzie} \quad (2.8)$$

$k$  jest długością wektora falowego w ośrodku w którym zachodzi propagacja w kierunku równoległym do grubości warstwy, a  $z_0$  jest grubością warstwy.

- Macierz opisująca przejście fali E-M przez granicę ośrodków

$$M_i = \frac{1}{1+r} \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

gdzie  $r$  jest amplitudowym współczynnikiem odbicia fali na opisywanej granicy ośrodków wynikającym z równań Fresnela i zależnym od kąta padania.

Obliczenie współczynnika transmisji płytki płasko-równoległej wymaga więc skonstruowania macierzy opisującej taką płytke z trzech macierzy:

$$M = M_i \cdot M_p \cdot M_i.$$

### 2.1.2. Metoda różnic skończonych (FDTD)

Metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (ang. FDTD - finite-difference time-domain) jest szeroko wykorzystywana w niniejszej pracy ze względu na możliwości symulowania ośrodków materialnych opisywanych modelem Lorenza-Drudego 2.3.1, oraz bezpośrednie obliczanie wartości pól  $E$  i  $H$  we wszystkich punktach siatki obliczeniowej. Poniżej przedstawione zostały podstawowe elementy tej metody symulacji numerycznych. Podstawa do wspólnie prowadzonych symulacji elektromagnetycznych w dziedzinie czasu jest algorytm Yee[64], który rozwiązywanie równań Maxwella sprowadza do następującej sekwencji:

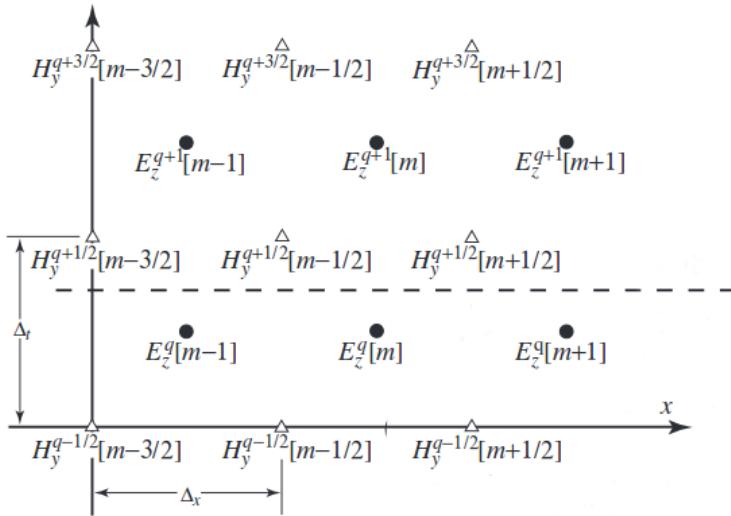
1. Zastąpienie wszystkich pochodnych cząstkowych w prawach Ampera i Faradaia różnicami skończonymi.
2. Przekształcenie powstałych równań, tak aby wyrazić amplitudy pól  $E$  i  $H$  w nieznanym czasie  $t_0 + \Delta_t$  przez ich wartości w czasie  $t_0$ , oraz wartości drugiego pola w czasie  $t_0 + \frac{\Delta_t}{2}$ .
3. Obliczenie wartości pola  $H$  w czasie  $t_0 + \Delta_t$ .
4. Obliczenie na podstawie wartości  $H$  dla  $t = t_0 + \Delta_t$ , wartości pola  $E$  w czasie  $t_0 + \frac{3}{2}\Delta_t$ .
5. Powtarzanie kroków 3-4 w celu ewolucji stanu układu przez żądany czas.

Działanie algorytmu Yee zostanie teraz przedstawione bardziej szczegółowo na przykładzie, który pozwoli nam lepiej zrozumieć te kilka abstrakcyjnie opisanych kroków. Ponieważ prowadzenie rachunków dla problemu trójwymiarowego byłoby przesadnie skomplikowane, dla celów poglądowych skupimy się na zagadnieniu jednowymiarowym.

### 2.1.3. FDTD w jednym wymiarze

Załóżmy, że pole elektryczne posiada jedynie składową w kierunku  $z$ , w jednowymiarowej przestrzeni opisywanej przez osią  $x$  ( $\vec{E} = E_z \cdot \hat{e}_z$ ). W takiej sytuacji prawo Faradaaya możemy zapisać jako:

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \hat{e}_y = \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{e}_y \quad (2.10)$$



Rysunek 2.3: Graficzna prezentacja dyskretyzacji w jednowymiarowej metodzie FDTD. Pozioma przerywana linia wskazuje przykładową granicę pomiędzy wartościami już obliczonymi i szukanymi w kolejnym kroku symulacji.

Zgodnie z oczekiwaniami jedyną zmienną w czasie składową natężenia pola magnetycznego jest  $H_y$ . Wykorzystując ten fakt możemy również uprościć zapis prawa Ampera:

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \hat{e}_z \quad (2.11)$$

Z powyższych równań możemy wyznaczyć skalarny układ równań różniczkowych na składowe  $H_y$  i  $E_z$ ,

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad (2.12)$$

w którym zmiana w czasie amplitudy jednego z pól wyrażona jest przez pochodną względem  $x$  drugiego pola. Równanie wyprowadzone z (2.10) posłuży nam do wyznaczenia zmiany w czasie natężenia pola magnetycznego, natomiast równanie (2.11) do obliczenia przyszłych (w czasie  $t_0 + \Delta_t$ ) wartości pola  $E$ .

Wprowadzając konwencję przypisywania górnych indeksów  $q$  iteracjom algorytmu oraz umieszczanych w nawiasach kwadratowych indeksów m opisujących

położenie w przestrzeni, możemy wyprowadzić formuły na wartości obu pól

$$H_y^{q+\frac{1}{2}}[m + \frac{1}{2}] = H_y^{q-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta_x} (E_z^q[m + 1] - E_z^q[m]), \quad (2.13)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta_x} (H_z^{q+\frac{1}{2}}[m + \frac{1}{2}] - H_z^{q-\frac{1}{2}}[m - \frac{1}{2}]), \quad (2.14)$$

Ponieważ wartości obu pól w kolejnym kroku czasowym wyrażane są jedynie przez wartość tego pola w kroku poprzednim, oraz wartości drugiego pola w sąsiednich punktach, możemy zastosować dyskretyzację skokową<sup>3</sup>. Jej zastosowanie powoduje, że obliczane wartości pól  $E$  i  $H$  nie dotyczą dokładnie tej samej chwili czasu, przez co dokładne uzgodnienie fazы obu pól wymaga wykonania dodatkowego „połówkowego” kroku na jednym z pól. Zaletą takiej dyskretyzacji jest natomiast wyższa - drugiego rzędu, dokładność numeryczna. Ze względu na zysk numeryczny, algorytm skokowy stosujemy również do dyskretyzacji względem położenia. Graficzną reprezentację rozwiązywania jednowymiarowego problemu elektromagnetycznego metodą FDTD przedstawia rysunek 2.3.

Współczynniki  $\frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta_x}$  i  $\frac{\Delta t}{\mu \Delta_x}$  odgrywają kluczową rolę w równaniach (2.13) i (2.14). Wygodnie jest przedstawić je w formie pozwalającej przeanalizować jak daleko energia może propagować się w pojedynczym kroku czasowym [43]. W tym celu wprowadza się tzw. współczynnika Couranta,  $S = \frac{c \Delta t}{\Delta x}$ , będący stosunkiem odległości pokonywanej przez front fali elektromagnetycznej w jednym kroku czasowym i gęstości próbkowania w przestrzeni. W przypadku symulacji jednowymiarowych, uwzględniając fakt, że wartości w kolejnych chwilach czasu zależą jedynie od punktów dyskretnych z najbliższego otoczenia możemy stwierdzić, że współczynnik Couranta powinien spełniać warunek  $S \leq 1$ . W szczególności optymalnym dla omawianej sytuacji jest wybranie  $S = 1$ , ponieważ wtedy w jednym kroku czasowym front fali elektromagnetycznej pokonuje odległość równą  $\Delta_x$ . Wybranie właściwego współczynnika Couranta komplikuje wprowadzenie niejednorodności w obszarze symulacji. Ponieważ prędkość fazowa zależy od współczynnika załamania, przy zachowaniu równomiernego próbkowania przestrzennego doprowadzenie do idealnego dopasowania siatki przestrzennej i kroku

---

<sup>3</sup>Często spotykana jest również nazwa żabi skok, będąca kalką językową z angielskiego leap-frog

czasowego może okazać się niemożliwe, co prowadzi do powstania „dyspersji numerycznej” na siatce FDTD.

W ogólności dla problemów wielowymiarowych stosuje się wzór

$$S \leq \frac{n_{min}}{\sqrt{DIM}}, \quad (2.15)$$

gdzie przez  $DIM$  oznaczono liczbę wymiarów przestrzennych symulacji, a  $n_{min}$  najniższy współczynnik załamania materiału znajdującego się w przestrzeni symulacji. Wyznaczenie odpowiedniego współczynnik Couranta dla symulacji z materiałami dyspersyjnymi (szerzej omówionymi w części 2.3.1) jest zagadnieniem skomplikowanym, wymagającym każdorazowego rozpatrzenia parametrów symulacji.

#### 2.1.4. Warunki brzegowe

Równania (2.13) i (2.14) mogą być oczywiście zastosowane jedynie do punktów nie będących granicą obszaru symulacji. Numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego zawsze wiąże się z odpowiednim dobraniem warunków brzegowych, które nie powinny wprowadzać dodatkowych artefaktów do modelowanego zjawiska. Najprostszym sposobem jest zastosowanie warunku Dirichleta i przyjęcie brzegowych wartości pola elektrycznego lub magnetycznego jako równych 0. Fizycznie wprowadzenie tego typu założenia jest równoważne z umieszczeniem na granicy symulowanego obszaru idealnego przewodnika, odpowiednio elektrycznego (PEC)<sup>4</sup> lub magnetycznego (PMC)<sup>5</sup>. Wprowadzenie stałej, równej zero wartości na granicy obszaru symulacji powoduje odbicie obu pól, w stosunku do pola dla którego ustalono zerową wartość na granicy przy odbiciu następuje zmiana znaku. Przykład wyników symulacji w pustej przestrzeni ze sztywnymi warunkami brzegowymi znajduje się na ilustracji 2.4a. Ograniczenie obszaru symulacji za pomocą idealnego przewodnika, de facto ogranicza możliwości metody do mo-

<sup>4</sup>Od ang. Perfect Electric Conductor

<sup>5</sup>Dla wygody numerycznej wprowadza się również przewodność magnetyczną (W skrócie określonym jako PMC od ang. Perfect Magnetic Conductor)

delowania jedynie wnęk rezonansowych. Natomiast większość zjawisk elektromagnetycznych odbywa się w otwartej przestrzeni<sup>6</sup>.

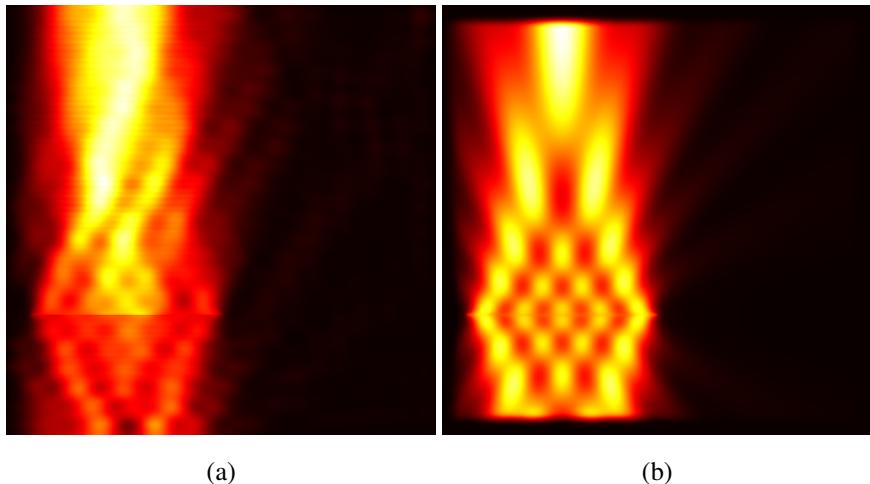
W przypadku niektórych struktur istnieje naturalne zakończenie obszaru symulacji. Przykładem mogą być periodyczne kryształy fotoniczne, dla których obszar symulacji stanowi komórka elementarna z periodycznie zadanymi warunkami brzegowymi. Rozwiązania niektórych problemów elektromagnetycznych szybko zanikają w przestrzeni, w związku z czym zastosowanie odpowiednio dużego obszaru symulacji może umożliwić przeprowadzenie obliczeń. Inne zagadnienia wymagają zamiany zmiennych jak np.  $\hat{x} = \tanh(x)$ , która prowadzi do zmiany dziedziny symulacji z  $x \in (-\infty; +\infty)$  na  $\hat{x} \in (-1; 1)$  i rozwiązania zmienionego problemu.

Wygodniejszym rozwiązaniem pozwalającym na skończonej siatce modelować zjawiska zachodzące w nieograniczonej przestrzeni, jest wprowadzenie absorbencyjnych warunków brzegowych ABC (ang. absorbing boundary condition). W przypadku symulacji jednowymiarowej dla  $n = 1$ , dla współczynnika Couranta  $S = 1$  i przy zastosowaniu standardowego założenia o braku źródeł poza obszarem symulacji, tego typu warunek brzegowy można łatwo zrealizować. Wartość amplitudy pola w węźle na brzegu w kroku  $q + 1$  musi być równa amplitudzie tego pola w kroku  $q$  w węźle sąsiednim. W sytuacji wielowymiarowej, gdy w obszarze symulacji występują np. materiały stratne (o zespolonej przenikalności elektrycznej) zagadnienie to staje się znacznie bardziej skomplikowane. Przykładowymi propozycjami rozwiązań omawianego problemu są warunki brzegowe typu TFSF (ang. Total Field Scattered Field).

### 2.1.5. Nieodbijające warunki brzegowe (PML)

Zmianę podejścia do realizacji symulacji numerycznych dotyczących zjawisk w nieograniczonej przestrzeni zaproponował Jean-Pierre Bérenger [4]. Zamiast konstruowania odpowiedniego warunku brzegowego zaproponował on wprowadzenie nieodbijającej warstwy absorpcyjnej, określonej jako PML (ang. perfectly

<sup>6</sup>Za którą z dobrym przybliżeniem możemy uważać nawet zamknięte laboratorium. Ponieważ analizowane zjawiska dyfrakcji, czy rozpraszania zachodzą w małym obszarze, położonym z dala od ograniczeń fizycznych takich jak ściany które słabo odbijają światło widzialne.



Rysunek 2.4: Porównanie wyników symulacji z propagacją fali E-M w wolnej przestrzeni dla symulacji w której brzeg z warunkiem Dirichleta (a) jest otaczany przez materiał o  $n = 1$ , (b) został otoczony obszarem PML

matched layer), przylegającej do granicy obszaru symulacji. Dzięki zastosowaniu takiej warstwy, za nią możemy użyć np. warunków Dirichleta, ponieważ po przejściu przez warstwę PML natężenie pola E-M będzie na tyle słabe, że fala odbita od brzegu nie będzie miała wpływu na wynik symulacji. Warstwa PML tworzona jest ze sztucznego materiału, którego właściwości zostały wyprowadzone przez podział rozwiązania równania falowego, stąd stosowana angielska nazwa *split-field PML*.<sup>7</sup>. Wyprowadzenie podane przez Bérengera wymagało również wprowadzenia do równań Maxwella przewodnictwa magnetycznego, które było niezerowe jedynie w niefizycznym obszarze PML.

Obecnie powszechnie wykorzystywana jest wersja PML nie wymagająca modyfikacji równania falowego, która wyraża PML przez obszar symulacji zajmowany przez jednoosiowy absorbujący materiał anizotropowy. Stąd stosowana nazwa UPML (ang. uniaxial PML). Pierwotne wyprowadzenie UPML oparte było na analitycznym obliczeniu właściwości materiału spełniającego warunki absorpcyj-

<sup>7</sup>Orginalne wyprowadzenie podane przez Bérengera dotyczyło rozwiązywania równań Maxwella. To samo podejście zostało jednak bezpośrednio przełożone na modelowanie innych zjawisk opisywanych równaniem falowym.

ności i zerowego współczynnika odbicia, niezależnie od polaryzacji i kąta padającego promieniowania E-M [41]. Później przedstawione zostały bardziej eleganckie formy wyprowadzenia PML oparte na optyce transformacyjnej [39]. Podobne wyprowadzenie UPML przytoczone jest w rozdziale 4 niniejszej pracy.

Należy również nadmienić, że PML posiada pewne ograniczenia. Jednym z nich jest zależność współczynnika absorpcji od kąta padania promieniowania E-M. Współczynnik tłumienia jest proporcjonalny do  $k_0 \cos(\theta)$ , gdzie  $\theta$  jest kątem padania. Dla kątów bliskich  $\frac{\pi}{2}$  tłumienie fal padającej dąży do zera, w związku z czym takie fale będą w znacznym stopniu docierać do brzegu symulacji po odbiciu. W praktyce, w symulacjach FDTD można uniknąć tego typu problemów zapewniając odpowiednią odległość symulowanego układu od obszaru PML.

Zasadniczym problemem dotyczącym PML w symulacjach numerycznych jest odbicie na granicy PML wynikające z dyskretności siatki obliczeniowej. W celu uniknięcia problemów związanych z odbiciem numerycznym stosowany w obliczeniach PML nie jest jednolitym ośrodkiem, ale składa się z wielu warstw ośrodków o coraz to większym współczynniku absorpcji.

Niedoskonałością PML, której w żaden sposób nie można uniknąć jest założenie o jednorodności ośrodka graniczącego z PML w kierunku prostopadłym do PML. Rozwiązaniem pozwalającym uniknąć odbić w sytuacji, gdy to założenie nie jest spełnione, jest wykorzystanie jedynie absorberów opartych na twierdzeniu adiabatycznym [32].

### **2.1.6. Źródła pola elektromagnetycznego w symulacjach metodą FDTD**

Ostatnim z omawianych podstawowych elementów metody FDTD jest wprowadzenie źródeł. Najprostszym sposobem na realizację tego zadania jest umieszczenie tzw. źródła sztywnego. W takim przypadku w wybranym punkcie lub punktach symulacji pole elektryczne, nie jest obliczane zgodnie z równaniem (2.14). Zamiast tego zależność pola elektrycznego od czasu jest dla niego podana w sposób analityczny. Tego typu źródło, podobnie jak zadane w sposób stały warunki brzegowe wprowadza dodatkowe odbicia w obszarze symulacji.

Innym sposobem wprowadzenia źródła, jest wykorzystanie prawa Ampéra z gęstością prądu

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.16)$$

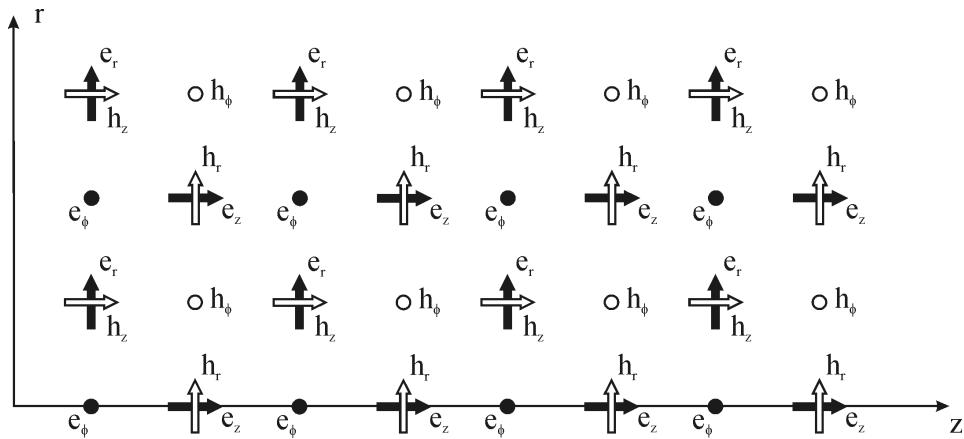
gdzie  $\vec{J}$  może być rozumiany jako gęstość prądu elektrycznego związana z przepływem nośników swobodnych w materiale o określonej przewodności elektrycznej  $\sigma$ , ale może też być wykorzystany jako sposób wprowadzenia źródła pola elektrycznego do symulacji. Wprowadzenie źródła addytywnego wymaga wykorzystania innego równania niż prezentowane wcześniej (2.14). Wyprowadzamy je z (2.16) przez zastąpienie pochodnych różnicami skończonymi podobnie jak w poprzednim wypadku.

### 2.1.7. Metoda FDTD dla układów o symetrii walcowej (BOR-FDTD)

W przypadku symulacji dotyczącej struktury o symetrii cylindrycznej możliwe jest zredukowanie problemu trójwymiarowego do problemu dwuwymiarowego. Po zamianie współrzędnych na cylindryczne w równaniach (2.10) i (2.11), zależność od kąta  $\phi$  separuje się od zmiennych przestrzennych  $r$  i  $z$  dając analityczne rozwiązanie w postaci szeregów zależnych od kąta

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\vec{e}_u(r, z, t)\cos(m\phi) + \vec{e}_v(r, z, t)\sin(m\phi)) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\vec{h}_u(r, z, t)\cos(m\phi) + \vec{h}_v(r, z, t)\sin(m\phi)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

W powyższym wzorze  $m$  jest liczbą numerującą azymutalne mody pola E-M, dla określonego modu prowadzenie symulacji wymaga jedynie aktualizowania wartości  $e_u, e_v, h_u$  i  $h_v$ , które są funkcjami jedynie dwóch zmiennych przestrzennych. Jeżeli rozkład pola na początku symulacji oraz pół generowanych przez źródła znajdujące się w obszarze symulacji można rozłożyć na skończoną liczbę elementów sum ze wzorów (2.17). To rozwiązyując kilka problemów dwu wymiarowych, a następnie stosując zasadę superpozycji, możemy znaleźć rozwiązanie



Rysunek 2.5: Przykład dyskretyzacji wykorzystywanej do rozwiązywania równań różniczkowych metodą BOR-FDTD [1]

problemu trójwymiarowego, metodą o dużo mniejszej złożoności obliczeniowej i mniejszych wymaganiach pamięciowych<sup>8</sup>.

W przypadku symulacji BOR-FDTD stabilność numeryczna wyrażana przez współczynnik Couranta zależy od  $m$ . Dla  $m = 0$  największa dopuszczalna wartość współczynnika Couranta  $S = \frac{n_{min}}{\sqrt{2}}$ , gdzie  $n_{min}$  oznacza najniższy współczynnik załamania materiałów w obszarze symulacji. Dla wyższych modów  $S \propto m + 1$ .

Ze względu na symetrię układu współrzędnych, pola, których punkty dyskretyzacji znajdują się na osi  $z$  są tożsamościowo równe zero,  $e_z = 0$  dla modu  $m = 0$ , oraz  $e_\phi = 0$  i  $h_r = 0$  dla  $m=1$  ( dla dyskretyzacji jak na rysunku 2.5). Ze względu na specjalne traktowanie osi symetrii podczas obliczeń jest to obszar symulacji najbardziej podatny na niestabilności numeryczne. W szczególności, jeśli interesujące nas zjawiska zachodzą z dala od osi optycznej poprawę stabilności uzyskuje się poprzez wymaganie zerowych wartości na kilku rzędach węzłów dyskretyzacji znajdujących się najbliżej osi układu [31].

W symulacjach prowadzonych metodą BOR-FDTD wynikowe rozkłady pola są dwuwymiarowymi mapami, na których jedna z osi odpowiada współrzędnej  $z$  - równoległej do osi symetrii. Druga natomiast współrzędnej  $r$  - odległości od osi.

<sup>8</sup>Liczba punktów w symulacji dwuwymiarowej jest kwadratową funkcją rozdzielczości, a w przypadku obliczeń w trzech wymiarach sześcienna

## 2.2. Układy liniowe niezmiennicze ze względu na przesunięcia

Celem niniejszego podrozdziału jest zdefiniowanie pojęcia systemów liniowych, które w niniejszej pracy znajduje zastosowanie w analizie zjawisk obrazowania. W ogólności, przez systemem rozumiemy odpowiedniość pomiędzy zestawem funkcji wejściowych, a zestawem funkcji wyjściowych. W przypadku sieci elektrycznych funkcjami wejściowymi jak i wyjściowymi mogą być zależności napięcia i natężenia prądu elektrycznego od czasu. Jeżeli ograniczymy opis do systemów deterministycznych, określonemu zestawowi funkcji wejściowych musi odpowiadać dokładnie jeden układ funkcji wyjściowych. Wyjście układu nie musi jednak pozwalać na jednoznaczną identyfikację wejścia, w szczególności dla wielu stanów wejścia system może nie odpowiadać żadnym wyjściem.

Matematyczną reprezentacją opisanego systemu, jest operator  $S\{\cdot\}$ , który działając na zbiór funkcji wejściowych  $g_i$  tworzy funkcje wyjściowe  $f_i$ :

$$f_i(\vec{x}) = S\{g_i(\vec{x})\}. \quad (2.18)$$

Warunkiem liniowości systemu opisywanego operatorem  $S\{\cdot\}$  jest liniowość samego operatora  $S\{\cdot\}$ , która wymaga spełnienia zasady superpozycji matematycznie wyrażonej przez poniższe równanie

$$S\{\alpha p(\vec{x}) + \beta q(\vec{x})\} = \alpha S\{p(\vec{x})\} + \beta S\{q(\vec{x})\}, \quad (2.19)$$

spełnione dla dowolnych zespolonych skalarów  $\alpha$  i  $\beta$ , oraz dowolnych funkcji  $p(\vec{x})$  i  $q(\vec{x})$ . Zgodnie z powyższym równaniem, odpowiedź systemu możemy przedstawić jako sumę odpowiedzi na funkcje składowe na które rozłożyliśmy wejście układu. W przypadku zjawisk elektromagnetycznych zasada superpozycji spełniona jest dla amplitud pól elektromagnetycznych w przypadku promieniowania koherentnego, oraz dla natężeń pól w przypadku promieniowania nie koherentnego. Do rozkładu funkcji wejściowej na elementarne składowe posłużymy się własnością filtracji delty Diraca

$$g(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{\eta}) \delta(x - \eta) d\vec{\eta}. \quad (2.20)$$

Poszukując funkcji wyjściowej dla układu  $S\{\cdot\}$  odpowiadającej funkcji wejściowej  $g(x)$ , wykonujemy podstawienie równania 2.20 do równania 2.18

$$f(\vec{x}) = S\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{\eta}) \delta(\vec{x} - \vec{\eta}) d\vec{\eta} \right\}. \quad (2.21)$$

Ponieważ funkcja  $g(\vec{\eta})$  nie zależy od zmiennych  $\vec{x}$ , możemy traktować ją jako wagę i korzystając z własności superpozycji 2.19 włączyć operator  $S$  pod znak całki

$$f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{\eta}) S\{\delta(\vec{x} - \vec{\eta}) d\vec{\eta}\}, \quad (2.22)$$

dla uproszczenia zapisu powyższego równania wprowadzimy funkcję

$$h(\vec{x}, \vec{\eta}) := S\{\delta(\vec{x} - \vec{\eta})\}. \quad (2.23)$$

Powyższa funkcja nazywana jest funkcją odpowiedz impulsowej (ang. impulse response), w optyce zazwyczaj określa się ją mianem funkcji rozmycia punktu (ang. point-spread function). Korzystając z wprowadzonego oznaczenia możemy do równania 2.22 podstawić definicję 2.23, otrzymując jedną z podstawowych formuł stosowanych do opisu systemów liniowych, tzw. całkę superpozycji:

$$f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{\eta}) h(\vec{x}, \vec{\eta}) d\vec{\eta}. \quad (2.24)$$

Powyższe równanie wskazuje, że dla opisania odpowiedzi systemu na dowolną funkcję wejściową, niezbędną jest jedynie znajomość funkcji odpowiedzi impulsowej układu. W ogólnym przypadku, funkcja odpowiedzi musi być zdefiniowana dla wszystkich punktowych wzbudzeń w płaszczyźnie wejściowej. Przykładem analizowanego układu może być np. soczewka oświetlana promieniowaniem niekoherentnym, dla której niezbędnym zestawem informacji potrzebnym do obliczenia natężenia światła w płaszczyźnie obrazu jest znajomość funkcji odpowiedzi dla wszystkich źródeł punktowych znajdujących się w płaszczyźnie przedmiotu.

Szczególne znaczenie dla niniejszej pracy ma kolejna, często spotykana w zastosowaniach własność układów liniowych określana jako niezmienniczość. W ogólności, może być to np. niezmienniczość systemu elektrycznego w czasie.

Dla układu obrazującego istotną rolę odgrywa izoplanatyczność - niezmienniczość ze względu na przesunięcia, w wyniku której, funkcja odpowiedzi impulsowej zależy jedynie od odległości pomiędzy położeniem wzbudzenia, a położeniem

obrazu

$$h(\vec{x}, \vec{\eta}) = h(\vec{x} - \vec{\eta}). \quad (2.25)$$

Powyzsza własność zastosowana do układów obrazujących jest więc równoważna stwierdzeniu, że zmiana położenia przedmiotu wpływa jedynie na zmianę położenia jego obrazu. W przypadku niemal wszystkich realnych układów optycznych własność ta nie jest spełniona w całej przestrzeni położeń, zazwyczaj można jednak obszar podzielić na podobszary, w których zastosowanie będą miały odpowiednie funkcje  $h_i$ , natomiast w ramach pojedynczego podobszaru z dobrym przybliżeniem stosować można założenie o izoplanatyczności systemu. Szczególnym przypadkiem obszaru często wykorzystywanego w analizie obrazowania przez klasyczne elementy optyczne jest otoczenie osi układu, w stosunku do którego stosuje się omawiane przybliżenie.

Podstawiając równanie (2.25) do wzoru (2.24) otrzymujemy

$$f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{\eta}) h(\vec{x} - \vec{\eta}) d\vec{\eta} = g * h. \quad (2.26)$$

W powyższym równaniu  $*$  oznacza operację splotu. Dzięki sprowadzeniu całki superpozycji dla układów liniowych niezmienniczych ze względu na przesunięcia (ang. LSI - linear shift-invariant) do tej szczególnej postaci, możemy do analizy układów LSI wykorzystać kolejne twierdzenia analizy matematycznej. Ważne znaczenie odgrywa twierdzenie o splocie, będącego jedną z podstawowych własności transformaty Fouriera. Zapiszemy powyższe równanie jako

$$F\{f(\vec{\nu})\} = F\{g(\vec{\nu})\} \cdot F\{h(\vec{\nu})\}, \quad (2.27)$$

gdzie przez  $F$  oznaczona została transformata Fouriera, a  $\cdot$  oznacza zwykłe mnożenie. W ten sposób znaleźliśmy funkcji wyjściowych układu typu LSI z obliczania splotu<sup>9</sup> zastąpiliśmy obliczaniem transformaty Fouriera, mnożeniem i obliczeniem odwrotnej transformaty Fouriera. Transformata Fouriera funkcji odpowiedzi impulsowej ze względu na swoje szczególne znaczenie nazywana jest funkcją przenoszenia  $H = Fh$ .

---

<sup>9</sup>Będącego zazwyczaj skomplikowaną operacją analityczną lub wysokiej złożoności operacją numeryczną.

W równaniu (2.27) można zauważyć formę zagadnienia własnego opisującego układ typu LSI, w którym wartości funkcji  $H$  dla różnych częstości przestrzennych  $\nu$  można interpretować jako wartości własne układu. Funkcjami własnymi są natomiast fale płaskie, ponieważ przeprowadzenie matematycznej operacji transformacji Fouriera jest w przypadku analizy zjawisk falowych równoważne rozłożeniu funkcji w bazie fal płaskich. Kolejnymi wnioskami jakie możemy uzyskać wprost ze wzoru (2.27) jest sposób w jaki układy LSI modyfikują funkcje wejściowe w postaci fal płaskich. W takim przypadku  $G = |A|e^{i\Phi}$  jest po prostu liczbą zespoloną, a układ wprowadza jedynie tłumienie  $|A|$  i stałą modyfikację fazy  $\Phi$  padającej na fali płaskiej [11].

W całej pracy posługując się terminem częstości przestrzennych odnosimy się do podanej powyżej formuły w której transformacja Fouriera została zastosowana w stosunku do funkcji położenia, dlatego ze szczególną uwagą należy odróżniać częstości przestrzenne (rozkład w bazie fal płaskich), od częstotliwości odpowiadającej rozkładowi promieniowania w bazie fal monochromatycznych.

## 2.3. Modele dyspersji materiałów

### 2.3.1. Model Lorenza-Drudego

Powszechnie wykorzystywany do opisu własności dyspersyjnych materiałów jest model Lorenza-Drudego. *De facto* jest on połączeniem opisu substancji przewodzących (opisywanych modelem Drudego), oraz dielektryków (opisywanych modelem Lorenza). Wyprowadzenie obu modeli opiera się na zastosowaniu zasad mechaniki klasycznej w stosunku do cząstek naładowanych znajdujących się w materii. Dla dielektryków przyjmujemy, że są one silnie związane z węzłami sieci krystalicznej, a ruch każdego ładunku opisuje równanie oscylatora tłumionego, pobudzanego siłą harmoniczną wywoływaną przez zewnętrzne pole elektromagnetyczne:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_1^2 \vec{r} = q\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (2.28)$$

W powyższym równaniu  $m$  nie należy traktować jako masy ładunku, a jako parametr stanowiący tzw. masę efektywną, której wartość można wyznaczyć za

pomocą mechaniki kwantowej. Parametry  $\omega_1$  i  $\gamma$  możemy zgodnie z mechaniką klasyczną interpretować odpowiednio jako częstotliwość własną i współczynnik tłumienia oscylatora. W przypadku substancji o różnych węzłach sieci krystalicznej, równanie (2.28) należy zapisać osobno dla każdego rodzaju ładunków i centrów sieci. Rozwiążając powyższe równanie różniczkowe, oraz korzystając z definicji polaryzacji możemy wyznaczyć przenikalność dielektryczną ośrodka nieprzewodzącego jako:

$$\varepsilon = 1 + \frac{N_o q^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega - i \gamma_j}. \quad (2.29)$$

Wprowadzone w powyższym równaniu współczynniki  $f_j$  opisują tzw. siłę oscylatora, związaną z prawdopodobieństwem przejść między stanami cząstek opisywanego materiału. Wprowadzony parametr  $N_o$  opisuje koncentrację oscylatorów. W przeciwnieństwie do izolatorów elektrycznych opis metali musi przede wszystkim uwzględnić istnienie nośników swobodnych. Zaniedbując oddziaływanie ładunków swobodnych ze sobą i zakładając, że ich zderzenia z wierzchołkami sieci krystalicznej mają charakter w pełni przypadkowy możemy ich klasyczne równanie ruchu zapisać jako:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = q \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (2.30)$$

W powyższym równaniu wprowadzona siła oporu  $m\gamma \vec{v}$  wynika ze zderzeń z węzłami sieci krystalicznej. Rozwiązanie powyższego równania prowadzi do następującego wyrażenia na przenikalność dielektryczną

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (2.31)$$

w którym wprowadzona wartość  $\omega_p$  to częstotliwość plazmowa, opisywana wzorem:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{\epsilon_0 m}}, \quad (2.32)$$

gdzie  $N$  jest koncentracją swobodnych nośników o ładunku  $q$ . Im większa koncentracja nośników swobodnych, tym większa jest częstotliwość plazmowa opisywanego

metalu. Dla częstotliwości z zakresu optycznego  $\gamma \ll \omega$  co jest odzwierciedleniem faktu, że droga swobodna elektronów w paśmie przewodnictwa jest znacznie większa od rozważanych długości fali. Zgodnie z równaniem (2.31) oznacza to, że dla światła widzialnego decydującą rolę dla własności metali ma część rzeczywista  $\varepsilon$ , która jest dodatnia tylko dla  $\omega > \omega_p$ . Dla takich częstotliwości w równaniu falowym w metalach będzie mieć rozwiązanie w postaci fal poprzecznych. Fizyczną interpretację  $\omega_p$  znaleźć można w rozwiązaniu równania (2.30). Jest to częstość własna drgań podłużnych elektronów swobodnych. Częstość plazmowa jest natomiast podstawą dla wprowadzenia pojęcia plazmonu objętościowego, stanowiącego kwant omawianych drgań.

Ponieważ polaryzacja jest sumą efektywnych momentów dipolowych przypadających na jednostkę objętości, to wkłady do polaryzacji pochodzące od oddziaływań z elektronami w paśmie przewodnictwa i jonami sieci krystalicznej podlegają dodawaniu. Dlatego model przenikalności elektrycznej materiałów uwzględniający oba te zjawiska, jest sumą wkładów pochodzących z równań (2.29) i (2.31). Zazwyczaj model materiałowy dopasowywany jest do danych eksperymentalnych jedynie w ograniczonym zakresie. Ze względu na to większość rezonansów ze wzoru 2.29 może zostać zastąpionych stałą wartością zwyczajowo określanaą jako  $\varepsilon_\infty$ , a ostateczny wzór przyjmuje postać

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \quad (2.33)$$

## 2.4. Przybliżenie ośrodka efektywnego

Przybliżenie ośrodka efektywnego (ang. EMA effective medium approximations lub ang. EMT effective medium theory) to określenie używane w odniesieniu do analitycznych modeli opisujących makroskopowe własności elektromagnetyczne przestrzeni złożonej z różnych materiałów. EMA pozwala opisywać niejednorodny obszar w przestrzeni złożony z wielu materiałów jako jeden homogeniczny obszar o innych właściwościach. Kluczowym w wyprowadzeniu przybliżenia EMT jest zdefiniowanie geometrii w jakiej układane są materiały składowe. Na

jej podstawie w zależności od rozmiarów wyprowadzane są ostateczne formuły na składowe tensorów przenikalności elektrycznej  $\varepsilon$  i magnetycznej  $\mu$ .

Dla niniejszej pracy szczególne znaczenia mają układy jednowymiarowe, w których periodycznie umieszczone są kolejne warstwy ośrodków materialnych. W sytuacji gdy możemy zakładać, że pojedyncza warstwa jest tak cienka w porównaniu z długością fali, że wartości pól  $E$  i  $D$  wewnątrz warstwy w określonej chwili czasu są stałe. Możemy wyprowadzić przybliżone wartości tensora przenikalności elektrycznej:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\parallel} &= f \cdot \varepsilon_1 + (1 - f) \cdot \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{\perp} &= (f \cdot \varepsilon_1^{-1} + (1 - f) \cdot \varepsilon_2^{-1})^{-1}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

oraz magnetycznej:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\perp} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\parallel} &= f \cdot \mu_1 + (1 - f) \cdot \mu_2 \\ \mu_{\perp} &= (f \cdot \mu_1^{-1} + (1 - f) \cdot \mu_2^{-1})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

W powyższych wzorach przez  $\varepsilon_{\parallel}$  i  $\varepsilon_{\perp}$  oznaczono odpowiednio składowe tensora przenikalność elektrycznej równoległe i prostopadłe do kierunku prostopadłego do granicy między ośrodkami. Współczynnik  $f$  nazywany współczynnikiem wypełnienia definiujemy jako  $f = \frac{d_1}{d_1+d_2}$  oznacza stosunek grubości materiału o współczynniku załamania  $\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$  do grubości całej komórki elementarnej.

Oznacza to, że w ośrodku wypełnionym naprzemiennie dwoma materiałami, fala elektromagnetyczna propaguje się tak jak w jednoosiowym materiale dwój-łomnym. Osią takiego metamateriału jest dowolna prosta prostopadła do granic warstw dwu tworzących go materiałów [46].



## **Rozdział 3**

# **Kształtowanie fali elektromagnetycznej w zakresie THz**

Niniejszy rozdział dotyczy projektowania siatek dyfrakcyjnych jako elementów detektorów promieniowania, umożliwiających transmisję selektywną ze względu na częstotliwość oraz skierowanie promieniowania do tranzystora polowego stanowiącego faktyczny detektor. W szczególności w podrozdziale 3.1.1 omówione są możliwości wykorzystania metalowych siatek dyfrakcyjnych do uzyskania transmisji rezonansowej w zakresie THz. Następnie w części 3.1.2 zaprojektowane zostały siatki dyfrakcyjne do wzbudzenia modu falowodowego umożliwiającego transmisję promieniowania E-M w kierunku detektora.

W dalszej części rozdziału przedstawione są możliwości wykorzystania podwójnych metalowych siatek dyfrakcyjnych do uzyskania transmisji jednokierunkowej. W geometrii cylindrycznej, tego rodzaju siatki, mogą być również wykorzystane do koncentracji fali E-M. Poza zakresem niniejszej pracy znajdują się zjawiska fizyczne związane z generacją i detekcją promieniowania THz.

Do modelowania promieniowania elektromagnetycznego w zakresie THz używane są metody tradycyjnie wykorzystywane w optyce, w szczególności metoda FDTD. Ze względu na różnicę w długości fali, właściwości materiałów w zakresie THz znacznie różnią się od tych dla światła widzialnego. Różnicom tym poświęcony jest podrozdział 3.0.1.

### 3.0.1. Własności wykorzystywanych materiałów

Kluczowymi procesami odpowiedzialnymi za wartość przenikalności elektrycznej ciał stałych dla niskich częstotliwości THz, określanych niekiedy jako subterahercowe, są mechanizm Drudego (patrz sekcja 2.3.1) i relaksacja Debye'a. Dla częstotliwości bliższych dalekiej podczerwieni podstawowe znaczenie mają optyczne fonony - skwantowane mody drgań sieci krystalicznej. Typowe wartości współczynnika załamania polimerów mieszczą się w przedziale  $n \in (1.4; 1.5)$ , a dla półprzewodników  $n \in (3.1; 3.5)$ . W obu wypadkach charakteryzują się niewielką dyspersją. Wypolerowane powierzchnie metalowe są wykorzystywane jako zwierciadła o współczynniku odbicia  $R \approx 0.99$  [22].

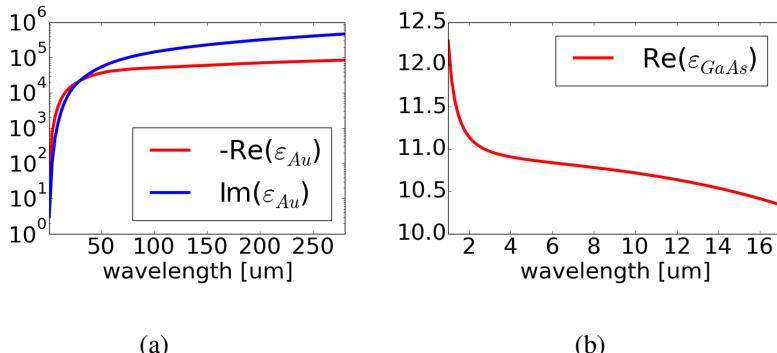
W układach omawianych w poniższym rozdziale wykorzystywane są złoto i arsenek galu, dlatego ich właściwości omówione zostaną bardziej szczegółowo. Wszystkie przewodniki, w tym złoto, ze względu na czasy relaksacji rzędu  $10^{-14}$  s charakteryzują się niemal bezdyspersyjną przewodnością. W związku z tym, równanie (2.33) możemy zapisać w prostszej postaci

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (3.1)$$

gdzie przez  $\sigma_0$  oznaczona została przewodność. Dla złota w warunkach normalnych  $\sigma_0 = 45.2 \frac{S}{\mu m}$ . Ze względu na znacznie większą wartość bezwzględną części urojonej od rzeczywistej, dla zakresu subterahercowego powyższe równanie (3.1) możemy dalej uprościć do postaci

$$\varepsilon(\omega) \approx i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega}. \quad (3.2)$$

Różnica wartości bezwzględnej części rzeczywistej i urojonej przenikalności elektrycznej złota zmniejsza się wraz ze wzrostem częstotliwości. Dla  $f = 2$  THz moduł części rzeczywistej jest ok. 5 razy mniejszy od modułu części urojonej. Część rzeczywista przenikalności elektrycznej dla fal dłuższych niż optyczne jest ujemna, a jej moduł zmienia się od  $10^2$  do  $10^4$ . Ze względu na dominujący charakter części urojonej związanej z przewodnictwem, eksperymentalne wyznaczenie przenikalności elektrycznej jest bardzo trudne. Eksperymentalne wyznaczenie części rzeczywistej  $\varepsilon_{Au}$  prowadzone jest jedynie dla częstotliwości powyżej



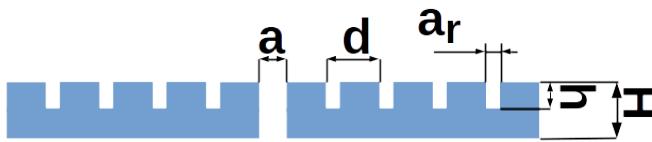
Rysunek 3.1: Zależność przenikalności elektrycznej od długości fali dla (a)  $Au$  [30], (b)  $GaAs$  [47]

1 THz (długości fali poniżej ok.  $300 \mu\text{m}$ ) [30]<sup>1</sup>. Zależność  $\varepsilon$  od długości fali została przedstawiona na wykresie 3.1a.

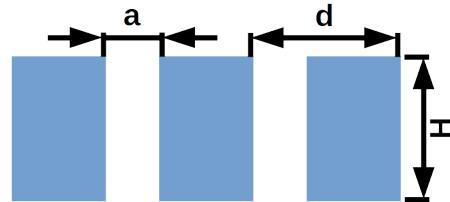
Symulacje opisywane w poniższym rozdziale prowadzone są z maksymalną rozdzielczością  $0.5 \mu\text{m}$  na punkt obliczeniowy, natomiast głębokość naskórkowa dla 1 THz,  $\delta = 74.9 \text{ nm}$  [22]. Mała głębokość naskórkowa w porównaniu do długości fali oraz rozmiaru siatki przyjętej w obliczeniach uprawnia do przybliżenia złota przez doskonały przewodnik.

W przeciwieństwie do złota, warstwy  $GaAs$  w zakresie THz mogą być traktowane jako bezstratne. Charakteryzują się one również słabą dyspersją, a w przypadku obliczeń prowadzonych dla wąskiego zakresu długości fali, wartość przenikalności elektrycznej może być traktowana jako stała. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że warstwy  $GaAs$  uzyskiwane w wyniku epitaksji z wiązki molekularnej poddawane są zazwyczaj procesowi wygrzewania w celu ich wygładzenia lub eliminacji zanieczyszczeń. Proces ten może mieć jednak znaczący wpływ na koncentrację elektronów w paśmie przewodnictwa, co może istotnie zmienić właściwości elektromagnetyczne tego materiału [65]. Zależność przenikalności elektrycznej od długości fali dla  $GaAs$  przedstawia wykres na rysunku 3.1b.

<sup>1</sup>Powyższa analiza prawdziwa jest dla eksperymentów prowadzonych w temperaturze pokojowej. Obniżenie temperatury do  $T = 80\text{K}$  powoduje wzrost przewodności złota do  $\sigma_0 = 208 \frac{\text{S}}{\mu\text{m}}$ . W temperaturach kriogenicznych w cienkich warstwach złota dominujący wpływ na przewodność może mieć rozpraszanie elektronów na defektach struktury [24]



Rysunek 3.2: Schemat szczeliny otoczonej siatką rowków umożliwiającej nadzwyczajną transmisję rezonansową



Rysunek 3.3: Schemat siatki dyfrakcyjnej używanej w symulacjach

## 3.1. Antena THz - siatka dyfrakcyjna wraz z falowodem

### 3.1.1. Rezonansowa transmisja przez grube siatki

Modelowym układem, w którym można przeprowadzić analizę zjawisk związanych z rezonansową transmisją fali elektromagnetycznej przez siatkę z idealnego przewodnika jest układ przedstawiony na rysunku 3.2 oświetlony od strony rowków. Zakładając, że zarówno rowki jak i szczelina są na tyle cienkie, że możliwe jest wzbudzenie w nich jedynie modu podstawowego<sup>2</sup>, problem propagacji fali E-M przez układ można rozwiązać analitycznie. W tym celu promieniowanie w przestrzeni swobodnej możemy rozłożyć na fale płaskie, a wzbudzenia wewnętrz rowków i falowodu zastąpić polami modów podstawowych. Wymagając odpowiednich warunków zszycia rozwiązań, nadzwyczajną transmisję (przewyszczającą o kilka rzędów wielkości energię fali elektromagnetycznej padającą bezpośrednio na szczele) możemy opisać wyróżniając następujące mechanizmy [29]:

- Rezonansowa transmisja przez mod falowodowy w szczele. Kontrolowana przez grubość metalu  $H$  na zasadzie rezonansu Fabry-Pérot. Maksi-

<sup>2</sup>Dla falowodów planarnych metal-izolator-metal nie istnieje długość fali odcięcia dla modu podstawowego w polaryzacji TM

mum transmisji występuje w przyjętym przybliżeniu dla

$$\frac{\lambda}{n_{\text{eff}}} = 2 \frac{H}{m}, \quad (3.3)$$

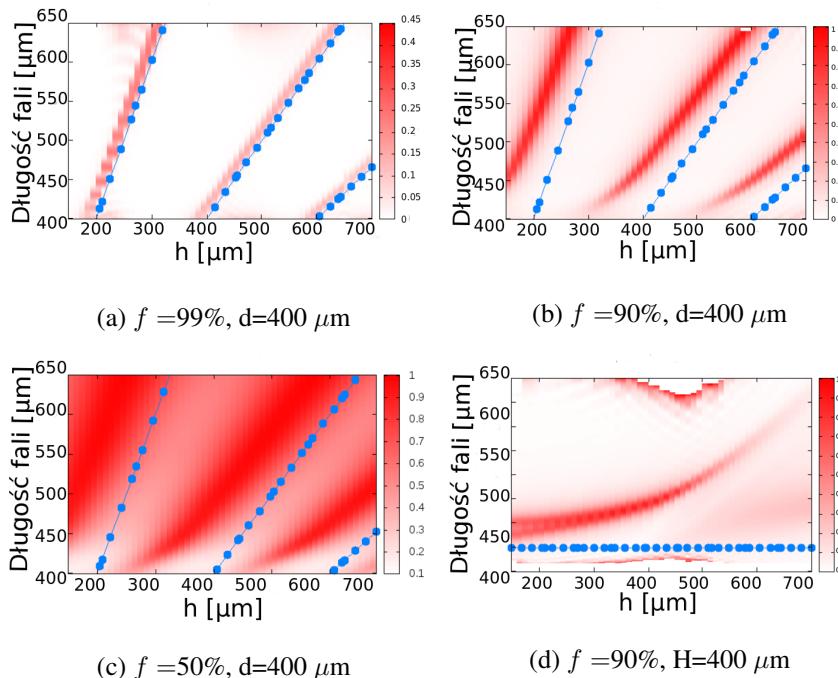
gdzie  $\lambda$  oznacza długość fali promieniowania padającego na układ,  $H$  zgodnie z rysunkiem 3.2 jest długością falowodu,  $m$  dowolną liczbą naturalną, a  $n_{\text{eff}}$  efektywnym współczynnikiem załamania modu falowodowego. W przypadku falowodów metal-powietrze-metal  $n_{\text{eff}} \approx 1$ .

- Wzbudzenie modów w rowkach, pozwalające na późniejszy transport energii z rowków do szczeliny za pomocą fali powierzchniowej. Dzięki temu mechanizmowi transmisja przez szczelinę unormowana do rozmiarów otworu może być znacznie większa od 1. Warunek na rezonansowe wzbudzenie modów wewnętrz szczezin to  $\lambda \approx 4 \frac{h}{2m+1}$  (patrz rys. 3.2). Wykorzystanie tego wzbudzenia możliwe jest jednak jedynie przy dopasowanej reemisji energii z kolejnych rowków.
- Zgodne w fazie pola modów w rowkach, pozwalające na wzbudzenie w płaszczyźnie wejściowej fali powierzchniowej transportującej energię fali E-M do szczeliny. Sytuacja taka występuje dla  $d \approx \lambda$ .

Należy podkreślić, że w używanym modelu pominięto wpływ fal ewanescentnych. Jest to uprawnione dla przewidywania transmisji przez strukturę w polu dalekim ze względu na eksponencjalny zanik modów wraz z odległością od warstwy metalowej. Jednakże należy mieć świadomość, że obecne w okolicach struktury fale ewanescentne mają istotny wpływ na wymienione mechanizmy [10].

Przeprowadzona analiza teoretyczna opisuje jedynie mechanizmy prowadzące do nadzwyczajnej transmisji przez szczelinę otoczoną rowkami w przypadku układu jednowymiarowego. Przewidywania płynące z opisanych wyżej zjawisk fizycznych zostały jednak poddane weryfikacji z wynikami eksperymentalnymi dotyczącymi układów dwuwymiarowych z otworami cylindrycznymi [10] i prostokątnymi [21], wykazując możliwość uogólnienia przedstawionego modelu.

Ze względu na trudności w eksperimentalnej realizacji układu z rysunku 3.2, oraz wyłączną zależność położenia rezonansu  $\lambda$  (3.3) od grubości  $H$  w kolejnych symulacjach skupiono się na siatce dyfrakcyjnej przedstawionej na rysunku 3.3.

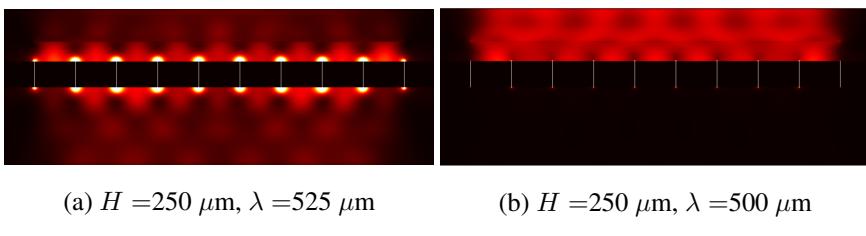


Rysunek 3.4: Zależność współczynnika transmisji od parametrów geometrycznych siatki. Niebieską linią kropkowaną zaznaczono przewidywane wzorem (3.3) położenie maksimum rezonansu transmisji.

Za pomocą symulacji metodą FDTD sprawdzono przewidywane w przybliżeniu cienkich falowodów położenie rezonansu, oraz dokonano ilościowego oszacowania transmisji promieniowania THz przez nieskończoną jednowymiarową metalową siatkę dyfrakcyjną w zależności od jej grubości  $H$  i współczynnika wypełnienia  $f = \frac{d-a}{d}$ . Wykresy przedstawione na rysunku 3.4 wykazują, że nawet dla siatek dyfrakcyjnych o szerokich, chociaż ciągle znacząco podfalowych otworach, jak na rysunku 3.4b, gdzie  $a = 40 \mu m$  możliwe jest uzyskanie transmisji rezonansowej. Położenie rezonansu ulega jednak przesunięciu w kierunku większych długości fal [55].

Za pomocą symulacji metodą FDTD wykazano również, że wraz ze wzrostem okresu siatki  $d$  następuje zarówno przesunięcie maksimum rezonansu w kierunku dłuższych fal, jak i zawężenie transmitowanego pasma. Wydłużenie okresu siatki

może więc posłużyć do zawężenia zakresu transmitowanych długości fali przy jednoczesnym powiększeniu otworów. Rozkład energii całkowitej pola E-M uzyskanego przy oświetleniu omawianych siatek złotych falą o długości dla której osiągane jest maksimum transmisji  $\lambda = 525\mu\text{m}$  przedstawia rysunek 3.5a, natomiast rozkład pola powstający w przypadku źródła odstrojonego od rezonansu  $\lambda = 500\mu\text{m}$  przedstawia rysunek 3.5b.

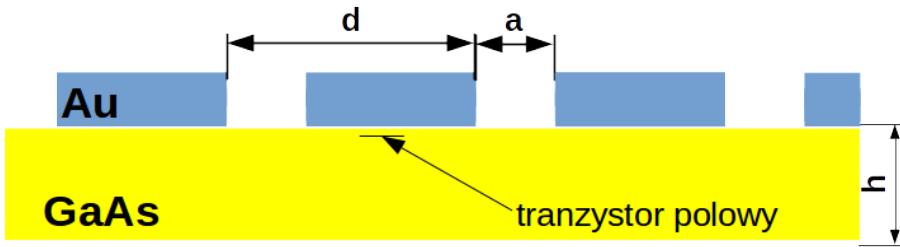


Rysunek 3.5: Rozkład gęstości energii pola E-M dookoła siatki złotej oświetionej z góry za pomocą monochromatycznego źródła o długości fali (a)  $\lambda = 525\mu\text{m}$ , (b)  $\lambda = 500\mu\text{m}$

### 3.1.2. Antena dla promieniowania THz o działaniu opartym na wzbudzeniu modu falowodowego

Projektowana antena promieniowania THz powinna nie tylko zapewniać selektywność reakcji na promieniowanie E-M z wąskiego zakresu długości fali, co można uzyskać przy użyciu mechanizmów opisanych w podrozdziale 3.1.1. Jej podstawowym zadaniem jest umożliwienie wzbudzenia detektora zlokalizowanego w małym obszarze za pomocą promieniowania padającego na dowolną część anteny. Zastosowanie siatki dyfrakcyjnej jest najwydajniejszą metodą na sprężenie fali E-M z zakresu THz do podkładu z półprzewodnika. Możliwa jest wydajność sprężenia sięgająca nawet 80%[40]. Schemat układu anteny, wraz z podkładem w którym umieszczony jest detektor promieniowania THz w postaci tranzystora polowego, przedstawia rysunek 3.6.

Rozkład pola na rysunku 3.5a nie zapewnia transportu promieniowania E-M w kierunku tranzystora polowego. Możliwy jest jednak transport energii z wykorzystaniem falowodu planarnego tworzonego przez podkład z *GaAs*. Ze względu



Rysunek 3.6: Schemat detektora promieniowania THz na tranzystorze polowym umieszczonym w falowodzie z  $GaAs$  z naniesioną złotą siatką dyfrakcyjną

na konieczność stosowania polaryzacji TM w strukturach opisywanych w części 3.1.1 w tej części skupiamy się również jedynie na tego typu oświetleniu. Przyjmijmy obecnie, że propagacja fali wzdłuż falowodu odbywa się w kierunku  $z$ . Wtedy trzy składowe pola E-M opisujące propagującą falę to  $E_x, E_z$  i  $H_y$ , które zgodnie z równaniami Maxwella spełniają układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\mu\omega H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= i\omega\varepsilon E_z, \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega\varepsilon E_x. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Z powyższych równań wyprowadzić można równanie różniczkowe drugiego rzędu, będące jedną z postaci równania Helmholtza, dla składowej  $H_y$  w postaci

$$[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu_0\varepsilon(x)]H_y = 0, \quad (3.5)$$

w którym  $\varepsilon(x)$  jest współczynnikiem załamania ośrodków. W rozważanym przypadku

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x > h \text{ powyżej podkładu z GaAs} \\ \varepsilon_{\text{GaAs}}, & \text{dla } 0 < x < h \text{ wewnątrz podkładu z GaAs} \\ \varepsilon_x, & \text{dla } x < 0 \text{ poniżej podkładu z GaAs.} \end{cases} \quad (3.6)$$

W powyższym równaniu współczynnik załamania poniżej struktury został opisany jako  $\varepsilon_x$ , co pozwala w dalszej analizie rozważać falowody w których  $GaAs$  zostało

umieszczone na innym materiale. Szukając rozwiązań równania (3.5) w postaci fal płaskich, propagujących się wewnątrz rdzenia ( $0 < x < h$ ) wzdłuż osi z:

$$H_y(x, z) = H_y(x)\exp(-i\beta z), \quad (3.7)$$

oraz w postaci fal zanikających na zewnątrz rdzenia, otrzymujemy równanie zwyczajne

$$\frac{dH_y^2(x)}{dx^2} + [\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2]H_y = 0, \quad (3.8)$$

dla którego stosując standardowe warunki zszycia otrzymujemy równanie dyspersyjne modów prowadzonych w postaci [37]:

$$\operatorname{tg}(\kappa h) = \frac{\kappa[\delta(\frac{n_{\text{GaAs}}}{n_x})^2 + \gamma n_{\text{GaAs}}^2]}{\kappa^2 - \gamma\delta(\frac{n_{\text{GaAs}}}{n_x})^2}, \quad (3.9)$$

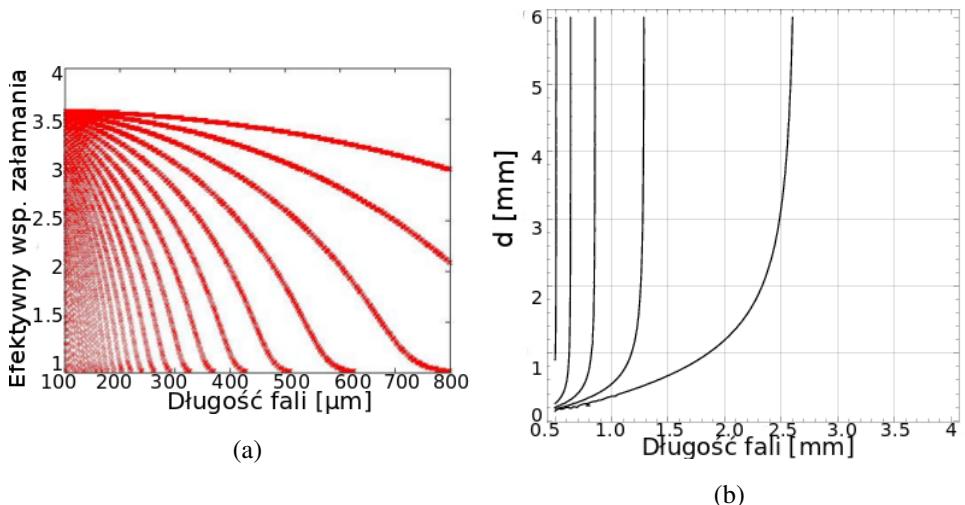
gdzie przez  $n_{\text{GaAs}}$  i  $n_x$  oznaczono odpowiednio współczynnik załamania warstwy arsenku galu, oraz podkładu. Wprowadzono również dodatkowe oznaczenia w postaci

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\beta^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_x}, \\ \gamma &= \sqrt{\beta^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0}, \\ \kappa &= \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{\text{GaAs}} - \beta^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Wszystkie wartości  $\beta$  spełniające równanie (3.9) są dopuszczalnymi wartościami składowej wektora falowego w kierunku propagacji. W ten sposób efektywne współczynniki załamania modów TM w falowodzie planarnym można obliczyć jako  $n_{\text{eff}} = \frac{\beta}{k_0}$ . Rozwiązanie powyższego równania możliwe jest jedynie na drodze numerycznej (lub graficznie). W przypadku rozważanych podkładów z  $GaAs$ ,  $h = 400 \mu m$ , możliwe wartości efektywnego współczynnika załamania przedstawia wykres 3.7a. Różne współczynniki  $n_{\text{eff}}$  odpowiadające tej samej długości fali wynikają z wielomodowego charakteru falowodu tworzonego przez podkład  $GaAs$ . Dopasowanie pędowe między modelem prowadzonym w falowodzie, a falą padającą wymaga dodania odpowiedniego pędu do fali padającej przez siatkę dyfrakcyjną, co dla składowych wektora falowego możemy zapisać jako

$$k_{i\parallel} + l\frac{2\pi}{d} = k_0 \cdot n_{\text{eff,m}},$$

gdzie przez  $k_{i\parallel}$  oznaczono składową wektora falowego równoległą do kierunku propagacji w falowodzie,  $l$  jest liczbą całkowitą odpowiadającą rzędowi ugięcia



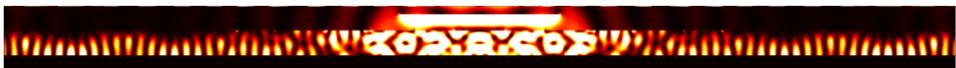
Rysunek 3.7: Wyniki rozwiązywania problemu falowodu planarnego o grubości  $h=400 \mu\text{m}$  z GaAs. (a) Zależność  $n_{\text{eff}}$  od długości fali, (b) wykres łączący okres siatki dyfrakcyjnej z długością fali dla której pracuje antena.

na siatce dyfrakcyjnej, a  $n_{\text{eff},m}$  jest efektywnym współczynnikiem  $m$ -tego modu falowodowego. W przypadku padania normalnego pęd fali padającej w kierunku propagacji w falowodzie wynosi zero. Szczególnie interesujący jest również przypadek wzbudzenia modu za pomocą pierwszego rzędu dyfrakcyjnego siatki, ponieważ dla niego uzyskamy największą wydajność, dlatego po uproszczeniu z powyższego równania możemy wyprowadzić

$$d = \frac{2\pi}{k_0 \cdot n_{\text{eff},m}}. \quad (3.11)$$

Na podstawie powyższego wzoru przygotowano wykres zależności okresu siatki  $d$  potrzebnej do wzbudzenia kolejnych modów falowodowych w zależności od długości fali dla której pracować ma antena. Wyniki tych obliczeń przedstawia wykres 3.7b.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń zaproponowano siatkę dla źródła o częstotliwości  $f = 300 \text{ GHz}$  ( $\lambda \approx 1 \text{ mm}$ ) o grubości  $H = 1 \mu\text{m}$  i okresie  $d = 729 \mu\text{m}$ . W strukturach wytwarzanych eksperymentalnie pod podkładem *GaAs* znajduje się warstwa *Au* o grubości  $1 \mu\text{m}$ , którą w symulacji metodą FDTD traktujemy jako doskonały przewodnik. Na rysunku 3.8 przedstawiono rozkład gę-



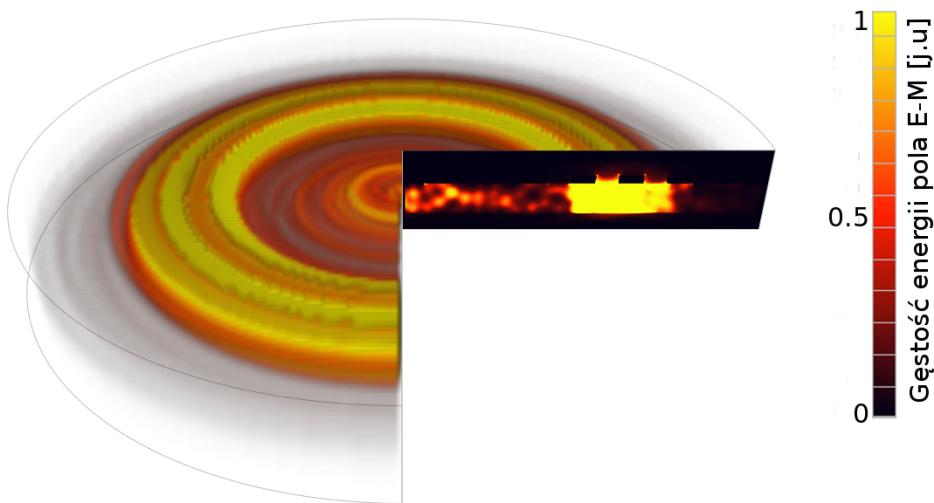
Rysunek 3.8: Uzyskany za pomocą symulacji metodą FDTD, uśredniony rozkład gęstości energii pola elektromagnetycznego wewnętrz falowodu z  $GaAs$ , na którym umieszczono antenę w postaci siatki dyfrakcyjnej o  $d = 729 \mu\text{m}$  oświetloną pod kątem normalnym za pomocą źródła o częstotliwości 300 GHz.

stości energii wewnętrz zaproponowanej struktury. Wyniki symulacji komputerowych potwierdzają możliwość propagacji promieniowania E-M z zakresu subterahercowego w kierunku detektora w zaprojektowanym układzie. Niemal bezstratna propagacja promieniowania z tego zakresu w półprzewodnikach została potwierdzona w pracach eksperymentalnych [40].

Bazując na pracach numerycznych dotyczących jednowymiarowych siatek dyfrakcyjnych pozwalających na wzbudzenie modów falowodowych w podkładach z  $GaAs$  przeanalizowane zostało działanie analogicznych falowodów opartych na cylindrycznych siatkach dyfrakcyjnych. Ze względu na wzbudzenie modów falowodowych o kierunku propagacji prostopadłym do pasków siatki dyfrakcyjnej uzyskujemy częściową koncentrację promieniowania w obszarze detektora. Odpowiedni eksperiment numeryczny został przeprowadzony przy użyciu metody FDTD we współrzędnych cylindrycznych, szerzej opisanej w podrozdziale 2.1.7. Wyniki symulacji przedstawione na rysunku 3.9 odpowiadają strukturze z  $GaAs$  o rozmiarach  $10 \times 10\text{mm}$  pokrytej siatką dyfrakcyjną o okresie  $d = 538 \mu\text{m}$  i otworach o szerokości  $250 \mu\text{m}$  (współczynnik wypełnienia  $f = 0.53$ ), która została oświetlona promieniowaniem o długości fali  $\lambda = 2.52 \text{ mm}$ . W ten sposób potwierdzono możliwość wykorzystania tego typu struktur do konstrukcji anten dla detektorów promieniowania THz umieszczonych wewnętrz podkładu z  $GaAs$  [50].

## 3.2. Transmisja jednokierunkowa

W dalszej części tego rozdziału omawiane są podwójne metalowe siatki dyfrakcyjne (ang. DMG - double metallic grating). Dla rozróżnienia, w odniesieniu do wcześniej omawianych siatek wykorzystywany jest termin SMG (ang. single

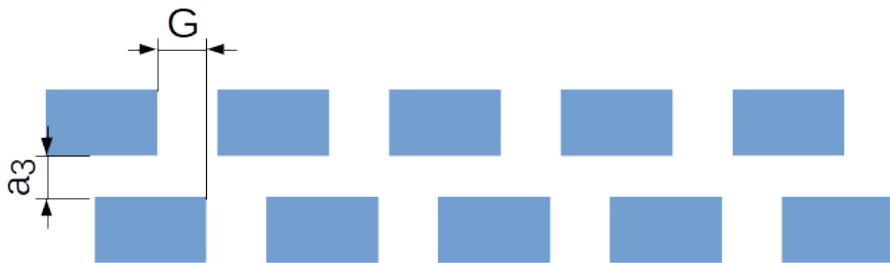


Rysunek 3.9: Rozkład energii pola E-M uzyskany w symulacji metodą BOR FDTD wewnętrz falowodu planarnego z siatką o geometrii cylindrycznej umieszczoną na podkładzie z *GaAs*. Wynik symulacji znajduje się w przekroju przedstawionym na rysunku. Obrazowe przejście do geometrii cylindrycznej uzyskano przez wizualizację średniej wartości w danym punkcie falowodu.

metallic grating).

Przykład struktury typu DMG zbudowanej z dwu siatek dyfrakcyjnych o tym samym współczynniku wypełnienia i okresie przedstawia rysunek 3.10. Propozycję tego typu struktury jako uogólnienia SMG podał Chen Cheng i inni [7], prezentując możliwość regulacji położenia maksimum widma transmisji przez dobór względnego usytuowania siatek. Zgodnie ze schematem na rysunku 3.10 rozsunięcie siatek opisywane jest dwoma parametrami  $G$  i  $a_3$ . Możliwe jest uzyskanie niskiej transmisji przez strukturę dla szerokiego zakresu widmowego przy odpowiednim doborze względnego położenia siatek, co może zostać wykorzystane do budowy urządzeń mikromechanicznych kontrolujących współczynnik transmisji wiązki [7].

Analizę fizycznych mechanizmów prowadzących do nadzwyczajnej transmisji przez DMG zaczniemy od przypadku  $a_3 = 0$  i  $G = 0$ . W takiej sytuacji uzyskujemy strukturę SMG o grubości dwóch siatek składających się na DMG. Zgodnie

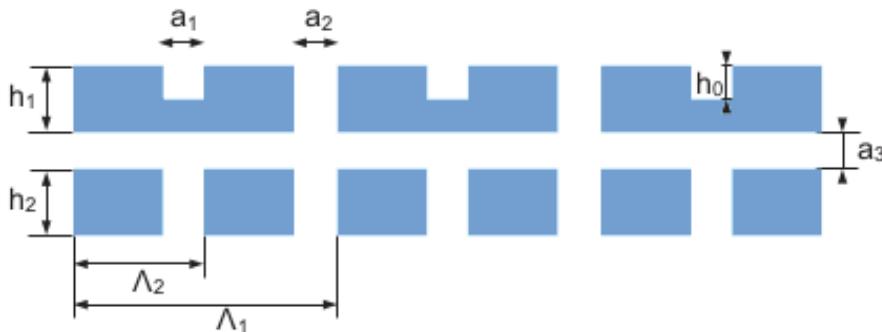


Rysunek 3.10: Schematyczny obraz siatki DMG analizowanych w pracy [7]

z wykresami na rysunku 3.3 dla tego typu siatki złożonej z dwóch SMG o grubości  $h = 300 \mu\text{m}$  (por. rys. 3.6) uzyskalibyśmy rezonanse transmisji takie jak dla siatki o  $h = 600 \mu\text{m}$ , czyli dla długości fali  $\lambda \approx 400 \mu\text{m}$  i  $\lambda \approx 600 \mu\text{m}$ . W wyniku stopniowego zwiększania odległości  $a_3$  obserwujemy zbliżanie obu maksimów transmisji [6]. W odległość  $a_3 \approx \frac{h}{2}$ , następuje degeneracja obu modów, a maksimum transmisji występuje w okolicach maksimum obu siatek SMG dla  $\lambda \approx 560 \mu\text{m}$  [6]. Dalsze zwiększanie odległości powoduje znaczący spadek transmisji w szerokim zakresie widma długości fali. Związane jest to ze słabym sprzężeniem stojącej fali powierzchniowej za pierwszą siatką SMG z modami falowodów w drugiej siatce SMG. Znaczne zwiększenie  $a_3$ , aż do odległości odpowiadającej warunkowi konstruktywnej interferencji w rezonatorze Fabry-Perot'a dworzonego przez powietrze i dwie warstwy o efektywnych współczynnikach i grubościach obliczonych zgodnie z modelem efektywnym przedstawionym w pracy [45] prowadzi do powstania kolejnych maksimów transmisji przez cały układ.

Niezależnie od modyfikowania własności transmisyjnych za pomocą odległości  $a_3$  między siatkami SMG, przesunięcie maksimum transmisji jak i jej blokowanie, można uzyskać zmieniając boczne przesunięcie siatek -  $G$ . Maksimum transmisji przez DMG można uzyskać również dla układu, w którym  $G$  dobrano tak, aby wyeliminować bezpośredni prześwit przez strukturę. Dla DMG jak na rysunku 3.10, maksimum transmisji przez strukturę występuje dla  $G$  równego zero lub połowie okresu SMG. Minimum transmisji natomiast dla  $G$  równego czwierć okresu SMG [5].

Możliwość zastosowania podwójnych siatek metalowych w celu uzyskania

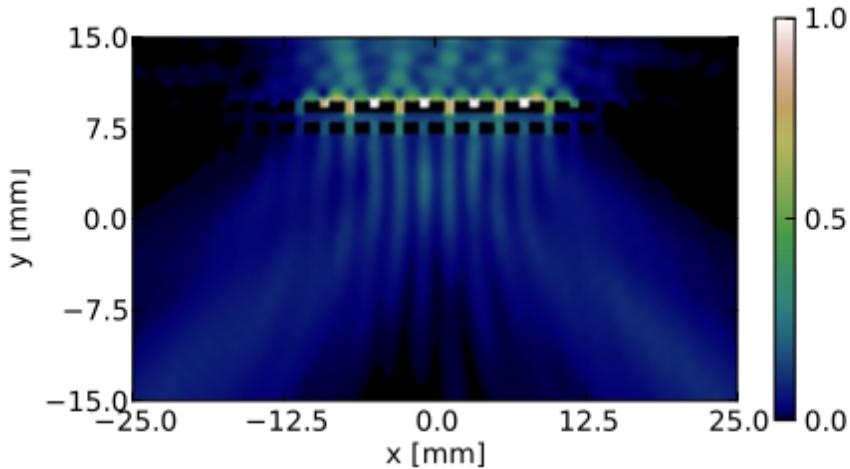


Rysunek 3.11: Schemat podwójnej siatki metalowej DMG zaprojektowanej do uzyskania transmisji asymetrycznej

różnej transmisji w przypadku propagacji światła w przeciwnych kierunkach przez strukturę zostało zaproponowane przez Ji Xu i innych [61]. W przeciwieństwie do wcześniejszych prac na temat DMG [7, 6, 5] w zaproponowanej strukturze jedna z siatek miała okres większy od długości fali dla której projektowano układ ( $\Lambda > \lambda$ ). Autorzy błędnie interpretując wyniki symulacji FDTD twierdzili, że możliwe jest zastosowanie tego typu struktury jako elementu toru optycznego o jednokierunkowej transmisji światła. Późniejsza analiza numeryczna i eksperymentalna wykazała, że układ spełnia twierdzenie Lorenza o wzajemności - w związku z czym nie może być traktowany jako izolator optyczny [14]. Zwiększenie okresu jednej z siatek umożliwiło zastosowanie rowków w siatce wejściowej dla kierunku charakteryzującego się wysokim współczynnikiem transmisji [61].

Odpowiednio dobrane parametry siatki podwójnej mogą prowadzić jednak do transmisji asymetrycznej. Różnica w transmisji przejawia się niskim współczynnikiem transmisji przy oświetleniu prostopadłym jednej ze stron i wysokim przy oświetleniu z drugiej. Nie jest to jednak warunek wystarczający na realizację izolatora optycznego [14], ponieważ w przypadku wysokiej transmisji promieniowanie E-M jest uginane przez siatkę dyfrakcyjną.

Fakt ten wynika z budowy podwójnej siatki metalowej służącej do uzyskania transmisji asymetrycznej, która została przedstawiona na rysunku 3.11. Uzyskanie transmisji jednokierunkowej możliwe jest przy dobraniu parametrów układu tak, aby  $\Lambda_1 = 2\Lambda_2$  oraz długość fali  $\lambda$  E-M padającej na DMG spełniała nierówność



Rysunek 3.12: Rozkład gęstości energii pola E-M w przypadku prostopadłego oświetlenia układu DMG zaprojektowanego do transmisji asymetrycznej od strony siatki z rowkami [54]

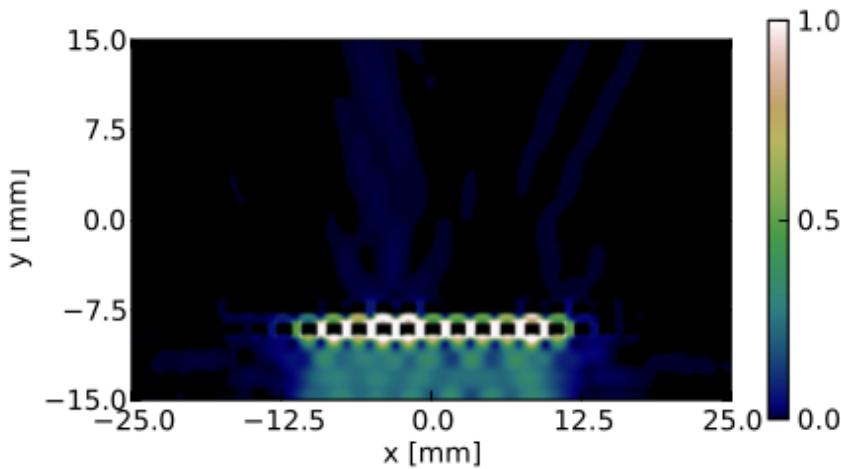
$\Lambda_2 < \lambda < \Lambda_1$ . Przywołując klasyczne prawo Braggów

$$\Lambda \cdot \sin(\alpha_k) = k\lambda, \quad (3.12)$$

gdzie  $\Lambda$  oznacza okres siatki dyfrakcyjnej,  $k$  jest liczbą całkowitą numerującą rząd dyfrakcyjny padający pod kątem  $\alpha_k$ , a  $\lambda$  długością padającej płaskiej fali E-M. Dla padania pod kątem  $0^\circ$ , zakładając otoczenie w postaci powietrza z obu stron DMG możemy wyprowadzić warunek na liczbę rzędów ugięcia uzyskiwanych przy użyciu siatki dyfrakcyjnej o okresie  $\Lambda$ .

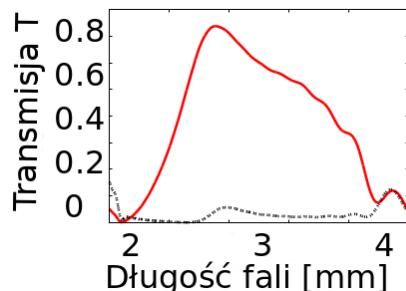
$$0 \leq |k| \leq \frac{\Lambda}{\lambda}, \quad (3.13)$$

z którego wynika, że omawiany układ może wykazywać jednie  $-1$ ,  $0$  i  $+1$  rząd ugięcia dla  $\Lambda = \Lambda_1$ . Ze względu na podfalowy okres  $\Lambda_2$  fala E-M padająca pod kątem  $0^\circ$  będzie przez tę siatkę propagować się bez zmiany kierunku. W wyniku interferencji za siatką dyfrakcyjną o okresie  $\Lambda_1$  możliwe jest wyeliminowanie jednego z rzędów dyfrakcyjnych. Przedstawiona siatka projektowana jest dla długości fali  $\lambda \approx 2.9$  mm, dla której kąt ugięcia  $-1$  i  $+1$  rzędu wynosi  $\alpha_{\pm 1} = 45^\circ$ , która charakteryzuje się wygaszeniem rzędu zerowego. Wynik symulacji FDTD przed-



Rysunek 3.13: Rozkład gęstości energii pola E-M w przypadku prostopadłego oświetlenia układowi DMG zaprojektowanego do transmisji asymetrycznej od strony siatki podfalowej [54]

Rysunek 3.14: Zależność współczynnika transmisji przez omawianą strukturę DMG od długości fali dla oświetlenia z różnych stron. Wykres odpowiada DMG o  $\Lambda_1 = 2\Lambda_2 = 4.2$  mm,  $a_1 = a_2 = a_3 = 0.7$  mm,  $h_1 = h_2 = 2h_0 = 1$  mm [54].



stawiający rozkład energii pola E-M w przypadku oświetlenia struktury od strony siatki o okresie  $\Lambda_1$  przedstawia rysunek 3.12.

W innym ujęciu, strukturę typu DMG można analizować jako układ falowodów metal-dielektryk-metal, o rozmiarach podfalowych ( $a_1, a_2, a_3 < \lambda$ ), dlatego wzbudzany może być w nich jedynie mod podstawowy w polaryzacji TM. Promieniowanie o polaryzacji TE jest w pełni odbijane przez omawiany układ. Dla  $h_1 = h_0$  i  $a_3 \rightarrow 0$  struktura przypomina siatkę omawianą w podrozdziale 3.1.1 przedstawioną na rysunku 3.3. W przypadku  $a_3 \neq 0$  możliwe jest dodatkowe sprzęganie pomiędzy falowodami poprzez falówkę powstający pomiędzy siatkami

dyfrakcyjnymi. Różnica w fazie składowych pola E-M dochodzącego do otworów w siatce o okresie  $\Lambda_1$  w przypadku oświetlenia prostopadłego od strony siatki o okresie  $\Lambda_2$  w omawianym przypadku wynosi  $\pi$  w wyniku czego współczynnik transmisji dla takiej sytuacji zbliża się do 0. Rozkład gęstości energii odpowiadający oświetleniu układu od strony siatki o okresie  $\Lambda_2$  przedstawia rysunek 3.13.

W wyniku optymalizacji numerycznej parametrów struktury<sup>3</sup> uzyskano dla szerokiego zakresu długości fali znaczącą różnicę współczynników transmisji dla oświetlenia z różnych stron DMG [54]. Zależność współczynnika transmisji przez DMG w przeciwnych kierunkach od długości fali przedstawia wykres na rysunku 3.14. Dalsze symulacje numeryczne wykazały, że możliwa jest niezależna zmiana otworów w obu siatkach bez utraty transmisji jednokierunkowej w celu poprawy kontrastu standardowo wyrażanego wzorem

$$C = \frac{|T_1 - T_2|}{T_1 + T_2}, \quad (3.14)$$

gdzie przez  $T_1$  i  $T_2$  oznaczono natężeniowe współczynniki transmisji przy oświetleniu DMG odpowiednio od strony siatki o okresie  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$ .

Dla pełnego zrozumienia znaczenia kontrastu wprowadźmy dodatkowe definicje:

$$\begin{aligned} R &= T_1 - T_2 \\ Q &= \frac{T_1}{T_2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Zakładając, że  $T_1 > T_2$  (z czego wynika, że  $Q > 1$ ), możemy zapisać wyrażenie z mianownika wzoru (3.14) za pomocą wprowadzonych zmiennych  $R$  i  $Q$ :

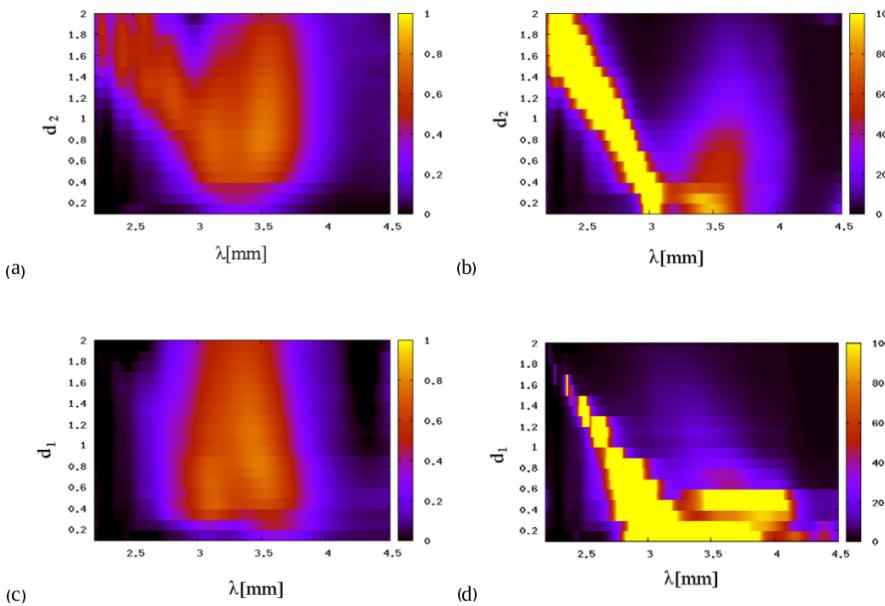
$$T_1 + T_2 = \frac{Q + 1}{Q - 1} \cdot R, \quad (3.16)$$

co po podstawieniu do wzoru (3.14) wskazuje, że pomimo tego, że różnica transmisji  $R$  znajduje się w liczniku wyrażenia, to sam kontrast zależny jest jedynie od ilorazu transmisji w przeciwnych kierunkach i wyraża się wzorem:

$$C = \frac{Q - 1}{Q + 1}. \quad (3.17)$$

---

<sup>3</sup>Prowadzonej przy pomocy serii symulacji metodą FDTD, w których parametry struktury podlegały ewolucji na bazie algorytmu genetycznego.



Rysunek 3.15: Zależność współczynników  $R$  (a) i (c), oraz  $Q$  (b) i (d) od długości fali  $\lambda$  oraz od rozmiarów otworów w obu siatkach. Rozmiar otworów dla (a) i (b) jest równy  $d_1 = 0.7$  mm, natomiast dla (c) i (d)  $d_2 = 0.7$  mm

Oznacza to, że oprócz kontrastu  $C$ , przy analizie transmisji należy posługiwać się także transmisją  $T_1$  lub różnicą  $R$  [53]. Równoważnie można prowadzić optymalizację tego typu struktury wykorzystując do tego wprowadzone oznaczenia  $R$  i  $Q$ . Dla odróżnienia od poprzednich siatek, w których otwory w obu siatkach SMG były równe  $a_2$  wprowadzono oznaczenia  $d_1$  i  $d_2$  - dla otworów w siatkach o okresie odpowiednio  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$ . Zależność wprowadzonych w (3.15) współczynników od długości fali i rozmiarów otworów przedstawiają wykresy na rysunku 3.15.

Optymalne parametry pracy wielowarstwy to  $R = 1$  oraz  $Q \rightarrow \infty$  ozna- cające transmisję jednokierunkową. Na podstawie wyników zaprezentowanych na rysunku 3.15 możemy stwierdzić, że optymalnymi rozmiarami otworów są  $d_1 \in (0.3, 0.5)$  mm, oraz  $d_2 \in (0.6, 1)$  mm w przypadku pracy układu dla dłu- gości fali z zakresu  $\lambda \in (2.5, 4)$  mm. Dodatkowo stwierdzić można, że

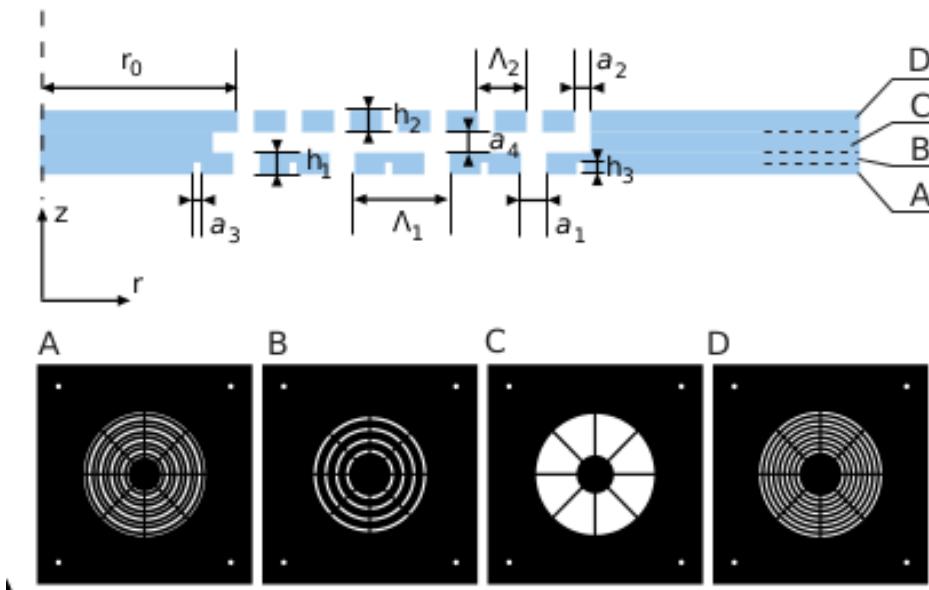
- Zwiększenie  $d_1$  powyżej wskazanego zakresu powoduje znaczne zwiększenie transmisji w kierunku blokującym - co objawia się spadkiem kontrastu na wykresie 3.15d.
- Zmiana rozmiaru  $d_2$  nie ma zasadniczego wpływu na  $Q$ , a tym samym na kontrast (3.17), może jednak prowadzić do poszerzenia widma i zwiększenia różnicy  $R$  transmisji w przeciwnych kierunkach (patrz rysunek 3.15a).
- Dla wąskiego zakresu długości fali w okolicach  $\lambda \approx 2.6$  mm, możliwe jest uzyskanie wysokiego kontrastu  $Q > 100$  i różnicy  $R \approx 0.7$ , dla  $d_1 > 1$  mm. Taka struktura wykazuje jednak transmisję wynoszącą ok. 10% dla fal dłuższych od 3 mm [53].

### 3.3. Soczewka dyfrakcyjna z transmisją jednokierunkową

Transmisja w -1 i +1 rzędzie dyfrakcyjnym przez strukturę jednowymiarową opisywaną w poprzedniej części pracy może zostać wykorzystana do koncentracji wiązki.

W omawianej wcześniej geometrii planarnej za siatką obserwowaliśmy obszary konstruktywnej i destruktywnej interferencji z kolejnych otworów siatki. W poniższym podrozdziale analizowana jest podwójna siatka dyfrakcyjna, która prowadzi do koncentracji promieniowania za pomocą mechanizmu przypominającego działanie płytki strefowej Fresnela. Analogię między geometrią planarną, a cylindryczną możemy odnaleźć poprzez myślowe przedstawienie siatki jednowymiarowej jako fragmentu siatki o bardzo dużym promieniu  $r$ . Ze względu na konieczność oświetlenia DMG za pomocą promieniowania E-M, którego natężenie pola magnetycznego  $H$  jest w każdym punkcie równoległe do pasków siatki, niezbędne w geometrii cylindrycznej jest wykorzystanie źródła fali E-M o polaryzacji radialnej.

W celu eksperimentalnej realizacji jednokierunkowej soczewki dyfrakcyjnej dla promieniowania THz, zaprojektowane zostały przesłony o grubości  $\frac{\lambda}{30} =$

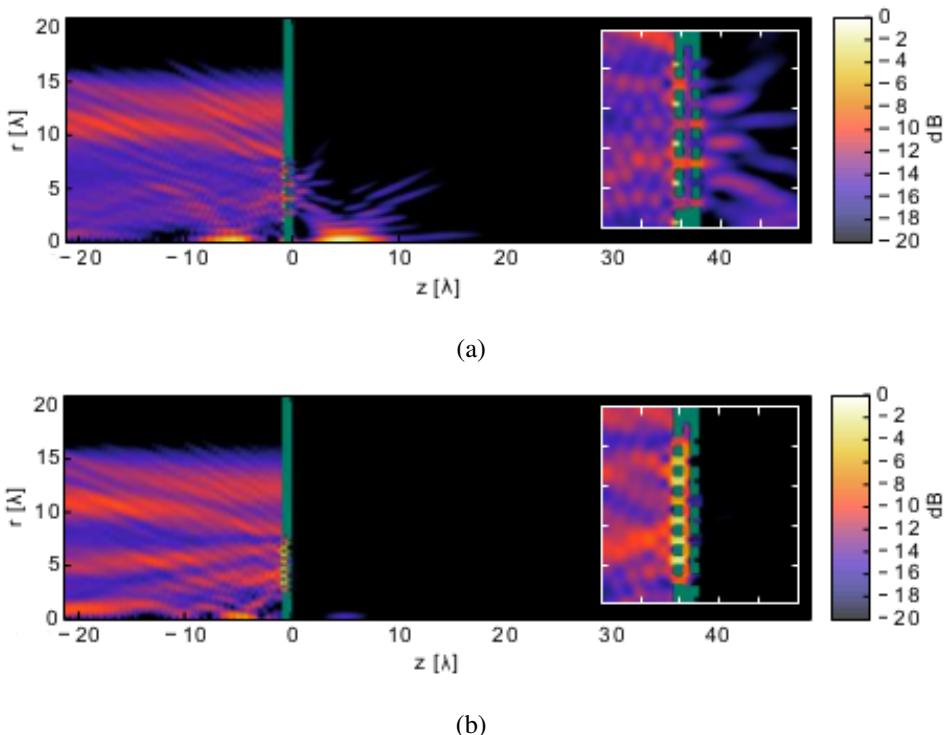


Rysunek 3.16: Schemat DMG w konfiguracji cylindrycznej uzyskiwanej przez złożenie wielu przesłon o grubości  $\frac{\lambda}{30}$  [63]

0.1 mm, które układane w stos jak na rysunku 3.16 zostały wykorzystane do budowy cylindrycznej wersji struktury typu DMG [63].

Układ poddany ostatecznej weryfikacji doświadczalnej i obliczeniowej składał się z dwóch siatek dyfrakcyjnych zawierających odpowiednio 4 i 8 otworów. Okresy siatek wynosiły  $\Lambda_1 = \frac{4}{3}\lambda$  i  $\Lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda$ , rozmiary otworów to odpowiednio  $a_1 = \frac{1}{3}\lambda$  i  $a_2 = 0.267\lambda$ . Odległość od osi symetrii do pierwszej szczeliny wynosiła  $r_0 = 2.67\lambda$ . Grubości obu siatek były sobie równe  $h_1 = h_2 = \frac{1}{3}\lambda$  a odległość między nimi  $a_4 = 0.233\lambda$ . Dodatkowe rowki wzmacniające transmisję miały szerokość  $a_3 = 0.133\lambda$  i głębokość  $h_3 = \frac{h_1}{2}$ .

Taka struktura oświetlona została falą o polaryzacji radialnej o profilu amplitudy opisanym za pomocą funkcji supergaussowskiej  $A \propto \exp\left\{-\frac{(r-R_0)}{2\sigma^2}\right\}^{10}$ , będącej numerycznym odpowiednikiem fali płaskiej we współrzędnych cylindrycznych. Rozkład gęstości energii odpowiadający opisanej symulacji przedstawia rysunek 3.17. Na podstawie symulacji FDTD z impulsem gaussowskim wyznaczono współczynnik kontrastu struktury (3.14) równy  $C = 99.8\%$  [63]. Ponieważ metal



Rysunek 3.17: Rozkład gęstości energii pola E-M dla cylindrycznej siatki DMG oświetlonej falą o płaskim froncie falowym wykazujący (a) wysoką transmisję i koncentrację (b) brak transmisji fali padającej [63]. Wewnętrz wykresów przedstawione zostały powiększone obrazy rozkładu gęstości energii w pobliżu struktury.

tworzący podwójną siatkę metalową opisywany jest w symulacji jako doskonały przewodnik, wykonane obliczenia są, w granicach stosowności tego przybliżenia, skalowalne z długością fali.



## Rozdział 4

# Absorbery o budowie warstwowej

Poniższy rozdział traktuje o realizacji nieodbijających warstw absorpcyjnych opartych na koncepcji PML, za pomocą struktur warstwowych (por. rozdział 2.1.5). Na początku rozdziału przedstawione zostało wyprowadzenie PML za pomocą optyki transformacyjnej [36]. W kolejnym podrozdziale zaprezentowano możliwość realizacji metamateriału o właściwościach efektywnych odpowiadających warstwie UPML za pomocą wielowarstwy [33]. Zaproponowano również wielowarstwę opartą o dostępne materiały, wykazującą właściwości nieodbijającej warstwy absorpcyjnej dla długości fali  $8 \mu\text{m}$ .

### 4.1. Wyprowadzenie UPML

Rozważania dotyczące PML zaczniemy od przytoczenia ogólnej postaci równania falowego [3]

$$\nabla \cdot (a \nabla U) = \frac{1}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\ddot{u}}{b}, \quad (4.1)$$

gdzie przez  $u(\vec{x}, t)$  oznaczono skalarną amplitudę fali,  $a = a(\vec{x})$  i  $b = b(\vec{x})$  są parametrami, które opisują ośrodek w którym propaguje się fala. Dla tak sformułowanego równania, możemy zdefiniować wielkość  $c = \sqrt{ab}$  mającą interpretację prędkości fazowej fali opisywanej powyższym równaniem. Równanie (4.1) jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, które możemy zapisać w postaci

układu dwóch równań z pierwszą pochodną poprzez wprowadzenie pola  $\vec{v}(x, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b \nabla \cdot \vec{v}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = a \nabla u. \quad (4.3)$$

Powyzsze dwa równania, możemy zapisać w postaci równania wektorowego

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ a \nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \nabla \cdot \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \hat{D} \vec{w}, \quad (4.4)$$

dla liniowego operatora  $\hat{D}$  i  $\vec{w} = (u; \vec{v})$  ( dla  $\vec{v}$  należącego do przestrzeni trójwymiarowej  $\vec{w}$  jest czterowektorem). Kluczową własnością, która decyduje o tym, że równanie (4.4) jest „równaniem falowym” okazuje się być antyhermitowskość operatora  $\hat{D}$ <sup>1</sup>. To właśnie z tej własności wynikają oscylujące rozwiązania równania, oraz spełnienie prawa zachowania energii mające kluczowe znaczenie dla fizyki fal. Każde równanie falowe, zaczynając od równań skalarnych, przez równania Maxwella, po równanie Schrödinger'a i równania Lamé-Navier'a (opisującego fale sprężyste w ciałach stałych) może zostać przedstawione w formie  $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \hat{D} \vec{w}$ , dla pewnej funkcji falowej  $\vec{w}$  i antyhermitowskiego operatora  $\hat{D}$  [17]. W niniejszej pracy skupiamy się na zastosowaniu PML w elektromagnetyzmie, te same koncepcje mogą być jednak zastosowane do wszystkich wymienianych przypadków.

Załóżmy, że  $w(x, t)$  jest rozwiązaniem równania falowego w nieograniczonej przestrzeni. Interesujące nas zjawiska zachodzą w okolicy początku układu współrzędnych  $x = 0$ , a obszar symulacji chcemy zakończyć tak, aby absorbował fale propagujące się. W szczególności skupimy się na zakończeniu obszaru symulacji dla dodatniej części osi  $+x$  (rozważanie dla pozostałych kierunków jest analogiczne). Zakończenie obszaru symulacji przeprowadzimy w czterech krokach:

1. W nieskończonej przestrzeni wykonamy analityczne przedłużenie równania falowego i rozwiązania do zespolonego konturu  $x$ .

---

<sup>1</sup>Macierz nazywamy antyhermitowską wtedy gdy spełnia warunek  $A = -A^\dagger$ , gdzie przez  $^\dagger$  rozumiemy sprzężenie hermitowskie macierzy, równoważne dokonaniu transpozycji i sprzężenia zespolonego wszystkich elementów macierzy.

2. Dla konturu  $x$  nie będącego konturem czysto rzeczywistym, fale propagujące się poza interesującym nas obszarem zmieniane są na fale zanikające bez wprowadzenia odbicia.
3. W nieograniczonej przestrzeni dokonamy zamiany współrzędnych za pomocą przekształcenia ciągłego, tak aby wyrazić zespolony  $x$  przez rzeczywiste położenie. W nowych współrzędnych otrzymamy rzeczywiste położenia i materiały których własności są opisywane za pomocą liczb zespolonych.
4. Zakończymy obszar symulacji w obliczonym na podstawie zamiany zmiennych materiale w miejscu w którym pole będzie na tyle stłumione, aby zastosowany warunek brzegowy nie miał znaczenia.

Zakładamy dalej, że przestrzeń znajdująca się daleko od interesującego nas obszaru w okolicach  $x = 0$ , jest jednorodna, liniowa i nie zmienia się w zależności od czasu. Dzięki tym założeniom, fala propagująca się musi przyjmować formę superpozycji fal płaskich:

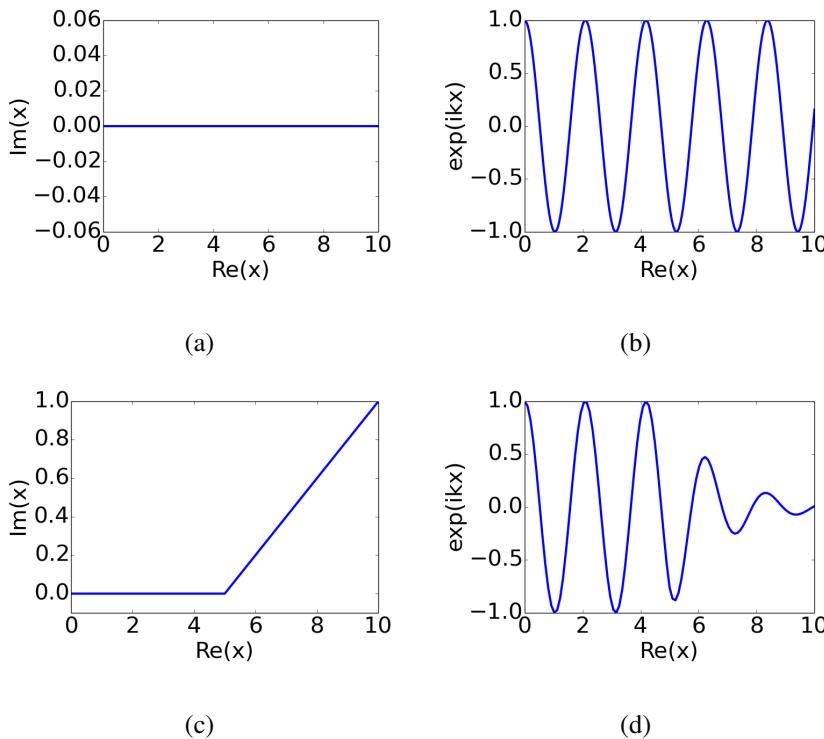
$$w(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, \omega} W_{\vec{k}, \omega} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad (4.5)$$

gdzie  $W_{\vec{k}, \omega}$  są jedynie funkcjami położenia,  $\omega$  częstością kołową, a  $\vec{k}$  wektorem falowym dla fal w ośrodku izotropowym z zależnością dyspersyjną  $\omega = ck_0$ , gdzie  $c$  oznacza prędkość fazową. Dla fal propagujących się w kierunku  $+x$  prędkość grupowa  $\frac{d\omega}{dk}$  jest dodatnia. Kierunek prędkości fazowej i grupowej w ośrodkach jednorodnych są zgodne z wyjątkiem kilku szczególnych przypadków [57]. Dlatego dalej założymy, że  $k_x$  jest dodatnie.

Kluczowym jest, składniki sumy z wzoru (4.5) mogą zostać zapisane w postaci

$$\vec{W}(y, z) e^{i(k \tilde{x} - \omega t)}, \quad (4.6)$$

która to jest funkcją analityczną w  $\tilde{x} \in \mathbb{C}$ . Oznacza to, że możemy dokonać jej analitycznego przedłużenia dla zespolonych wartości  $x$ . Falę propagującą, wraz z czysto rzeczywistym konturem opisującym położenia w kierunku  $x$  przedstawiają wykresy na rysunku 4.1a i 4.1b. Jeżeli jednak zamiast rozważać propagację



Rysunek 4.1: Na rysunkach (a) i (b) przedstawiono odpowiednio rzeczywiste wartości położenia na zespolonej płaszczyźnie  $x$  i odpowiadające im rozwiązanie równania falowego. Na rysunku (c) dla wartości  $x > 5$  przedstawiono zmieniony kontur wykorzystujący zespolone wartości dla  $\tilde{x}$ . Odpowiednie dla zmodyfikowanego konturu (c) rozwiązanie równania falowego przedstawia wykres na rysunku (d).

wzdłuż rzeczywistego  $x$ , rozwiążemy problem propagacji po zespolonym konturze przedstawionym na wykresie 4.1c zauważymy, że dla obszaru w którym do rzeczywistej części dodaliśmy liniowo rosnącą część urojoną

$$\tilde{x} = \begin{cases} x, & \text{dla } x < 5 \\ x + 0.2x i, & \text{dla } x > 5 \end{cases}, \quad (4.7)$$

uzyskujemy falę zanikającą. Ponieważ na wykresie 4.1d rozwiązanie dla  $x < 5$  nie uległo zmianie, a w obszarze  $x > 5$  obserwujemy falę zanikającą to przestrzeń dla  $x > 5$  wykazuje działanie nieodbijającej warstwy absorpcyjnej.

Zgodnie z przedstawionym przykładem rozwinięcie analityczne możemy dla wygody obliczeniowej traktować równoważnie z zamianą współrzędnych w omawianym równaniu różniczkowym. Oznaczmy zespółony  $\tilde{x}(x) = x + i f(x)$ , traktując od tej pory  $x$  zawsze jako rzeczywiste położenie. Taka zamiana współrzędnych wymaga od nas zamiany każdego różniczkowania po zdeformowanym konturze  $\partial \tilde{x} = (1 + i \frac{df}{dx}) \partial x$ . Ponieważ założyliśmy, że nasze równanie różniczkowe jest niezależne od  $x$  (przynajmniej dla dużych  $x$ , gdzie  $f(x) \neq 0$ ; wynika to bezpośrednio z założenia jednorodności liniowości i niezależności od czasu) nie musimy uwzględniać żadnych dodatkowych wyrazów. Jak wykażemy w kolejnych akapitach wygodnie jest wybrać  $\frac{df}{dx} = \frac{\sigma_x}{\omega}$  i ostatecznie zapisać wymaganą zamianę zmiennych jako:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\sigma_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.8)$$

W obszarach PML, gdzie  $\sigma_x \neq 0$ , oscylujące rozwiązania równania falowego przyjmują postać fal eksponencjalnie zanikających. Poza PML ( $\sigma_x = 0$ ) rozwiązywane równanie pozostaje niezmienione: nie występują odbicia ponieważ jest to analityczne rozwinięcie pierwotnego rozwiązania i w obszarach gdzie  $\tilde{x} = x$  rozwiązanie nie może się zmienić.

Po wykonaniu podstawienia (4.8), rozwiązania równania falowego w obszarze PML przyjmują postać:

$$e^{ikx} e^{-\frac{k}{\omega} \int^x \sigma_x(x') dx'}. \quad (4.9)$$

Warto zauważyć, że pojawiający się wykładnik potęgi  $\frac{k}{\omega}$  dla materiałów bezdyspersyjnych jest stały i równy odwrotności prędkości fazowej. W ten sposób uzasadniliśmy zaproponowany wybór  $\frac{df}{dx} = \frac{\sigma_x}{\omega}$ , dzięki któremu otrzymujemy niezależność współczynnika tłumienia od częstotliwości promieniowania E-M.

Zasadniczo zgodnie z przedstawionym wyprowadzeniem możemy zastosować dowolnie mały obszar PML, ponieważ nie ma żadnego ograniczenia na wartości  $\sigma_x$ . W praktyce numerycznej, ze względu na zastosowaną dyskretyzację gwałtowne zmiany  $\sigma_x$  prowadzą do powstania „odbić numerycznych”. Z tego powodu  $\sigma_x$  zazwyczaj ma postać funkcji kwadratowej lub sześciennie narastającej od zera do wartości maksymalnej na obszarze większym od połowy długości fali promieniowania występującego w symulacji [18].

W przypadku równań Maxwella każda zamiana współrzędnych może zostać wyrażona przez równania Maxwella we współrzędnych kartezjańskich ze zmienionymi materiałami [60]. Zamiana współrzędnych jest równoważna zmianie przenikalności elektrycznej  $\varepsilon$  i magnetycznej  $\mu$ , w ogólności na absorbujące ośrodki anizotropowe.

W przypadku trójwymiarowych równań Maxwella dla ośrodka opisywanego za pomocą tensorów  $\hat{\varepsilon}$  i  $\hat{\mu}$

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

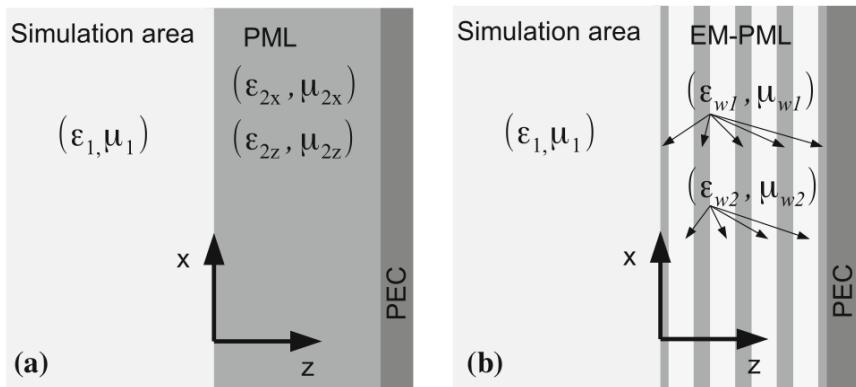
warstwą PML może być materiał charakteryzujący się przenikalnością elektryczną i magnetyczną opisywaną tensorami:

$$\hat{\varepsilon}_{\text{PML}} = \begin{bmatrix} s \cdot \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & s \cdot \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_z}{s} \end{bmatrix}, \hat{\mu}_{\text{PML}} = \begin{bmatrix} s \cdot \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & s \cdot \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_z}{s} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

gdzie  $s$  jest dowolną liczbą zespoloną [41], której część odpowiedzialna za tłumienie jest równoznaczna liniowemu współczynnikowi deformacji konturu zmiennych przestrzennych w część urojoną.

## 4.2. PML ze struktury warstwowej [33]

Porównując ogólną postać PML podaną w równaniu (4.11) z modelem ośrodka efektywnego przedstawionym w podrozdziale 2.4 można zaproponować przybliżenie ośrodka typu PML za pomocą struktury warstwowej o odpowiednich właściwościach efektywnych. Schematycznie taką wielowarstwę przedstawia rysunek 4.2. W szczególności, dla uproszczenia analizy, skupimy się na polaryzacji TM, dla której istotnymi składowymi tensorów opisujących własności materiałowe są:  $\varepsilon_x$ ,  $\mu_y$  i  $\varepsilon_z$ . Ze względu na ograniczenia używanego modelu ośrodka efektywnego, zgodnie ze schematem na rysunku 4.2 otrzymujemy  $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ , oraz  $\mu_x = \mu_y$ . Ponownie odwołując się do granicy między ośrodkami na rysunku 4.2a warunki dla których wielowarstwa złożona z materiałów  $w1$  i  $w2$  schematycznie



Rysunek 4.2: Schematyczne przedstawienie analizowanej struktury warstwowej i przybliżanego za pomocą modelu ośrodka efektywnego ośrodka PML

przedstawiona na rysunku 4.2b będzie efektywnie spełniać rolę PML pod warunkiem spełnienia następujących równości:

$$f \cdot \epsilon_{w1} + (1 - f) \cdot \epsilon_{w2} = s \cdot \epsilon_1, \quad (4.12)$$

$$[f \cdot \epsilon_{w1}^{-1} + (1 - f) \epsilon_{w2}^{-1}]^{-1} = s^{-1} \cdot \epsilon_1, \quad (4.13)$$

$$f \cdot \mu_{w1} + (1 - f) \cdot \mu_{w2} = s \cdot \mu_1, \quad (4.14)$$

gdzie przez  $f$  oznaczony został współczynnik wypełnienia, równy ułamkowi przestrzeni wielowarstwy zajmowanemu przez materiał  $w1$ . Odpowiednie warunki dla polaryzacji TE to:

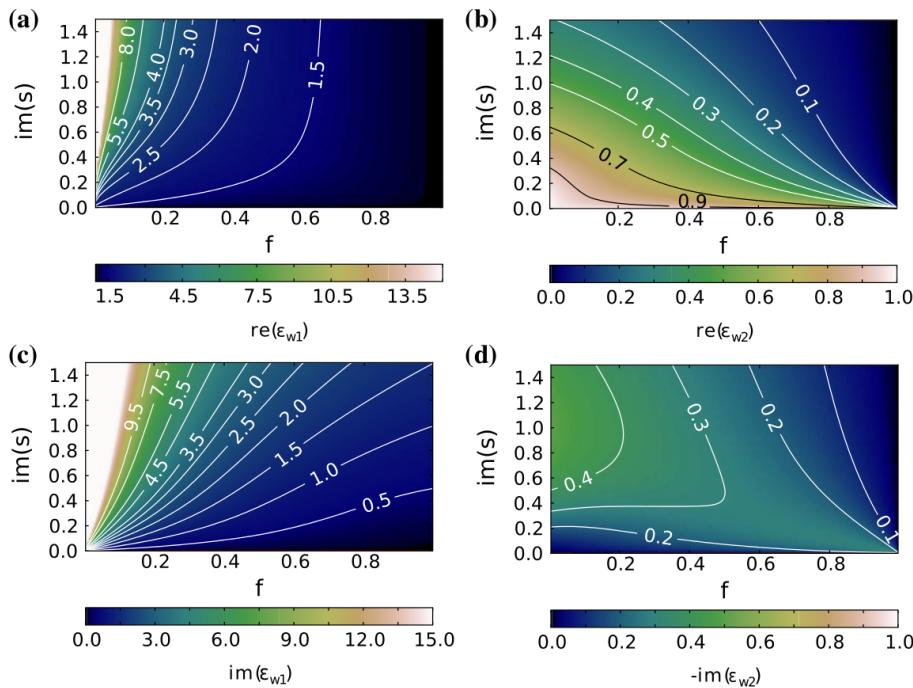
$$\epsilon_{w1} = \rho \frac{\epsilon_1 \cdot s}{f \cdot \rho + (1 - f)}, \quad (4.15)$$

$$\epsilon_{w2} = \frac{\epsilon_1 \cdot s}{f \cdot \rho + (1 - f)}, \quad (4.16)$$

gdzie

$$\rho = 1 + \frac{s^2 - 1 \pm \sqrt{(s^2 - 1)(s^2 - (2f - 1)^2)}}{2f(1 - f)}. \quad (4.17)$$

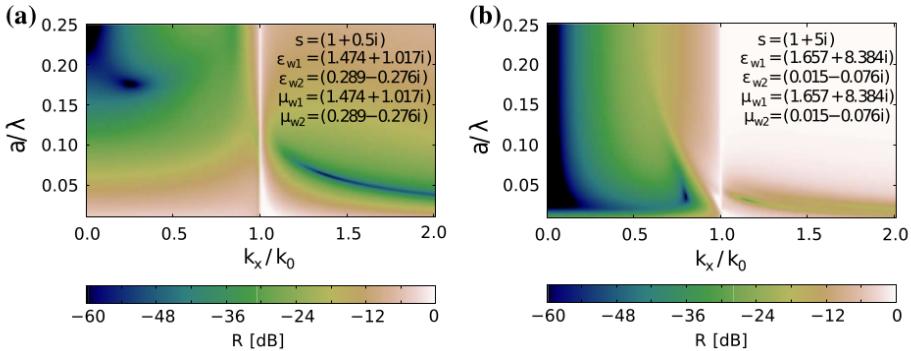
Wykresy na rysunku 4.3 prezentują wyniki obliczonych zgodnie z (4.15) i (4.16) wartości  $\epsilon_{w1}$  i  $\epsilon_{w2}$  jako funkcje współczynnika wypełnienia  $f$  i parametru



Rysunek 4.3: Zależność przenikalności elektrycznej materiałów tworzących UPML (w lewej kolumnie  $\epsilon_{w1}$ , w prawej  $\epsilon_{w2}$ ) w funkcji współczynnika wypełnienia i urojonej części parametru  $s$  (założono, że  $\text{Re}(s)=1$ ). Górnny wiersz na wykresach (a) i (b) prezentuje zależności części rzeczywistych, dolny na wykresach (c) i (d) części urojonych przenikalności elektrycznych. Ujemne wartości  $\epsilon$  na wykresach (c) i (d) odpowiadają materiałom ze wzmacnieniem optycznym.

$s$ , dla którego przyjęto  $s = 1 + \alpha i$ . Używamy rozwiązań dla (4.17) z  $|\rho| > 1$ . Podobne wyrażenia jak (4.12) i (4.13) można wypisać i rozwiązać dla  $\mu_{w1}$  i  $\mu_{w2}$ . W przypadku gdy  $\epsilon_1 = \mu_1$  otrzymujemy  $\epsilon_{w1} = \mu_{w1}$  i  $\epsilon_{w2} = \mu_{w2}$ . Należy podkreślić, że dla każdej pary  $f$  i  $s$  przedstawionej na wykresach 4.3 uzyskujemy metamateriał, który w omawianym przybliżeniu będzie spełniał funkcje UPML, dla każdej pary  $f$  i  $s$  potrzebujemy jednak wybrać inne materiały  $w1$  i  $w2$ .

W kolejnym kroku możemy obliczyć natężeniowy współczynnik odbicia od struktury zaprezentowanej na rysunku 4.2b dla  $f = 0.6$ , oraz  $\text{Im}(s) = 0.5$  lub  $\text{Im}(s) = 5$ . Zależność współczynnika odbicia od kąta padania, oraz grubości komórki elementarnej wielowarstwy przedstawia wykres na rysunku 4.4. Ze względu



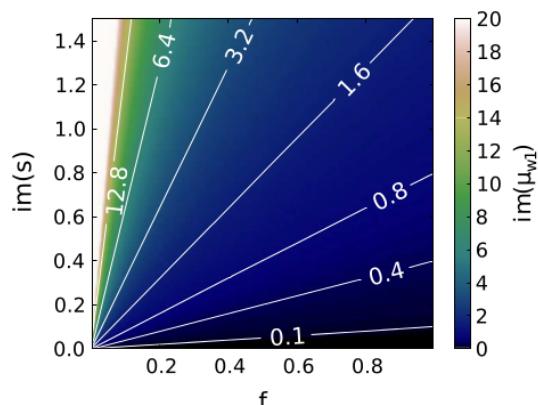
Rysunek 4.4: Zależność natężeniowego współczynnika odbicia od kąta padania i okresu wielowarstwy dla struktury zgodnej ze schematem na rysunku 4.2, dla  $N = 5$  par warstw, przy współczynniku wypełnienia  $f = 0.6$ . Rysunek po lewej (a) przedstawia wyniki dla  $s = 1 + 0.5i$ , wykres po prawej przedstawia wyniki dla  $s = 1 + 5i$ .

na umieszczenie idealnego przewodnika za wielowarstwą współczynnik odbicia łączy w sobie część odbijaną od wielowarstwy, jak i transmitowaną przez wielowarstwę i odbijaną od zwierciadła z PEC. Analizując wykres 4.4 możemy zauważyć, że wraz ze wzrostem  $\frac{a}{\lambda}$  zmniejsza się współczynnik odbicia fal propagujących się, którym odpowiada część wykresu, dla którego na osi odciętych wartości spełniają nierówność

$$\frac{k_x}{k_0} < 1.$$

Wynika to ze zwiększania grubości warstwy pochłaniającej, więc jest przede wszystkim związane ze zmniejszeniem transmisji przez wielowarstwę, a nie zmianą odbicia od pierwszej granicy warstw. W przypadku fal ewanescentnych  $\frac{k_x}{k_0} > 1$  obserwujemy wzrost współczynnika odbicia. Można to interpretować jako odbicie od pierwszej warstwy wynikające z niespełnienia warunków homogenizacji (przybliżenie ośrodka efektywnego zakłada  $\frac{a}{\lambda} \ll 1$ ) przez strukturę. Dlatego wzrost jest większy dla większej części urojonej współczynnika  $s$ , skutkującej większą różnicą współczynników załamania na granicy pierwszej warstwy i powietrza.

Przedstawione wyniki możliwe są do osiągnięcia za pomocą materiałów wykazujących szczególne własności elektryczne i magnetyczne. W szczególności

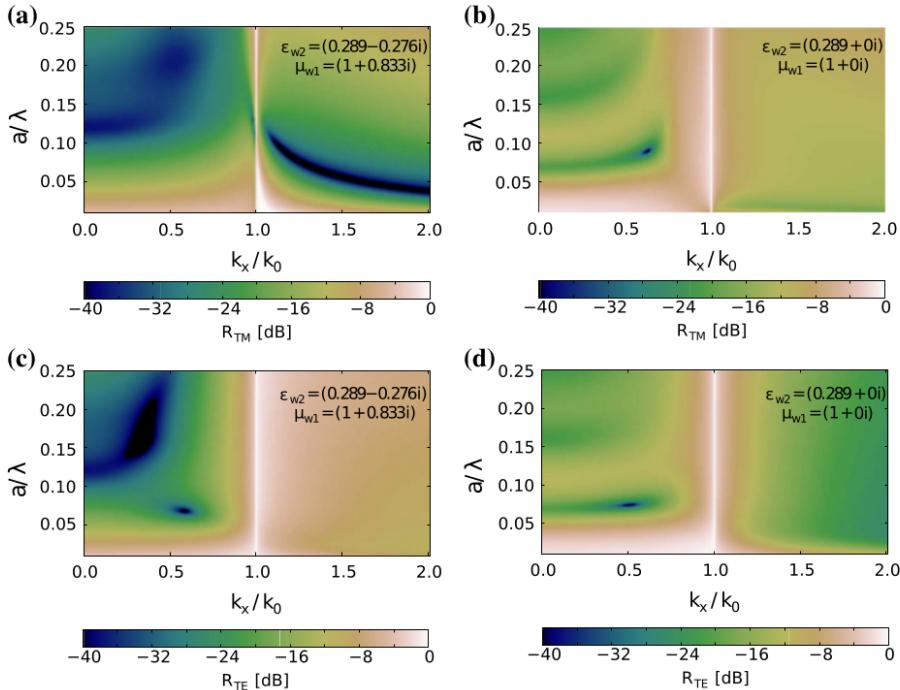


Rysunek 4.5: Zależność części urojonej przenikalności magnetycznej jednego z materiałów  $\mu_{w1}$ , od części urojonej współczynnika  $s$  i współczynnika wypełnienia  $f$  w przypadku gdy założono  $\mu_{w2} = 1$

obliczenia zakładały zespoloną przenikalność magnetyczną, oraz wzmacnienie optyczny. Dla  $s = 1 + 5i$  możliwe jest uzyskanie warstwy PML o całkowitej grubości  $5 \cdot a \approx \frac{\lambda}{20}$  wykazującej natężeniowy współczynnik odbicia ok -30dB dla szerokiego zakresu kątów padających fal płaskich.

W przypadku oświetlenia wielowarstwy za pomocą polaryzacji TM jeden ze współczynników przenikalności magnetycznej może zostać ustalony w sposób arbitralny. W szczególności możemy więc założyć  $\mu_{w2} = 1$ , ponieważ większość materiałów spotykanych w przyrodzie charakteryzuje się taką wartością dla częstotliwości optycznych. Drugą przenikalność magnetyczną możemy wyznaczyć za pomocą wzoru 4.14. Część rzeczywista  $\text{Re}(\mu_{w1}) = 1$ , a zależność części urojonej  $\text{Im}(\mu_{w1})$  od części urojonej współczynnika  $s$ , oraz współczynnika wypełnienia przedstawia wykres 4.5. Na podstawie przywołanego wykresu możemy zauważyć, że wysoki współczynnik wypełnienia, oraz wykorzystanie niskiej części urojonej  $s$  skutkują niskimi wartościami  $\text{Im}(\mu_{w1})$ . Jest to dla nas istotne ponieważ korzystając z materiałów występujących w naturze, będziemy zmuszeni przybliżyć tę wartość przez 0.

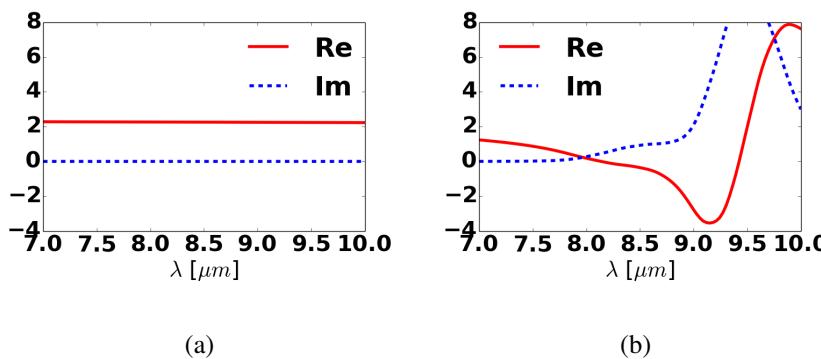
W przypadku przygotowania eksperymentu, a nie np. wykorzystania do konstrukcji PML w symulacjach numerycznych, należy zaniedbać własności magnetyczne materiałów  $\mu = 1$ , oraz zysk optyczny  $\text{Im}(\varepsilon) \geq 0$ . Wyniki dla obu polaryzacji po zastosowaniu się do wymienionych przybliżeń przedstawiają wykresy na rysunku 4.6. Zaproponowany absorber składa się z materiału stratnego, oraz warstw charakteryzujących się przenikalnością elektryczną mniejszą od 1. Przed-



Rysunek 4.6: Zależność natężeniowego współczynnika odbicia  $R$ , od kąta padania i grubości warstw dla wielowarstwy składającej się z  $N = 5$  okresów, dla  $s = 1 + 5i$  i  $f = 0.6$ . Spełniając założenie, że  $\mu_{w2} = 1$  (a,c), oraz  $\mu_{w1} = \mu_{w2} = 1$ ,  $\text{Im}(\epsilon_1) \geq 0$  i  $\text{Im}(\epsilon_2) \geq 0$  (b,d). Wyniki dla polaryzacji TM (a,b) oraz TE (c,d). Przenikalność elektryczna  $\epsilon_{w1} = 1.474 + 1.017i$ .

stawione wyniki obliczeń wskazują, że w wyniku poczynionych założeń efektywność pracy wielowarstwy jako struktury PML znacznie różni się w zależności od polaryzacji. W przeciwnieństwie do obliczeń dla wielowarstw odpowiadających PML, narzucone warunki prowadzą do mniejszej wartości współczynnika odbicia dla polaryzacji TE. Wysokie współczynniki odbicia, uniemożliwiające zastosowanie wielowarstwy, pojawiają się jednak jedynie dla kątów padania bliskich  $90^\circ$ , co jest charakterystyczne dla UPML.

Na podstawie przeprowadzonej dyskusji, można zaproponować prostą regułę jaką należy posługiwać się w celu doboru materiałów do budowy wielowarstwy efektywnie przypominającej UPML graniczący z powietrzem. Kluczowym ele-



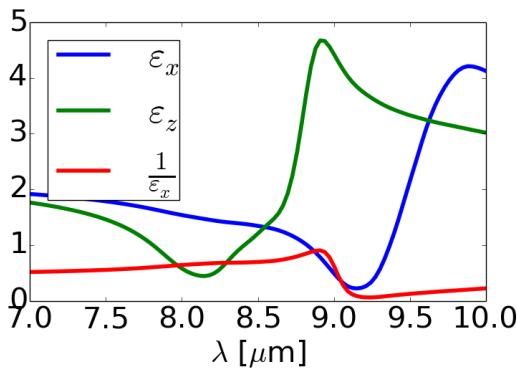
Rysunek 4.7: Wartości przenikalności elektrycznej w zakresie od 7 do 10  $\mu\text{m}$  dla (a)  $\text{NaCl}$  [23], (b)  $\text{SiO}_2$  [20]

mentem jest wykorzystanie materiału, którego część rzeczywista przenikalności elektrycznej znajduje się w zakresie od 0 do 1. Przeprowadzone obliczenia wskazują również, że materiał ten powinien być możliwe bezstratny. Druga wykorzystywana substancja powinna posiadać część rzeczywistą przenikalności elektrycznej większą od 1, oraz wykazywać stratność.

W ogólności w szerokich zakresach spektralnych większość materiałów charakteryzuje się  $\text{Re}(\varepsilon) > 1$ . Wyjątkami są zakresy długości fali w okolicach rezonansów dyspersyjnych (patrz. 2.3.1). Możliwe jest również uzyskanie zaprojektowanych własności  $\varepsilon$  w metamateriałach np. w strukturach funkcjonujących w literaturze angielskojęzycznej pod nazwą *fishnet* [58].

Przykładem pary materiałów, które możemy zastosować w realizacji UPML za pomocą wielowarstwy są  $\text{SiO}_2$  i  $\text{NaCl}$  dla długości fali w okolicach 8  $\mu\text{m}$ . Przenikalności elektryczne zaproponowanych materiałów przedstawiają wykresy na rysunku 4.7. Rolę materiału o przenikalności elektrycznej  $\varepsilon \in (0, 1)$ , spełnia w tym obszarze  $\text{SiO}_2$ , ponieważ dla długości fali 9.5  $\mu\text{m}$  występuje dla tego materiału rezonans. Również wartość efektywna części urojonej  $\varepsilon$  wielowarstwy wynika głównie z własności  $\text{SiO}_2$ .

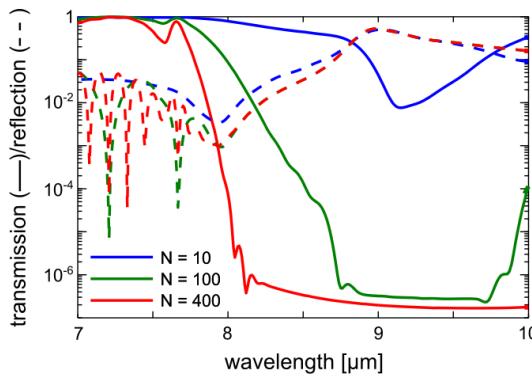
Efektywne własności stosu złożonego z naprzemiennych warstw  $\text{NaCl}$  i  $\text{SiO}_2$  o współczynniku wypełnienia drugim materiałem  $f = 0.56$ , dla których przyjęto zmierzone eksperymentalnie wartości  $\varepsilon$  przedstawia wykres na rysunku 4.8. Zgod-



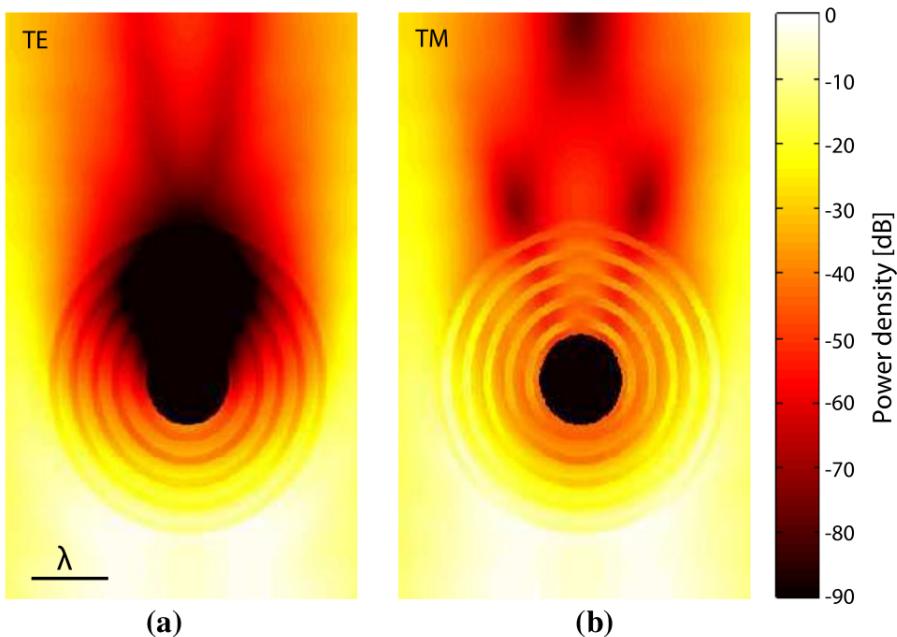
Rysunek 4.8: Współczynniki efektywne wielowarstwy zbudowanej z  $SiO_2$  i  $NaCl$ , o współczynniku wypełnienia przez  $SiO_2$  równym  $f = 0.56$ .

nie z (4.11) struktura warstwowa przypominająca PML powinna spełniać związek  $\frac{1}{\varepsilon_x} = \varepsilon_z$ , dlatego na wykresie zaznaczono również wartość  $\frac{1}{\varepsilon_x}$ . Na podstawie wykresu 4.8, wielowarstwa powinna więc charakteryzować się najniższym współczynnikiem odbicia dla długości fali z zakresu 8.0-8.2  $\mu m$ . Wartości natężenio-wych współczynników transmisji i odbicia w zależności od liczby par warstw  $N$  oraz długości fali przedstawia wykres na rysunku 4.9.

Opierając się na zaprojektowanej wielowarstwie można zaproponować jej modyfikację w geometrii cylindrycznej. W tym przypadku jakość nieodbijającej warstwy absorpcyjnej możemy ocenić na podstawie symulacji, w których wewnętrz struktury typu *core-shell* zamknięty zostanie walec z idealnego przewodnika. Rozkład gęstości energii pola E-M dla struktury typu core-shell odpowiadającą rozważanej wielowarstwie, oświetloną falą monochromatyczną dla polaryzacji TM i TE przedstawia rysunek 4.10.



Rysunek 4.9: Współczynnik transmisji (linia ciągła) i odbicia (linia przerywana) dla wielowarstwy złożonej z  $SiO_2/NaCl$  zaprojektowanej dla oświetlenia dłużością fali  $8 \mu\text{m}$ , dla której współczynniki załamania  $n_{SiO_2} = 0.41 + 0.32i$ ,  $n_{NaCl} = 1.51$ . Współczynnik wypełnienia struktury przez  $SiO_2$  wynosi  $f = 0.56$ ,  $a = 200\text{nm}$ . Rozważane zostały stosey o liczbie par warstw  $N = 10, 100$  i  $400$ .



Rysunek 4.10: Wyniki symulacji we współrzędnych cylindrycznych dla polaryzacji (a) TE i (b) TM. Struktura typu core-shell oświetlona jest z dołu, na rysunku (a) zamieszczono wzorzec długości fali.

## Rozdział 5

# Bezdyfrakcyjna propagacja światła w wielowarstwach metaliczno-dielektrycznych

Każdy element liniowego układu optycznego możemy wyrazić jako układ filtrujący częstotliwość i częstotliwości przestrzenne oświetlającego ten układ źródła. Poniższy rozdział poświęcony jest modelowaniu propagacji światła przez wielowarstwy metaliczno-dielektryczne wykorzystywane do budowy elementów optycznych o zaprojektowanych własnościach filtrowania częstotliwości przestrzennych. W przeciwieństwie do przestrzeni swobodnej, będącej przestrzennym filtrem dolnopropustowym, mogą one charakteryzować się również transmisją wysokich częstotliwości przestrzennych, które w przestrzeni swobodnej mają charakter fal ewanescentnych. Wykorzystanie układów tego typu umożliwia konstrukcję elementów optycznych działających poza klasycznym ograniczeniem dyfrakcyjnym.

Złamanie ograniczenia dyfrakcyjnego możliwe jest dzięki zastosowaniu materiałów charakteryzujących się ujemnym załamaniem światła, rozumianym jako załamanie pod kątem skierowanym przeciwnie niż wynikałoby to z prawa Snelliusa. Korzystając z elektrodynamiki klasycznej opisywanej równaniami Maxwell'a wiemy, że współczynnik załamania związany jest z przenikalnością elektryczną i magnetyczną ośrodka  $n = \pm\sqrt{\epsilon\mu}$ . Wybór dodatniej gałęzi pierwiastka jest więc

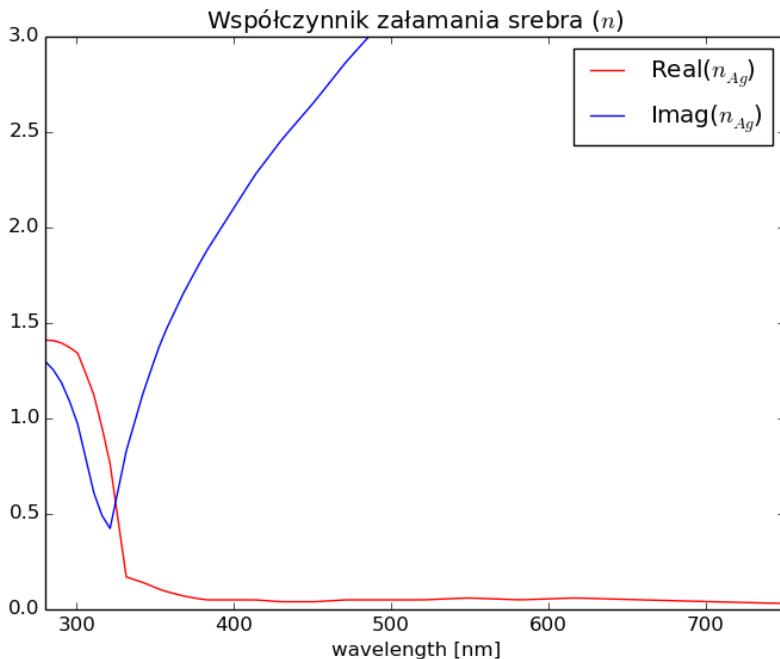
konwencjonalny i musi być dostosowany do sytuacji fizycznej. Ujemna wartość współczynnika załamania światła jest równoważna zmianie kierunku prędkości fazowej, której zwrot jest zgodny ze zwrotem wektora falowego. Pierwszą propozycją definicji ośrodków o ujemnym współczynniku załamania stanowiły ośrodkи z ujemną wartością iloczynu skalarnego wektora Poyntinga i wektora falowego  $\vec{P} \cdot \vec{k} < 0$  wprowadzone przez Wiktora Wiesełago [59]. Ze względu na tę własność materiały takie nazywane są lewoskrętnymi (ang. left-handed) gdyż w stosunku do iloczynu  $\vec{E} \times \vec{H}$  nie ma zastosowania reguła prawej dłoni, a przeciwna - lewej.

Materiały lewoskrętne muszą charakteryzować się ujemnymi wartościami  $\varepsilon$  i  $\mu$  dla tego samego zakresu częstotliwości. Materiały takie nie były do tej pory obserwowane w przyrodzie. Eksperymentalnie dowiedziono jednak możliwości sztucznego wytworzenia metamateriałów o takich właściwościach[48] za pomocą rezonatorów SSR (ang split-ring resonator). W kolejnych latach pojawiało się wiele propozycji uzyskiwania metamateriałów, takich jak sieci z otworami (ang. *fishnet*) czy też struktury warstwowe.

Język używany do opisu działania analizowanych struktur warstwowych wodzi się z optyki fourierowskiej, w której jednym z podstawowych pojęć są układy LSI (ang. Linear shift-invariant systems). Opisywane struktury spełniają warunki tego typu układów - nie wykazują własności nieliniowych, oraz są niezmienne ze względu na przesunięcia. Wykorzystanie formalizmu optyki fourierowskiej umożliwia analityczną ocenę wyników symulacji numerycznych, oraz wprowadza spójny zestaw pojęć wykorzystywanych do opisu rozważanych układów. Dokładniejsze omówienie podstawowych pojęć związanych z układami LSI znajduje się w rozdziale 2.2.

## 5.1. Właściwości dyspersyjne materiałów optycznych w zakresie widzialnym

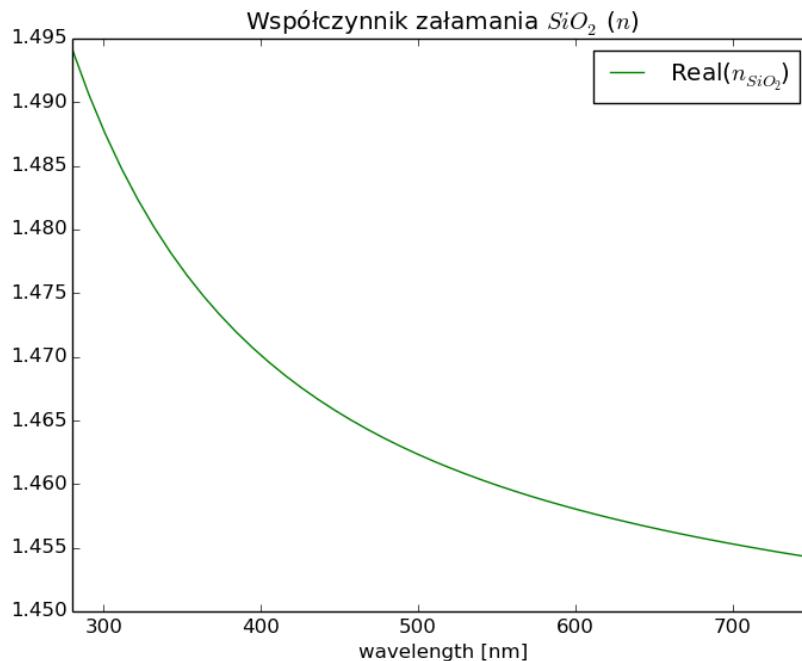
Wykorzystywane w optyce materiały charakteryzują się niską podatnością magnetyczną w rozważanej części widma, w związku z czym przyjmuje się  $\mu(\omega) = 1$ . Ze względu na właściwości elektryczne materiały te możemy podzielić na dielektryki i przewodniki. Dielektrykami nazywamy materiały, w których pod-



Rysunek 5.1: Zależność współczynnika załamania od długości fali w zakresie optycznym, dla metalu -  $Ag$  [16].

wpływem zewnętrznego pola elektrycznego powstają dipole elektryczne. Powodem powstawania dipoli może być przesunięcie ładunków dodatnich w stosunku do ujemnych lub powstanie spójnej orientacji przestrzennej dipoli elektrycznych tworzących dany ośrodek. W przeciwieństwie do dielektryków, ze względu na obecność swobodnych nośników ładunku elektrycznego przewodniki nie ulegają polaryzacji w zewnętrznym polu elektrycznym. W niniejszej pracy jako przewodniki rozważane są metaliczne pierwiastki chemiczne, dlatego terminy przewodnik i metal traktowane są zamiennie.

Zjawiska fizyczne omawiane w poniższym rozdziale bardzo silnie zależą od przenikalności elektrycznej wykorzystywanych materiałów. W szczególności wymagają wykorzystywania materiałów o ujemnej przenikalności elektrycznej. Takie właściwości przejawiają metale, których zastosowanie do nadrozdzielczego obrzutowania za pomocą cienkiej warstwy zaproponował John Pendry. Wykorzystanie

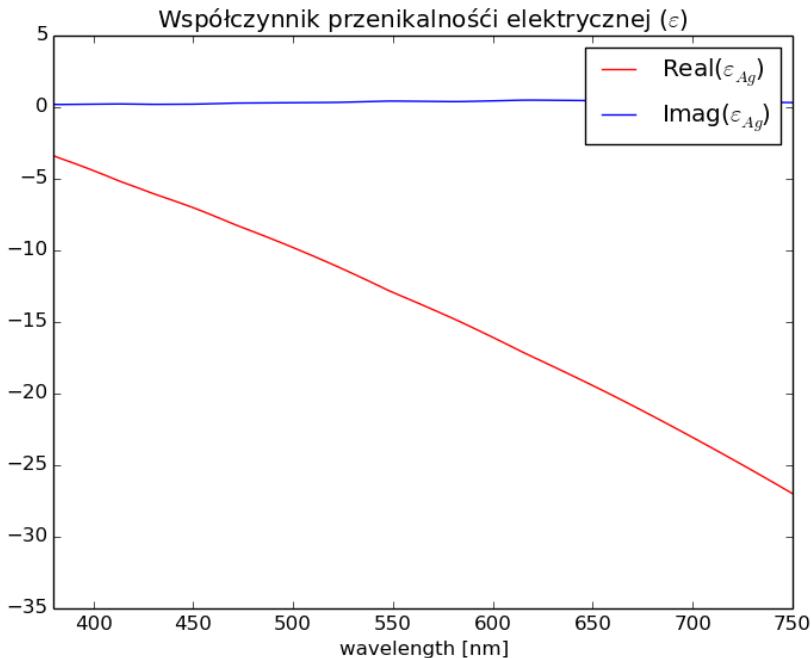


Rysunek 5.2: Zależność współczynnika załamania od długości fali w zakresie optycznym, dla szkła kwarcowego -  $SiO_2$  [27]

warstwy znacznie cieńszej od długości fali pozwala na rozprzężenie pola elektrycznego i magnetycznego przez co możliwe jest nadrozdzielcze obrazowanie za pomocą materiału z  $\mu = 1$ [35].

W zakresie optycznym znajdują się częstotliwości rezonansowe atomów metali, co skutkuje silną dyspersją współczynnika załamania i wysoką absorpcją w tym zakresie. Zależność rzeczywistej i urojonej części współczynnika załamania dla srebra prezentuje wykres 5.1. Na wykresie widać charakterystyczny obszar w zakresie ok. 310-350 nm, w którym obserwujemy znaczny spadek części rzeczywistej współczynnika załamania i minimum zdolności absorpcyjnych. Wysoka wartość części urojonej współczynnika załamania wskazuje na silną absorpcję promieniowania dla długości fali powyżej 350 nm.

Dla dielektryków współczynnik załamania zazwyczaj maleje wraz ze wzrostem długości fali. Zależność ta jest znacznie słabsza niż w przypadku metali. Jako



Rysunek 5.3: Zależność przenikalności elektrycznej od długości fali w zakresie optycznym, dla metalu  $Ag$ [16].

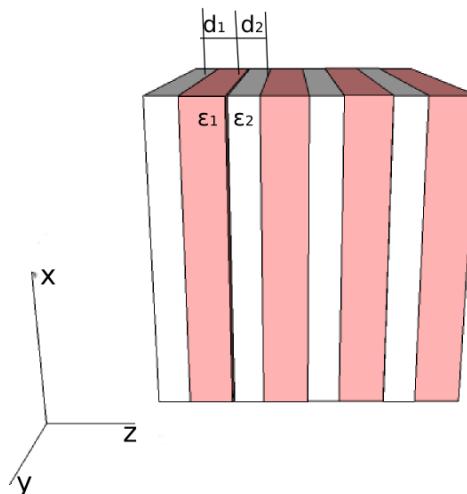
przykład na wykresie 5.2 przedstawiono współczynnik załamania  $SiO_2$ . Urojona część współczynnika załamania dla dielektryków jest mniejsza niż w przypadku metali. W szczególności dla przedstawionego szkła kwarcowego w większości zastosowań jest zaniedbywana.

W celu opisu dyspersyjnych dielektryków z powodzeniem stosuje się model Lorenza-Lorenza, a w niektórych przypadkach wartość  $\varepsilon$  bywa traktowana jako stała. W przypadku metali, ze względu na wspomniany charakter rezonansowy  $\varepsilon(\omega)$  musi być opisywana przy użyciu modelu Lorenza-Drudego. Dokładniejsze omówienie tego modelu znajduje się w rozdziale 2.3.1.

Należy zaznaczyć, że pominięty został wpływ wektora falowego na wartości  $\varepsilon$  i  $\mu$ . W ogólności  $\varepsilon(\omega, \vec{k})$  jest funkcją zarówno częstotliwości jak i wektora falowego, co należy rozumieć jako zależność indukcji elektrycznej  $\vec{D}(t, \vec{r})$  nie tylko

od historii wzbudzeń poprzedzającej interesujący nas czas  $t$ , ale również od wzbudzenia fali elektromagnetycznej w otoczeniu  $\vec{r}'$ . Ze względu na zależność pola  $\vec{D}$  od pola  $\vec{E}$  w otoczeniu, ta klasa zjawisk nazywana jest nielokalnymi. Nie można pomijać wpływu otoczenia na stan polaryzacji  $\vec{P}$ , gdy zmienność pola elektromagnetycznego jest znacząca na odległościach porównywalnych z drogą swobodną elektronów w ośrodku.

## 5.2. Wielowarstwy z bezdyfrakcyjną propagacją światła



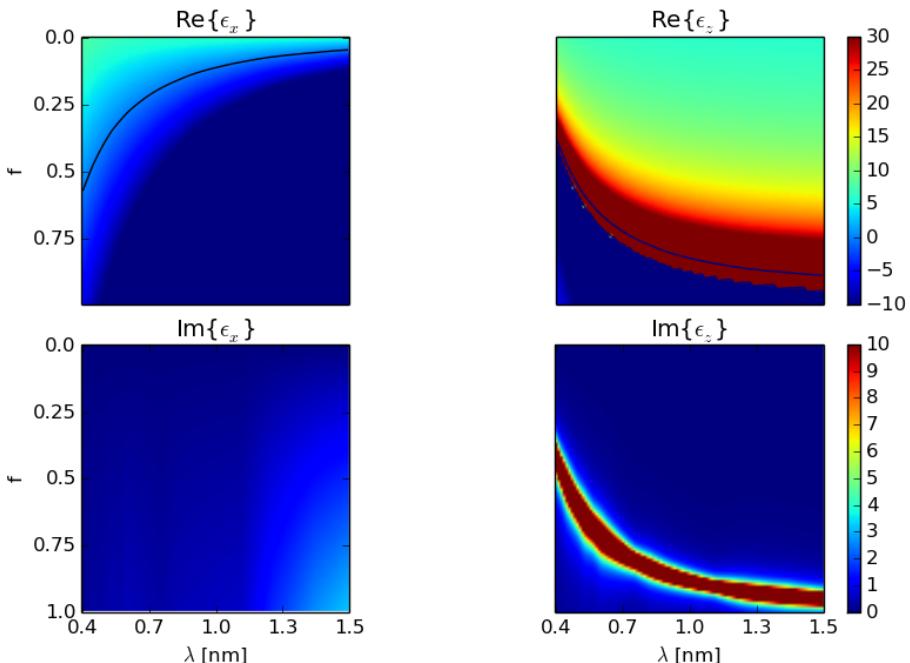
Rysunek 5.4: Schemat wielowarstwy metaliczno dielektrycznej

Zgodnie z przedstawionymi własnościami materiałowymi, obrazowanie z rozdzielcością przekraczającą klasyczne ograniczenie dyfrakcyjne za pomocą metali wiąże się z dużymi stratami natężenia światła w wyniku absorpcji<sup>1</sup>. Zwiększenie współczynnika transmisji przez wielowarstwy zawierające metal możliwe jest dzięki wykorzystaniu efektu rezonansowego tunelowania [42]. Chociaż zastosowanie zaproponowane w cytowanej pracy nie było związane z obrazowaniem, to

<sup>1</sup>Dzieje się tak, ponieważ interesujące nas własności E-M materiałów obserwujemy dla długości fali w okolicach rezonansów, w których z kolei materiały charakteryzują się wysoką absorpcją promieniowania

możliwość uzyskania współczynnika transmisji rzędu 70% dla wielowarstwy zawierającej łącznie 40 nm srebra świadczy także o możliwości uzyskania obrazowania nadrozdzielczego przy zachowaniu wysokiej transmisji.

Proponowaną konstrukcję wielowarstwy przedstawia schemat na rysunku 5.4. W omawianym podejściu obrazowanie nad rozdzielcze nie wynika wprost z stosowania materiału o  $\varepsilon = -1$ , ale z efektywnych anizotropowych właściwości powstałego w ten sposób metamateriału [38]. Za pomocą przybliżenia ośrodka efektywnego, szerzej omówionego w rozdziale 2.4, możemy dobierając grubości warstw do parametrów stosowanych materiałów we wzorach (2.34) i (2.35) używać metamateriał o  $\varepsilon_z \rightarrow \infty$  i  $\varepsilon_x \rightarrow 0$ .



Rysunek 5.5: Przenikalność ośrodka efektywnego obliczona zgodnie ze wzorem (2.34) zbudowanego z warstw *Ag* [16] i *TiO<sub>2</sub>* [8]. Współczynnik wypełnienia  $f=1$  oznacza, że struktura zbudowana jest jedynie ze srebrem. Konturem zaznaczono  $\varepsilon_x = 0$  oraz  $\varepsilon_z = 100$ .

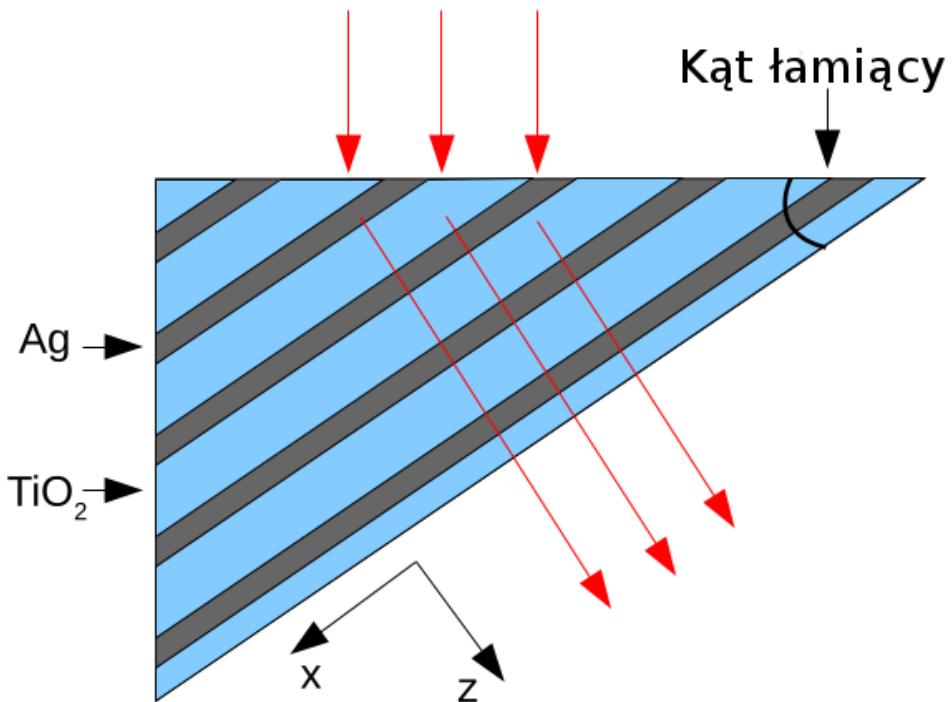
Przykładem materiałów, z których w opisany sposób można konstruować wielowarstwę charakteryzującą się transmisją bezdyfrakcyjną są  $Ag$  i  $TiO_2$ . Efektywne właściwości  $\varepsilon$  i  $\mu$  dla wielowarstwy z nich zbudowanej prezentują wykresy na rysunku 5.5. W szczególności na wykresach zaobserwować możemy, że obszar wysokiego  $\varepsilon_z$  graniczny z obszarem, w którym ta składowa przenikalności elektrycznej przyjmuje wartości ujemne. Dla uzyskania własności bezdyfrakcyjnych, kluczowe jest dobranie takiego współczynnika wypełnienia  $f$ , który pozwoli dla wybranych długości fali uzyskać efektywne wartości składowych tensora przenikalności elektrycznej jak najbliższe oczekiwany. W przypadku prezentowanych materiałów dla długości fali ok. 500 nm możemy uzyskać  $\varepsilon_x \approx 0$  i  $\varepsilon_z \approx 10$ .

### 5.3. Nadrozdzielczy pryzmat

Możliwość konstruowania układów warstwowych charakteryzujących się propagacją promieniowania elektromagnetycznego prostopadle do granicy warstw umożliwiła nie tylko konstrukcję supersoczewek, ale również elementów o bardziej złożonej geometrii. Wykonując ścięcie pod pewnym kątem możemy warstwową supersoczewkę przekształcić w element optyczny kształtem przypominający pryzmat. Przykład tak powstałego pryzmatu prezentuje rysunek 5.6. Wykonując wielowarstwę o efektywnych właściwościach zapewniających obrazowanie z podfalową rozdzielczością, można taki układ wykorzystać do realizacji operacji rzutowania nie podlegającej klasycznemu ograniczeniu dyfrakcyjnemu [51].

Można oczekiwać, że taki element pozwoli uzyskać obraz obiektów o rozmiarze podfalowym powiększony do rozmiarów umożliwiających obserwację za pomocą tradycyjnych mikroskopów. Możliwe jest również wykorzystanie pryzmatu do zmniejszenia obrazu, dzięki czemu maska o rozmiarach większych od długości fali może posłużyć do wykonania litografii o rozmiarach podfalowych.

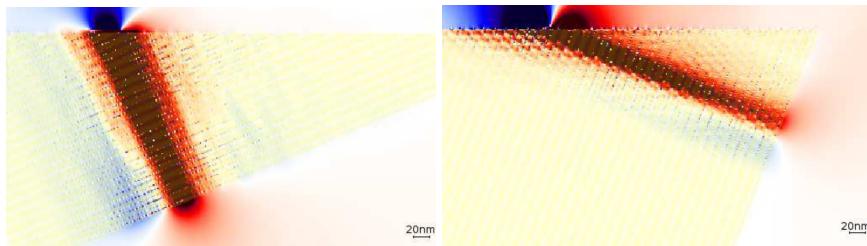
Wykorzystując dwa pryzmaty charakteryzujące się kierunkową propagacją światła, możemy realizować również inne przekształcenia geometryczne na dwuwymiarowych obrazach. Poprzez złożenie dwóch pryzmatów z rysunku 5.6 wzdłuż krawędzi równoległej do osi x, możemy uzyskać element wykonujący na obrazach o rozmiarach podfalowych operację obrotu. Składając w ten sposób dwa



Rysunek 5.6: Schemat pryzmatu zbudowanego z metamateriału mogącego charakteryzować się kierunkową (prostopadłą do granicy warstw) propagacją fali elektromagnetycznej. Strzałkami schematycznie przedstawiono kierunek propagacji fali E-M.

pryzmaty o kącie łamiącym równym  $45^\circ$  możemy zrealizować przesunięcie. Wykorzystując trzy pryzmaty możemy połączyć operację rzutowania i przesunięcia uzyskując efekt powiększenia lub pomniejszenia obrazu w jednym zintegrowanym mikroelementem optycznym bez zmiany kierunku propagacji promieniowania E-M [19].

Ze względu na propagację światła wewnętrz MDM w określonym kierunku do projektowania układów, których elementy złożone są z omawianych ściętych wielowarstw metaliczno dielektrycznych wykorzystać można algorytm przypominający śledzenia promieni (ang. ray tracing). Kierunek promieni w wiązce wewnętrz wielowarstwy jest wymuszony przez silnie anizotropową efektywną przewodność elektryczną wielowarstwy, natomiast w przestrzeni swobodnej możemy



(a) Kąt łamiący 0.4 rad

(b) Kąt łamiący 1.2 rad

Rysunek 5.7: Wynik symulacji metodą FDTD propagacji fali E-M przez superpryzmat. Pryzmat oświetlony został wiązką gaussowską o szerokości połówkowej (FWHM) 90 nm i długości fali  $\lambda = 421$  nm [51]

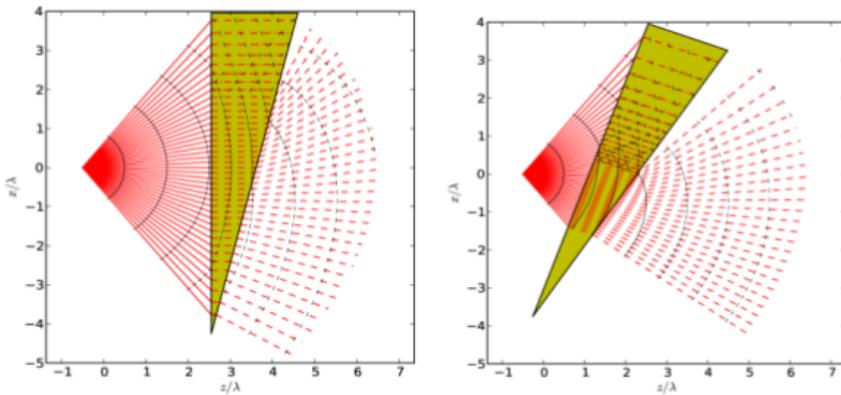
o nim wnioskować na podstawie klasycznych praw dyfrakcji [34].

Wykorzystując zaproponowany model możemy zaprojektować elementy optyczne do koncentracji promieniowania elektromagnetycznego. Takie mikro-urządzenia można zbudować wykorzystując zarówno struktury płaskie jak przedstawiona na rysunku 5.9a i rys. 5.9b, jak i cylindryczne rys.5.9c czy też zbudowane z kilku elementów typu core-shell 5.9d

## 5.4. Analiza gładkości powierzchni

Dotychczas zakładaliśmy, że granice między ośrodkami tworzącymi wielowarstwę są idealnie płaskie. W warunkach eksperymentalnych, przy wykorzystaniu technik umożliwiających naprzemienne układanie kilkunastu warstw różnych materiałów o grubości od kilkunastu do kilkudziesięciu nanometrów, takich jak fizyczne osadzanie z fazy gazowej (ang. PVD - physical vapour deposition), uzyskanie doskonale płaskich warstw jest niemożliwe. W poniższym rozdziale przeanalizowany zostanie wpływ niedoskonałości warstw na obrazowanie przez struktury MDM.

Podstawowym parametrem wykorzystywany do opisu chropowatości jest średnia kwadratowa różnic faktycznej grubości warstwy od zamierzonej



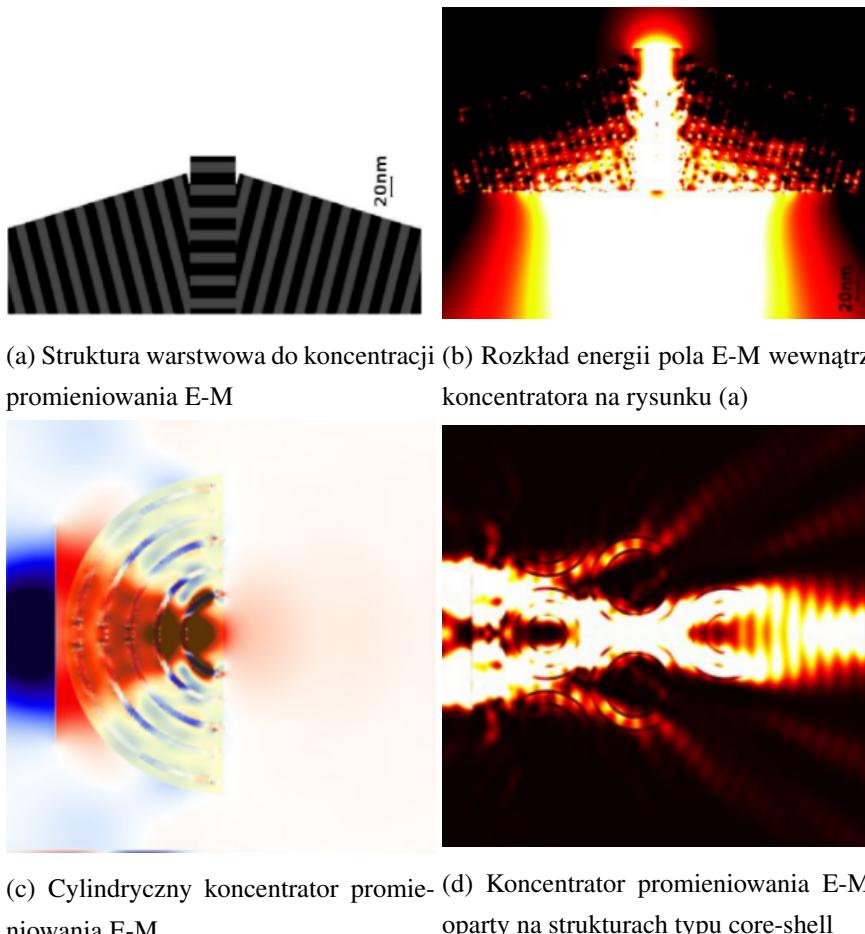
Rysunek 5.8: Przykłady algorytmu śledzenia promieni dla wiązki promieni przechodzącej przez pryzmat z metamateriału umożliwiającego obrazowanie podfałowe [34]

(ang. RMS - root mean square), wyrażana wzorem:

$$\text{RMS} = \sqrt{\sum_i^n \frac{(x_i - x_0)^2}{n}}, \quad (5.1)$$

gdzie  $x_i$  są kolejnymi zmierzonymi grubościami,  $x_0$  grubością zamierzoną, a  $n$  odpowiada liczbie punktów w których wykonano pomiar. Różnice uzyskanej w stosunku do projektowanej grubości warstwy w blisko położonych punktach nie są zmiennymi losowymi niezależnymi, dlatego do pełnego opisu topologii powierzchni niezbędne jest wykorzystanie funkcji autokorelacji [49]. Na podstawie pomiarów mikroskopem sił atomowych (ang. AFM - atomic force microscope) można stwierdzić, że RMS powierzchni podlega statystyce gaussowskiej. Histogram wyników uzyskanych za pomocą pomiarów AFM przedstawia wykres 5.10. Dwuwymiarowy skan uzyskany w pomiarach przedstawia rysunek 5.11.

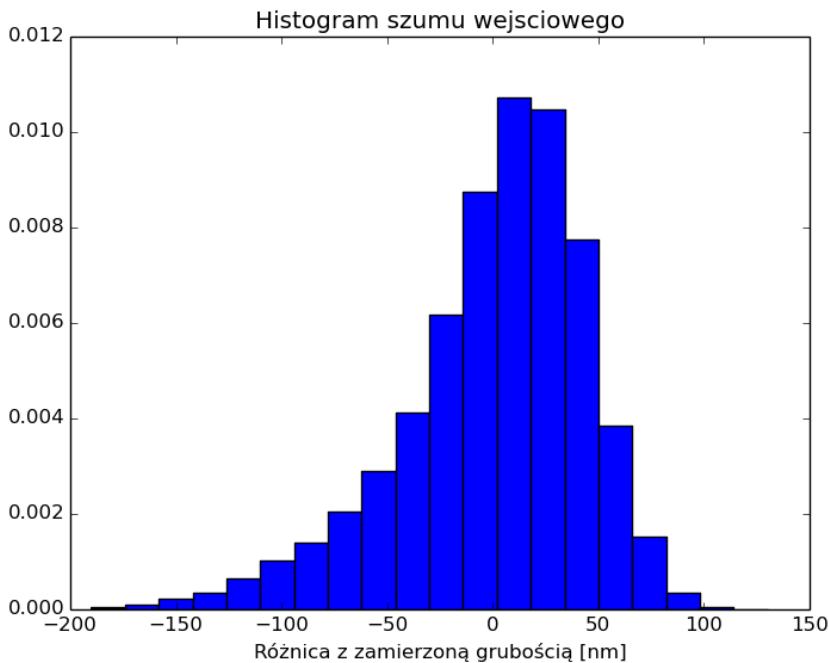
Efektywne współczynniki przenikalności elektrycznej uzyskiwane za pomocą wzoru (2.34) w znacznym stopniu zmieniają się w wyniku wprowadzenia chropowatości [26]. Szczególnie dużą zmienność można zaobserwować w okolicach rezonansu dla  $\varepsilon_{\perp}$ , czyli w zakresie długości fali, dla którego projektowane są właściwości metamateriału. Zbliżenie wartości do przewidywanych w warunkach homogenizacji można zaobserwować w przypadku symulacji struktur, dla których



Rysunek 5.9: Wyniki symulacji metodą FDTD układów do koncentracji promieniowania E-M [34]

punkty odpowiadające pomiarom grubości z mikroskopu są bardziej oddalone - próbkowanie pomiaru mikroskopowego jest rzadsze niż w symulacji numerycznej. Ze względu na przybliżenie granicy warstwy pomiędzy punktami pomiarowymi z AFM poprzez funkcję gładką Ludwig i inni otrzymują większe gładkie obszary na powierzchni symulowanej granicy między ośrodkami [26].

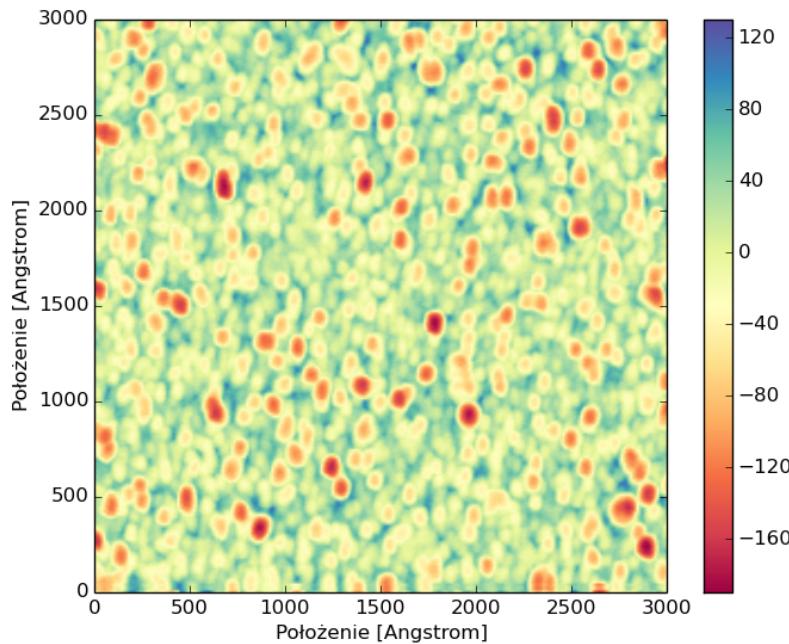
Nierówność warstw może mieć pozytywny wpływ na niektóre parametry opisujące zdolności obrazujące wielowarstwy. Uwzględnienie chropowatości może zwiększyć współczynnik transmisji przez granicę dwóch ośrodków poprzez skró-



Rysunek 5.10: Histogram odchyleń od zamierzonej grubości dla warstwy 30 nm obserwowanej za pomocą AFM w punktach odległych od siebie o 11.7 nm

cenie zasięgu propagacji plazmonów powierzchniowych w przypadku przypadkowej chropowatości, oraz dodatkowe wzmacnianie fal ewanescentnych za pomocą sinusoidalnej chropowatości o okresie podfalowym [13]. Przykład układu dla którego wprowadzenie chropowatości zwiększa współczynnik transmisji dla wąskiego zakresu długości fal przedstawia rozkład pola elektromagnetycznego na rysunku 5.12 a i b. W ogólności jednak wzrost chropowatości powierzchni zmniejsza współczynnik transmisji przez strukturę warstwową, co możemy zaobserwować po zmianie długości fali oświetlającej soczewkę na rozkładach pola na rysunkach 5.12 c i d.

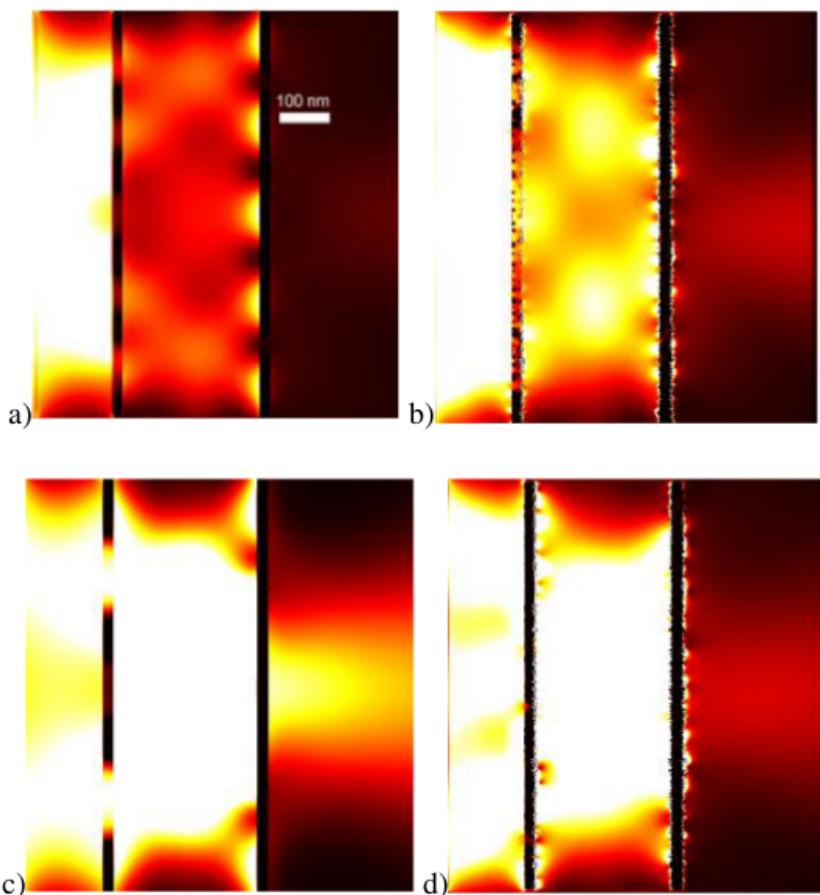
Zmiana właściwości materiałów z których zbudowana jest wielowarstwa na charakteryzujące się mniejszą absorpcją nie może być wykorzystana do kompenamacji strat transmisji w wyniku nierówności warstw. Wprowadzenie chropowatości prowadzi do powstania losowych zaburzeń rozkładu pola elektromagnetycz-



Rysunek 5.11: Pomiary grubości na powierzchni napyłonej warstwy 30 nm srebra za pomocą AFM. Pomiary wykonał dr Tomasz Stefaniuk.

nego, których interferencja wprowadza zniekształcenie optycznej funkcji przenośnia (ang. OTF - Optical Transfer Function) [11]. Odpowiednio dobrany współczynnik absorpcji wewnętrz metalu zapewnia szybkie zanikanie losowych zaburzeń umożliwiając zachowanie płaskiego charakteru OTF. Szczególne znaczenie dla zachowania własności obrazowania podfalowego ma płaszczyzna wyjściowa wielowarstwy, na której utrzymanie RMS poniżej 0.6 nm jest kluczowe dla użycania PSF o szerokości podfalowej [12].

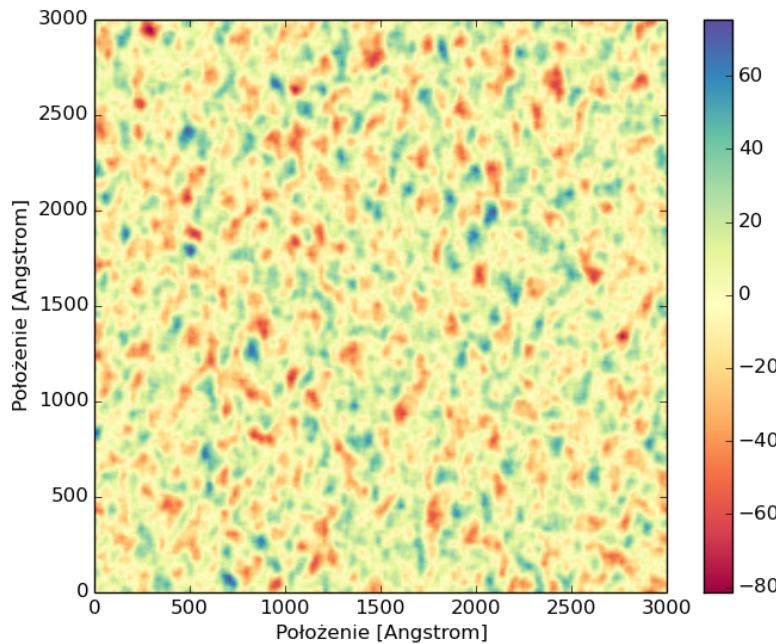
Należy zwrócić uwagę, że na skutek chropowatości współczynnik  $\varepsilon_{\perp}$  zostaje zmniejszony w okolicach rezonansu [12] (dla idealnej supersoczewki  $\varepsilon_{\perp} \rightarrow -\infty$ ), co powoduje, że możliwa jest efektywna transmisja wyższych częstotliwości przestrzennych, a co za tym idzie zwiększenie zdolności rozdzielczej układu. Właściwości obrazujące, które są optymalne przy płaskim kształcie OTF zostają jednocześnie zaburzone, a ich zachowanie możliwe jest poprzez użycie materiałów



Rysunek 5.12: Rozkład natężenia pola elektromagnetycznego wewnętrz i poza strukturą warstwową o właściwościach supersoczewki z warstwami chropowatymi, oświetloną za pomocą źródła monochromatycznego o długościach fali odpowiednio a),b)  $\lambda = 430 \text{ nm}$  i c),d)  $\lambda = 490 \text{ nm}$  [52]

o większym współczynniku absorpcji. Na podstawie takiego rozważania Zhen Guo i in. [12] wnioskują, że chropowatość w zasadniczy sposób pogarsza zdolności obrazujące supersoczewki. Zdolność rozdzielcza jest natomiast determinowana poprzez stratność użytych materiałów.

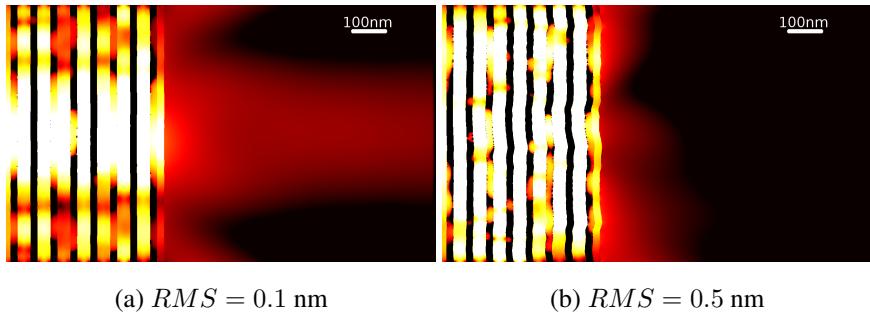
Porównanie wyników prac numerycznych prowadzonych przez różnych autorów dotyczących wpływu chropowatości na współczynnik transmisji, szerokość



Rysunek 5.13: Wizualizacja powierzchni chropowatej wygenerowanej na podstawie pomiarów AFM. Generowana jest zmienna losowa podlegająca rozkładowi normalnemu o widmowej gęstości mocy odpowiadającej wynikom pomiarów za pomocą AFM.

i kształt PSF oraz na zdolność rozdzielczą wielowarstwy wymaga uwzględnienia różnic w zastosowanej przez nich metodyce. Kluczowym elementem jest sposób generacji powierzchni chropowatej - w niektórych pracach nie jest uwzględniana autokorelacja nierówności [12] przez co zaniedbane zostają charakterystyczne elementy topologii widoczne w pomiarach za pomocą AFM. W innych wykorzystywane są algorytmy heurystyczne łączące punkty z pomiarów mikroskopowych za pomocą wielomianów sklejanych<sup>2</sup> [26], w innych pracach autorzy opierają się na widmowym rozkładzie gęstości mocy zmiennej losowej [2]. Przykład powierzchni

<sup>2</sup>tzw. krzywa B-sklejana, w literaturze polskiej postulowana bywa również nazwa splajn od angielskiego B-spline



Rysunek 5.14: Wyniki symulacji wielowarstwy o 17 chropowatych granicach ośrodków, z różnymi wartościami RMS charakteryzującymi chropowatość warstw. Na ilustracji (b) obserwujemy znaczne ograniczenie strumienia fali E-M propagującego się w pole dalekie na skutek interferencji wielu fal płaskich losowo zaburzonych przez nierówności [2].

chropowatej wygenerowanej na podstawie pomiarów z mikroskopu AFM z wykorzystaniem ostatniej z wymienionych metod znajduje się na ilustracji 5.13.

Niezależnie od zastosowanej metodyki symulacji pola elektromagnetycznego i generacji warstw chropowatych składających się na supersoczewki zbudowane ze struktur MDM wyniki pozwalają na wysunięcie zgodnych wniosków. Uzyskanie nadrozdzielczego obrazowania przez omawiane układy możliwe jest jedynie w wielowarstwach o  $RMS < 1.5 \text{ nm}$  [12, 49, 26]. Ponieważ każda chropowata powierzchnia przyczynia się do rozproszenia fali, wraz ze wzrostem liczby warstw własności transmisyjne i obrazujące stosu MDM stają się bardziej wrażliwe na chropowatości powierzchni [12]. W przypadku stosów składających się z kilkunastu warstw, RMS nawet na poziomie 0.5 nm może uniemożliwić uzyskanie wysokiego współczynnika transmisji, a co za tym idzie praktycznego wykorzystania tego typu soczewek [2]. Wpływ chropowatości na rozkład pola E-M jak i współczynnik transmisji przez stos metaliczno-dielektryczny prezentują rozkłady pola E-M na rysunku 5.14.



## Rozdział 6

# Podsumowanie

Niniejsza praca jest wynikiem kilku lat studiów doktoranckich autora, w trakcie których prowadził on symulacje, których celem było projektowanie i optymalizacja struktur o rozmiarach podfalowych. Podstawowym narzędziem wykorzystywanym przez autora były obliczenia numeryczne metodą FDTD za pomocą aplikacji *meep*[31] na komputerach dużej mocy udostępnianych w ramach Interdyscyplinarnego Centrum Modelowania Matematycznego i Komputerowego UW oraz infrastruktury PLgrid. Pomimo zastosowania podobnych metod obliczeniowych, przedstawione w różnych rozdziałach układy badane były dla różnych zakresów długości fali.

Zaczynając od układów do jednokierunkowej transmisji i skupiania wiązki światła dla zakresu THz (długości fali ok. 3 cm), które zostały przedstawione w rozdziale 3. Prace te koncentrowały się na projektowaniu i optymalizacji układów, które podlegały późniejszej weryfikacji eksperimentalnej. Wyniki tych prac wskazały na możliwość uzyskania jednokierunkowej transmisji, zgodnej z twierdzeniem o wzajemności, w -1 i +1 rzędzie dyfrakcyjnym.

Przez zakres podczerwony, dla którego w rozdziale 4 przedstawiono prace numeryczne zawierające propozycję realizacji nie odbijającej warstwy pochłaniającej przy pomocy układów warstwowych. Całość projektu przedstawia analizę opartą na wyidealizowanych (nieistniejących fizycznie materiałach), przez serię

---

przybliżeń, aż do symulacji opartych na właściwościach materiałowych zaczerpniętych z prac eksperimentalnych.

W przedostatnim rozdziale 5, omówione zostały struktury fotoniczne dla świata widzialnego (długości fali rzędu kilkuset nanometrów). Przedstawiono, w szerskim kontekście literaturowym, wkład autora w badania dotyczące układów opartych o wielowarstwy metaliczno-dielektryczne przeznaczone do obrazowania, rzurowania i koncentracji wiązek promieniowania E-M o rozmiarach podfalowych.

# Bibliografia

- [1] Tomasz J Antosiewicz. *Wpływ nanostruktury sondy metalizowanej na rozdzielczość optycznego mikroskopu skaningowego bliskiego pola.* Uniwersytet Warszawski. Rozprawa doktorska. Wydział Fizyki, 2009.
- [2] A.Pastuszczak, M.Stolarek, and R. Kotyński. Engineering the point spread function of layered metamaterials. *Opto-Electron. Rev.*, 21(4):355–366, 2013.
- [3] Gabriel Barton. *Elements of Green's functions and propagation.* Clarendon Press, 1989.
- [4] J.P. Berenger. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *J. Comput. Phys.*, 114:185–200, 1994.
- [5] HB Chan, Z Marcet, Kwangje Woo, DB Tanner, DW Carr, JE Bower, RA Cirelli, E Ferry, F Klemens, J Miner, et al. Optical transmission through double-layer metallic subwavelength slit arrays. *Opt. Lett.*, 31(4):516–518, 2006.
- [6] Chen Cheng, Jing Chen, Da-Jian Shi, Qi-Yang Wu, Fang-Fang Ren, Ji Xu, Ya-Xian Fan, Jianping Ding, and Hui-Tian Wang. Physical mechanism of extraordinary electromagnetic transmission in dual-metallic grating structures. *Phys. Rev. B*, 78(7):075406, 2008.
- [7] Chen Cheng, Jing Chen, Qi-Yang Wu, Fang-Fang Ren, Ji Xu, Ya-Xian Fan, and Hui-Tian Wang. Controllable electromagnetic transmission based on dual-metallic grating structures composed of subwavelength slits. *Appl. Phys. Lett.*, 91(11):111111–111111, 2007.

- [8] J. R. Devore. Refractive indices of rutile and sphalerite. *J. Opt. Soc. Am.*, 41(6):416–417, 1951.
- [9] T. W. Ebbesen, H. F. Ghaemi, T. Thio, D. E. Grupp, and H. J. Lezec. Extraordinary Optical Transmission through Sub-wavelength Hole Arrays. In *APS March Meeting Abstracts*, page 1511, 1998.
- [10] Thomas W Ebbesen, HJ Lezec, HF Ghaemi, Tineke Thio, and PA Wolff. Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays. *Nature*, 391(6668):667–669, 1998.
- [11] J. Goodman. Introduction to fourier optics.
- [12] Zhen Guo, Qizhao Huang, Changtao Wang, Ping Gao, Wei Zhang, Zeyu Zhao, Lianshan Yan, and Xiangang Luo. Negative and positive impact of roughness and loss on subwavelength imaging for superlens structures. *Plasmonics*, 9(1):103–110, 2014.
- [13] Shaowu Huang, Haogang Wang, Kung-Hau Ding, and Leung Tsang. Subwavelength imaging enhancement through a three-dimensional plasmon superlens with rough surface. *Opt. Lett.*, 37(8):1295–1297, 2012.
- [14] Dirk Jalas, Alexander Petrov, Manfred Eich, Wolfgang Freude, Shanhui Fan, Zongfu Yu, Roel Baets, Milos Popovic, Andrea Melloni, John D Joannopoulos, et al. What is—and what is not—an optical isolator. *Nat. Photonics*, 7(8):579–582, 2013.
- [15] Sajeev John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Physical review letters*, 58(23):2486, 1987.
- [16] P. B. Johnson and R. W. Christy. Optical constants of the noble metals. *Phys. Rev. B*, 6:4370–4379, 1972.
- [17] Steven G Johnson. Notes on the algebraic structure of wave equations. *Online at <http://math.mit.edu/~stevenj/18.369/wave-equations.pdf>*, 2007.
- [18] Steven G Johnson. Notes on perfectly matched layers (pmls). *Lecture notes, MIT*, 2008.

- [19] Zhao Junming, Feng Yijun, Zhu Bo, and Jiang Tian. Sub-wavelength image manipulating through compensated anisotropic metamaterial prisms. *Opt. Express*, 16(22):18057–18066, 2008.
- [20] Jan Kischkat, Sven Peters, Bernd Gruska, Mykhaylo Semtsiv, Mikaela Chashnikova, Matthias Klinkmüller, Oliana Fedosenko, Stephan Machulik, Anna Aleksandrova, Gregorii Monastyrskyi, Yuri Flores, and W. Ted Masselink. Mid-infrared optical properties of thin films of aluminum oxide, titanium dioxide, silicon dioxide, aluminum nitride, and silicon nitride. *Appl. Opt.*, 51(28):6789–6798, 2012.
- [21] KJ Klein Koerkamp, Stefan Enoch, FB Segerink, NF Van Hulst, and L Kuipers. Strong influence of hole shape on extraordinary transmission through periodic arrays of subwavelength holes. *Phys. Rev. Lett.*, 92(18):183901, 2004.
- [22] Yun-Shik Lee. *Principles of Terahertz Science and Technology: Proceedings of the International Conference, Held in Mainz, Germany, June 5-9, 1979*, volume 170. Springer Science & Business Media, 2009.
- [23] HH Li. Refractive index of alkali halides and its wavelength and temperature derivatives. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 5(2):329–528, 1976.
- [24] DR Lide and WM Haynes. *CRC handbook of chemistry and physics: a ready-reference book of chemical and physical data-/editor-in-chief, David R. Lide; ass. ed. WM "Mickey" Haunes*. Boca Raton, Fla: CRC, 2009.
- [25] Zhaowei Liu, Hyesog Lee, Yi Xiong, Cheng Sun, and Xiang Zhang. Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects. *science*, 315(5819):1686–1686, 2007.
- [26] Alon Ludwig and Kevin J Webb. Impact of surface roughness on the effective dielectric constants and subwavelength image resolution of metal–insulator stack lenses. *Opt. Lett.*, 37(20):4317–4319, 2012.
- [27] I. H. Malitson. Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica. *J. Opt. Soc. Am.*, 55(10):1205–1208, 1965.

- [28] Peter Markos and Costas M Soukoulis. *Wave propagation: from electrons to photonic crystals and left-handed materials*. Princeton University Press, 2008.
- [29] L Martin-Moreno, FJ Garcia-Vidal, HJ Lezec, KM Pellerin, T Thio, JB Pendry, and TW Ebbesen. Theory of extraordinary optical transmission through subwavelength hole arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 86(6):1114, 2001.
- [30] MA Ordal, LL Long, RJ Bell, SE Bell, RR Bell, RW Alexander, and CA Ward. Optical properties of the metals al, co, cu, au, fe, pb, ni, pd, pt, ag, ti, and w in the infrared and far infrared. *Appl. Opt.*, 22(7):1099–1119, 1983.
- [31] Ardavan F. Oskooi, David Roundy, Mihai Ibanescu, Peter Bermel, J. D. Joannopoulos, and Steven G. Johnson. MEEP: A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the FDTD method. *Comput. Phys. Commun.*, 181:687–702, 2010.
- [32] Ardavan F Oskooi, Lei Zhang, Yehuda Avniel, and Steven G Johnson. The failure of perfectly matched layers, and towards their redemption by adiabatic absorbers. *Opt. Express*, 16(15):11376–11392, 2008.
- [33] A. Pastuszczak, M. Stolarek, T.J. Antosiewicz, and R. Kotyński. Multilayer metamaterial absorbers inspired by perfectly matched layers. *IEEE J. Quant. Electron.*, 47(1):89–97, 2015.
- [34] Anna Pastuszczak, Marcin Stolarek, and R Kotynski. Slanted layered superlenses for subwavelength light manipulation. In *ICTON*, pages 1–4. IEEE, 2011.
- [35] J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3966–3969, 2000.
- [36] JB Pendry, A Aubry, DR Smith, and SA Maier. Transformation optics and subwavelength control of light. *Science*, 337(6094):549–552, 2012.
- [37] Jan Petykiewicz. *Podstawy fizyczne optyki scalonej*. PWN, 1989.

- [38] S Anantha Ramakrishna, JB Pendry, MCK Wiltshire, and WJ Stewart. Imaging the near field. *J. Mod. Opt.*, 50(9):1419–1430, 2003.
- [39] Carey M Rappaport. Perfectly matched absorbing boundary conditions based on anisotropic lossy mapping of space. *IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett.*, 5(3):90–92, 1995.
- [40] Jean-François Roux, Fabien Aquistapace, Frédéric Garet, Lionel Duvillaret, and Jean-Louis Coutaz. Grating-assisted coupling of terahertz waves into a dielectric waveguide studied by terahertz time-domain spectroscopy. *Appl. Opt.*, 41(30):6507–6513, 2002.
- [41] Zachary S Sacks, David M Kingsland, Robert Lee, and Jin-Fa Lee. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 43(12):1460–1463, 1995.
- [42] M. Scalora, M. J. Bloemer, A. S. Pethel, J. P. Dowling, C. M. Bowden, and A. S. Manka. Transparent, metallo-dielectric, one-dimensional, photonic band-gap structures. *J. Appl. Phys.*, 83(5):2377–2383, 1998.
- [43] John B Schneider. Understanding the finite-difference time-domain method. *School of electrical engineering and computer science Washington State University.–URL:*  2010.
- [44] David Schurig, JJ Mock, BJ Justice, Steven A Cummer, JB Pendry, AF Starr, and DR Smith. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314(5801):977–980, 2006.
- [45] Jung-Tsung Shen, Peter B Catrysse, and Shanhui Fan. Mechanism for designing metallic metamaterials with a high index of refraction. *Phys. Rev. Lett.*, 94(19):197401, 2005.
- [46] Ari H Sihvola. *Electromagnetic mixing formulas and applications*. Number 47. Iet, 1999.

- [47] T Skauli, PS Kuo, KL Vodopyanov, TJ Pinguet, O Levi, LA Eyres, JS Harris, MM Fejer, B Gerard, L Becouarn, et al. Improved dispersion relations for gaas and applications to nonlinear optics. *J. Appl. Phys.*, 94(10):6447–6455, 2003.
- [48] D. R. Smith, Willie J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4184–4187, 2000.
- [49] T Stefaniuk, Grzegorz Nowak, and R Kotynski. Effect of surface roughness on subwavelength imaging with layered metamaterial optical elements. In *SPIE Optics+ Optoelectronics*, pages 807010–807010. International Society for Optics and Photonics, 2011.
- [50] M. Stolarek, A. Pastuszczak, and R. Kotyński. Numerical analysis of transmission through a sub-wavelength metallic aperture or grating at visible and terahertz wavelengths. *ICTON*, 2011. cited By 0.
- [51] M. Stolarek, A. Pastuszczak, J. Pniewski, and R. Kotyński. Sub-wavelength imaging using silver-dielectric metamaterial layered prism. *Proc. SPIE*, 7746:774613–774613–8, 2010.
- [52] Marcin Stolarek, Piotr Wróbel, Tomasz Stefaniuk, Mateusz Wlazło, Anna Pastuszczak, and Rafał Kotyński. Spatial filtering with rough metal-dielectric layered metamaterials. *Photonics Letters of Poland*, 5(2):60–62, 2013.
- [53] Marcin Stolarek, Dmitriy Yavorskiy, R Kotynski, CJ Zapata Rodriguez, J Łusakowski, and Tomasz Szoplik. Broadband asymmetric transmission of thz radiation through double metallic gratings. In *ICTON*, pages 1–4. IEEE, 2013.
- [54] Marcin Stolarek, Dmitryj Yavorskiy, Rafał Kotyński, Carlos Zapata-Rodríguez, J. Łusakowski, and Tomasz Szoplik. Asymmetric transmission of terahertz radiation through a double grating. *Opt. Lett.*, 38(6):839–841, 2013.

- [55] J. Szczytko, M. Stolarek, B. Pietka, J. Łusakowski, A. Wawro, A. Barańska, E. Papis, R. Adomavicius, A. Krotkus, N. Pałka, and P. Zagrajek. Terahertz properties of metallic layers and grids. *MIKON*, 1:271–275, 2012. cited By 0.
- [56] M. C. Teich and B. E. A. Saleh. Fundamentals of photonics. *Canada, Wiley Interscience*, page 246, 2007.
- [57] Fernando L Teixeira and Weng C Chew. General closed-form pml constitutive tensors to match arbitrary bianisotropic and dispersive linear media. *IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett.*, 8(6):223–225, 1998.
- [58] Jason Valentine, Shuang Zhang, Thomas Zentgraf, Erick Ulin-Avila, Dencho A Genov, Guy Bartal, and Xiang Zhang. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index. *Nature*, 455(7211):376–379, 2008.
- [59] Victor Georgievich Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Phys. Usp.*, 10(4):509–514, 1968.
- [60] AJ Ward and JB Pendry. Refraction and geometry in maxwell’s equations. *J. Mod. Opt.*, 43(4):773–793, 1996.
- [61] Ji Xu, Chen Cheng, Ming Kang, Jing Chen, Zhu Zheng, Ya-Xian Fan, and Hui-Tian Wang. Unidirectional optical transmission in dual-metal gratings in the absence of anisotropic and nonlinear materials. *Opt. Lett.*, 36(10):1905–1907, 2011.
- [62] Eli Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 58(20):2059, 1987.
- [63] D. Yavorskiy, M. Stolarek, J. Łusakowski, and R. Kotyński. Asymmetric transmission of radially polarized thz radiation through a double circular grating. *Opt. Express*, 22(25):30547–30552, 2014.
- [64] K. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Antennas Propag. Mag.*, 14:302–307, 1966.

- [65] Yijun Zhang, Benkang Chang, Zhi Yang, Jun Niu, Yajuan Xiong, Feng Shi, Hui Guo, and Yiping Zeng. Annealing study of carrier concentration in gradient-doped gaas/gaalas epilayers grown by molecular beam epitaxy. *Appl. Opt.*, 48(9):1715–1720, 2009.