



FÍSICA COMPUTACIONAL

TAREA 10

EJERCICIOS DE ELECTRODINÁMICA

Presentado por:
Cinthia Alejandra Olvera Bautista

Índice general

1	Introducción	2
1.1	Ecuaciones de Maxwell	2
1.2	Ley de Biot-Savart	7
1.3	Potenciales Electromagnéticos	10
1.4	Campo y Potencial Eléctrico	12
2	Metodología	16
2.1	Carga en movimiento	16
2.2	Primera ley de Maxwell	18
3	Conclusión	19
4	Anexos	20
4.1	PROBLEMA1.py	20
4.2	PROBLEMA2.py	25

Introducción

1.1 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell describen los fundamentos del electromagnetismo, unificando electricidad, magnetismo y óptica. A continuación se presentan en sus formas diferencial e integral, junto con su interpretación física.

1.1.1 Ley de Gauss para el campo eléctrico

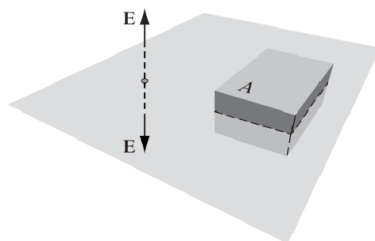
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Forma diferencial}) \quad (1.1)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (\text{Forma integral}) \quad (1.2)$$

Lo que nos dicen estas ecuaciones es que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada. Relaciona las cargas eléctricas con el campo eléctrico que generan.

Ejemplo: *Plano infinito*

Un plano infinito tiene una densidad de carga superficial uniforme σ . Encuentre su campo eléctrico.



Solución Dibuje una "caja pastilla gaussiana" que se extienda distancias iguales arriba y abajo del plano (Fig. 2.22). Aplique la ley de Gauss a esta superficie:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}}.$$

En este caso, $Q_{\text{enc}} = \sigma A$, donde A es el área de la tapa de la caja pastilla. Por simetría, \mathbf{E} apunta alejándose del plano (hacia arriba para puntos superiores, hacia abajo para puntos inferiores). Así, las superficies superior e inferior contribuyen:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 2A|\mathbf{E}|,$$

mientras que los lados no contribuyen. Por lo tanto:

$$2A|\mathbf{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A,$$

o bien:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}. \quad (2,17)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario que apunta alejándose de la superficie. En el Problema 2.6, obtuviste este mismo resultado mediante un método mucho más laborioso.

Resulta sorprendente, al principio, que el campo de un plano infinito sea *independiente de la distancia a la que te encuentres*. ¿Qué pasa con la dependencia $1/r^2$ de la ley de Coulomb? El punto es que a medida que te alejas más y más del plano, más y más carga entra en tu "campo de visión" (un cono que se extiende desde tu ojo), y esto compensa la influencia decreciente de cualquier parte particular. El campo eléctrico de una esfera decae como $1/r^2$; el de una línea infinita decae como $1/r$; y el de un plano infinito no decae en absoluto (no puedes escapar de un plano infinito).

1.1.2 Ley de Gauss para el campo magnético

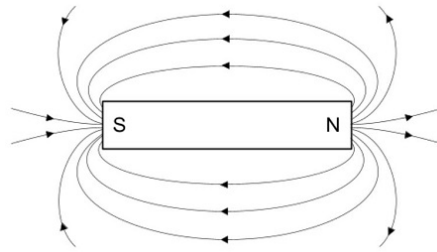
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Forma diferencial}) \quad (1.3)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (\text{Forma integral}) \quad (1.4)$$

De esta ley se puede mostrar que no existen monopolos magnéticos (cargas magnéticas aisladas). Las líneas de campo magnético siempre forman bucles cerrados.

Ejemplo: Barra magnética

Para un imán de barra, el flujo magnético entrante en un polo es igual al saliente por el otro polo, dando flujo neto cero.



1.1.3 Ley de Faraday-Lenz

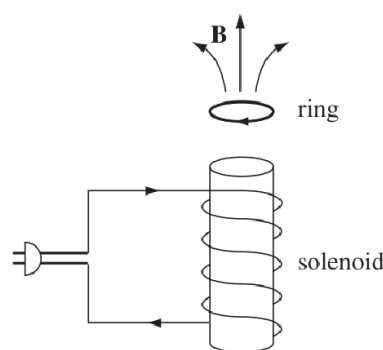
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Forma diferencial}) \quad (1.5)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{Forma integral}) \quad (1.6)$$

Un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctrico rotacional (ley de inducción de Faraday). El signo negativo refleja la ley de Lenz: la corriente inducida se opone al cambio de flujo.

Ejemplo: Demostración del “anillo saltarín”

Si enrollas una bobina solenoidal alrededor de un núcleo de hierro (el hierro está ahí para reforzar el campo magnético), colocas un anillo metálico encima y lo conectas a la corriente, el anillo saltará varios pies en el aire. ¿Por qué?



Solución: Antes de encender la corriente, el flujo a través del anillo era *cero*. Después, apareció un flujo (hacia arriba, en el diagrama), y la fem generada en el anillo dio lugar a una corriente (en el anillo) que, de acuerdo con la ley de Lenz, fue en una dirección tal que su campo tendía a cancelar este nuevo flujo. Esto significa que la corriente en el anillo es *opuesta* a la corriente en el solenoide. Y las corrientes opuestas se repelen, por lo que el anillo sale disparado.

1.1.4 Ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Forma diferencial}) \quad (1.7)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{Forma integral}) \quad (1.8)$$

Las corrientes eléctricas y los campos eléctricos variables generan campos magnéticos rotacionales. El término adicional de Maxwell ($\partial \mathbf{E} / \partial t$) explica la propagación de ondas electromagnéticas.

Ejemplo: *Corriente recta infinitamente larga*

Supongamos que la corriente I se encuentra distribuida uniformemente sobre la sección circular de radio a de un cilindro infinitamente largo, como se muestra en la figura 15-7. Al revisar la dependencia general de la dirección del campo \mathbf{B} producido por una corriente como la que se muestra en la figura 14-2, y considerando la simetría de este problema, se puede concluir que:

- \mathbf{B} está sobre el plano perpendicular a la dirección de I
- Es tangente a todos los puntos del círculo de radio ρ (mostrado con línea punteada)
- Su magnitud solo puede depender de ρ , siendo independiente tanto de x como de ϕ

En otras palabras, \mathbf{B} tiene la forma general $\mathbf{B} = B_\phi(\rho)\hat{\phi}$. Para cualquier valor de ρ , tomamos como trayectoria de integración una circunferencia de radio ρ recorrida en el mismo sentido asumido para \mathbf{B} . Así:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} B_\phi \hat{\phi} \cdot \rho d\phi \hat{\phi} = 2\pi\rho B_\phi = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (15-17)$$

donde tanto ρ como $B_\phi(\rho)$ son constantes sobre la circunferencia. Por lo tanto:

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I_{\text{enc}}}{2\pi\rho} \quad (15-18)$$

Cuando $\rho \geq a$, la trayectoria C encierra la corriente total I , por lo que $I_{\text{enc}} = I$ y la ecuación (15-18) queda:

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad (15-19)$$

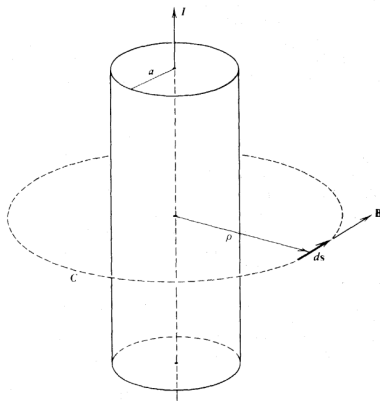


Figura 1.1: Porción de una corriente recta muy larga.

1.1.5 Ecuación de continuidad

Como corolario de las ecuaciones de Maxwell se obtiene la conservación de la carga:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{Forma diferencial}) \quad (1.9)$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (\text{Forma integral}) \quad (1.10)$$

La carga eléctrica no puede crearse ni destruirse, sólo moverse (ley de conservación de la carga).

1.2 Ley de Biot-Savart

La ley de Biot-Savart describe el campo magnético generado por una corriente eléctrica estacionaria:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} \quad (\text{Forma integral}) \quad (1.11)$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{Forma diferencial}) \quad (1.12)$$

donde:

- \mathbf{B} es el campo magnético [T]
- μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío ($4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$)
- I es la corriente eléctrica [A]
- $d\mathbf{l}$ es el elemento infinitesimal de longitud del conductor [m]
- $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario desde el elemento de corriente al punto de observación
- r es la distancia desde el elemento de corriente al punto de observación [m]

Esta ley establece que un elemento de corriente $I d\mathbf{l}$ produce un campo magnético $d\mathbf{B}$ en el espacio. La dirección del campo sigue la regla de la mano derecha (producto cruz) y la magnitud decae con el cuadrado de la distancia ($1/r^2$). Es análoga a la ley de Coulomb para campos eléctricos, pero para magnetostática

1.2.1 Ejemplos Aplicados

Bobina de Encendido Automotriz

En los sistemas de ignición de vehículos, cuando la corriente fluye por la bobina primaria (ejemplo con N vueltas y radio a):

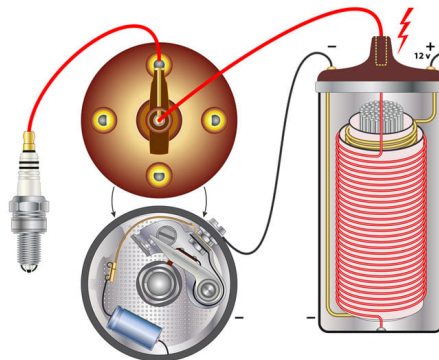


Figura 1.2: Bobina de encendido de un automovil. Imagen recuperada de <https://club.autodoc.es/magazin/bobina-de-encendido-funcionamiento-y-problemas>

$$B_{\text{eje}} = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.13)$$

Este campo magnético variable induce en la bobina secundaria el alto voltaje necesario para las bujías (15-30 kV), demostrando la relación entre corriente y campo magnético descrita por Biot-Savart.

1.2.2 Comparación con la Ley de Ampère

Mientras la ley de Ampère $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ es útil para geometrías simétricas, Biot-Savart permite calcular \mathbf{B} para distribuciones arbitrarias de corriente, siendo fundamental en:

- Diseño de motores eléctricos
- Sistemas de transmisión de energía
- Instrumentación médica (MRI)
- Sensores magnéticos

1.2.3 Implementación Numérica

Veremos específicamente la implementación numérica para un anillo. Para un anillo de corriente con N segmentos discretos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} \quad (1.14)$$

Ahora veremos los pasos:

1. Discretización del Anillo

Se divide un anillo de radio R en N_{segments} segmentos:

$$\theta = \text{linspace}(0, 2\pi, N_{\text{segments}}) \quad (1.15)$$

$$d\mathbf{l}_k = R d\theta \begin{bmatrix} -\sin \theta_k \\ \cos \theta_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d\theta = \frac{2\pi}{N_{\text{segments}}} \quad (1.16)$$

2. Cálculo del Campo Magnético

Para cada punto (x_i, y_j, z_k) en la malla:

$$\mathbf{B}(x_i, y_j, z_k) = \sum_{n=1}^N d\mathbf{B}_n \quad (1.17)$$

donde cada contribución $d\mathbf{B}_n$ se calcula como:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_i - R \cos \theta_n \\ y_j - R \sin \theta_n \\ z_k \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$d\mathbf{B}_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_n \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} \quad (1.19)$$

3. Componentes del Campo

Se acumulan las componentes cartesianas:

$$B_x = \sum (d\mathbf{B}_n)_x, \quad B_y = \sum (d\mathbf{B}_n)_y, \quad B_z = \sum (d\mathbf{B}_n)_z \quad (1.20)$$

Estas ecuaciones se programan y se pueden visualizar en graficas o simulaciones.

1.3 Potenciales Electromagnéticos

1.3.1 Potencial Eléctrico

El potencial eléctrico escalar (ϕ) surge de la ley de Faraday para campos electrostáticos donde $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, permitiendo expresar:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (1.21)$$

Para una distribución de carga $\rho(\mathbf{r}')$, se calcula como:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (1.22)$$

Representa el trabajo por unidad de carga necesario para mover una carga de prueba desde un punto de referencia hasta \mathbf{r} :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{W}{q} \quad [\text{J/C o V}] \quad (1.23)$$

1.3.2 Potencial Vectorial Magnético

Surge de la ley de Gauss magnética $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, permitiendo expresar:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.24)$$

Para una densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (1.25)$$

Es importante recalcar los puntos

- No tiene interpretación energética directa como ϕ
- Su circulación está relacionada con el flujo magnético:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_B \quad (1.26)$$

- Es crucial en superconductividad (cuantización del flujo)

1.3.3 Relación entre Potenciales

En dinámica, ambos potenciales se acoplan mediante el *gauge de Lorenz*. En electrodinámica, los potenciales ϕ y \mathbf{A} están acoplados mediante la **condición de gauge de Lorenz**:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{Condición de Lorenz}) \quad (1.27)$$

Esta condición:

- **Preserva la causalidad:** Asegura que los potenciales obedecen ecuaciones de onda relativistas:

$$\Box \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \Box \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

donde $\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ es el d'Alembertiano ($c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$).

- **Invariante relativista:** Mantiene su forma bajo transformaciones de Lorentz, siendo consistente con la teoría especial de relatividad.
- **Fija el gauge:** Elimina ambigüedades matemáticas en la definición de los potenciales (libertad de gauge).

Aplicaciones clave:

1. **Radiación electromagnética:** Al resolver para campos lejanos de antenas, donde:

$$\phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) d^3 r'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) d^3 r'$$

2. **Electrodinámica cuántica:** En la cuantización del campo electromagnético, donde los fotones aparecen como cuantos de \mathbf{A} .
3. **Simulaciones computacionales:** Simplifica ecuaciones en métodos FDTD (Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo).

Ejemplo: *Potenciales para una Carga en Movimiento*

Para una carga q moviéndose con velocidad constante \mathbf{v} :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2)}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2)}}$$

Puede comprobarse que estos potenciales satisfacen la condición de Lorenz.

1.4 Campo y Potencial Eléctrico

Sabemos que las ecuaciones principales de los campos y potenciales eléctricos en la electrodinámica clásica están dados por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}v, \quad \vec{\nabla}v = \frac{\partial v}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\hat{k}, \quad \nabla^2 v = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{Ecuación de Poisson.}$$

Para el caso particular donde $\rho = 0$ la ecuación de Poisson cambia a la ecuación de Laplace, por lo que

$$\nabla^2 v = 0$$

En este caso, vamos a desarrollar el método numérico que nos permitirá implementar un código para poder resolver problemas, de modo que el potencial que se analizará será de 2 dimensiones, entonces la ecuación de Laplace queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Por el método de diferencias finitas, vemos que la discretización de esta ecuación queda de la siguiente manera:

$$\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Si hacemos una malla uniforme, eso significa que $\Delta x = \Delta y$, de este modo despejando para $v_{i,j}$:

$$v_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1}}{4}$$

Cabe destacar que lo que estamos modelando es un cuadrado con diferentes potenciales puestos en cada lado del cuadrado, de modo que, esta última ecuación nos permitirá encontrar los valores del potencial en este cuadrado. Ahora, para poder encontrar el campo, podemos hacer lo siguiente:

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow E_x[i, j] = -\frac{V[i+1, j] - v[i-1, j]}{2}$$

$$E_y = -\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow E_y[i, j] = -\frac{V[i, j+1] - v[i, j-1]}{2}$$

1.4.1 Potenciales Retardados

Los potenciales retardados son soluciones de las ecuaciones de onda para los potenciales electromagnéticos que toman en cuenta el tiempo finito de propagación de los campos. Surgen al resolver las ecuaciones inhomogéneas:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (1.28)$$

donde $\nabla^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ es el operador d'Alembertiano y $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ es la velocidad de la luz.

Las soluciones son integrales sobre la distribución de cargas y corrientes, evaluadas en el **tiempo retardado** $t_{\text{ret}} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (1.29)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (1.30)$$

El factor t_{ret} refleja que los cambios en ρ y \mathbf{J} se propagan a velocidad c . Los denominadores $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ indican la atenuación del potencial con la distancia. Estos potenciales son análogos a los potenciales estáticos, pero con información causal incorporada. Y los campos electromagnéticos correspondientes a estos potenciales se obtienen mediante:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.32)$$

Caso Particular: Carga Puntual en Movimiento

Para una carga puntual q con trayectoria $\mathbf{r}_q(t)$, las densidades son:

$$\rho(\mathbf{r}', t') = q\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q(t')) \quad \text{y} \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') = q\mathbf{v}(t')\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q(t')) \quad (1.33)$$

Al evaluar las integrales (1.29) y (1.30):

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_{\text{ret}})|} \right|_{t_{\text{ret}}} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left. \frac{q\mathbf{v}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_{\text{ret}})|} \right|_{t_{\text{ret}}} \quad (1.35)$$

Nota importante: Para una carga en movimiento uniforme, los potenciales retardados reproducen correctamente los campos de Liénard-Wiechert.

1.4.2 Potenciales de Liénard-Wiechert

Los potenciales de Liénard-Wiechert describen los campos electromagnéticos generados por una carga puntual en movimiento arbitrario, considerando el retardo en la propagación de los campos.

Para una carga q con trayectoria $\mathbf{r}_q(t)$, los potenciales son:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})R} \right]_{\text{ret}} \quad (1.36)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{q\mathbf{v}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})R} \right]_{\text{ret}} \quad (1.37)$$

donde:

- $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_{\text{ret}})|$ es la distancia retardada
- $\hat{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_{\text{ret}})}{R}$ es el vector unitario
- $\vec{\beta} = \frac{\mathbf{v}(t_{\text{ret}})}{c}$ es la velocidad normalizada
- $t_{\text{ret}} = t - R/c$ es el tiempo retardado

Los campos se obtienen de los potenciales mediante:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.38)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.39)$$

El cálculo detallado del campo eléctrico conduce a:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{n} - \vec{\beta})}{(R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}))^3} + \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{cR(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{\text{ret}} \quad (1.40)$$

- **Primer término:** Campo de velocidad (depende de $1/R^2$)
- **Segundo término:** Campo de aceleración (radiación, depende de $1/R$)

1.4.3 Deducción de los Campos

Gradiente del Potencial Escalar se puede calcular partiendo de (1.36):

$$\nabla\Phi = kqc\nabla \left(\frac{1}{Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}} \right) = -\frac{kqc}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})^2} \nabla(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \quad (1.41)$$

Calculando los términos individuales descomponemos $\nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})$ usando identidades vectoriales:

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{R}) \\ &\quad + (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{R} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Cada término se evalúa como:

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) \quad (1.43)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{R} = \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) \quad (1.44)$$

$$\nabla \times \mathbf{R} = \mathbf{v} \times \nabla t_r \quad (1.45)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\mathbf{a} \times \nabla t_r \quad (1.46)$$

Combinando todos los términos:

$$\nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} - v^2) \nabla t_r \quad (1.47)$$

El gradiente del tiempo retardado es:

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c} \nabla R = -\frac{\hat{n}}{c(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (1.48)$$

Sustituyendo todos los términos:

$$\nabla\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}))^2} \left[\hat{n}(1 - \beta^2) + \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{c} \right] \quad (1.49)$$

Nota sobre el Campo Magnético El campo **B** se obtiene similarmente calculando $\nabla \times \mathbf{A}$ y muestra la misma estructura de términos de velocidad y aceleración.

La derivación completa requiere considerar cuidadosamente todas las derivadas temporales y espaciales, especialmente la dependencia retardada. Los términos cruzados entre $\nabla\Phi$ y $\partial_t \mathbf{A}$ dan origen a la estructura característica del campo de radiación.

Metodología

2.1 Carga en movimiento

A la parte de radiación con las siguientes características: $a = 0,05m/s^2$, $t_0 = 5s$. El tamaño de la malla, valor de la carga y demás, se dejan a consideración de lector.

El programa en python se puede encontrar en el anexo PROBLEMA1.py El programa hace diferentes capturas s diferentes tiempos

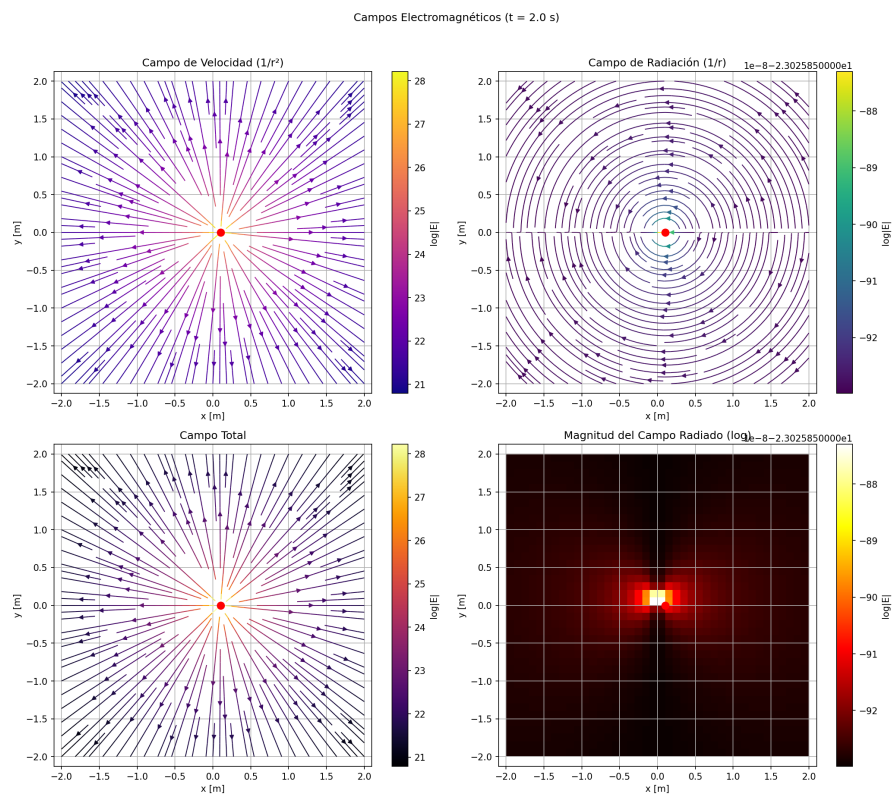


Figura 2.1: Gráficos a tiempo 2

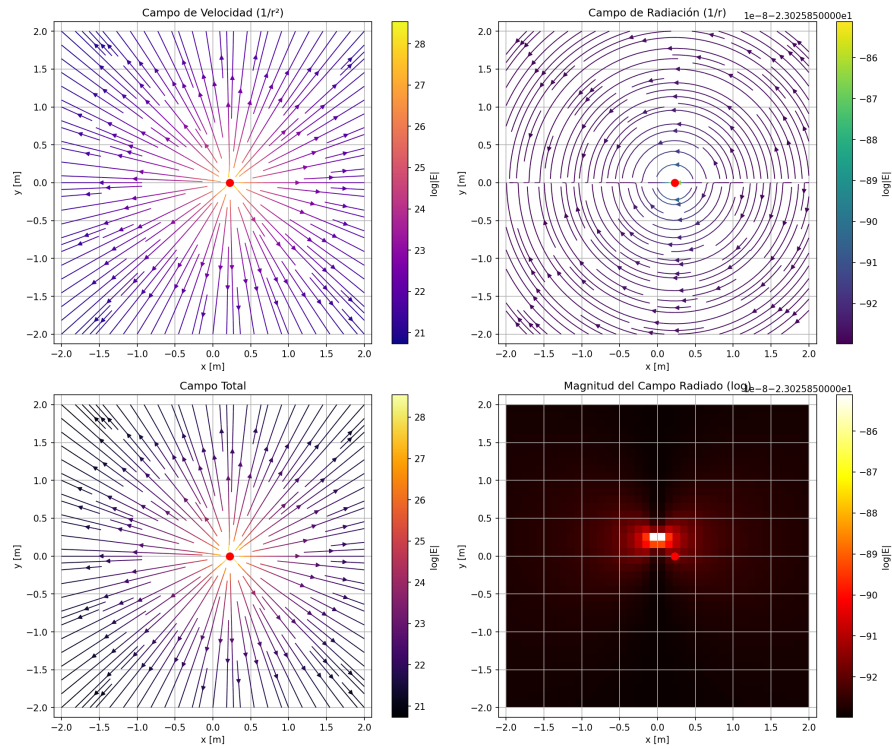
Campos Electromagnéticos ($t = 3.0$ s)

Figura 2.2: Gráficos a tiempo 3

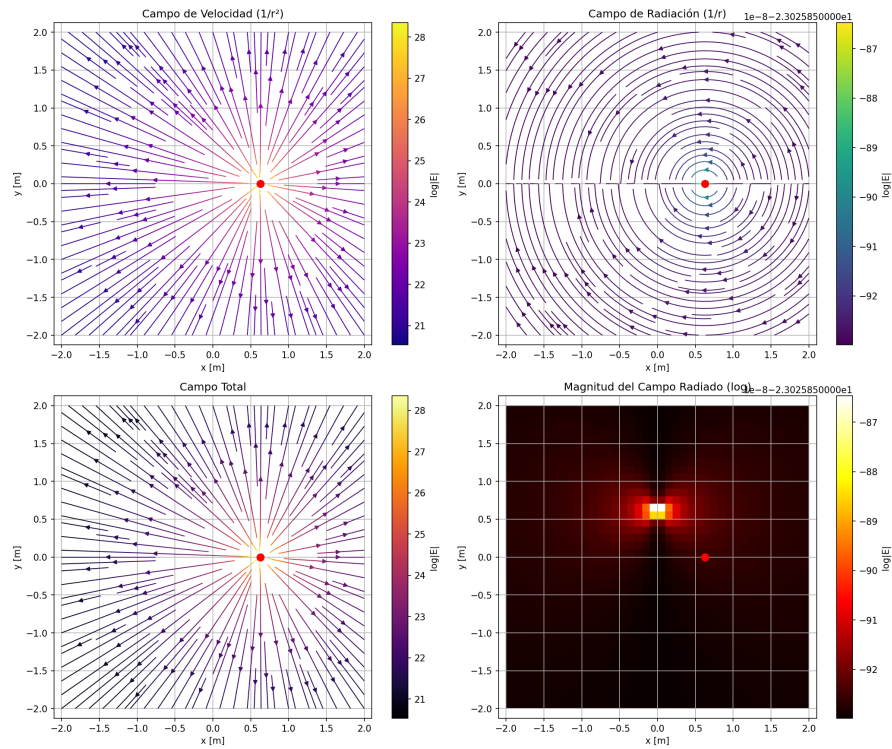
Campos Electromagnéticos ($t = 5.0$ s)

Figura 2.3: Gráficos a tiempo 5

2.2 Primera ley de Maxwell

Verificar la primera ley de Maxwell de forma numérica

El programa en python se puede encontrar en el anexo PROBLEMA2.py

Sabemos que **"El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga neta en su interior"**.

Entonces hacemos que se calcule numericamente y lo compare analíticamente.

```
Flujo calculado numericamente: 1.11e+11 N·m²/C  
Flujo esperado analíticamente: 1.13e+11 N·m²/C  
Error relativo: 2.03%
```

Figura 2.4: Resultado y comparación numéricamente y analíticamente

Campo eléctrico en una superficie esférica

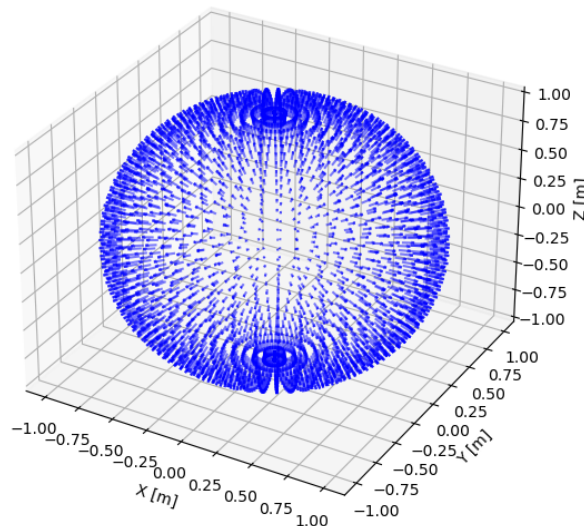


Figura 2.5: Gráfico del campo

Conclusión

En este trabajo tuve la oportunidad de repasar y profundizar en conceptos clave de la electrodinámica clásica, a través del análisis del campo eléctrico generado por una carga en movimiento. Esto incluyó tanto el campo de Coulomb —conocido por su tratamiento en cursos básicos— como los efectos de radiación que emergen cuando la carga acelera. El estudio se apoyó en las ecuaciones de Maxwell, particularmente en la verificación numérica de la primera de ellas, cuyos resultados fueron comparados con la solución analítica obteniendo una concordancia notable. Este contraste no solo sirvió para validar el enfoque computacional, sino también para fortalecer mi comprensión teórica.

Uno de los aspectos más desafiantes y enriquecedores fue la visualización de los campos mediante Python. Lograr representaciones gráficas claras y didácticas implicó experimentar con escalas, vectores y paletas de colores adecuadas, lo que me permitió observar de forma más tangible y comprensible los fenómenos que estábamos modelando. Este enfoque visual complementó de manera efectiva el trabajo analítico y facilitó la interpretación física de los resultados.

Asimismo, considero que el trabajo se pudo haber enriquecido aún más si se hubieran explorado otros temas fundamentales de la electrodinámica, como el comportamiento de materiales dieléctricos, la polarización o problemas relacionados con la carga imagen. Estos conceptos son una extensión natural y útil para entender fenómenos más complejos, y hubieran aportado una visión más amplia sobre la interacción de campos y materiales. En ese sentido, este proyecto representa un excelente complemento al curso de electrodinámica clásica, ya que permite no solo aplicar lo aprendido, sino también visualizarlo y experimentarlo desde un enfoque computacional, acercándonos más a cómo ocurren realmente estos fenómenos en la naturaleza. **Referencias**

- Griffiths, D. J. (2017). Introduction to electrodynamics (4th ed.). Pearson.
- Wangsness, R. K. (1986). Electromagnetic fields (2nd ed.). Wiley.

Anexos

Los códigos se encuentran en el link <https://github.com/cinthia-bao/Fisica-Computacional-.git> en la carpeta **TAREA 10**.

4.1 PROBLEMA1.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import root_scalar
from matplotlib.colors import LogNorm
import time

class ChargedParticle:
    """Clase para representar una partícula cargada acelerada"""

    def __init__(self, q=1.0, a=0.05, v0=0.0):
        self.q = q # Carga en Coulombs
        self.a = a # Aceleración en m/s
        self.v0 = v0 # Velocidad inicial
        self.epsilon_0 = 8.854e-12 # Permitividad del vacío
        self.c = 3e8 # Velocidad de la luz

    def position(self, t):
        """Posición de la partícula en el tiempo t"""
        return np.array([self.v0*t + 0.5*self.a*t**2, 0.0, 0.0])

    def velocity(self, t):
        """Velocidad normalizada ( = v/c)"""
        return np.array([(self.v0 + self.a*t)/self.c, 0.0, 0.0])
```

```
def acceleration(self, t):
    """Aceleracin normalizada ( = a/c)"""
    return np.array([self.a/self.c, 0.0, 0.0])

def cross_product(a, b):
    """Producto cruz optimizado para arrays 3D"""
    return np.array([a[1]*b[2]-a[2]*b[1], a[2]*b[0]-a[0]*b[2], a[0]*b[1]-a
        [1]*b[0]])

def compute_retarded_time(particle, r_obs, t_obs, max_iter=50, tol=1e-6):
    """Calcula el tiempo retardado iterativamente"""
    def equation(t_ret):
        return t_obs - t_ret - np.linalg.norm(r_obs - particle.position(
            t_ret))/particle.c

    try:
        sol = root_scalar(equation, bracket=[0, t_obs], method='bisect',
            maxiter=max_iter, rtol=tol)
        return sol.root if sol.converged else None
    except:
        return None

def calculate_fields(particle, grid, t_obs):
    """Calcula campos elctricos para una malla de puntos"""
    X, Y = grid
    Ex_total = np.zeros_like(X)
    Ey_total = np.zeros_like(Y)
    Ex_rad = np.zeros_like(X)
    Ey_rad = np.zeros_like(Y)

    # Vectorizacin parcial del clculo
    for i in range(X.shape[0]):
        for j in range(X.shape[1]):
            r_obs = np.array([X[i,j], Y[i,j], 0])
            t_ret = compute_retarded_time(particle, r_obs, t_obs)

            if t_ret is None:
                continue

            R_vec = r_obs - particle.position(t_ret)
```

```

R = np.linalg.norm(R_vec)
n = R_vec/R
beta = particle.velocity(t_ret)
beta_dot = particle.acceleration(t_ret)
K = 1.0 - np.dot(n, beta)

# Campo de velocidad (Coulomb)
E_vel = (n - beta)*(1-np.linalg.norm(beta)**2)/(R**2 * K**3)

# Campo de radiacin
E_rad = np.cross(n, np.cross((n - beta), beta_dot))/(particle.c*
    R*K**3)

# Campos totales
E_total = particle.q/(4*np.pi*particle.epsilon_0) * (E_vel +
    E_rad)
Ex_total[i,j], Ey_total[i,j] = E_total[0], E_total[1]
Ex_rad[i,j], Ey_rad[i,j] = E_rad[0], E_rad[1]

return Ex_total, Ey_total, Ex_rad, Ey_rad

def plot_fields(grid, fields, t_obs, particle):
    """Visualizacin de los campos calculados"""
    X, Y = grid
    Ex, Ey, Ex_r, Ey_r = fields

    fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(14, 12))
    plt.suptitle(f'Campos Electromagnticos (t = {t_obs} s)', y=1.02)

    # Campo de velocidad
    strm = axes[0,0].streamplot(X, Y, Ex, Ey, color=np.log(np.hypot(Ex, Ey)
        +1e-10),
                                cmap='plasma', density=1.5, linewidth=1)
    axes[0,0].set_title('Campo de Velocidad (1/r)')
    fig.colorbar(strm.lines, ax=axes[0,0], label='log|E|')

    # Campo de radiacin
    strm = axes[0,1].streamplot(X, Y, Ex_r, Ey_r, color=np.log(np.hypot(
        Ex_r, Ey_r)+1e-10),
                                cmap='viridis', density=1.5, linewidth=1)

```

```

axes[0,1].set_title('Campo de Radiacin (1/r)')
fig.colorbar(strm.lines, ax=axes[0,1], label='log|E|')

# Campo total
strm = axes[1,0].streamplot(X, Y, Ex+Ex_r, Ey+Ey_r, color=np.log(np.
    hypot(Ex+Ex_r, Ey+Ey_r)+1e-10),
    cmap='inferno', density=1.5, linewidth=1)
axes[1,0].set_title('Campo Total')
fig.colorbar(strm.lines, ax=axes[1,0], label='log|E|')

# Magnitud del campo radiado
E_mag = np.hypot(Ex_r, Ey_r)
im = axes[1,1].imshow(np.log(E_mag.T+1e-10), extent=[X.min(), X.max(),
    Y.min(), Y.max()],
    origin='lower', cmap='hot', aspect='auto')
axes[1,1].set_title('Magnitud del Campo Radiado (log)')
fig.colorbar(im, ax=axes[1,1], label='log|E|')

# Posicin de la partcula
pos = particle.position(t_obs)
for ax in axes.flat:
    ax.plot(pos[0], pos[1], 'ro', markersize=8)
    ax.set_xlabel('x [m]')
    ax.set_ylabel('y [m]')
    ax.axis('equal')
    ax.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.savefig(f'campos_t_{t_obs:.1f}.png', dpi=150, bbox_inches='tight')
plt.close()

def main():
    """Funcin principal"""
    start_time = time.time()

    # Crear partcula y configuracin
    particle = ChargedParticle(q=1.0, a=0.05, v0=0.0)
    x_vals = np.linspace(-2, 2, 40)
    y_vals = np.linspace(-2, 2, 40)
    grid = np.meshgrid(x_vals, y_vals)

```



```
times = [2.0, 3.0, 5.0]

print("Calculando campos...")
for t_obs in times:
    print(f"Procesando t = {t_obs} s...")
    fields = calculate_fields(particle, grid, t_obs)
    plot_fields(grid, fields, t_obs, particle)

print(f"Tiempo total de ejecucin: {time.time()-start_time:.2f}
      segundos")
print("Resultados guardados como campos_t*.png")

if __name__ == "__main__":
    main()
```

4.2 PROBLEMA2.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Constantes
q = 1.0 # carga en Coulombs
epsilon_0 = 8.854e-12 # permitividad en el vaco
r_sphere = 1.0 # radio de la esfera en metros

# Funcin para calcular el campo elctrico (ley de Coulomb)
def electric_field_coulomb(r):
    R_mag = np.linalg.norm(r) # magnitud de R
    if R_mag == 0:
        return np.array([0.0, 0.0, 0.0]) # evitar divisin por cero
    return (q / (4 * np.pi * epsilon_0)) * (r / R_mag**3)

# Malla esférica
N_theta = 50 # divisiones en ngulo polar
N_phi = 50 # divisiones en ngulo azimutal
theta = np.linspace(0, np.pi, N_theta) # ngulos polares (0 a pi)
phi = np.linspace(0, 2 * np.pi, N_phi) # ngulos azimutales (0 a 2pi)
theta_grid, phi_grid = np.meshgrid(theta, phi)

# Coordenadas de la esfera
x = r_sphere * np.sin(theta_grid) * np.cos(phi_grid)
y = r_sphere * np.sin(theta_grid) * np.sin(phi_grid)
z = r_sphere * np.cos(theta_grid)

# Elemento de rea en coordenadas esféricas
dA = r_sphere**2 * np.sin(theta_grid) * (np.pi / N_theta) * (2 * np.pi / N_phi)

# Calcular flujo elctrico
flux = 0.0
for i in range(N_theta):
    for j in range(N_phi):
        r = np.array([x[i, j], y[i, j], z[i, j]]) # vector de posicin
        E = electric_field_coulomb(r) # campo elctrico
        n_hat = r / np.linalg.norm(r) # vector normal unitario
```

```
        flux += np.dot(E, n_hat) * dA[i, j]

# Comparar con el flujo esperado
flux_expected = q / epsilon_0

print(f"Flujo calculado numricamente: {flux:.2e} Nm/C")
print(f"Flujo esperado analiticamente: {flux_expected:.2e} Nm/C")
print(f"Error relativo: {abs(flux - flux_expected) / flux_expected:.2%}")

# Visualizacin de la esfera y el campo elctrico
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.quiver(
    x, y, z,
    x, y, z,
    length=0.1, normalize=True, color='blue', alpha=0.5
)
ax.set_xlabel('X [m]')
ax.set_ylabel('Y [m]')
ax.set_zlabel('Z [m]')
ax.set_title('Campo elctrico en una superficie esfrica')
plt.show()
```